

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVA
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY

UNITÁRNE MATICE A KONTRAKCIE METRICKÝCH PRIESTOROV
BAKALÁRSKA PRÁCA

MILOŠ BELLA

Bratislava 2011

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVA
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY

UNITÁRNE MATICE A KONTRAKCIE METRICKÝCH PRIESTOROV
BAKALÁRSKA PRÁCA

MILOŠ BELLA

Študijný program: ekonomická a finančná matematika

Študijný odbor: 9.1.9 aplikovaná matematika

Školiteľ: RNDr. Mária Trnovská, PhD.

Kód práce: aa15dc7c-d76e-4dc7-bf49-8a39ea075c20

Školiace pracovisko: Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky
Bratislava 2011



Univerzita Komenského v Bratislave
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

ZADANIE ZÁVEREČNEJ PRÁCE

Meno a priezvisko študenta: Miloš Bella
Študijný program: ekonomická a finančná matematika (Jednoodborové štúdium, bakalársky I. st., denná forma)
Študijný odbor: 9.1.9. aplikovaná matematika
Typ záverečnej práce: bakalárska
Jazyk záverečnej práce: slovenský

Názov : Unitárne matice a kontrakcie metrických priestorov

Cieľ : Teoretické spracovanie vlastností unitárnych (ortogonálnych) matíc a súvislosti s kontrakciami metrických priestorov.

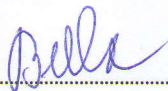
Literatúra : [1] F. Zhang - Matrix Theory

Vedúci : RNDr. Mária Trnovská, PhD.

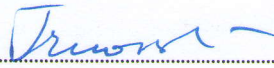
Dátum zadania: 05.11.2010

Dátum schválenia: 08.11.2010

.....
doc. RNDr. Margaréta Halická, CSc.
garant študijného programu

.....


študent

.....


vedúci práce

Dátum potvrdenia finálnej verzie práce, súhlas s jej odovzdaním (vrátane spôsobu sprístupnenia)

.....
 2.6.2011

vedúci práce

Čestne prehlasujem, že som túto bakalársku prácu vypracoval samostatne s použitím citovaných zdrojov.

Miloš Bella

Podakovanie

Ďakujem školiteľke bakalárskej práce RNDr. Márii Trnovskej, PhD., za cenné rady a pripomienky pri tvorbe tejto práce.

Abstrakt

Bella Miloš: Unitárne matice a kontrakcie metrických priestorov: [Bakalárska práca]. Univerzita Komenského v Bratislave. Fakulta matematiky, fyziky a informatiky; Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky; školiteľ: RNDr. Mária Trnovská, PhD. Bratislava 2011.

Bakalárska práca sa venuje spracovaniu teórie unitárnych matíc a ich prepojeniu na kontrakcie metrických priestorov. V prvých častiach sa venujeme teórii unitárnych a ortogonálnych matíc. V ďalších častiach prepájame kontrakcie metrických priestorov s unitárnymi maticami a uvádzame aj konkrétnu aplikáciu kontrakcií a unitárnych matíc. Cieľom mojej bakalárskej práce je teoretické spracovanie a prepojenie unitárnych matíc a kontrakcií metrických priestorov.

Kľúčové slová: Unitárne matica, kontrakcia.

Abstrakt

Bella Miloš: Unitary matrices and contractions of metric spaces: [Bachelor's work]. Comenius University in Bratislava. Faculty of mathematics, physics and informatics; Department of applied mathematics and statistics; supervisor: RNDr. Mária Trnovská, PhD. Bratislava 2011.

This bachelor's work is devoted to the theory of unitary matrices and its connections to contractions of metric spaces. The first part of this work is devoted to the theory of unitary and orthogonal matrices. In the next parts of this work we make a connection between unitary matrices and contractions and allude the application of contractions and unitary matrices. The aim of this bachelor's work is to give a clear theory about unitary matrices nad contractions of metric spaces.

Key words: Unitary matrix, contraction.

Zoznam skratiek a značiek

- A^* je komplexne konjugovaná transponovaná matica k matici A .
- $\bar{A}$ je komplexne konjugovaná matica k matici A .
- A^T je transponovaná matica k matici A .
- A^{-1} je inverzná matica k matici A .
- $|A|$ je absolútna hodnota matice A .
- Ak $A = A^*$ tak A je hermitovská matica.
- $(u, v) = u^*v$ je skalárny súčin vektorov v C^n .
- $\|x\| = \sqrt{(\sum_{i=1}^n |x_i|^2)} = \sqrt{(x, x)}$ je norma vektora x .
- M_n je matica $n \times n$.
- $\lambda(A)$ je vlastná hodnota matice A .
- $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ je matica s vlastnými hodnotami na diagonále.
- $\sigma_{\max}(A)$ je najväčšia singulárna hodnota matice A .
- $\text{adj}(A)$ je adjugovaná matica k matici A .
- $A \geq 0$ je pozitívne semidefinitná matica.
- $A > 0$ je pozitívne definitná matica.
- $A^{\frac{1}{2}}$ je odmocnina z pozitívne semidefinitnej matice.

Obsah

1	Úvod	9
2	Unitárne matice	10
3	Ortogonálne matice	16
4	Kontrakcie metrických priestorov	20
5	Aplikácia kontrakcií	27
6	Kontrakcie a unitárne matice	31
7	Záver	35
8	Dodatok - pomocné tvrdenia	36
	Literatúra	39

1 Úvod

Táto práca sa venuje teoretickému spracovaniu témy unitárnych matíc a kontrakcií metrických priestorov. Prvá kapitola sa venuje teórii unitárnych matíc. Druhá kapitola sa venuje teórii ortogonálnych matíc, nakoľko ortogonálne matice sú v reálnom priestore obdobou unitárnych matíc v komplexnom priestore. Tretia kapitola sa venuje teórii kontrakcií a metrických priestorov. V štvrtej kapitole uvádzame konkrétnu aplikáciu kontrakcií a to vo fyzike, kde sa kontrakcie využívajú v radarovej interferometrii. Posledná kapitola je venovaná teoretickému prepojeniu unitárnych matíc a kontrakcií metrických priestorov.

Charakter práce je zväčša teoretický, ako hlavný zdroj bola použitá kniha *Matrix Theory* od F. Zhanga, z ktorej boli použité hlavne definície, vety a dôkazy. Práca je obohatená o rozličné tvrdenia a príklady a spomínanú aplikáciu.

2 Unitárne matice

V tejto kapitole sa venujeme unitárnym maticiam. Najprv uvádzame definíciu unitárnych matíc a niekoľko príkladov s unitárnymi maticami. Ďalej uvádzame základné vlastnosti unitárnych matíc. Nakoniec uvádzame dve vety o unitárnych maticiach. Prvá z nich hovorí o tom, kedy je matica s vlastnými hodnotami v absolútnej hodnote rovnými 1 unitárnou maticou a druhá veta hovorí o singulárnych hodnotách unitárnej blokovej matice. Ako vo väčšine práce je ako hlavný zdroj použitá kniha Matrix Theory od F. Zhanga.

Definícia 2.1. Unitárna matica je štvorcová matica, pre ktorú platí:

$$U^*U = UU^* = I. \quad (1)$$

Poznámka 2.1. Všimnime si, že $U^* = U^{-1}$, teda inverzná matica k unitárnej matici je jej komplexne transponovaná matica.

Komplexná (reálna) matica A sa nazýva komplexná (reálna) ortogonálna ak spĺňa

$$A^T A = A A^T = I.$$

Unitárne matice a komplexné ortogonálne matice nie sú vo všeobecnosti tie isté. Naopak reálne unitárne a reálne ortogonálne matice sú tie isté. Viac sa budeme ortogonálnym maticiam venovať v ďalšej kapitole.

Poznámka 2.2. Determinant pre unitárnu maticu je v absolútnej hodnote rovný 1. Pre unitárne matice platí:

$$U^*U = UU^* = I,$$

teda

$$\det(U^*U) = \det(UU^*) = \det(I).$$

Z vlastností determinantu vyplýva:

$$\det(U^*) = \det(\bar{U}^T) = \det(\bar{U}) = \overline{\det(U)}.$$

A preto:

$$1 = \det(U^*)\det(U) = \overline{\det(U)}\det(U) = |\det(U)|^2.$$

Teda determinant unitárnej matice môže byť ľubovoľné číslo na jednotkovej kružnici. Matematicky:

$$|\det(U)| = 1.$$

Príklad 2.1. Matica $U = \text{diag}(e^{i\theta_1}, \dots, e^{i\theta_n})$ je unitárna pre ľubovoľné $\theta_i \in \mathbb{R}$.

Keďže $(e^{i\theta_i})^* = e^{-i\theta_i}$ a pre každé θ_i platí $(e^{i\theta_i}) e^{-i\theta_i} = e^0 = 1$, tak U je unitárna.

Tvrdenie 2.1. *Nech je matica $A \in M_n$ hermitovská, teda platí $A = A^*$. Potom je matica $U = (A - iI)^{-1}(A + iI)$ unitárna.*

Dôkaz.

$$\begin{aligned} UU^* &= [(A - iI)^{-1}(A + iI)][(A - iI)^{-1}(A + iI)]^* = \\ &= [(A - iI)^{-1}(A + iI)][(A^* - iI)(A^* + iI)^{-1}] = \\ &= [(A - iI)^{-1}(A + iI)][(A - iI)(A + iI)^{-1}] = I. \end{aligned}$$

□

Poznámka 2.3. Súčin unitárnych matíc je unitárna matica. Majme unitárne matice U a V . Platí:

$$(UV)(UV)^* = UVV^*U^* = I.$$

Veta 2.1. *(Theorem 5.1, [1]) Vlastnosti unitárnych matíc Nech $U \in M_n$. Potom:*

1. $\|Ux\| = \|x\| \quad \forall x \in C^n$.
2. *Vlastné hodnoty pre unitárnu maticu splňajú*

$$|\lambda| = 1.$$

3. *Každá unitárna matica sa dá rozložiť na súčin pomocou unitárnej matice V , matice s vlastnými hodnotami na diagonále a hermitovsky transponovanej unitárnej matice V^* , teda*

$$U = V \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) V^*.$$

4. *Stĺpcové vektory unitárnej matice U tvoria ortonormálnu bázu C^n .*

Dôkaz.

1. $\|Ux\| = \sqrt{(Ux, Ux)} = \sqrt{(x, U^*Ux)} = \sqrt{(x, x)} = \|x\|$.
2. Nech je x vlastný vektor jednotkovej dĺžky matice U prislúchajúci vlastnej hodnote λ , čiže platí $Ux = \lambda x$ a b.u.n.v. nech $\|x\| = 1$. Potom využitím $\|Ux\| = \|x\|$ dostávame

$$|\lambda| = |\lambda| \|x\| = \|\lambda x\| = \|Ux\| = \|x\| = 1.$$

3. Ide o obdobu spektrálnej vety pre unitárne matice. ($\rightarrow$ pozri Dodatok)

4. Predpokladajme, že u_i je i -ty stĺpec U , pre $i = 1, \dots, n$. Potom je rovnosť $U^*U = I$ ekvivalentná

$$\begin{pmatrix} u_1^* \\ \vdots \\ u_n^* \end{pmatrix} (u_1 \quad \dots \quad u_n) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & & \dots \\ \vdots & & & \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Z toho vyplýva, že $(u_j, u_i) = 1$ ak $i=j$, ináč $(u_j, u_i) = 0$.

□

Tvrdenie 2.2. Pre unitárnu maticu A s reálnymi vlastnými hodnotami platí

$$A^2 = I \text{ a } A^* = A.$$

Dôkaz. Podľa Vety 2.1 platí

$$A = V\Lambda V^*, \Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n).$$

Pre A^* platí

$$A^* = (V\Lambda V^*)^* = V\Lambda^* V^* = V\Lambda V^* = A.$$

Keďže $A = A^*$, tak

$$I = AA^* = A^*A = A^2.$$

□

Poznámka 2.4. ([1]) Všimnime si, že pre unitárnu maticu U platí:

$$\text{adj}(U) = \det(U)U^{-1} = \det(U)U^*.$$

Zvoľme

$$U = \begin{pmatrix} u & \alpha \\ \beta & U_1 \end{pmatrix}, u \in \mathbb{C}.$$

Potom

$$\text{adj}(U) = \begin{pmatrix} \det(U_1) & * \\ * & * \end{pmatrix}.$$

Vidíme teda, že

$$\det(U_1) = \det(U)\bar{u}.$$

Každá unitárna matica má vlastné hodnoty v absolútnej hodnote rovné 1. Opačne to platiť nemusí. Ak má matica vlastné hodnoty v absolútnej hodnote rovné 1, nemusí byť unitárna. Ako jednoduchý príklad si zoberme maticu

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Jej vlastné hodnoty sú rovné 1. Ale

$$AA^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \neq I$$

a

$$A^*A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \neq I.$$

Nato, aby bola unitárna, musí byť splnená tvrdšia podmienka, o ktorej hovorí nasledujúca veta.

Veta 2.2. (Theorem 5.2, [1]) Nech $A \in M_n$ má všetky vlastné hodnoty rovné 1 v absolútnej hodnote. Potom A je unitárna matica, ak $\forall x \in C^n$ platí:

$$\|Ax\| \leq \|x\|.$$

Dôkaz. Túto vetu dokážeme dvomi spôsobmi.

Dôkaz 1. Pre každú spektrálnu normu, teda najväčšiu singulárnu hodnotu komplexnej matice platí

$$\sigma_{\max}(A) = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\| = \sup_{\|x\| \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}.$$

Spolu s nerovnosťou

$$\|Ax\| \leq \|x\|$$

dostávame, že $\sigma_{\max}(A) \leq 1$.

Rovnosť

$$1 = \det(I) = \det(A^*A) = \det(A^*)\det(A) = |\det(A)|^2$$

implikuje, že súčin vlastných hodnôt v absolútnej hodnote ($|\det(A)|^2$) je rovný súčinu singulárnych hodnôt ($\det(A^*A)$). Keďže A má vlastné hodnoty v absolútnej hodnote rovné 1, potom najmenšia singulárna hodnota A musí byť 1, čiže všetky singulárne hodnoty sú rovné 1. Preto, $A^*A = I$, teda A je unitárna. $\square$

Dôkaz 2. Nech $A = U^*DU$ je Schurov rozklad matice A , kde U je unitárna matica a D je horná trojuholníková matica:

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & t_{12} & \cdots & t_{1n} \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & t_{n-1,n} \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

pričom $|\lambda_i| = 1, i = 1, 2, \dots, n$ a t_{ij} sú komplexné čísla.

Vezmime $x = U^*e_n = U^*(0, 0, \dots, 0, 1)^T$. Potom

$$\|x\| = \|U^*e_n\| = \|e_n\| = 1.$$

Ďalej platí

$$\begin{aligned}\|Ax\| &= \sqrt{(Ax, Ax)} = \sqrt{(U^*DUU^*e_n, U^*DUU^*e_n)} = \sqrt{(U^*De_n, U^*De_n)} = \\ &= \sqrt{(De_n, De_n)} = \|De_n\|,\end{aligned}$$

čiže

$$\|Ax\| = \|De_n\| = (|t_{1n}|^2 + \dots + |t_{n-1,n}|^2 + |\lambda_n|^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Z podmienok $\|Ax\| \leq 1$ pre vektor x , $\|x\| = 1$, a $|\lambda_n| = 1$ dostávame, že každé $t_{in} = 0$ pre $i = 1, 2, \dots, n-1$.

Rovnako pre každé $i = 1, \dots, n$, $x_i = U^*e_i$ platí

$$\|Ax_i\| = \|De_i\| = (|t_{1i}|^2 + \dots + |t_{i-1,i}|^2 + |\lambda_i|^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Keďže pre všetky vlastné hodnoty platí $|\lambda_i| = 1$, tak spolu s podmienkou $\|Ax\| \leq 1$ pre vektor x , $\|x\| = 1$, dostávame, že $t_{ij} = 0$ pre $i, j = 1, 2, \dots, n-1$. Teda D je diagonálna matica. Preto platí

$$A^*A = U^*D^*UU^*DU = U^*D^*DU = U^*U = I,$$

čiže A je unitárna matica. □

Poznámka 2.5. Singulárne hodnoty unitárnej matice sú rovné 1, lebo $1 = \det(I) = \det(U^*U)$.

Veta 2.3. (Theorem 5.3, [1]) *Nech je U unitárna bloková matica:*

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix},$$

pričom A je matica $m \times m$ a D je $n \times n$. Ak $m = n$, tak matice A a D majú rovnaké singulárne hodnoty. Ak $m < n$ a ak singulárne hodnoty matice A sú $\sigma_1, \dots, \sigma_m$, potom singulárne hodnoty D sú $\sigma_1, \dots, \sigma_m, 1, \dots, 1$.

Dôkaz. U je unitárna matica. Preto pre U platí známa identita

$$U^*U = UU^* = I.$$

Rovnosti

$$UU^* = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^* & C^* \\ B^* & D^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AA^* + BB^* & AC^* + BD^* \\ CA^* + DB^* & CC^* + DD^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_m & 0 \\ 0 & I_n \end{pmatrix}$$

$$U^*U = \begin{pmatrix} A^* & C^* \\ B^* & D^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^*A + C^*C & A^*B + C^*D \\ B^*A + D^*C & B^*B + D^*D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_m & 0 \\ 0 & I_n \end{pmatrix}$$

implikujú, že

$$A^*A + C^*C = I_m$$

a

$$CC^* + DD^* = I_n,$$

čo je ekvivalentné s

$$A^*A = I_m - C^*C$$

a

$$DD^* = I_n - CC^*.$$

CC^* a C^*C majú rovnaké nenulové vlastné hodnoty. Rovnako $I_n - CC^*$ a $I_m - C^*C$ majú rovnaké vlastné hodnoty okrem pozícií $n - m$, ktoré sú rovné 1. Ekvivalentne AA^* a DD^* majú rovnaké vlastné hodnoty.

Preto, ak $m = n$, tak A a D majú rovnaké singulárne hodnoty. Ak $m < n$ a singulárne hodnoty A sú $\sigma_1, \dots, \sigma_m$, potom singulárne hodnoty D sú $\sigma_1, \dots, \sigma_m$, plus $(n - m)$ krát 1. $\square$

Dôsledok 2.1. ([1])

$$|\det A| = |\det D|$$

pre blokovú unitárnu maticu

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}.$$

Dôkaz. Ako sme už dokázali, súčin vlastných hodnôt v absolútnej hodnote je rovný súčinu singulárnych hodnôt. To pre blokovú unitárnu maticu

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

znamená, že súčin vlastných hodnôt podmatice A je rovný súčinu vlastných hodnôt podmatice D , čo znamená, že

$$|\det A| = |\det D|.$$

Inými slovami komplementárne diagonálne podmatice majú vždy rovnaký determinant v absolútnej hodnote. $\square$

3 Ortogonálne matice

V tejto časti sa budeme venovať reálnym ortogonálnym maticiam, pretože ortogonálne matice sú v reálnom priestore obdobou unitárnych matíc v komplexnom priestore. Uvedieme definíciu a niektoré základné vlastnosti ortogonálnych matíc. V závere sa budeme venovať 2×2 ortogonálnym maticiam a ich zaujímavými vlastnosťami. Ako hlavné zdroje v tejto kapitoly boli použité od knihy Linear Algebra and Its Applications od G. Stranga a od P. Zlatoša Lineárna Algebra a Geometria.

Definícia 3.1. Štvorcová matica Q je reálna ortogonálna, ak:

$$QQ^T = Q^TQ = I.$$

Q^T spĺňa podmienku pre inverznú maticu Q^{-1} . Preto $Q^{-1} = Q^T$, čiže pre ortogonálnu maticu jej inverzná je jej transponovaná.

Poznámka 3.1. Ak je matica Q reálna ortogonálna, $Q \in R_n$, tak je zároveň unitárna matica, pretože $Q^T = Q^*$.

Pre ortogonálne matice platia podobné vlastnosti ako pre unitárne matice.

Veta 3.1. ([6]) *Násobenie vektorov ortogonálnou maticou Q zachováva uhly a dĺžky.*

Dôkaz. Najprv dokážeme dĺžku:

$$\|Qx\| = \sqrt{(Qx, Qx)} = \sqrt{(x, Q^TQx)} = \sqrt{(x, x)} = \|x\|.$$

Všimnime si, že násobenie ortogonálnou maticou zachováva skalárny súčin:

$$(Qx, Qy) = (Qx)^T Qy = x^T Q^T Qy = x^T Iy = (x, y).$$

Preto pre uhly platí:

$$\cos(\alpha) = \frac{(Qx, Qy)}{\|Qx\| \|Qy\|} = \frac{(x, y)}{\|x\| \|y\|}.$$

□

Poznámka 3.2. Determinant ortogonálnej matice je ± 1 , lebo

$$1 = \det(I) = \det(QQ^T) = \det(Q)\det(Q^T) = \det(Q)^2$$

a teda $\det(Q) = \pm 1$.

Poznámka 3.3. Všetky vlastné hodnoty ortogonálnej matice sú rovné $|1|$, lebo platí

$$\begin{aligned} \|x\|^2 &= \|Qx\|^2 = \|\lambda x\|^2 = (\lambda x)^T(\lambda x) = \lambda x^T \lambda x = \lambda^2 x^T x = \lambda^2 \|x\|^2 \\ &\Rightarrow \lambda^2 = 1 \Rightarrow \lambda = |1|. \end{aligned}$$

Príklad 3.1. Mohlo by sa zdať, že vlastné hodnoty ortogonálnej matice budú reálne. Avšak to vo všeobecnosti neplatí. Majme ortogonálnu maticu

$$Q = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}.$$

Výpočtom sa môžeme presvedčiť, že pre jej vlastné hodnoty platí, že $\lambda_{1,2} = |\cos(\alpha) \pm i\sin(\alpha)| = 1$.

Poznámka 3.4. Ak je matica A ortogonálna a zároveň horná trojuholníková, tak je diagonálna.

Z rovnosti

$$AA^T = A^T A = I$$

vyplýva, že $A^T = A^{-1}$. Ďalej platí, že ak je A horná trojuholníková s A_{ii} na diagonále, tak aj A^{-1} je horná trojuholníková matica s $\frac{1}{A_{ii}}$. Spojením týchto vlastností dostávame, že A musí byť diagonálna.

Ortogonálne matice rozmeru 1×1 sú ± 1 . Pozrime sa na matice typu 2×2 .

Veta 3.2. (13.5.1 Veta, [4]) Nech $A \in R^{2 \times 2}$. Potom existujú iba dva typy ortogonálnych matíc. Prvou z nich je matica rotácie okolo počiatku, t.j.

$$A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} = R_\alpha$$

pre nejaké $\alpha \in R$. Druhou ortogonálnou 2×2 maticou A je matica osovej súmernosti podľa osi prechádzajúcej počiatkom, t.j.

$$\begin{pmatrix} \cos 2\beta & \sin 2\beta \\ \sin 2\beta & -\cos 2\beta \end{pmatrix} = S_\beta$$

pre nejaké $\beta \in R$.

Dôkaz. Nech $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Potom

$$A^T A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 + c^2 & ab + cd \\ ab + cd & b^2 + d^2 \end{pmatrix} = I,$$

teda podmienka $A^T A = I$ je ekvivalentná s rovnosťami

$$a^2 + b^2 = 1,$$

$$ab + cd = 0,$$

$$b^2 + d^2 = 1.$$

Prvá z nich je ekvivalentná s existenciou $\alpha \in R$ takého, že $a = \cos\alpha$, $c = \sin\alpha$ a tretia s existenciou $\alpha \in R$ takého, že $b = \sin\beta$, $d = \cos\beta$. Podľa druhej rovnice musí pre ne platiť

$$\cos\alpha \sin\beta + \sin\alpha \cos\beta = \sin(\alpha + \beta) = 0,$$

t.j. $\alpha + \beta = k\pi$, kde $k \in Z$. Pre k párne z toho dostávame $b = \sin\beta = -\sin\alpha$, $d = \cos\beta = \cos\alpha$, teda A má tvar

$$A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} = R_\alpha.$$

Pre k nepárne máme $b = \sin\beta = \sin\theta$, $d = \cos\beta = -\cos\theta$, čo vedie na maticu tvaru

$$A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix} = S_{\frac{\alpha}{2}}.$$

Substitúciou $\beta = \frac{\alpha}{2}$ dostávame tvar v znení vety

$$\begin{pmatrix} \cos 2\beta & \sin 2\beta \\ \sin 2\beta & -\cos 2\beta \end{pmatrix} = S_\beta.$$

□

Zaujímavou vlastnosťou ortogonálnej matice R_α je jej komutatívnosť. Matice

$$A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix}, \alpha, \beta \in R$$

komutujú, čiže platí, že $AB = BA$.

$$AB = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha + \beta) & -\sin(\alpha + \beta) \\ \sin(\alpha + \beta) & \cos(\alpha + \beta) \end{pmatrix}.$$

$$BA = \begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha + \beta) & -\sin(\alpha + \beta) \\ \sin(\alpha + \beta) & \cos(\alpha + \beta) \end{pmatrix}.$$

Naopak matica S_β vlastnosť komutatívnosti nespĺňa.

Majme matice

$$A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \cos\beta & \sin\beta \\ \sin\beta & -\cos\beta \end{pmatrix}, \alpha, \beta \in R.$$

Vynásobením AB a BA zistíme, že A a B nekomutujú.

$$AB = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\beta & \sin\beta \\ \sin\beta & -\cos\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha - \beta) & -\sin(\alpha + \beta) \\ \sin(\alpha + \beta) & \cos(\alpha - \beta) \end{pmatrix}.$$

$$BA = \begin{pmatrix} \cos\beta & \sin\beta \\ \sin\beta & -\cos\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha + \beta) & \sin(\alpha + \beta) \\ -\sin(\alpha + \beta) & \cos(\alpha + \beta) \end{pmatrix}.$$

4 Kontrakcie metrických priestorov

V úvode tejto kapitoly uvádzame základné definície metrického priestoru a kontrakcií. Potom uvádzame známu vetu o pevnom bode. V ďalšej časti uvádzame vety spájajúce kontrakcie so singulárnymi hodnotami matice. Nakoniec uvádzame vetu prepájajúcu pozitívne semidefinitné matice s kontrakciami. Prevažná časť tejto kapitoly, teda aj úvodné definície a teória o metrickom priestore a kontrakciách, bola použitá z knihy Matrix Theory od F. Zhanga. [1]

Definícia 4.1 (Metrický priestor). Metrický priestor pozostáva z priestoru M a zobrazenia

$$d : M \times M \mapsto R.$$

Zobrazenie d sa nazýva metrika priestoru M a má nasledujúce vlastnosti:

1. $d(x, y) \geq 0$ a $d(x, y) = 0$ iba ak $x = y$
2. $d(x, y) = d(y, x) \quad \forall x, y \in M$
3. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) \quad \forall x, y, z \in M$

Cauchyho postupnosť sa nazýva postupnosť bodov x_i v metrickom priestore M taká, že ak pre všetky $\epsilon > 0$ existuje kladné celé číslo N tak, že $d(x_i, x_j) < \epsilon$ pre všetky $i, j > N$.

Postupnosť x_i konverguje k bodu x ak pre všetky $\epsilon > 0$ existuje prirodzené číslo N tak, že $d(x, x_i) < \epsilon$ pre všetky $i > N$.

Metrický priestor M sa nazýva úplný metrický priestor ak každá Cauchyho postupnosť konverguje k bodu z M .

Postupnosť $\{c^n\}$, $0 < c < 1$ je Cauchyho postupnosť úplného metrického priestoru R s metrikou $d(x, y) = |x - y|$.

C^n je metrický priestor s metrikou

$$d(x, y) = \|x - y\|, \quad x, y \in C^n, \quad (2)$$

definované vektorovou normou

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2}.$$

Definícia 4.2. Nech $f : M \mapsto M$ je zobrazenie metrického priestoru M s metrikou d . Zobrazenie f sa nazýva kontrakcia, ak existuje konštanta c , $0 < c \leq 1$, pričom platí:

$$d(f(x), f(y)) \leq cd(x, y) \quad \forall x, y \in M. \quad (3)$$

Ak $0 < c < 1$, tak zobrazenie f nazývame ostrou kontrakciou.

Príklad 4.1. 1. V metrickom priestore R s metrikou

$$d(x, y) = |x - y|, \quad x, y \in R,$$

je zobrazenie $x \mapsto \sin(\frac{x}{2})$ ostrá kontrakcia.

Použitím nerovnosti $|\sin x| \leq |x|$ a $|\cos(x)| \leq 1$ dostávame

$$|\sin(\frac{x}{2}) - \sin(\frac{y}{2})| = |2\cos(\frac{x+y}{4})\sin(\frac{x-y}{4})| \leq \frac{1}{2}|x - y|.$$

2. V metrickom priestore R s metrikou

$$d(x, y) = |x - y|, \quad x, y \in R,$$

zobrazenie $x \mapsto \sin(2x)$ nie je kontrakcia.

Použitím nerovnosti $|\sin x| \leq |x|$ a $|\cos(x)| \leq 1$ dostávame

$$|\sin(2x) - \sin(2y)| = |2\cos(x+y)\sin(x-y)| \leq 2|x - y|.$$

3. V metrickom priestore R s metrikou

$$d(x, y) = |x - y|, \quad x, y \in R,$$

je zobrazenie $x \mapsto \sin(x)$ kontrakcia, ale nie ostrá.

Použitím nerovnosti $|\sin x| \leq |x|$ a $|\cos(x)| \leq 1$ dostávame

$$|\sin(x) - \sin(y)| = |2\cos(x+y)\sin(x-y)| \leq |x - y|.$$

Teraz uvedieme vetu, ktorá hovorí o pevnom bode ostrých kontrakcií.

Definícia 4.3. Pevný bod zobrazenia f je bod x v metrickom priestore, pre ktorý platí $f(x) = x$.

Veta 4.1. (*Theorem 5.6, [1]*) Nech $f : M \mapsto M$ je ostrá kontrakcia zobrazenia úplného metrického priestoru M do seba. Potom zobrazenie f má iba jeden pevný bod. Navyše, pre hociktorý bod $x \in M$ postupnosť

$$x, f(x), f^2(x), f^3(x), \dots$$

konverguje k pevnému bodu.

Dôkaz. Nech x je bod v M . Označme $d(x, f(x)) = \delta$. Využitím nerovnosti (3) dostávame:

$$d(f^n(x), f^{n+1}(x)) \leq c^n \delta, \quad n \geq 1.$$

Rad $\sum_{n=1}^{\infty} c^n$ konverguje k $\frac{c}{1-c}$ pre každé pevné c , $0 < c < 1$.

Postupnosť $f^n(x)$, $n = 1, 2, \dots$ je Cauchyho postupnosť, pretože platí

$$\begin{aligned} d(f^m(x), f^n(x)) &\leq d(f^m(x), f^{m+1}(x)) + \dots + d(f^{n-1}(x), f^n(x)) \leq \\ &\leq (c^m + \dots + c^{n-1})\delta. \end{aligned}$$

M je úplný metrický priestor, lebo limita $\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x)$ existuje v M .

Nech $X = \lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x)$. Ukážeme, že X je pevný bod. Z nerovnosti (3) vidíme, že kontrakcia je spojitá funkcia. Preto

$$f(X) = f(\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x)) = \lim_{n \rightarrow \infty} f^{n+1}(x) = X.$$

Predpokladajme, že $Y \in M$ je tiež pevný bod f . Potom musí platiť

$$d(X, Y) = d(f(X), f(Y)) \leq cd(X, Y).$$

Z toho vyplýva, že $d(X, Y) = 0$, pre $0 < c < 1$, teda $X = Y$, čo znamená, že zobrazenie f má iba jeden pevný bod. $\square$

Nech A je $m \times n$ komplexná matica. Nech je A zobrazenie $C^n \mapsto C^m$ definované pomocou maticovo vektorového násobenia Ax , kde $x \in C^n$. Potom nerovnosť (3) má tvar:

$$\|Ax - Ay\| \leq c\|x - y\|. \quad (4)$$

V nasledujúcej vete ukážeme, že A je kontrakcia iba ak žiadna singulárna hodnota nie je väčšia ako 1.

Veta 4.2. (*Theorem 5.7, [1]*) Matica A je kontrakcia práve vtedy keď $\sigma_{\max}(A) \leq 1$.

Dôkaz. Nech A je matica $m \times n$. $\forall x, y \in C^n$ platí:

$$\|Ax - Ay\| = \|A(x - y)\| \leq \sigma_{\max}(A)\|x - y\|.$$

Z toho vyplýva, že matica A je kontrakcia iba ak

$$\sigma_{\max}(A) \leq 1.$$

Predpokladajme, že A je kontrakcia. Potom pre niektoré c , $0 < c \leq 1$ a $\forall x, y \in C^n$ platí:

$$\|Ax - Ay\| \leq c\|x - y\|.$$

Zjednodušené platí:

$$\|Ax\| \leq c\|x\| \quad \forall x \in C^n.$$

Odtiaľ dostávame:

$$\sigma_{\max}(A) \leq c \leq 1.$$

$\square$

Poznámka 4.1. Všimnime si, že unitárne matice sú kontrakcie, ale nie striktné, lebo unitárna matica A spĺňa

$$\|Ax\| \leq \|x\|.$$

Tvrdenie 4.1. $m \times n$ matica A je kontrakcia práve vtedy keď je splnená jedna z nasledujúcich podmienok:

1. $A^*A \leq I_n$,
2. $AA^* \leq I_m$,
3. $\begin{pmatrix} I & A \\ A^* & I \end{pmatrix} \geq 0$,
4. $x^*(A^*A)x \leq 1 \quad \forall x \in C^n$, kde $\|x\| = 1$,
5. $\|Ax\| \leq \|x\| \quad \forall x \in C^n$.

Dôkaz. 1. Ak platí $A^*A \leq I_n$, tak potom vlastné hodnoty A^*A , teda singulárne hodnoty sú menšie ako 1, $\sigma_{\max}(A) \leq 1$. Z Vety 4.2 vyplýva, že A je kontrakcia.

2. $AA^* \leq I_m$ Vyplýva analogicky ako 1.

3. $\begin{pmatrix} I & A \\ A^* & I \end{pmatrix} \geq 0 \iff I \geq A^*IA \iff I \geq A^*A$. (Schurov doplnok, pozri Dodatok)

4. $\forall x \in C^n$, kde $\|x\| = 1$, platí:

$$x^*(A^*A)x \leq 1 \iff \|Ax\|^2 \leq 1 \iff \sup_{\|x\|=1} \|Ax\|^2 \leq 1 \iff$$

$$\iff \sup_{\|x\|=1} \|Ax\| \leq 1 \iff \sigma_{\max}(A) \leq 1.$$

5. $\forall x \in C^n$ platí:

$$\frac{\|Ax\|}{\|x\|} \leq 1 \iff \sup_{\|x\| \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \leq 1 \iff \sigma_{\max}(A) \leq 1.$$

□

Poznámka 4.2. Ak je matica $A \in M_n$ kontrakcia s vlastnými hodnotami $\lambda(A)$, tak

$$|\lambda(A)| \leq 1.$$

Pre vlastné hodnoty platí

$$Ax = \lambda x,$$

teda

$$\|Ax\| = \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\| \leq \|x\|,$$

čiže $|\lambda(A)| \leq 1$.

Túto kapitolu ukončíme vetou o blokových pozitívne semidefinitných maticiach.

Veta 4.3. (*Theorem 5.8, [1]*) Nech $L, M \geq 0$. Potom platí

$$\begin{pmatrix} L & X \\ X^* & M \end{pmatrix} \geq 0 \quad (5)$$

práve vtedy keď existuje nejaká kontrakcia C taká, že $X = L^{\frac{1}{2}} C M^{\frac{1}{2}}$.

Dôkaz. Predpokladajme najskôr, že $X = L^{\frac{1}{2}} C M^{\frac{1}{2}}$. Ľahko sa dá overiť, že platí

$$\begin{pmatrix} L & X \\ X^* & M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L^{\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & M^{\frac{1}{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & C \\ C^* & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L^{\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & M^{\frac{1}{2}} \end{pmatrix}. \quad (6)$$

Z Vety 4.2 vyplýva, že $\sigma_{\max}(C) \leq 1$. Teda maximálne vlastné číslo $\lambda_{\max}(C^*C) \leq 1$ a teda

$$I - C^*C \geq 0.$$

Podľa Vety 8.6 platí

$$\begin{pmatrix} I & C \\ C^* & I \end{pmatrix} \geq 0$$

a teda z (6) máme, že

$$\begin{pmatrix} L & X \\ X^* & M \end{pmatrix} \geq 0.$$

Dôkaz v opačnom smere si rozdelíme na dva prípady: na singulárny a regulárny prípad. Najprv spravíme regulárny prípad.

Predpokladajme, že $L, M > 0$, teda sú regulárne a nech

$$\begin{pmatrix} L & X \\ X^* & M \end{pmatrix} \geq 0.$$

Položme

$$C = L^{-\frac{1}{2}} X M^{-\frac{1}{2}},$$

(kde $L^{-\frac{1}{2}}$ je $(L^{\frac{1}{2}})^{-1} = (L^{-1})^{\frac{1}{2}}$ a $L^{\frac{1}{2}}$ je odmocnina z kladnej semidefinitnej matice.)

Potom zrejme

$$X = L^{\frac{1}{2}} C M^{\frac{1}{2}}$$

a stačí nám ukázať, že C je kontrakcia.

Zrejme platí

$$C^* C = M^{-\frac{1}{2}} X^* L^{-1} X M^{-\frac{1}{2}}.$$

Pretože platí (5) tak aj matica

$$P^* \begin{pmatrix} L & X \\ X^* & M \end{pmatrix} P = \begin{pmatrix} L & 0 \\ 0 & M - X^* L^{-1} X \end{pmatrix} \geq 0,$$

kde

$$P = \begin{pmatrix} I & -L^{-1} X \\ 0 & I \end{pmatrix}.$$

Teda aj $M - X^* L^{-1} X \geq 0$. A teda

$$M^{-\frac{1}{2}} (M - X^* L^{-1} X) M^{-\frac{1}{2}} = I - M^{-\frac{1}{2}} X^* L^{-1} X M^{-\frac{1}{2}} \geq 0 = I - C^* C \geq 0.$$

Analogicky ako v predchádzajúcom, podľa vety 8.6 musí byť C kontrakcia. $\square$

Pre singulárny prípad matíc L, M môžeme použiť argument spojitosti (pozri dodatok Definíciu 8.5). Predpokladajme, že L je singulárna (prípad singulárnej matice M sa ukáže analogicky). Potom existuje $\sigma > 0$ také, že $L + \epsilon I$ a $M + \epsilon I$ sú regulárne (a teda kladne definitné), $\forall \epsilon \in (0, \sigma)$.

(Podľa regulárneho prípadu) Ak

$$\begin{pmatrix} L & X \\ X^* & M \end{pmatrix} \geq 0 \quad \implies \quad \begin{pmatrix} L + \epsilon I & X \\ X^* & M + \epsilon I \end{pmatrix} \geq 0$$

$\implies$ existuje C_ϵ -kontrakcia tak, že:

$$X = (L + \epsilon I)^{\frac{1}{2}} C (M + \epsilon I)^{\frac{1}{2}}.$$

Ak C_ϵ je kontrakcia $\implies \sigma_{\max}(C_\epsilon) \leq 1$.

Nech postupnosť ϵ_{jk} konverguje $\longrightarrow 0$. Množina $\{C_\epsilon, \sigma_{\max}(C_\epsilon) \leq 1\}$ je ohraničená. To znamená, že pre všetky ϵ existuje konvergentná podpostupnosť, ktorá konverguje k $\bar{C}$.

$$C_{\epsilon_{j1}}, C_{\epsilon_{j2}}, C_{\epsilon_{j3}}, \dots \longrightarrow \bar{C}.$$

Postupnosť $C_{\epsilon k}$ je ohraničená, tak $\bar{C}$ je kontrakcia a zrejme

$$X = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} (L + \epsilon I)^{\frac{1}{2}} C_{\epsilon} (M + \epsilon I)^{\frac{1}{2}} = L^{\frac{1}{2}} \bar{C} M^{\frac{1}{2}}.$$

□

5 Aplikácia kontrakcií

V tejto kapitole uvediem konkrétnu aplikáciu kontrakcií. Ide o koncept koherencie v radarovej interferometrii. Zdrojom tejto kapitoly je článok [2].

Radarová interferometria je spracovávanie dvoch a viacerých družicových snímok, slúžiacich buď k vytvoreniu digitálneho modelu terénu alebo ku sledovaniu deformácie zemskej kôry. Vlnová dĺžka radaru je rádovo niekoľko centimetrov a koherentný radar je schopný merať okrem intenzity prijatého signálu i jeho fázu, práve v rámci týchto niekoľkých centimetrov. Z výsledkov možno pri dobrej konfigurácii podmienok a za predpokladu dostatočného množstva dát usudzovať deformáciu v rámci niekoľkých centimetrov.

V radarovej interferometrii sú kontrakcie využité na rozšírenie konceptu koherencie zo skalárneho na vektorový prípad.

Skalárna interferometria je založená na koherencii medzi dvoma komplexnými signálmi $\vec{s}_1$ a $\vec{s}_2$ a je popísaná pomocou matice koherencie $J = \langle s s^* \rangle$, kde $\vec{s} = [s_1, s_2]^T$. $\langle \rangle$ reprezentujú strednú hodnotu. J je hermitovsky pozitívne semidefinitná matica. Komplexná koherencia medzi s_1 a s_2 je definovaná ako

$$\gamma_c = \frac{J_{12}}{J_{11}J_{22}} = \frac{\langle s_1 s_2^* \rangle}{\langle s_1 s_1^* \rangle \langle s_2 s_2^* \rangle}.$$

Pre (reálnu) koherenciu $\gamma = |\gamma_c|$ platí $0 \leq \gamma \leq 1$. Spätný rozptyl v BSA (Backscatter Alignment convention) je popísaný tzv. symetrickou Sinclairovou maticou.

$$S = \begin{pmatrix} S_{hh} & S_{hv} \\ S_{vh} & S_{vv} \end{pmatrix}$$

Sinclairova matica sa používa na konštrukciu vektora $\vec{k}$ (tzv. target vector, ktorého zložkami sú lineárne kombinácie prvkov matice S),

$$\vec{k} = [S_{hh}, \sqrt{2}S_{hv}, S_{vv}]^T,$$

pričom $||\vec{k}||^2$ je stopa S^*S .

Definícia 5.1. Interferometrická matica τ pre symetrické rozplylové matice je definovaná ako 6×6 kovariančná matica formy $\tau = \langle \vec{K} \vec{K}^* \rangle$, kde $\vec{K}^T = [k_1^T, k_2^T]$

$$\tau = \begin{pmatrix} \langle \vec{k}_1 \vec{k}_1^* \rangle & \langle \vec{k}_1 \vec{k}_2^* \rangle \\ \langle \vec{k}_2 \vec{k}_1^* \rangle & \langle \vec{k}_2 \vec{k}_2^* \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_{11} & \Omega \\ \Omega^* & T_{22} \end{pmatrix}.$$

Matica τ je hermitovsky pozitívne semidefinitná. Matice T_{11} a T_{22} sú štandardné matice koherencie a sú hermitovské, pozitívne semidefinitné. Matica

$\Omega = \langle \vec{k}_1 \vec{k}_2^* \rangle$ nie je hermitovská. Nie je hneď zrejmé ako môže byť skalárna interferometria rozšírená na vektorový prípad.

Na rozšírenie skalárnej formulácie interferencie na vektorú použili páni Cloude a Papathanassiou 2 normalizované komplexné vektory $\vec{w}_1$ a $\vec{w}_2$ a definovali tzv. rozptylové koeficienty μ_1 a μ_2 ako projekcie rozptylových vektorov $\vec{k}_1$ a $\vec{k}_2$ na vektory $\vec{w}_1$ a $\vec{w}_2$.

$$\mu_1 = \vec{w}_1^* \vec{k}_1 \quad \mu_2 = \vec{w}_2^* \vec{k}_2.$$

Tieto projekcie sú použité na vytvorenie 2×2 hermitovskej, pozitívne semidefinitnej matice podobne ako v skalárnom prípade, $J = \langle \vec{\mu} \vec{\mu}^* \rangle$, kde $\vec{\mu}^T = [\mu_1, \mu_2]$

$$J = W^* \tau W \quad W = \begin{pmatrix} \vec{w}_1 & 0 \\ 0 & \vec{w}_2 \end{pmatrix},$$

kde W je 6×6 matica.

Vektorová koherencia je definovaná ako

$$\gamma = \frac{|\vec{w}_1^* \Omega_{12} \vec{w}_2|}{\sqrt{\vec{w}_1^* T_{11} \vec{w}_1 \vec{w}_2^* T_{22} \vec{w}_2}} \leq 1.$$

Jeden z problémov v interferometrii je optimalizácia interferometrickej koherencie. Matematicky sa problém formuluje ako

$$\begin{aligned} \max \quad & \vec{w}_1^* \Omega_{12} \vec{w}_2 \\ \text{s.t.} \quad & \vec{w}_1^* T_{11} \vec{w}_1 = C_1, \vec{w}_2^* T_{22} \vec{w}_2 = C_2. \end{aligned}$$

Na optimalizovanie interferometrickej koherencie γ je vytvorená Lagrangeova funkcia L definovaná ako

$$L = \vec{w}_1^* \Omega_{12} \vec{w}_2 + \lambda_1 (\vec{w}_1^* T_{11} \vec{w}_1 - C_1) + \lambda_2 (\vec{w}_2^* T_{22} \vec{w}_2 - C_2),$$

kde C_1 a C_2 sú konštanty. Optimalizácia vedie k dvom rovniciam.

$$\frac{\delta L}{\delta w_1^*} = \Omega_{12} w_2 + \lambda_1 T_{11} w_1 = 0.$$

$$\frac{\delta L}{\delta w_2^*} = \Omega_{12}^* w_1 + \lambda_2 T_{22} w_2 = 0.$$

$$M_1 \vec{w}_1 = \nu \vec{w}_1 \quad \text{a} \quad M_2 \vec{w}_2 = \nu \vec{w}_2,$$

s 3×3 maticami

$$M_1 = (T_{11}^{-1} \Omega) (T_{22}^{-1} \Omega_{12}^*), \quad M_2 = (T_{22}^{-1} \Omega^*) (T_{22}^{-1} \Omega_{12}).$$

Ak zvolíme

$$C = T_{11}^{\frac{1}{2}} \Omega T_{22}^{\frac{1}{2}},$$

tak

$$M_1 = T_{11}^{-\frac{1}{2}} C C^* T_{11}^{\frac{1}{2}} \text{ a } M_2 = T_{22}^{-\frac{1}{2}} C^* C T_{22}^{\frac{1}{2}}.$$

Čiže platí Matice M_1 a M_2 sú podobné hermitovskej pozitívnej semidefinitnej matici CC^* a C^*C s rovnakými vlastnými hodnotami, teda singulárnymi hodnotami matice C , pričom platí $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3 \geq 0$. Maximálna koherencia je daná maximálnou singulárnou hodnotou matice C , teda $\max\{\gamma\} = \sigma_1$. $\square$

Na riešenie interferometrickej optimalizácie pomocou maticového prístupu využijeme kontrakcie. V nasledujúcom odvodovaní budeme využívať Vetu 3.4 a vlastnosť spektrálnej normy pre kontrakcie, teda $\sigma_{max} \leq 1$. Použitím Vety 3.4 pre interferometrickú maticu τ dostávame, že matica

$$C = T_{11}^{-\frac{1}{2}} \Omega T_{22}^{-\frac{1}{2}}$$

je kontrakcia, čiže $\sigma_1(C) \leq 1$.

Uvažujme singulárny rozklad matice C t.j. $C = VDU^*$. Ortonormálne stĺpce unitárnych matíc $V = [v_1, \dots, v_n]$ a $U = [u_1, \dots, u_n]$ sú vlastné vektory matíc CC^* a C^*C , lebo

$$C^*C = UD^2U^* \text{ a } CC^* = VD^2V^*.$$

A teda

$$CC^*v_i = \sigma_i v_i \quad C^*Cu_i = \sigma_i u_i \quad i = 1, \dots, n.$$

Pre maticu C platí

$$CU = VD \quad \text{alebo} \quad Cu_i = \sigma_i v_i,$$

$$C^*V = UD \quad \text{alebo} \quad Cv_i = \sigma_i u_i.$$

V singulárnom rozklade $C = VDU^*$ nie sú matice V a U jednoznačne určené. Ak má matice C jasne dané singulárne hodnoty, tak potom existuje diagonálna matica $E = \text{diag}(e^{i\sigma_1}, \dots, e^{i\sigma_n})$ taká, že $\tilde{V} = VE$ a $\tilde{U} = UE$ sú platné unitárne faktory pre singulárny rozklad $C = VDU^*$.

Všimnime si, že platí $\tilde{V}\tilde{U}^* = VU^*$, teda $\tilde{v}_i\tilde{u}_j^* = v_i u_j^* \forall i, j = 1, \dots, n$.

$$v_i = T_{11}^{\frac{1}{2}} w_{1i}, \quad u_i = T_{22}^{\frac{1}{2}} w_{2i}.$$

Keďže singulárne vektory sú normalizované, t.j. $\|u_i\| = \|v_i\| = 1$, tak pre maximálnu koherenciu platí

$$\gamma = \frac{v_1^* C u_1}{\|v_1\| \|u_1\|} = |v_1^* \sigma_1 v_1| \sigma_1. \quad \square$$

Použitím kontrakcií sa vyhýbame explicitnej optimalizácii pomocou formulácie Lagrangovej funkcie. Koncept kontrakcií sa zdá byť kratší. Tento prístup priamo prepája kontrakcie s teóriou singulárneho rozkladu. Použitie kontrakcií môže byť použité na interpretáciu výsledkov.

6 Kontrakcie a unitárne matice

Cieľom tejto časti je uviesť dve hlavné vety spájajúce kontrakcie a unitárne matice. Zamierame sa na štvorcové matice, lebo každá matica sa dá pridaním nulových stĺpcov alebo riadkov previesť na štvorcovú maticu. Ukážeme, že matica je kontrakcia, práve vtedy keď sa z nej pridaním nových riadkov a stĺpcov dá vytvoriť unitárna matica. Ako druhé ukážeme, že matica je kontrakcia iba ak je konečnou konvexnou kombináciou unitárnych matíc. Ako hlavný zdroj v tejto kapitole je použitá Matrix Theory od F. Zhanga.

Veta 6.1. (*Theorem 5.9, [1]*) *Matica A je kontrakcia práve vtedy keď*

$$U = \begin{pmatrix} A & X \\ Y & Z \end{pmatrix}$$

je unitárna pre matice X, Y a Z príslušnej veľkosti.

Dôkaz. Ak A je unitárna matica tak platí:

$$U^*U = I \Rightarrow A^*A + Y^*Y \Rightarrow A^*A \leq I.$$

Čiže A je kontrakcia, podľa Tvrdenia 4.1.

Nech A je kontrakcia. Uvažujme maticu:

$$U = \begin{pmatrix} A & (I - AA^*)^{\frac{1}{2}} \\ (I - A^*A)^{\frac{1}{2}} & -A^* \end{pmatrix}$$

a ukážeme, že U je unitárna matica.

Nech $A = VDW$ je singulárny rozklad A , pričom V a W sú unitárne a D je nezáporná diagonálna matica so singulárnymi hodnotami na diagonále neprevyšujúcimi 1. Potom:

$$(I - AA^*)^{\frac{1}{2}} = V(I - D^2)V^* \quad a \quad (I - A^*A)^{\frac{1}{2}} = W^*(I - D^2)W.$$

Keďže D je diagonálna, je jednoduché vidieť, že:

$$D(I - D^2)^{\frac{1}{2}} = (I - D^2)^{\frac{1}{2}}D.$$

Keď rovnosť vynásobím zľava V a sprava W tak dostanem:

$$VD(I - D^2)^{\frac{1}{2}}W = V(I - D^2)^{\frac{1}{2}}DW$$

alebo ekvivalentne

$$A(I - A^*A)^{\frac{1}{2}} = (I - AA^*)^{\frac{1}{2}}A.$$

Čiže

$$U^*U = \begin{pmatrix} A^* & (I - A^*A)^{\frac{1}{2}} \\ (I - AA^*)^{\frac{1}{2}} & -A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & (I - AA^*)^{\frac{1}{2}} \\ (I - A^*A)^{\frac{1}{2}} & -A^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}.$$

□

Lema 6.1. *Nech $P_1, \dots, P_m$ sú matice. Ak každá P_i je konvexná kombinácia matíc $Q_1, \dots, Q_n$, potom konvexná kombinácia $P_1, \dots, P_m$ je tiež konvexnou kombináciou $Q_1, \dots, Q_n$.*

Dôkaz. Nech P_i je konvexná kombinácia matíc $Q_1, \dots, Q_n$

$$P_i = \sum_{j=1}^n \alpha_j^i Q_j, \sum_{j=1}^n \alpha_j^i = 1, \alpha_j^i \geq 0,$$

a nech P je konvexná kombinácia matíc $P_1, \dots, P_m$

$$P = \sum_{i=1}^m \lambda_i P_i, \sum_{i=1}^m \lambda_i = 1, \lambda_i \geq 0.$$

Potom P je konvexná kombinácia matíc $Q_1, \dots, Q_n$

$$\begin{aligned} P &= \sum_{i=1}^m \lambda_i P_i = \sum_{i=1}^m \lambda_i \sum_{j=1}^n \alpha_j^i Q_j = \sum_{i=1}^m \lambda_i \alpha_j^i Q_1 + \dots + \sum_{i=1}^m \lambda_i \alpha_j^i Q_n = \\ &= \alpha_j^i Q_1 + \dots + \alpha_j^i Q_n = \sum_{j=1}^n \alpha_j^i Q_j. \end{aligned}$$

□

Veta 6.2. *(Theorem 5.10, [1]) Matica A je kontrakcia práve vtedy keď A je konečná konvexná kombinácia unitárnych matíc.*

Dôkaz. Z vlastnosti normy (trojuholníkovej nerovnosti), rovnako teda pre spektrálne normy matíc $A, B \in M_n$ platí:

$$\sigma_{\max}(A + B) \leq \sigma_{\max}(A) + \sigma_{\max}(B).$$

Ak sú U a V unitárne tak pre ich spektrálne normy platí:

$$\sigma_{\max}(U + V) \leq \sigma_{\max}(U) + \sigma_{\max}(V).$$

Teda pre spektrálne normy unitárnych matíc U a V rovnakej veľkosti a pre $t \in (0, 1)$ platí:

$$\sigma_{\max}(tU + (1-t)V) \leq t\sigma_{\max}(U) + (1-t)\sigma_{\max}(V) = 1.$$

Inak povedané, matica $tU + (1-t)V$, konvexná kombinácia unitárnych matíc U a V je kontrakcia. Rovnako pre matice $U_1, \dots, U_n$ rovnakej veľkosti platí

$$\sigma_{\max}(\lambda_1 U_1 + \dots + \lambda_n U_n) \leq \lambda_1 \sigma_{\max}(U_1) + \dots + \lambda_n \sigma_{\max}(U_n) = 1,$$

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1, \quad \lambda_i \geq 0.$$

Teda konvexná kombinácia unitárnych matíc je kontrakcia.

Teraz ukážeme dôkaz v opačnom smere. Nech A je kontrakcia. Ukážeme, že potom je A konvexnou kombináciou unitárnych matíc.

A je konvexná kombinácia diagonálnych matíc $\text{diag}(1, \dots, 1, 0, \dots, 0)$. To znamená, že každá matica v takejto forme je konvexnou kombináciou diagonálnych (unitárnych) matíc s diagonálnymi vstupmi ± 1 . Takto dosiahneme záver, že A je konvexná kombinácia unitárnych matíc.

Nech hodnosť A je r a nech

$$A = UDV$$

je singulárny rozklad matice A , kde matice U a V sú unitárne a

$$D = \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_r, 0, \dots, 0),$$

pričom platí, že: $1 \geq \sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_r > 0$.

Ak je D konvexnou kombináciou unitárnych matíc, povedzme W_i , tak potom A je konvexnou kombináciou unitárnych matíc UW_iV . Potom môžeme maticu A považovať za diagonálnu maticu

$$A = \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_r, 0, \dots, 0).$$

Po rozpísaní:

$$\begin{aligned} A &= \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_r, 0, \dots, 0) \\ &= (1 - \sigma_1)0 + (\sigma_1 - \sigma_2)\text{diag}(1, 0, \dots, 0) \\ &\quad + (\sigma_2 - \sigma_3)\text{diag}(1, 1, 0, \dots, 0) + \dots \\ &\quad + (\sigma_{r-1} - \sigma_r)\text{diag}(1, \dots, 1, 0, \dots, 0) \\ &\quad + \sigma_r\text{diag}(1, \dots, 1, 0, \dots, 0). \end{aligned} \tag{7}$$

To znamená, že matica A je (konečná) konvexná kombinácia matíc

$$E_i = \text{diag}(1, \dots, 1, 0, \dots, 0)$$

s i -tými 1 na diagonále, pričom $0 \leq i < r$.

Teraz ukážem, že takáto matica je konvexná kombinácia diagonálnych matíc so vstupmi ± 1 . Nech

$$F_i = \text{diag}(0, \dots, 0, -1, \dots, -1).$$

Potom

$$E_i = \frac{1}{2}I + \frac{1}{2}(E_i + F_i)$$

je konvexná kombinácia unitárnych matíc I a $E_i + F_i$.

Ak $\sigma_1 \leq 1$, potom matica $\text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_r, 0, \dots, 0)$, čiže matica A , je konvexná kombinácia diagonálnych matíc $\text{diag}(1, \dots, 1, 0, \dots, 0)$, ktorá je konvexnou kombináciou diagonálnych unitárnych matíc. $\square$

7 Záver

V tejto práci sme sa venovali teoretickému spracovaniu teórie unitárnych matic a kontrakcií metrických priestorov. Uviedli sme základné definície a vety o unitárnych, ortogonálnych maticiach a kontrakciách metrických priestorov. Najzaujímavejšou časťou je konkrétna aplikácia kontrakcií v radarovej interferometrii. Záverečná kapitola bola venovaná dvom vetám prepájajúcim kontrakcie a unitárne matice.

Napriek tomu, že práca mala zväčša teoretický charakter, obohatením môže byť práve konkrétna aplikácií kontrakcií v fyzike.

8 Dodatok - pomocné tvrdenia

V Dodatku sú uvedené niektoré základé vety a definície z lineárnej algebry, ktoré sú využívané v tejto práci. Vety a definície sú prepísané a preložené z knihy Matrix Theory od F. Zhanga[1]. Vlastnosti normy sú z knihy Numerické metódy [5].

Veta 8.1 (Schurov rozklad). *Nech $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ sú vlastné hodnoty matice $A \in M_n$. Potom existuje unitárna matica $U \in M_n$ taká, že U^*AU je horná trojuholníková matica. Maticovo zapísané:*

$$U^*AU = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & * \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Veta 8.2 (Spektrálny rozklad). *Nech A je $n \times n$ komplexná matica s vlastnými hodnotami $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Potom A je normálna iba ak A je unitárne diagonalizovateľná, to znamená, že existuje unitárna matica U taká, že:*

$$U^*AU = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n).$$

Špeciálne, A je Hermitovská iba ak λ_i sú reálne a je pozitívne semidefinitná, iba ak λ_i sú nezáporné.

Keď zoberieme odmocniny λ_i v spektrálnom rozklade, vidíme, že pre každú pozitívne semidefinitnú maticu A existuje pozitívne semidefinitná matica B tak, že $A = B^2$. Taká matica je jediná a nazýva sa odmocnina A , značíme ju $A^{\frac{1}{2}}$. Ak je A pozitívne semidefinitná tak platí

$$A \geq 0.$$

Definícia 8.1. Singulárne hodnoty matice A sú definované ako nezáporné korene vlastných hodnôt A^*A , ktorá je pozitívne semidefinitná, teda pre ňu platí $x^*(A^*A)x = (Ax)^*(Ax) \geq 0$.

Veta 8.3 (Singulárny rozklad). *Nech je A $m \times n$ matica s nezápornými singulárnymi hodnotami $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_r$. Potom existuje unitárna matica $U \in M_m$ taká, že*

$$A = U \begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} V,$$

pričom $D = \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_r)$. Hodnota matice A je preto rovná r .

Definícia 8.2. Najväčšia singulárna hodnota $\sigma_{max}(A)$ sa nazýva aj spektrálna norma.

Definícia 8.3. Pod normou matice $A \in R^n$ rozumieme reálnu funkciu $\|A\|$ prvkov matice s vlastnosťami

1. $\|A\| \geq 0$ pre všetky $A \in R^n$, pričom $\|A\| = 0$ len pre $A = 0$,
2. $\|cA\| = |c|\|A\|$ pre všetky $c \in R$ a $A \in R^n$,
3. $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$ pre ľubovoľné matice $A, B \in R^n$,
4. $\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$ pre ľubovoľné matice $A, B \in R^n$

Veta 8.4. Pre spektrálnu normu platí

$$\sigma_{max}(A) = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\| = \sup_{\|x\| \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}.$$

a $\forall x \in C^n$ platí

$$\|Ax\| \leq \sigma_{max}(A)\|x\|.$$

Veta 8.5 (Determinant blokovej matice pomocou inverznej matice). Nech je M bloková invertibilná matica

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ B^* & X \end{pmatrix}$$

s inverznou maticou

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} X & Y \\ U & V \end{pmatrix},$$

pričom A, D, X a V sú štvorcové matice. Potom

$$\det(A) = \det(V)\det(M).$$

Definícia 8.4. Štvorcová $n \times n$ matica A je pozitívne semidefinitná, $A \geq 0$, ak

$$x^*Ax \leq 0, \quad \forall x \in C^n.$$

Veta 8.6. Nech $A \in M_n$ je pozitívne semidefinitná matica a nech B je matica $n \times m$. Potom pre každú pozitívne semidefinitnú maticu $X \in M_n$ platí

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \geq 0 \iff X \geq B^*A^{-1}B.$$

Veta 8.7. *Komplexná $n \times n$ matica A je pozitívne semidefinitná iba ak existuje unitárna matica U tak, že platí*

$$A = U^* \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) U,$$

pričom λ_i sú nezáporné. Ďalej platí

$$A \geq 0 \Rightarrow \det(A) \geq 0.$$

Veta 8.8. *Nech je A $n \times n$ štvorcová pozitívne semidefinitná. Potom platí:*

1. $X^* A X \geq 0$ pre každú $m \times n$ maticu X ,
2. každá diagonálna podmatica matice A je pozitívne semidefinitná.

Definícia 8.5 (Argument spojitosti). Argument spojitosti je často používaná technika v maticovej teórii. Dôkaz pomocou argumentu spojitosti sa deje zvyčajne v troch krokoch.

1. Ukážeme, že predpoklad platí pre regulárnu maticu.
2. Singulárnu maticu A nahradíme regulárnou maticou $A + \epsilon$. (Platí: Ak A je singulárna $\implies$ existuje $\sigma > 0$ také, že $\forall \epsilon \in (0, \sigma)$ je matica $A + \epsilon$ regulárna.)
3. Využijeme spojitosť funkcie v ϵ - aby sme dosiahli platnosť tvrdenia aj pre singulárne matice.

Literatúra

- [1] F. Zhang: Matrix Theory: Basic Results and Techniques, Springer-Verlag New York 1999
- [2] E. Luneburg and S. R. Cloude: Contractions, Hadamard Products and their Application to Polarimetric Radar Interferometry
- [3] Cloude, S.H. and K.P. Papathanassiou: Polarimetric SAR Interferometry, IEEE Trans. Geoscience and Remote Sensing, Vol.36, No. 2, 1998, 1-11
- [4] Pavol Zlatoš: Lineárna Algebra a Geometria, Bratislava 2010
- [5] J. Babušíková, M. Slodička, J. Weisz: Numerické metódy, 8. marec 1999
- [6] G. Strang: Linear Algebra and Its Applications, Brooks/Cole, 1988