

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE

Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

Matematika v hudbe

2011

Katarína Belušková

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY



MATEMATIKA V HUDBE
BAKALÁRSKA PRÁCA

Evidenčné číslo: c706f720-930b-4520-958d-0e4869711abd

Študijný program: Ekonomická a finančná matematika

Študijný odbor: 9.1.9 Aplikovaná matematika

Školiace pracovisko: Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky

Vedúci bakalárskej práce: Mgr. Soňa Kilianová, PhD.

Bratislava 2011

Katarína Belušková

Prehlásenie

Čestne prehlasujem, že túto prácu som vypracovala samostatne s použitím uvedenej literatúry a zdrojov.

.....

Katarína Belušková

PodĎakovanie

Chcela by som poĎakovať vedúcej bakalárskej práce Mgr. Soni Kilianovej, PhD. za mnohé praktické rady, cenné pripomienky a pomoc pri realizácii tejto bakalárskej práce.

Abstrakt

BELUŠKOVÁ, Katarína: Matematika v hudbe

Bakalárska práca - Univerzita Komenského v Bratislave, Fakulta matematiky, fyziky a informatiky, Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky.

Vedúca: Mgr. Soňa Kilianová, PhD.

Táto bakalárska práca je zameraná na spracovanie základných matematických princípov súvisiacich so zvukom a hudbou. V práci sa budeme zaoberať matematickým popisom fyzikálnych dejov v oblasti hudby. Základom je matematický popis šírenia vlnení vytvorených rozozvučením hudobných nástrojov, ktorý možno vyjadriť pomocou diferenciálnych rovníc a Fourierovych radov. Zahrnieme teoretické predpoklady rozkladu funkcie do svojho Fourierovho radu a takisto odvodenie vlnovej rovnice struny pevne uchytenej na oboch koncoch a odvodenie jej riešenia v závislosti od počiatočných a okrajových podmienok. Práca je motivovaná knihou Music: A Mathematical Offering od Davida Bensona.

Kľúčové slová: harmonický pohyb, superpozícia, tlmený a vynútený harmonický pohyb, Fourierov rad, vlnová rovnica struny.

Abstrakt

BELUŠKOVÁ, Katarína: Mathematics in music

Bachelor thesis - Comenius University Bratislava, Faculty of Mathematics, Physics, and Informatics, Department of Applied Mathematics and Statistics.

Thesis Consultant: Mgr. Soňa Kilianová, PhD.

The aim of this bachelor thesis is processing of basic mathematical principles connected with sound and music. We mathematically describe physical processes in music. The base is a mathematical description of travelling waves created by musical instruments that can be expressed by using differential equations and Fourier series. We include theoretical conditions of factorizing functions to their Fourier series and a derivation of the wave equation of the string fixed on both endings and assumption of its solution in dependence on initial and boundary conditions. The bachelor thesis is motivated by the book : Music : A Mathematical offering by David Benson.

Key words: harmonic motion, superposition, damped a forced harmonic motion, Fourier series, wave equation for string.

Obsah

Úvod	3
1 Kmity a vlnenie	5
1.1 Harmonický pohyb	5
1.2 Superpozícia	10
1.3 Tlmený harmonický pohyb	14
1.4 Vynútený harmonický pohyb	18
2 Fourierove rady	20
2.1 Fourierove koeficienty	21
2.2 Podmienky konverencie	23
2.3 Periodické funkcie s periódou $2L$	25
2.4 Párne a nepárne funkcie	27
3 Vlnová rovnica struny	30
3.1 Odvodenie vlnovej rovnice struny	31
3.2 Riešenie vlnovej rovnice	32
3.3 Okrajové podmienky	33
3.4 Počiatočné podmienky	36
Záver	40
Literatúra	43

Zoznam obrázkov

1	Grafické znázornenie hudby a hluku. Zdroj: [6]	6
2	Harmonický oscilátor.	7
3	Kmitanie struny.	8
4	Séria štyroch snímok dvoch proti sebe sa šíriacich vlnení. V mieste, kde sa vlnenia prekrývajú, využijeme princíp superpozície. Zdroj: [9], str.3.	10
5	Interferencia vlnení s rôznymi amplitúdami a fázou, ale s rovnakou frekvenciou.	11
6	Superpozícia dvoch harmonických vln s rovnakou amplitúdou, ale s rôznymi frekvenciami ([9]).	12
7	Superpozícia dvoch vln s mierne odlišnou frekvenciou.	13
8	Tóny rovnakej frekvencie zahrané na klavíri a klarinete [6].	14
9	Tlmený a netlmený harmonický pohyb.	18
10	Znázornenie polohy bodu $a + k2L$	26
11	Napnutá kmitajúca struna a sily na ňu pôsobiace. Zdroj: [4], str.85.	31
12	Odraz vlnenia. Zdroj: [4], str.89	34
13	Vlnenie struny pevne uchytenej na jej koncoch.	38
14	Vlnenie struny pevne uchytenej na jej koncoch pri počiatočnom rozkmitaní v jej strede.	39

Úvod

Hudba je neoddeliteľnou súčasťou života. Človek sa vedel prostredníctvom hudby a zvukov vyjadrovať ešte skôr, ako dokázal vyartikulovať prvé slovo. Zvuk šumu stromov, hlasy zvierat, či úder kameňa o strom priviedli človeka k uvedomeniu si hudby a neskôr k jej interpretácii. Hudba dokáže hlboko dojať a len málo ľudí je imúnnych voči jej kúzlu. Aj keď pri vytváraní hudby nie je potrebné hlboké logické myslenie, matematika je s hudbou úzko prepojená. Kde v hudbe možno nájsť matematiku? Zreteľným vplyvom matematiky na hudbu je už samotný notový zápis. Hudba súvisí so zlomkami, exponenciálnymi krivkami, diferenciálnymi rovnicami, i periodickými funkciami. Ako prví si toto prepojenie medzi matematikou a hudbou uvedomili pytagorejci (približne 525 - 350 p.n.l.). Podarilo sa im objaviť vzťah medzi celými číslami a harmóniou zvuku. Dospeli k poznatku, že zvuk rozochvanej struny závisí od jej dĺžky, pričom harmonicky znejú tie struny, ktoré sú napnuté rovnakou silou a ich dĺžky tvoria celočíselný pomer.

Matematika sa uplatňuje aj pri konštruovaní hudobných nástrojov, matematikou možno vysvetliť, ako je možné, že každý hudobný nástroj znie osobito, s iným zafarbením, s iným doznievaním, či vibrátom. V 19. storočí Jean Fourier (1768 - 1830) dokázal, že všetky zvuky - či už inštrumentálne alebo vokálne - možno popísať matematickými výrazmi, ktoré sú súčtom jednoduchých periodických sínusových funkcií.

Každý zvuk má tri vlastnosti: zafarbenie, výšku a hlasitosť, ktoré ho odlišujú od ostatných. Zafarbenie súvisí s tvarom periodickej funkcie a vyššími harmonickými frekvenciami, výška s frekvenciou a hlasitosť s amplitúdou vlnenia.

V tejto bakalárskej práci sa zameriavame na spracovanie základných matematických princípov súvisiacich so zvukom a hudbou, pričom hlavnú pozornosť upriamime na matematický popis šírenia a skladania zvukových vln a popis kmitajúcej struny, ktorá je pevne uchytená na jej koncoch, pomocou vlnovej rovnice.

Práca je členená do troch kapitol. V prvej kapitole sa budeme zaoberať popisom periodického pohybu pomocou diferenciálnych rovníc a vyjadrením riešenia pre jednoduchý harmonický pohyb, tlmený harmonický pohyb (s príkladom) a vynútený harmonický pohyb. Taktiež v tejto časti popíšeme superpozíciu šíriacich

sa vlnení.

Druhá časť je zameraná na rozklad vlnení do Fourierovho radu a odvodenie Fourierových vzorcov, pričom zahrnieme aj teoretické predpoklady tohto rozkladu a podmienky konvergenzie.

Jadrom práce je tretia kapitola, ktorá je zameraná na odvodenie vlnovej rovnice struny a jej riešenia. V tejto časti tiež budeme analyzovať počiatkové a okrajové podmienky a pripojíme znázornenie kmitania struny pevne uchytenej na svojich koncoch, spolu s programom uvedeným v prílohe.

1 Kmity a vlnenie

Existencia znamená pohyb. Objekty v nás i v našom okolí sa neustále pohybujú. Príklady kmitania a vlnenia, opakujúceho sa pohybu, nás obklopujú zo všetkých strán, pozorujeme kývanie hojdačiek, pulzovanie piestov automobilových motorov, vlnenie vody a takisto aj chvenie gitarových strún, bubnov, zvonov či reproduktorov. Menej viditeľné je kmitanie molekúl vzduchu, ktorý prenáša zvukové rozruchy, kmitanie atómov v pevných látkach, zodpovedné za vnímanie tepla, a kmitanie elektrónov v rádiových anténach a televíznych vysielateľoch. Vlnenie a kmitavý pohyb majú svoje nezastupiteľné miesto v rôznych odboroch ako je optika či mechanika ([2]). My sa v tejto práci zameriame na ich využitie v rámci hudby .

1.1 Harmonický pohyb

Podľa [4], zvuk možno charakterizovať ako každé pozdĺžne mechanické vlnenie v látkovom prostredí, ktoré je schopné vyvolať v prijímacom orgáne sluchový vnem. Zvuk vzniká chvením hmoty, ktorá toto chvenie predáva hmotným časticiam v prostredí. Prostredie, ktorým sa vlnenie šíri, nazývame vodič zvuku. Obvykle je to vzduch, v ktorom dochádza k zhutňovaniu a zriedňovaniu častíc, ktoré postupujú ako zvuková vlna.

V tejto kapitole si na základe [8] definujeme periodický pohyb (resp. periodickú funkciu).

Definícia 1.1 ([8], str.578). *Reálna funkcia f jednej premennej sa nazýva periodickou funkciou, ak existuje také číslo $T > 0$, že*

$$1. \theta \in D(f) \implies \theta + T \in D(f), \theta - T \in D(f)$$

$$2. f(\theta + T) = f(\theta) \text{ pre všetky } \theta \in D(f)$$

Číslo T nazývame periódou funkcie f .

Z vlastnosti 2 vyplýva, že pre každé prirodzené číslo n a každé $\theta \in D(f)$ platí:

$$f(\theta + nT) = f(\theta - nT) = f(\theta),$$

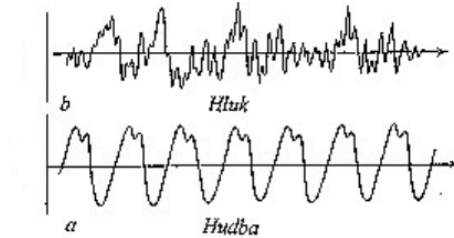
a teda ak T je perióda funkcie f , potom aj nT , $n \in \mathbb{N}$, je jej periódou. Periodická funkcia má tak nekonečne veľa periód, pričom najmenšia perióda sa nazýva základná perióda funkcie f . Výnimkou je konštantná funkcia, ktorá spĺňa podmienky periodickosti podľa definície 1.1, ale základnú periódu nemá. Medzi najjednoduchšie periodické funkcie patria funkcie $\sin(n\theta)$ a $\cos(n\theta)$. Ich perióda je $\frac{2\pi}{n}$ a pre každé číslo θ platí:

$$\sin(n(\theta + 2k\pi)) = \sin(n\theta)$$

$$\cos(n(\theta + 2k\pi)) = \cos(n\theta),$$

kde $k \in \mathbb{Z}$.

Hudba je tvorená hudobnými zvukmi - tónmi, ktoré majú pravidelný periodický časový priebeh, čím sa hudba líši od hluku, viď. Obrázok 1 ([6]).



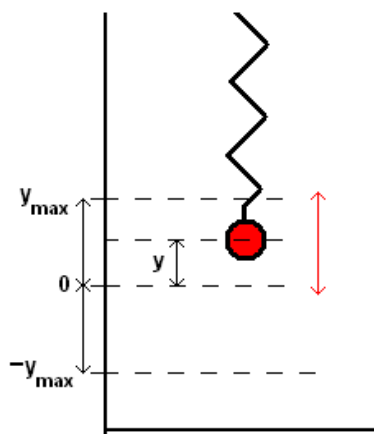
Obr. 1: Grafické znázornenie hudby a hluku. Zdroj: [6]

Podľa [2] sa periodické pohyby, či už jednoduché alebo zložitejšie, dajú opísať diferenciálnymi rovnicami, avšak riešenie takýchto rovníc môže byť matematicky komplikované. Najjednoduchšiou rovnicou popisujúcou kmitavý pohyb je *lineárna diferenciálna rovnica s konštantnými koeficientami*:

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = f(t). \quad (1)$$

V rovnici (1) premenná t označuje čas a y výchylku z rovnovážnej polohy.

V hudbe a akustike bol na popis pohybu vlnenia zavedený pojem *harmonický pohyb* ([1]) ako najjednoduchší kmitavý pohyb. Takýto pohyb vzniká napríklad pri pohybe telesa zaveseného na pružine, graficky ho zobrazuje Obrázok 2.



Obr. 2: Harmonický oscilátor.

Sústava pružina + teleso na Obrázku 2 sa nazýva *harmonický oscilátor*. Ak je teleso ustálené v rovnovážnej polohe, teda výchylka $y = 0$, teleso sa nehýbe. Pri vychýlení telesa z rovnováhy naň začne pôsobiť pružina silou tak, že sa bude snažiť vrátiť teleso do ekvilibria. V dôsledku tejto sily vzniká kmitanie, pričom y_{max} určuje maximálnu možnú výchylku telesa. Teleso tak kmitá medzi hodnotami y_{max} a $-y_{max}$, pričom počet kmitov za sekundu udáva *frekvencia*, ktorú označujeme symbolom f a jej jednotka v sústave SI je Hertz. Doba, za ktorú sa uskutoční jeden úplný kmit sa nazýva *perióda pohybu* T . Platí teda vzťah:

$$T = \frac{1}{f}. \quad (2)$$

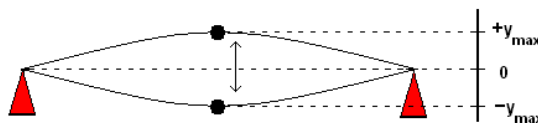
Vychádzajúc z [1], teleso o hmotnosti m vykonáva harmonický pohyb, ak naň pôsobí sila F priamoúmerná výchylke y telesa z rovnovážnej polohy a orientovaná proti výchylke. Túto závislosť vyjadrujeme pomocou *Hookovho zákona*:

$$F = -ky, \quad (3)$$

kde $k \in \mathbb{R}$ je kladná konštanta a znamienko mínus vyjadruje smer pôsobenia sily.

Ak je vzdialenosť y od ekvilibría kladná, sila pôsobiaca na teleso má záporný smer.

Názorným príkladom kmitania v sfére hudby sú strunové nástroje. Uvažujme podľa [4] strunu, ktorá je na koncoch pevne uchytená a v jej strede je guľôčka s hmotnosťou m . Struna pri rozkmitaní vynaloží na guľôčku silu F smerom k rovnovážnej polohe, ktorá je priamoúmerná vzdialenosti y od ekvilibría.



Obr. 3: Kmitanie struny.

Rýchlosť kmitajúcej guľičky pri maximálnej výchylke je nulová a naopak, pri nulovej výchylke je maximálna. Podľa [1] ju môžeme vyjadriť ako deriváciu polohovej súradnice guľičky podľa času: $v(t) = \frac{dy}{dt}$. Deriváciou rýchlosti podľa času tak dostávame zrýchlenie guľičky: $a(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2}$. Pomocou *Newtonovho zákona* silu pôsobiacu na guľičku vyjadríme vzťahom:

$$F = ma, \quad (4)$$

pričom m určuje hmotnosť a a zrýchlenie guľičky.

Spojením Hookovho a Newtonovho zákona, teda rovníc (3) a (4), dostávame diferenciálnu rovnicu popisujúcu harmonický pohyb:

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{k}{m}y = 0. \quad (5)$$

Riešením takejto rovnice je funkcia

$$y(t) = A \cos \sqrt{\frac{k}{m}}t + B \sin \sqrt{\frac{k}{m}}t, \quad (6)$$

kde $A \in \mathbb{R}$ a $B \in \mathbb{R}$ sú konštanty. Túto možno vhodnou substitúciou $A = c \sin \gamma$,

$B = c \cos \gamma$ pre nejaké $c \in \mathbb{R}$, $\gamma \in \mathbb{R}$ upraviť na tvar

$$y(t) = c \sin(\sqrt{\kappa}t + \gamma), \quad (7)$$

pričom c určuje veľkosť maximálnej výchylky v oboch smeroch, čiže amplitúdu. Funkcia sínus sa mení medzi krajnými hodnotami ± 1 , takže výchylka $y(t)$ sa mení medzi krajnými hodnotami $\pm c$. Parameter γ vyjadruje posun grafu (fázový posun, phase shift) a $\sqrt{\kappa} = \sqrt{\frac{k}{m}}$ určuje uhlovú rýchlosť (uhlovú frekvenciu, angular frequency). Po uplynutí jednej periódy T sa musí častica vrátiť do vychádzajúcej polohy. Z toho vyplýva, že

$$y(t) = y(t + T), \quad \text{pre všetky } t \in \mathbb{R}. \quad (8)$$

Vychádzajúc z [1] položíme pre jednoduchosť v rovnici (7) $\gamma = 0$. Z uvedenej podmienky dostávame

$$c \sin(\sqrt{\kappa}t) = c \sin(\sqrt{\kappa}(t + T)).$$

Funkcia sínus má periódu 2π radiánov, predchádzajúca rovnica teda dáva

$$\sqrt{\kappa}t + 2\pi = \sqrt{\kappa}(t + T)$$

a odtiaľ

$$\sqrt{\kappa} = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f.$$

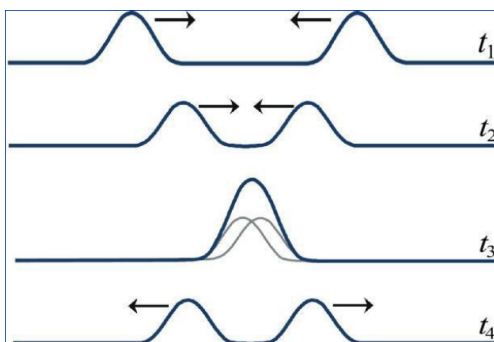
Keďže riešením diferenciálnej rovnice (5) je rovnica (7), šírenie zvuku popisujeme pomocou sínusovej vlny. Grafom výchylky harmonického pohybu v závislosti od času je teda sínusoida ([4]).

1.2 Superpozícia

Ľudské ucho pri počúvaní zvukov dokáže rozlíšiť "čistotu tónu". Vychádzajúc z [2], pod "čistým tónom" rozumieme zvuk jednej jedinej frekvencie, teda taký, ktorého priebeh je čiste harmonický. V reálnom svete však takéto tóny neexistujú. Zvuk, ktorý zachytí naše ucho, je sumou viacerých vln s rôznymi frekvenciami a amplitúdami ([4]). Tóny majú ale vždy periodický, aj keď komplikovaný a nie harmonický priebeh, na rozdiel od šumov, ktorých priebeh je nepravidelný. Pri skladaní vln, ktoré prechádzajú tým istým bodom priestoru, alebo postupujú rovnakým smerom, s rovnakými frekvenciami, ale všeobecne s odlišnými fázami, nastáva interferencia, ktorá sa prejavuje zosilnením alebo zoslabením intenzity vo výslednom vlnení ([2]). Zložitejšie prípady skladania vln vznikajú pri vlnách rôznych frekvencií. V miestach, kde sa vlnenia prekrývajú, sa môžu vzájomne ovplyvňovať, ale následne postupujú ďalej, akoby sa šírili samostatne ([9]).

Predpokladajme podľa [1], že v tej istej strune prechádzajú súčasne dve vlny. Výchylky telesa (resp. pevného bodu) pri priebehu prvej vlny označme $y_1(t)$ a pri priebehu druhej vlny $y_2(t)$. Pri prekrytí oboch vln sa výchylky algebraicky sčítajú a vytvárajú jednu výslednú vlnu, ktorej výchylky sú určené vzťahom

$$y(t) = y_1(t) + y_2(t). \quad (9)$$



Obr. 4: Sériá štyroch snímok dvoch proti sebe sa šíriacich vlnení. V mieste, kde sa vlnenia prekrývajú, využijeme princíp superpozície. Zdroj: [9], str.3.

Na Obrázku 4 vidíme, že v čase t_3 je výchylka rovná súčtu okamžitých výchyliek

oboch vlnení. V prípade spojitých vlnení, ktoré sa v prostredí prekrývajú, môžeme pozorovať výsledné vlnenie. Tvar výslednej vlny závisí od druhu vlnení, ktoré sa prekrývajú.

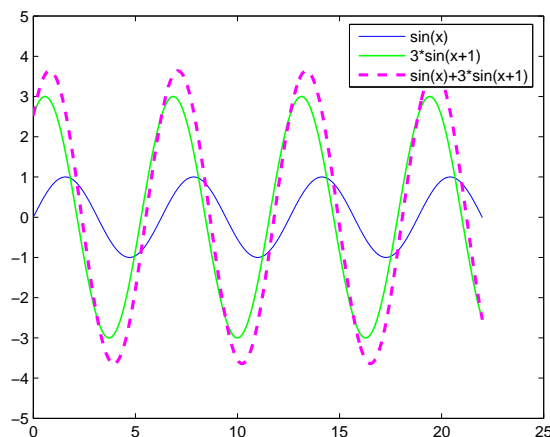
Veta 1.2 ([8], str.580). *Nech sú funkcie f a g periodické s periódou T . Potom sú periodické s periódou T aj funkcie $f + g$, $f \cdot g$, f/g a f^n , $n \in \mathbb{N}$.*

Dôkaz. Ak sú funkcie f a g periodické s periódou T , t.j. pre každé číslo θ platí $f(\theta + T) = f(\theta)$, $g(\theta + T) = g(\theta)$, potom

- $f(\theta + T) + g(\theta + T) = f(\theta) + g(\theta)$
- $f(\theta + T) \cdot g(\theta + T) = f(\theta) \cdot g(\theta)$
- $\frac{f(\theta+T)}{g(\theta+T)} = \frac{f(\theta)}{g(\theta)}$ pre všetky θ , také že $g(\theta) \neq 0$
- $f^n(\theta + T) = f^n(\theta)$,

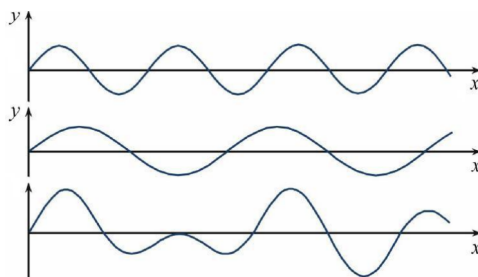
a teda funkcie $f + g$, $f \cdot g$, f/g a f^n sú periodické s periódou T . □

Tvrdenie 1.3 ([8], str.580). *Súčet konečného počtu periodických funkcií s periódou T je takisto periodická funkcia s tou istou periódou T .*



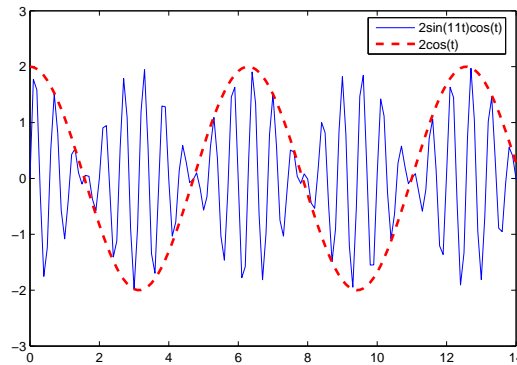
Obr. 5: Interferencia vlnení s rôznymi amplitúdami a fázou, ale s rovnakou frekvenciou.

Na základe Vety 1.2 teda vieme, že pri skladaní harmonických vln s rovnakou periódou (resp. rovnakou frekvenciou), bude výsledným vlnením opäť harmonické vlnenie s rovnakou periódou (resp. frekvenciou). Na Obrázku 5 pozorujeme skladanie dvoch harmonických vlnení s rôznymi amplitúdami a fázou, pričom ich frekvencia je rovnaká. Výsledné vlnenie je opäť harmonické s rovnakou frekvenciou, ale s amplitúdou väčšou ako je amplitúda jednotlivých vlnení. Vo všeobecnosti platí, že pri skladaní tohto typu vln môže byť amplitúda výsledného vlnenia väčšia i menšia ako amplitúda počiatočných vlnení. Ak je amplitúda výsledného vlnenia súčtom amplitúd jednotlivých vlnení, hovoríme o interferenčnom zosilnení a ak je rozdielom amplitúd jednotlivých vlnení, hovoríme interferenčnom zoslabení ([4]).



Obr. 6: Superpozícia dvoch harmonických vln s rovnakou amplitúdou, ale s rôznymi frekvenciami ([9]).

Obrázok 6 znázorňuje situáciu skladania dvoch vln s rovnakou amplitúdou, pričom však s odlišnými frekvenciami. Výsledné vlnenie už nie je harmonické, ale zostáva periodické. Pri skladaní tohto druhu vln môžeme v špeciálnych prípadoch pozorovať jav nazývaný "beat". Beat vzniká interakciou medzi dvoma zvukovými vlnami, ktoré majú mierne odlišnú frekvenciu. Vnímame ho ako periodickú zmenu hlasitosti. Hlasitosť mení striedavo svoju intenzitu tak, ako sa mení výchylka vlnenia, t.j. čím je výchylka väčšia, tým je hlasitosť silnejšia. Pri vzájomnom približovaní frekvencií (napr. pri ladení hudobných nástrojov) sa vibrácia hlasitosti spomaľuje, až pri ich úplnej zhode napokon zanikne. Tóny tak nadobudnú súlad ([4]). Tento jav môžeme pozorovať na Obrázku 7:



Obr. 7: Superpozícia dvoch vln s mierne odlišnou frekvenciou.

Obrázok 7 znázorňuje superpozíciu $y = \sin(12t) + \sin(10t) = 2 \sin(11t) \cos(t)$ ([4]).

Jav možno demonštrovať na jednoduchom prípade, kde amplitúdy oboch sínusových vln sú jednotkové. Súčet týchto vln, $\sin(2\pi f_1 t) + \sin(2\pi f_2 t)$, má po úprave na súčin tvar: $2 \cos\left(2\pi \frac{f_1 - f_2}{2} t\right) \sin\left(2\pi \frac{f_1 + f_2}{2} t\right)$, pričom $f_1 \in \mathbb{R}$ (resp. $f_2 \in \mathbb{R}$) určuje frekvenciu prvého (resp. druhého) vlnenia. Ak frekvencie dvoch sínusových vlnení sú dosť blízko (rozdiel niekoľko Hertzov), frekvencia kosínusového faktora na pravej strane rovnice, rovná $\frac{f_1 - f_2}{2}$, je často veľmi malá na to, aby sme ju vnímali ako tón. Dôsledkom toho je, že kosínus určuje amplitúdu sínusového vlnenia. Ako vidíme na obrázku, kosínus "zaobaluje" sínusové vlnenie, ktorého frekvencia, $\frac{f_1 + f_2}{2}$, je priemerom frekvencií oboch sínusových vlnení.

Pri zahrnutí fázového posunu a amplitúdy by vyššie uvedený súčet vlnení vyzeral takto:

$$\begin{aligned}
 & c \sin(2\pi f_1 t + \alpha) + c \sin(2\pi f_2 t + \beta) \\
 & = \\
 & 2c \sin\left(2\pi \frac{f_1 + f_2}{2} t + \frac{1}{2}(\alpha + \beta)\right) \cos\left(2\pi \frac{f_1 - f_2}{2} t + \frac{1}{2}(\alpha - \beta)\right),
 \end{aligned}$$

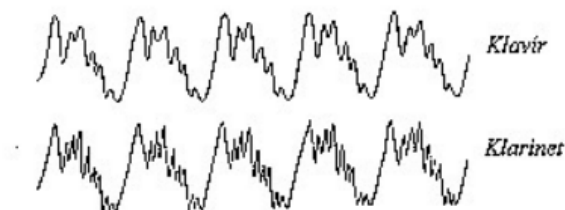
kde $\alpha \in \mathbb{R}$ a $\beta \in \mathbb{R}$ predstavujú fázové posuny vlnení.

Pri uvážení rovnice (6) a toho, že pri brnknutí na strunu je výsledkom periodické vlnenie, ktoré je sumou viacerých vln s rôznymi amplitúdami a frekvenciami,

môžeme, podľa [4], vo všeobecnosti napísať rovnicu pohybu bodu na strune ako

$$y = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos\left(n\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) + B_n \sin\left(n\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) \right). \quad (10)$$

Amplitúdy vlnenia závisia aj od toho, akým spôsobom je struna rozozvučená. Napríklad pri rozozvučení struny kladivkom (klavír) vzniknú iné amplitúdy vlnenia ako pri rozozvučení struny brnknutím (gitara) ([4]). Takisto je dôležité uvedomiť si, že tón, ktorý v skutočnosti vzniká, obsahuje aj viacero vyšších harmonických frekvencií. Pomer zastúpenia vyšších harmonických frekvencií nám umožňuje rozoznávať farbu tónu rôznych hudobných nástrojov ([6]).



Obr. 8: Tóny rovnakej frekvencie zahrané na klavíri a klarinete [6].

Na Obrázku 8 vidíme, že tón zahráný na klarinete obsahuje viac vyšších harmonických frekvencií ako tón s rovnakou frekvenciou zahráný na klavíri.

1.3 Tlmený harmonický pohyb

Ak na systém, v ktorom sú kmity opísané rovnicou (7), nepôsobí nijaká vonkajšia sila, systém môže vykonávať kmity nekonečne dlho ([2]). V reálnom svete je kmitanie obvykle tlmené, pretože v ňom existujú trecie sily alebo iný odpor pôsobiaci proti pohybu. Tieto sily postupne menia mechanickú energiu na teplo a pohyb ustáva ([1]). Po rozozvučení struny môžeme zreteľne počuť, ako intenzita zvuku postupne klesá, až zvuk úplne zanikne.

Vychádzajúc z [2], sila spôsobujúca útlm pri malých výchylkách, je úmerná rýchlosti, t.j.

$$F_{\text{utlmu}} = -\mu v,$$

kde konštanta μ sa nazýva koeficient útlmu a v je rýchlosť harmonického pohybu. Rovnicu (3) teda môžeme upraviť na tvar

$$F = -ky - \mu v = -ky - \mu \frac{dy}{dt}.$$

S použitím Newtonovho zákona, ktorý predstavuje rovnica (4), dostávame diferenciálnu rovnicu popisujúcu tlmený harmonický pohyb v tvare

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} + \mu \frac{dy}{dt} + ky = 0. \quad (11)$$

Riešenie diferenciálnej rovnice tohto typu už nehľadáme v tvare trigonometrických funkcií, ale v tvare $y = e^{\alpha t}$, pričom využijeme Eulerovu formulu z [2]

$$e^{i\alpha} = \cos \alpha + i \sin \alpha.$$

Aby y bolo riešením diferenciálnej rovnice (11), musí byť α riešením pomocnej rovnice podľa [3, 4]:

$$mY^2 + \mu Y + k = 0.$$

Riešenie diferenciálnej rovnice (11) teda závisí od diskriminantu pomocnej rovnice:

$$D = \mu^2 - 4mk.$$

- Ak $D > 0$, potom $\alpha = \frac{-\mu + \sqrt{D}}{2m}$, $\beta = \frac{-\mu - \sqrt{D}}{2m}$ a riešením diferenciálnej rovnice je:

$$y = Ae^{\frac{-\mu + \sqrt{D}}{2m}t} + Be^{\frac{-\mu - \sqrt{D}}{2m}t}. \quad (12)$$

- Ak $D = 0$, t.j. $\alpha = \beta$, riešenie diferenciálnej rovnice má tvar:

$$y = Ae^{\frac{-\mu+\sqrt{D}t}{2m}} + Bte^{\frac{-\mu+\sqrt{D}t}{2m}}. \quad (13)$$

- Ak $D < 0$, potom $\alpha = \frac{-\mu+i\sqrt{-D}}{2m}$, $\beta = \frac{-\mu-i\sqrt{-D}}{2m}$, kde $i = \sqrt{-1}$.

Riešením diferenciálnej rovnice je

$$y = e^{\frac{-\mu t}{2m}} \left(Ae^{\frac{it\sqrt{-D}}{2m}} + Be^{\frac{-it\sqrt{-D}}{2m}} \right).$$

Použitím už spomínanej Eulerovej formuly dostávame

$$y = e^{\frac{-\mu t}{2m}} \left((A+B) \cos\left(\frac{t\sqrt{-D}}{2m}\right) + i(A-B) \sin\left(\frac{t\sqrt{-D}}{2m}\right) \right).$$

Po substitúcii $A' = i(A-B)$, $B' = (A+B)$ vyzerá riešenie danej diferenciálnej rovnice teda takto:

$$y = e^{\frac{-\mu t}{2m}} \left(A' \sin\left(\frac{t\sqrt{-D}}{2m}\right) + B' \cos\left(\frac{t\sqrt{-D}}{2m}\right) \right). \quad (14)$$

Príklad 1. Na kmitajúcu gitarovú strunu, ktorej pohyb je opísaný diferenciálnou rovnicou

$$\frac{1}{2} \frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{101}{200} y = 0$$

pôsobí tlmiaca sila $F_u = -\frac{1}{10}v$. Aké je riešenie diferenciálnej rovnice, ktorá tento útlm:

- neobsahuje,
- obsahuje?

Budeme uvažovať začiatočné podmienky: $y(0) = 1$, $\frac{dy}{dt}(0) = \frac{9}{10}$.

Riešenie

- Uvažujme najskôr kmitanie struny bez pôsobenia tlmiacej sily F_u . Aby y bolo riešením diferenciálnej rovnice $\frac{1}{2} \frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{101}{200} y = 0$, musí byť α riešením pomocnej rovnice

$$\frac{1}{2} \alpha^2 + \frac{101}{200} = 0.$$

Ľahko vyjadríme, že $\alpha_{1,2} = \pm i\sqrt{\frac{101}{100}}$ a riešenie bude mať podľa rovnice (14) tvar:

$$y(t) = A \cos \sqrt{\frac{101}{100}}t + B \sin \sqrt{\frac{101}{100}}t.$$

Potrebuje dopočítať konštanty A a B zo začiatkových podmienok, preto si vyjadríme prvú deriváciu y podľa času:

$$\frac{dy}{dt} = -A \sin \sqrt{\frac{101}{100}}t + B \cos \sqrt{\frac{101}{100}}t.$$

Po dosadení $t=0$ do oboch rovníc ľahko dopočítame obe konštanty. Dostávame $A = 1$, $B = \frac{9}{10}$ a riešenie vo výslednom tvare

$$y(t) = \cos \sqrt{\frac{101}{100}}t + \frac{9}{10} \sin \sqrt{\frac{101}{100}}t.$$

- Teraz do diferenciálnej rovnice pridáme aj útlm. Vieme, že platí: $v = \frac{dy}{dt}$, teda po zahrnutí tlmiacej sily dostávame rovnicu:

$$\frac{1}{2} \frac{d^2y}{dt^2} + \frac{1}{10} \frac{dy}{dt} + \frac{101}{200}y = 0.$$

Z pomocnej rovnice

$$\frac{1}{2}\alpha^2 + \frac{1}{10}\alpha + \frac{101}{200} = 0$$

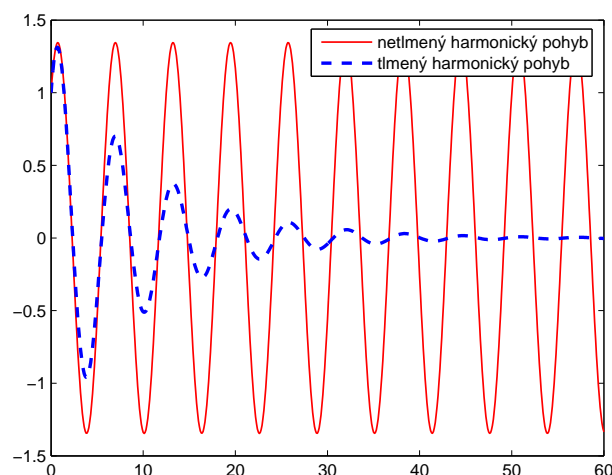
vyjadríme $\alpha_{1,2} = -\frac{1}{10} \pm i$, riešenie diferenciálnej rovnice bude mať teda tvar

$$e^{-\frac{1}{10}t} (A \cos t + B \sin t).$$

Podobne ako v predošlom prípade vyjadríme konštanty A a B zo začiatkových podmienok a dostávame $A = 1$, $B = 1$, pričom riešenie má tvar:

$$e^{-\frac{1}{10}t} (\cos t + \sin t).$$

- Obe riešenia si ukážeme graficky na nasledujúcom obrázku:



Obr. 9: Tlmený a netlmený harmonický pohyb.

Obrázok 9 znázorňuje výchylku struny v čase t . Vidíme, že táto výchylka sa v prípade tlmeného harmonického pohybu postupne znižuje, t.j. kmitanie slabne až sa nakoniec struna ustáli vo svojej rovnovážnej polohe. V prípade netlmeného harmonického pohybu sa amplitúda v čase nemení.

1.4 Vynútený harmonický pohyb

Keďže reálne kmitanie je vždy tlmené, je zrejmé, že ak tieto kmity nebudeme obnovovať, po určitom čase zaniknú. Pokiaľ chceme kmitanie telesa udržať, musíme dopĺňať energiu, ktorú teleso pri kmitaní stráca. Toto možno podľa [2] urobiť napríklad tak, že budeme na teleso zavesené na pružine pôsobiť periodicky sa meniacou silou. Periodickým pôsobením sily vzniká vynútené kmitanie, ktoré už ale nie je voľným kmitaním, pretože na teleso pôsobí vonkajšia sila. Od tejto sily vo veľkej miere závisí charakter kmitov, ktoré takýto systém popisuje, na rozdiel od vlastných - voľných kmitov, kde sme brali do úvahy len vlastnosti samotnej kmitajúcej sústavy. Na základe [2] tak môžeme povedať, že vynútené kmity sú kmity, ktoré prebiehajú pod vplyvom vonkajších periodických síl pôsobiacich nezávisle od vlastných kmitov systému. Keď sa frekvencia vynúteného kmitania rovná frekvencii vlastných kmitov, nastáva jav, ktorý nazývame *rezonancia*.

Vynútený harmonický pohyb spôsobuje vznik zvuku vo väčšine hudobných nástrojov a diferenciálna rovnica popisujúca tento pohyb má tvar:

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} + \mu \frac{dy}{dt} + ky = f(t),$$

kde $f(t)$ predstavuje externú silu.

2 Fourierove rady

Otázkou, ako môže struna vibrovať s viacerými rôznymi frekvenciami v tom istom čase, sa zaoberalo viacero matematikov a hudobníkov už v 17. a 18. storočí. Medzi ľuďmi, ktorí sa snažili nájsť odpoveď na túto otázku, patria francúzski matematici Marin Mersenne a Jean-le-Rond d'Alembert, švajčiarski matematici Daniel Bernoulli a Leonhard Euler, rodina Johanna Sebastiana Bacha a v neposlednom rade francúzsky matematik Jean Baptiste Joseph Fourier ([4]). Trigonometrickými radmi sa v histórii po prvýkrát zaoberal v 17. storočí I. Newton, ktorý sa pomocou týchto radov pokúšal vyriešiť úlohu kvadratúry. Skutočný záujem o trigonometrické rady však vyvolal v 18. storočí D. Bernoulli, ktorý našiel riešenie úlohy kmitania struny v tvare trigonometrického radu. Avšak nevedel nájsť metódu, ako určiť koeficienty tohto radu. Vznikol tiež problém týkajúci sa možnosti rozvoja funkcií do trigonometrického radu, ktorý vyvolal ostré spory medzi matematikmi prameniace najmä z vtedajších nevyjasnených pojmov nekonečného radu a funkcie ([7]). Francúzsky fyzik a matematik Jean Baptiste Joseph Baron de Fourier (1768 - 1830) vypracoval veľmi užitočnú a elegantnú matematickú techniku na analýzu fyzikálnych a matematických problémov, v ktorých sa uplatňujú periodické deje, ako napríklad analýza akustických, mechanických a elektrických kmitov, pri kruhových pohyboch alebo v teórii pružnosti. Ukázal, že každú funkciu $f(\theta)$, ktorá je periodická s periódou T , možno rozložiť na súčet harmonických funkcií. Tieto harmonické funkcie vytvárajú rad, ktorý sa nazýva *trigonometrickým radom* alebo *Fourierovým radom* ([2]):

$$f(\theta) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(n\theta) + b_n \sin(n\theta)) \quad (15)$$

Funkcionálny rad tvaru (15) nazývame trigonometrickým radom s periódou 2π , pričom čísla $a_0, a_1, \dots, a_n, \dots, b_1, \dots, b_n, \dots$ nazývame koeficientmi tohto trigonometrického radu ([4]). Keďže funkcie sínus a kosínus sú periodickými funkciami, vieme na základe Vety 1.2, že súčet trigonometrického radu (15) je takisto periodická funkcia.

2.1 Fourierove koeficienty

Fourier predstavil myšlienku, že každú periodickú funkciu $f(\theta)$, a teda aj zvukové vlnenia v hudbe, možno rozložiť na trigonometrický rad (15). V tejto časti si preto na základe [4] vyjadríme koeficienty Fourierovho radu pre spojité periodické vlnenie (funkciu) s periódou 2π , ku ktorému existuje trigonometrický rad, ktorý rovnomerne konverguje na intervale $\langle 0, 2\pi \rangle$ k tomuto vlneniu (funkcii). Platí teda:

$$f(\theta) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(n\theta) + b_n \sin(n\theta)) \quad \text{pre } \theta \in \langle 0, 2\pi \rangle \quad (16)$$

Skôr ako prejdeme k vyjadreniu koeficientov tohto radu, uvedieme na základe [4] niekoľko vzťahov:

Nech $m \geq 0$, $n \geq 0$, potom

$$\int_0^{2\pi} \cos(k\theta) d\theta = 0, \quad \int_0^{2\pi} \sin(k\theta) d\theta = 0 \quad k \in \mathbb{N} \quad (17)$$

$$\int_0^{2\pi} \cos(m\theta) \sin(n\theta) d\theta = 0 \quad (18)$$

$$\int_0^{2\pi} \cos(m\theta) \cos(n\theta) d\theta = \begin{cases} 2\pi & \text{ak } m = n = 0 \\ \pi & \text{ak } m = n > 0 \\ 0 & \text{inak} \end{cases} \quad (19)$$

$$\int_0^{2\pi} \sin(m\theta) \sin(n\theta) d\theta = \begin{cases} \pi & \text{ak } m = n > 0 \\ 0 & \text{inak} \end{cases} \quad (20)$$

V dôsledku rovnomernej konvergencie trigonometrického radu môžeme rad (16) integrovať člen po člene na intervale $\langle 0, 2\pi \rangle$:

$$\int_0^{2\pi} f(\theta) d\theta = \frac{a_0}{2} \int_0^{2\pi} d\theta + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \int_0^{2\pi} \cos(n\theta) d\theta + b_n \int_0^{2\pi} \sin(n\theta) d\theta \right).$$

Na základe vzťahov (17) sú integrály pravej strany rovnice, okrem prvého, rovné nule. Z toho po úprave dostávame vzťah pre výpočet koeficientu a_0 :

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) d\theta \quad (21)$$

Aby sme vyjadrili koeficienty a_m , vynásobíme obe strany rovnice (16) funkciou $\cos(m\theta)$, $m > 0$, a opäť integrujeme na intervale $\langle 0, 2\pi \rangle$:

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \cos(m\theta)f(\theta)d\theta &= \int_0^{2\pi} \cos(m\theta) \left(\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(n\theta) + b_n \sin(n\theta)) \right) d\theta = \\ &= \frac{a_0}{2} \int_0^{2\pi} \cos(m\theta)d\theta + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \int_0^{2\pi} \cos(m\theta) \cos(n\theta)d\theta + b_n \int_0^{2\pi} \cos(m\theta) \sin(n\theta)d\theta \right). \end{aligned}$$

V dôsledku vzťahov (18), (19) po úprave dostávame:

$$\int_0^{2\pi} \cos(m\theta)f(\theta)d\theta = \pi a_m,$$

z čoho vyjadríme vzorec na výpočet koeficientov a_m :

$$a_m = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \cos(m\theta)f(\theta)d\theta \quad m = 1, 2, \dots \quad (22)$$

Pri vyjadrení koeficientov b_m vynásobíme rovnosť (16) funkciou $\sin(m\theta)$ a budeme postupovať podobne ako v predchádzajúcom prípade. Po integrovaní a uvážení vzťahov (18), (20) dostávame vzorec na výpočet koeficientov b_m :

$$b_m = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \sin(m\theta)f(\theta)d\theta \quad m = 1, 2, \dots \quad (23)$$

Vzťahy (21), (22) a (23) pre a_0 , a_m a b_m (resp. a_n a b_n) nazývame *Fourierove vzorce* a trigonometrický rad vyjadrený pomocou Fourierových vzorcov nazývame *Fourierovým radom* funkcie $f(\theta)$.

Treba pripomenúť, že Fourierov rad funkcie $f(\theta)$ môžeme robiť na ľubovoľnom intervale dĺžky 2π , teda na ľubovoľnom intervale $\langle a, a + 2\pi \rangle$, kde $a \in \mathbb{R}$. Často je vhodnejšie použiť interval $\langle -\pi, \pi \rangle$.

2.2 Podmienky konvergenzie

V predchádzajúcej časti sme vyjadrili vzťah na výpočet koeficientov Fourierovho radu funkcie $f(\theta)$. Vo všeobecnosti však neplatí, že ak pomocou vzťahov (21), (22) a (23) vyjadríme koeficienty a_n a b_n , pravá strana rovnice (15) bude konvergovať k funkcii $f(\theta)$. Platí to len pre funkcie spĺňajúce určité podmienky. V tejto stati vyšetříme, aké vlastnosti musí mať funkcia $f(\theta)$, aby jej zodpovedajúci Fourierov rad konvergoval a jeho súčet sa v daných bodoch rovnal danej funkcii.

Definícia 2.1 ([5], str.29). *Funkcia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sa nazýva po častiach spojitá, ak má na ľubovoľnom ohraničenom intervale $\langle a, b \rangle$, $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$, najviac konečne veľa bodov nespojitosti, ktoré sú 1.druhu. To znamená, že ak $x_0 \in \langle a, b \rangle$ je bod nespojitosti funkcie f , tak limity $\lim_{x \rightarrow x_0+} f(x)$ a $\lim_{x \rightarrow x_0-} f(x)$ existujú a sú vlastné.*

Ak x_0 je koncovým bodom intervalu, žiadame prirodzene existenciu len jednej z obidvoch limit.

Definícia 2.2 ([7], str.267). *Funkcia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sa nazýva po častiach spojitě diferencovateľná, ak je po častiach spojitá, na ľubovoľnom ohraničenom intervale $\langle a, b \rangle$, $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$, má najviac konečne veľa bodov x_{0_i} , $i = 1, 2, \dots, n$, $n \in \mathbb{N}$, v ktorých nie je diferencovateľná a v každom z nich existujú vlastné limity $\lim_{x \rightarrow x_{0_i}+} f'(x)$ a $\lim_{x \rightarrow x_{0_i}-} f'(x)$.*

Veta 2.3 ([8], str.604). *Ak periodická funkcia f s periódou $2L$ je po častiach spojitě diferencovateľná na intervale periodicity $\langle a, a + 2L \rangle$, $a \in \mathbb{R}$, tak jej Fourierov rad je konvergentný na intervale $(-\infty, \infty)$ a pre jeho súčet S platí:*

$$\begin{aligned} 1. S(t) &= f(t), \quad \text{ak v bode } t \text{ je funkcia } f \text{ spojitá} \\ 2. S(t) &= \frac{1}{2} \left(\lim_{x \rightarrow t+} f(x) + \lim_{x \rightarrow t-} f(x) \right), \quad \text{ak } t \text{ je bod nespojitosti funkcie } f. \end{aligned} \tag{24}$$

Veta 2.3 hovorí, že postačujúcou podmienkou na to, aby Fourierov rad periodickej funkcie bol konvergentný na intervale $(-\infty, \infty)$, je spojitá diferencovateľnosť tejto funkcie po častiach na intervale periodicity. Súčet radu sa rovná v bodoch spojitosti hodnote funkcie v tomto bode, v bode nespojitosti aritmetickému priemeru jej limity zľava a limity sprava v tomto bode.

Druhým základným kritériom konvergencie Fourierovho radu je *Dirichletovo kritérium* ([8]). Hovoríme, že funkcia f spĺňa na intervale $\langle a, b \rangle$ *Dirichletove podmienky*, ak

1. je na intervale $\langle a, b \rangle$ po častiach spojitá,
2. na intervale $\langle a, b \rangle$ má iba konečný počet ostrých lokálnych extrémov.

Veta 2.4 ([8], str.604). [*Dirichletova veta*] Ak periodická funkcia f s periódou $2L$ spĺňa na intervale periodicity *Dirichletove podmienky*, tak jej Fourierov rad je konvergentný na intervale $(-\infty, \infty)$ a pre jeho súčet S platí:

$$\begin{aligned} 1. S(t) &= f(t), \quad \text{ak funkcia } f \text{ je v bode } t \text{ spojitá} \\ 2. S(t) &= \frac{1}{2} \left(\lim_{x \rightarrow t+} f(x) + \lim_{x \rightarrow t-} f(x) \right), \quad \text{ak } t \text{ je bod nespojitosti funkcie } f. \end{aligned} \quad (25)$$

Dirichletova veta hovorí, že rovnosti (24) z vety 2.3 platia aj vtedy, ak funkcia f spĺňa na intervale periodicity *Dirichletove podmienky*.

Ak je funkcia f v bode t spojitá, tak $\lim_{x \rightarrow t+} f(x) = \lim_{x \rightarrow t-} f(x) = f(t)$, a teda

$$\frac{1}{2} \left(\lim_{x \rightarrow t+} f(x) + \lim_{x \rightarrow t-} f(x) \right) = f(t).$$

Preto rovnosti (24) môžeme nahradiť jednou rovnosťou

$$S(t) = \frac{1}{2} \left(\lim_{x \rightarrow t+} f(x) + \lim_{x \rightarrow t-} f(x) \right) \quad t \in (-\infty, \infty).$$

To znamená, ak sú splnené predpoklady vety 2.3 a vety 2.4 pre funkciu f s periódou 2π , tak pre každé $t \in (-\infty, \infty)$ platí

$$\frac{1}{2} \left(\lim_{x \rightarrow t+} f(x) + \lim_{x \rightarrow t-} f(x) \right) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt)), \quad (26)$$

kde $a_0, a_n, b_n, n \in \mathbb{N}$ sú Fourierove koeficienty funkcie f .

Ak Fourierov rad periodickej funkcie f s periódou $2L$ konverguje na intervale $(-\infty, \infty)$ tak, že pre každé $t \in (-\infty, \infty)$ platí rovnosť (26), budeme hovoriť, že funkcia f sa dá rozvinúť do Fourierovho radu alebo že sa dá vyjadriť svojím Fourierovým radom ([8]).

2.3 Periodické funkcie s periódou $2L$

V tejto kapitole si podľa [8] ukážeme vzťahy pre koeficienty Fourierovho radu v prípade periodických funkcií s periódou $2L$. Pre všetky $\theta \in D(f)$ periodickej funkcie s periódou $2L$ platí:

$$f(\theta + 2L) = f(\theta).$$

Po substitúcii $\theta = \frac{Lt}{\pi}$ dostávame:

$$f(\theta) = f\left(\frac{Lt}{\pi}\right) = \varphi(t),$$

pričom pre funkciu φ platí

$$\varphi(t + 2\pi) = f\left(\frac{L(t + 2\pi)}{\pi}\right) = f\left(\frac{Lt}{\pi} + 2L\right) = f\left(\frac{Lt}{\pi}\right) = \varphi(t),$$

z čoho vidíme, že funkcia φ je periodická s periódou 2π . Jej Fourierov rad má teda tvar:

$$\varphi(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt)).$$

Fourierov rad pôvodnej funkcie $f(\theta)$ môžeme pomocou spätnej substitúcie $t = \frac{\pi x}{L}$ vyjadriť ako:

$$f(\theta) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\left(\frac{\pi n \theta}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{\pi n \theta}{L}\right) \right), \quad (27)$$

pričom Fourierove koeficienty funkcie $f(\theta)$ dostaneme v tvare:

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \cos(nt) \varphi(t) dt = \frac{1}{L} \int_0^{2L} \cos\left(\frac{\pi n \theta}{L}\right) f(\theta) d\theta, \quad (28)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \sin(nt) \varphi(t) dt = \frac{1}{L} \int_0^{2L} \sin\left(\frac{\pi n \theta}{L}\right) f(\theta) d\theta. \quad (29)$$

V praxi sa často používa substitúcia $F(t) = f(2\pi\nu t) = f(\theta)$, kde $\nu = \frac{1}{T}$ Hz je

frekvencia vyjadrená pomocou periódy T sekúnd a Fourierov rad funkcie $F(t)$ má tvar

$$F(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(2n\pi vt) + b_n \sin(2n\pi vt)).$$

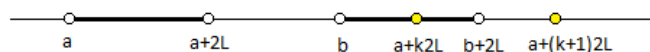
Pre integrovateľnú periodickú funkciu s periódou $2L$ takisto platí, že jej Fourierove koeficienty a_n a b_n sú pre všetky intervaly dĺžky $2L$ rovnaké, a teda takáto funkcia má aj Fourierove rady pre všetky intervaly dĺžky $2L$ rovnaké.

Veta 2.5 ([8], str.581). *Nech je periodická funkcia f s periódou $2L$ integrovateľná na intervale $\langle a, a + 2L \rangle$, kde $a \in \mathbb{R}$. Potom je integrovateľná aj na každom intervale $\langle b, b + 2L \rangle$, kde $b \in \mathbb{R}$ a platí:*

$$\int_a^{a+2L} f(\theta)d\theta = \int_b^{b+2L} f(\theta)d\theta.$$

Dôkaz. ([8]). Nech je funkcia f periodická s periódou $2L$ a integrovateľná na intervale $\langle a, a + 2L \rangle$ a nech b je ľubovoľné reálne číslo. Je zřejmé (viď Obrázok 10), že existuje také celé číslo k , že

$$a + k2L \in \langle b, b + 2L \rangle .$$



Obr. 10: Znázornenie polohy bodu $a + k2L$.

Keďže f je periodická funkcia s periódou $2L$, platí

$$\int_a^{a+2L} f(\theta)d\theta = \int_a^{a+2L} f(\theta + k2L)d\theta \quad \text{pre } k \in \mathbb{Z}. \quad (30)$$

Ak na integrál na pravej strane tejto rovnosti použijeme substitúciu $\theta + k2L = x$

a vety o vlastnostiach určitého integrálu, dostaneme

$$\int_a^{a+2L} f(\theta + k2L)d\theta = \int_{a+k2L}^{a+(k+1)2L} f(x)dx = \int_{a+k2L}^{b+2L} f(x)dx + \int_{b+2L}^{a+(k+1)2L} f(x)dx \quad (31)$$

Ale

$$\int_{b+2L}^{a+(k+1)2L} f(x)dx = \int_{b+2L}^{a+(k+1)2L} f(x - 2L)dx = \int_b^{a+k2L} f(\theta)d\theta$$

a teda

$$\int_{a+k2L}^{b+2L} f(x)dx + \int_{b+2L}^{a+(k+1)2L} f(x)dx = \int_{a+k2L}^{b+2L} f(x)dx + \int_b^{a+k2L} f(\theta)d\theta = \int_b^{b+2L} f(\theta)d\theta$$

Z tohto a z rovností (30) a (31) vyplýva, že

$$\int_a^{a+2L} f(\theta)d\theta = \int_b^{b+2L} f(\theta)d\theta,$$

čo sme mali dokázať. □

2.4 Párne a nepárne funkcie

Túto kapitolu zameriame na Fourierove rady funkcií, ktoré sú párne alebo nepárne. Ukážeme si, podľa [4], ako sa tento rad zjednoduší.

Funkciu nazývame *párnou*, ak pre všetky $\theta \in D(f)$ platí: $f(-\theta) = f(\theta)$ a *nepárnou*, ak $f(-\theta) = -f(\theta)$. Príkladom párnej funkcie je funkcia kosínus a nepárnou funkciou je napríklad funkcia sínus. Ak je funkcia $f(\theta)$ aj párna aj nepárna, potom pre všetky $\theta \in D(f)$: $f(\theta) = 0$, pretože musí platiť: $f(\theta) = f(-\theta) = -f(\theta)$. V prípade párných funkcií platí pre všetky $a > 0$

$$\int_{-a}^a f(\theta)d\theta = 2 \int_0^a f(\theta)d\theta$$

a pre nepárne funkcie platí vzťah

$$\int_{-a}^a f(\theta) d\theta = 0.$$

Ak je teda funkcia $f(\theta)$ párna a periodická s periódou 2π , $\sin(n\theta)f(\theta)$ je nepárna funkcia a $\cos(n\theta)f(\theta)$ je párna funkcia. Pre Fourierove koeficienty b_n tak dostávame

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(n\theta) f(\theta) d\theta = 0,$$

pričom vzťah pre výpočet koeficientov a_n možno upraviť na tvar

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(n\theta) f(\theta) d\theta = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(n\theta) f(\theta) d\theta.$$

Podobne v prípade nepárnej funkcie $f(\theta)$, ktorá je periodická s periódou 2π , je funkcia $\cos(n\theta)f(\theta)$ nepárna a funkcia $\sin(n\theta)f(\theta)$ párna. Fourierove koeficienty a_n sú rovné nule:

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(n\theta) f(\theta) d\theta = 0$$

a koeficienty b_n vyjadrujeme vzťahom

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(n\theta) f(\theta) d\theta = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin(n\theta) f(\theta) d\theta.$$

Každú funkciu $f(\theta)$ vieme zapísať ako súčet jej *párnej zložky* a *nepárnej zložky* v tvare

$$f(\theta) = \frac{f(\theta) + f(-\theta)}{2} + \frac{f(\theta) - f(-\theta)}{2}. \quad (32)$$

Ukážeme si, že rovnica (32) je jediným spôsobom, ako možno funkciu $f(\theta)$ rozložiť na sumu párnej a nepárnej funkcie.

Nech teda platí, že funkciu $f(\theta)$ môžeme napísať v tvaroch $f(\theta) = g_1(\theta) + h_1(\theta)$ a $f(\theta) = g_2(\theta) + h_2(\theta)$, pričom g_1 a g_2 sú párne a h_1 a h_2 sú nepárne funkcie.

Z rovnosti $g_1 + h_1 = g_2 + h_2$ dostávame $g_1 - g_2 = h_2 - h_1$, kde ľavá strana rovnice je párnou funkciou a pravá strana nepárnou funkciou. Obe strany teda musia byť nulové, čo znamená, že musí platiť $g_1 = g_2$ a $h_1 = h_2$.

3 Vlnová rovnica struny

S vývojom človeka sa vyvíja aj hudba, vznikajú nové hudobné štýly, nové hudobné nástroje a nové možnosti ich využitia. Dnes hudba zahŕňa naozaj široké spektrum farieb a zvukov, rôznorodé hudobné žánre či hudobné nástroje. Etnomuzikológovia rozdeľujú hudobné nástroje do piatich hlavných kategórií, ktoré tiež vyhovujú matematickým popisom zvuku, ktoré tieto nástroje produkujú ([4]). Týmito kategóriami sú:

1. *Idiofóny*: zvuk je vytváraný vibrovaním hmoty, z ktorej je nástroj vyrobený. Tieto nástroje sa nazývajú aj samoznejúce, pretože tóny alebo zvuky vznikajú chvením nástroja ako takého. Patria sem napríklad zvonkohry, triangel, xylofón, zvon alebo tamburína.
2. *Membránofóny*: zvuk vzniká chvením napnutej blany, preto ich tiež nazývame aj blanozvučné nástroje a zaraďujeme sem napríklad bubny, kazoo alebo tympany.
3. *Chordofóny*: zvuk je produkovaný vibrovaním jednej alebo viacerých strún. Nazývame ich strunozvučné a radíme sem napríklad husle, gitaru alebo klavír.
4. *Aerofóny*: nazývané tiež vzduchozvučné hudobné nástroje, pretože zvuk sa v nich tvorí chvením vzduchového stĺpca v trubici. Táto kategória zahŕňa napríklad flautu, klarinet, trúbku či organ.
5. *Elektrofóny*: hudobné nástroje, ktorých zvuk je vytváraný elektricky. Patrí sem elektrická gitara alebo elektrické piano.

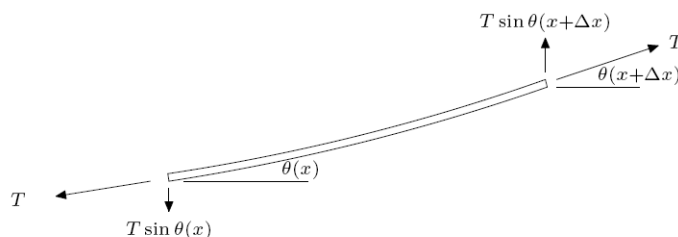
Každá z uvedených kategórií hudobných nástrojov je špecifická v spôsobe, akým je zvuk tvorený. Rôznorodosť jednotlivých nástrojov vieme odlíšiť nielen zmyslami, ale aj matematickým popisom systému tvorby tónu. V tejto kapitole sa zameriame na skupinu strunozvučných nástrojov - chordofóny a podľa [4] si odvodíme *vlnovú rovnicu struny* a jej riešenie.

3.1 Odvodenie vlnovej rovnice struny

V nasledujúcej stati budeme podľa [4] uvažovať kmitanie ideálnej struny, ktorá je na oboch koncoch pevne uchytená. Rovnicu, ktorá popisuje kmitanie struny, budeme nazývať vlnová rovnica. Táto rovnica predpokladá, že sklon struny v každom jej bode a v každom čase je malý. Pod malými rozumieme uhly, pre ktoré platí

$$a \sim \sin a \sim \tan a = \frac{dy}{dx},$$

pričom y je funkciou času t a priestorovej súradnice x . To znamená, že funkcia $y(t, x)$ reprezentuje výchylku struny z rovnovážnej polohy v čase t a v mieste x . Pre väčšie sklony je takáto analýza ťažšia. Predpokladáme tiež, že struna kladie zanedbateľný odpor pri ohýbaní. Zobrazíme si ju na Obrázku 11 napnutú silou T a s lineárnou hustotou ρ .



Obr. 11: Napnutá kmitajúca struna a sily na ňu pôsobiace. Zdroj: [4], str.85.

Na malom úseku struny, x až $x + \Delta x$, pôsobí na ľavom konci horizontálna zložka sily T , ktorej veľkosť je $-T \cos \theta(x)$ a vertikálna zložka sily T veľkosti $-T \sin \theta(x)$, na pravom konci je hodnota horizontálnej zložky $T \cos \theta(x + \Delta x)$ a hodnota vertikálnej zložky $T \sin \theta(x + \Delta x)$. Keďže sme predpokladali, že sklon struny je malý, pre horizontálne zložky platí

$$-T \cos \theta(x) \approx -T$$

$$T \cos \theta(x + \Delta x) \approx T.$$

Tieto sily pôsobia rovnakou veľkosťou ale opačným smerom, navzájom sa rušia, t.j. ich súčet je nulový a môžeme ich zanedbať.

Súčet vertikálnych síl pôsobiacich na koncoch úseku struny môžeme upraviť na tvar:

$$\begin{aligned} T \sin \theta(x + \Delta x) - T \sin \theta(x) &= T \tan \theta(x + \Delta x) - T \tan \theta(x) = \\ &= T \left(\frac{dy(x + \Delta x)}{dx} - \frac{dy(x)}{dx} \right) = T \Delta x \frac{\frac{dy(x + \Delta x)}{dx} - \frac{dy(x)}{dx}}{\Delta x} \approx \\ &\approx T \Delta x \frac{d^2 y}{dx^2}. \end{aligned} \quad (33)$$

Hmotnosť úseku struny je približne $\rho \Delta x$, teda z Newtonovho zákona daného rovnicou (4) dostávame rovnosť

$$T \Delta x \frac{d^2 y}{dx^2} \approx (\rho \Delta x) \frac{d^2 y}{dt^2},$$

ktorú po vykrátení Δx z oboch strán možno upraviť na tvar

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = c^2 \frac{d^2 y}{dx^2}, \quad (34)$$

kde $c = \sqrt{T/\rho}$. Rovnicu tvaru (34) nazývame vlnovou rovnicou struny. Touto rovnicou vo fyzike popisujeme šírenie vlnenia, napr. po napnutej strune.

3.2 Riešenie vlnovej rovnice

V tejto časti si vychádzajúc z [4] ukážeme metódu nájdenia riešenia vlnovej rovnice (34), ktorú objavil francúzsky matematik d'Alembert. Jeho myšlienka spočíva v rozložení operátora

$$\frac{d^2}{dt^2} - c^2 \frac{d^2}{dx^2}$$

na súčin

$$\left(\frac{d}{dt} + c \frac{d}{dx} \right) \left(\frac{d}{dt} - c \frac{d}{dx} \right).$$

Po zmene premenných substitúciou $u = x + ct, v = x - ct$ vyjadríme $\frac{dy}{dt}$ a $\frac{d^2y}{dt^2}$:

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dt} &= \frac{dy}{du} \frac{du}{dt} + \frac{dy}{dv} \frac{dv}{dt} = c \frac{dy}{du} - c \frac{dy}{dv}, \\ \frac{d^2y}{dt^2} &= \frac{dy}{du} \left(\frac{dy}{dt} \right) \frac{du}{dt} + \frac{dy}{dv} \left(\frac{dy}{dt} \right) \frac{dv}{dt} = c \left(c \frac{d^2y}{du^2} - c \frac{d^2y}{dudv} \right) - c \left(c \frac{d^2y}{dvdu} - c \frac{d^2y}{dv^2} \right) \\ &= c^2 \left(\frac{d^2y}{du^2} - 2 \frac{d^2y}{dudv} + \frac{d^2y}{dv^2} \right).\end{aligned}\tag{35}$$

Podobne možno vyjadriť $\frac{dy}{dx}$ a $\frac{d^2y}{dx^2}$:

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{du} \frac{du}{dx} + \frac{dy}{dv} \frac{dv}{dx} = \frac{dy}{du} + \frac{dy}{dv}, \\ \frac{d^2y}{dx^2} &= \frac{d^2y}{du^2} + 2 \frac{d^2y}{dudv} + \frac{d^2y}{dv^2}.\end{aligned}\tag{36}$$

Rovnicu (34) tak môžeme napísať v tvare:

$$c^2 \left(\frac{d^2y}{du^2} - 2 \frac{d^2y}{dudv} + \frac{d^2y}{dv^2} \right) = c^2 \left(\frac{d^2y}{du^2} + 2 \frac{d^2y}{dudv} + \frac{d^2y}{dv^2} \right)$$

alebo

$$\frac{d^2y}{dudv} = 0.$$

Riešenie tejto rovnice má tvar $y = f(u) + g(v)$ pre vhodne zvolenú funkciu f a g .

Po spätnej substitúcii tak dostávame riešenie v tvare

$$y = f(x + ct) + g(x - ct),\tag{37}$$

čo reprezentuje superpozíciu dvoch vln, z ktorých sa jedna pohybuje smerom doprava a druhá smerom doľava rýchlosťou c .

3.3 Okrajové podmienky

Uvažujme naďalej podľa [4] strunu, ktorej pravý a ľavý koniec je pevne fixovaný. Dĺžku tejto struny označme l . Ak $x = 0$ alebo $x = l$, vieme, že hodnota y je

konštantná nezávisle od času, lebo struna je na týchto koncoch upevnená. Ak y má v týchto bodoch hodnotu 0, tak pre okrajovú podmienku $x = 0$ dostávame z rovnice (37) vzťah

$$0 = f(ct) + g(-ct)$$

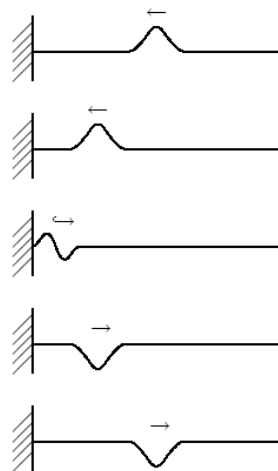
pre všetky t . Môžeme teda povedať, že pre všetky λ platí

$$g(\lambda) = -f(-\lambda),$$

teda riešenie vlnovej rovnice (37) môžeme napísať ako

$$y = f(x + ct) - f(ct - x), \quad (38)$$

čo znamená, že vlna postupujúca doľava sa po náraze na koniec struny vracia prevrátená a postupuje smerom doprava, viď Obrázok 12.



Obr. 12: Odraz vlnenia. Zdroj: [4], str.89

Ak uvážime druhú okrajovú podmienku $x = l, y = 0$, z rovnice (38) dostávame

$$f(l + ct) = f(ct - l)$$

pre všetky t , teda pre všetky λ platí

$$f(\lambda) = f(\lambda + 2l).$$

Veta 3.1 ([4], str.89). [d'Alembert]. Všeobecné riešenie vlnovej rovnice

$$\frac{d^2y}{dt^2} = c^2 \frac{d^2y}{dx^2}$$

má tvar

$$y = f(x + ct) + g(x - ct).$$

Pre okrajové podmienky $y = 0$ v koncových bodoch struny $x = 0$ a $x = l$, pre všetky t , má riešenie vlnovej rovnice tvar

$$y = f(x + ct) - f(ct - x),$$

pričom pre funkciu f platí $f(\lambda) = f(\lambda + 2l)$ pre všetky λ .

Pre okrajové podmienky z vety 3.1 vieme, že funkcia f je periodická s periódou $2l$. Možno ju teda rozvinúť do Fourierovho radu. Ak tento rad funkcie f pozostáva iba z n -tého člena, dostávame

$$f(x) = a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l} = C \cos \left(\frac{n\pi x}{l} + \phi \right),$$

kde konštanta $C \in \mathbb{R}$ a $\phi \in \mathbb{R}$. Podobnú úpravu sme robili pri rovniciach (6) a (7).

Riešenie vlnovej rovnice podľa (38) bude mať tvar

$$y = C \cos \left(\frac{n\pi(x + ct)}{l} + \phi \right) - C \cos \left(\frac{n\pi(-x + ct)}{l} + \phi \right) \quad (39)$$

alebo po úprave pomocou trigonometrických vzťahov

$$y = 2C \sin \left(\frac{n\pi x}{l} \right) \sin \left(\frac{n\pi ct}{l} + \phi \right). \quad (40)$$

Rovnica (40) je Bernoulliho riešením vlnovej rovnice struny a frekvencia tejto napnutej struny je

$$\nu = \frac{n}{2l} \sqrt{\frac{T}{\rho}}.$$

3.4 Počiatkové podmienky

Na to, aby sme vedeli jednoznačne určiť riešenie vlnovej rovnice, a teda presne opísať pohyb struny, potrebujeme okrem okrajových podmienok poznať aj tie počiatkové, t.j. počiatkovú pozíciu a počiatkovú rýchlosť struny. V tejto časti si na základe [4] ukážeme, aký je vzťah medzi riešením vlnovej rovnice a počiatkovými podmienkami.

Označme $s_0(x)$ počiatkovú vertikálnu vzdialenosť struny od x -ovej osi a $v_0(x)$ počiatkovú rýchlosť struny, obe ako funkcie polohovej súradnice x , pre $0 \leq x \leq l$. Ak uvažujeme okrajové podmienky z vety 3.1, musí platiť $s_0(0) = s_0(l) = 0$ a $v_0(0) = v_0(l) = 0$. Potrebujeme však tieto funkcie definovať vo všetkých hodnotách x . Ak určíme, že $s_0(-x) = -s_0(x)$ a $v_0(-x) = -v_0(x)$, čiže $s_0(x)$ a $v_0(x)$ predĺžime na nepárne funkcie, rozšírime definíciu týchto funkcií na hodnoty $-l \leq x \leq l$. Keďže platí $s_0(l) = -s_0(-l) = 0$ a $v_0(l) = -v_0(-l) = 0$, vieme určiť periodicitu oboch funkcií, t.j. pre všetky $x \in \mathbb{R}$ platí, že funkcie $s_0(x)$ a $v_0(x)$ sú periodické s periódou $2l$, alebo inak,

$$s_0(x + 2l) = s_0(x),$$

$$v_0(x + 2l) = v_0(x).$$

Vieme, že pre okrajové podmienky z vety 3.1 vyzerá riešenie vlnovej rovnice nasledovne:

$$y = f(x + ct) - f(-x + ct),$$

pričom funkcia f je periodická s periódou $2l$. Po zderivovaní tejto rovnice podľa t dostávame vzťah

$$\frac{dy}{dt} = cf'(x + ct) - cf'(-x + ct).$$

Pre počiatkové podmienky, teda pre $t = 0$ dostávame z predošlých dvoch rovníc vzťahy

$$f(x) - f(-x) = s_0(x), \tag{41}$$

$$cf'(x) - cf'(-x) = v_0(x). \tag{42}$$

Po následnom zintegrování rovnice (42), za platnosti $v_0(0) = 0$, dostávame

$$cf(x) + cf(-x) = \int_0^x v_0(u)du$$

a po predelení konštantou c a pričítaní k rovnici (41) dostávame po úprave vzťah

$$f(x) = \frac{1}{2}s_0(x) + \frac{1}{2c} \int_0^x v_0(u)du.$$

Túto závislosť dosadíme do rovnice (38) a dostávame

$$y = \frac{1}{2}(s_0(x+ct) - s_0(-x+ct)) + \frac{1}{2c} \left(\int_0^{x+ct} v_0(u)du - \int_0^{-x+ct} v_0(u)du \right) \quad (43)$$

Vieme, že funkcia v_0 je nepárna, platí teda

$$\int_{x-ct}^{-x+ct} v_0(u)du = 0,$$

z čoho možno vyjadriť

$$\int_0^{-x+ct} v_0(u)du = - \int_{x-ct}^0 v_0(u)du$$

a dosadiť do rovnice (43). Po zlúčení integrálov tak dostávame

$$y = \frac{1}{2}(s_0(x+ct) - s_0(-x+ct)) + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} v_0(u)du. \quad (44)$$

Takéto riešenie je jednoznačným riešením vlnovej rovnice pre počiatkové podmienky s_0, v_0 a okrajové podmienky z vety 3.1.

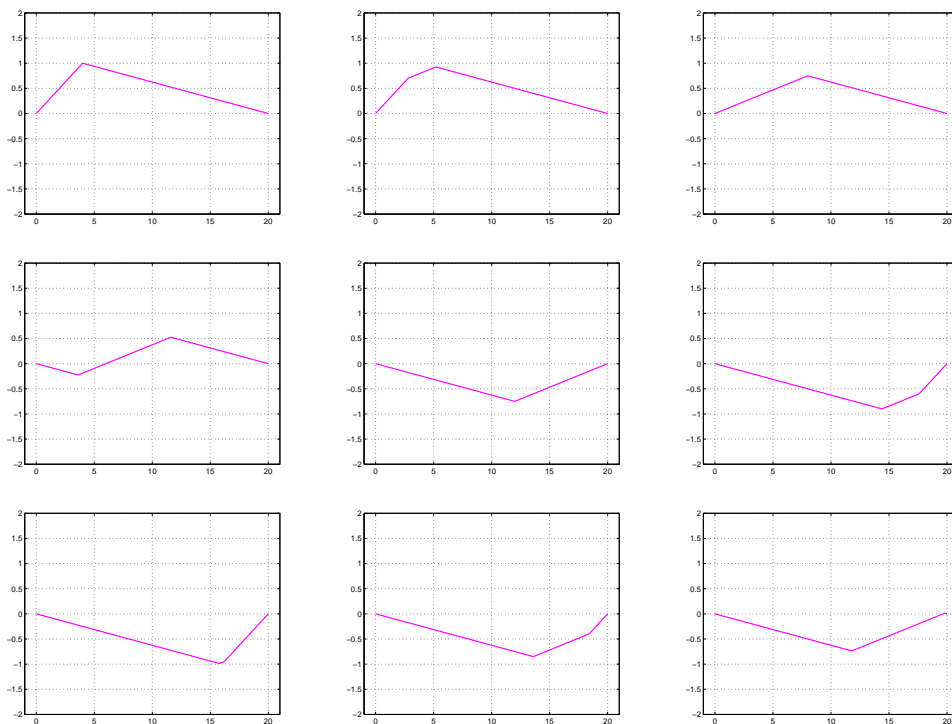
Ak je počiatková rýchlosť nulová, ako je to v prípade brnknutia na strunu, riešenie vlnovej rovnice má tvar

$$y = \frac{1}{2}(s_0(x+ct) + s_0(x-ct)).$$

Príklad 2. ([4]). Uvažujme strunu dĺžky l pevne uchytenú v jej koncových bodoch $x = 0$ a $x = l$ a výchylkou $y = 0$ v týchto bodoch. Nech je počiatočná rýchlosť struny nulová a nech pre počiatočnú výchylku platí:

$$s_0(x) = \begin{cases} x/\alpha & 0 \leq x \leq \alpha \\ (l-x)/(l-\alpha) & \alpha \leq x \leq l. \end{cases} \quad (45)$$

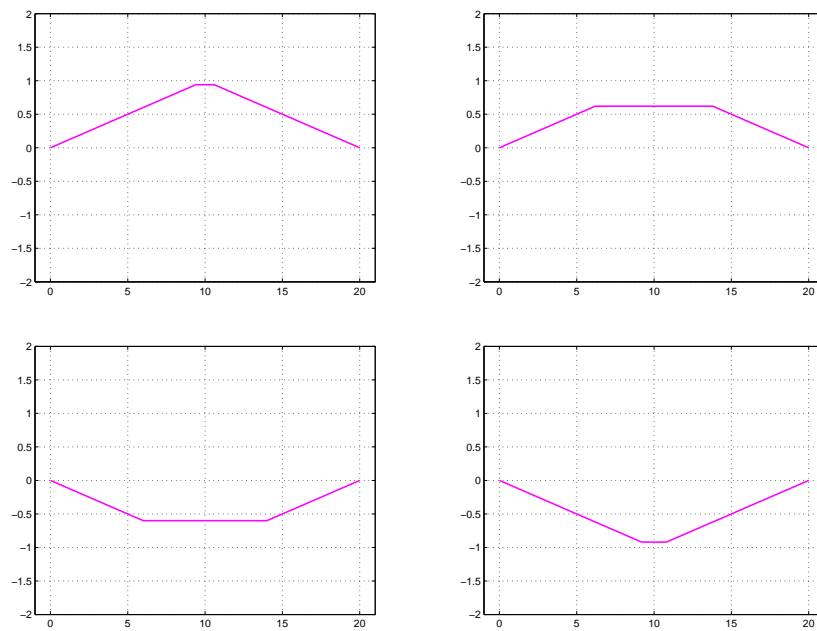
Obrázok 13 znázorňuje, ako sa mení tvar struny v čase po brnknutí na strunu v mieste α , ktoré sa nachádza v prvej polovici struny. Vidíme, že vlnenie postupuje doprava a po náraze na koniec struny sa vracia prevrátené a postupuje smerom doľava.



Obr. 13: Vlnenie struny pevne uchytenej na jej koncoch.

Ak sa miesto brnknutia α nachádza v druhej polovici struny, vlnenie bude postupovať doľava a po odraze sa bude prevrátené vracieť doprava.

Špeciálnym prípadom je brnknutie po strune v jej strede, kedy nedochádza k pohybu vlnenia do strán, ale iba k jeho preklápaniu cez x -ovú os, pričom sa amplitúda nadobúda vždy v strede struny, viď Obrázok 14.



Obr. 14: Vlnenie struny pevne uchytenej na jej koncoch pri počiatočnom rozkmitaní v jej strede.

Záver

V tejto práci sme sa venovali základným matematickým princípom, ktoré úzko súvisia so zvukom a hudbou. Definovali sme periodický a harmonický pohyb, harmonický oscilátor, odvodili sme diferenciálne rovnice popisujúce harmonický pohyb, tlmený a vynútený harmonický pohyb, spolu s riešením pre každú z týchto rovníc. Pre názornosť sme zahrnuli príklad porovnávajúci harmonický pohyb s tlmením a bez neho. Zaoberali sme sa takisto superpozíciou šíriacich sa vlnení, rozkladom vlnenia do Fourierovho radu, pričom sme odvodili Fourierove vzorce a zhrnuli teoretické predpoklady tohto rozkladu a podmienky konvergen- cie. Jadrom práce bolo odvodenie a popis vlnovej rovnice a vyjadrenie jej riešenia v závislosti od okrajových a počiatočných podmienok. Ukázali sme si tiež príklad kmitania struny pevne uchytenej na svojich koncoch, s programom uvedeným v prílohe.

Matematika, ktorú nachádzame v hudbe a akustike, nám pomáha pochopiť mnohé fyzikálne deje, ktoré vnímame pri rozozvučení hudobného nástroja. Vznik a šírenie zvuku, farba a výška tonu, hlasitosť... toto všetko dokážeme popísať pomocou matematiky. História i súčasnosť dokazujú, že nielen hudobníci a skla- datelia, ale aj matematici budú mať naďalej nezastupiteľnú úlohu pri tvorbe a reprodukcii hudby.

Príloha

Zdrojový kód k Príkladu 2 vytvorený v programe Matlab 7.0.1.

Funkcia $s_0(x)$ - počiatočná výchylka:

```
function[v]=sox(l,a,x)
if x>2*l | x<0 | a<=0 | a>=1 x return
end
if x<a v=x/a;
elseif x>=a & x<2*l-a
    v=(1-x)/(1-a);
elseif x<=2*l
    v=x/a-(2*l/a);
end
```

Vykreslenie struny:

```
l=20; %dlzka struny je od 0 po l
a=5; %bod brnknutia na zaciatku z intervalu (0,l)
c=1; %sqrt(T/p)
results=zeros(1*10,1);
osx=0:0.1:l;
m = moviein(500);
for t =0:0.2:100; %cas
    for x=0:0.1:l;
        arg1 = x+c*t;
        if arg1>2*l
            arg1=arg1-fix(arg1/(2*l))*2*l;
        end
        arg2 = x-c*t;
        if arg2<0
            arg2=arg2+(-fix(arg2/(2*l))+1)*(2*l);
        end
    end
end
```

```
        y=1/2*(sox(1,a,arg1)+sox(1,a,arg2));
        results(int32(x*10+1),1)=y;
    end
    plot(osx,results,'m','LineWidth',1.5);
    axis([-1 (l+1) -2 2])
    grid
    m(:,int32(t*5+1)) = getframe;
    %pause(0.5);
end
movie(m)
```


Literatúra

- [1] HALLIDAY, D.– RESNICK, R.– WALKER, J. 2006. *Fyzika: Mechanika - Termodynamika*. Brno: Vutium, 2006, ISBN 80-214-1868-0, Prometheus, 2006, ISBN 81-7196-213-9.
- [2] CHORVÁTOVÁ, Z. 1994. *Kmity a vlny*. Bratislava: Univerzita Komenského, 1994. ISBN 80-223-0775-0.
- [3] BRUNOVSKÝ, P. *Diferenčné a diferenciálne rovnice*. skriptá FMFI UK. Bratislava.
- [4] BENSON, D. 2008. *Music: A Mathematical Offering*. Department of mathematics. Meston Building
web version: <http://www.maths.abdn.ac.uk/~bensondj/html/music.pdf>.
- [5] BARNOVSKÁ, M.– SMÍTALOVÁ, K. 1991. *Matematická analýza III*. Bratislava: Univerzita Komenského, 1991. ISBN 80-223-0057-8.
- [6] KUBINEC, P. *Ako vzniká hudba?*. Elektronický článok.
website: <http://www.lsg.sk/~pkubinec/ako%20vznika%20hudba.pdf>.
- [7] ŠKRÁŠEK, J.– TICHÝ, Z. 1986. *Základy aplikované matematiky II*. Praha: SNTL - Nakladatelství technické literatury, 1986. ISBN 04-513-86.
- [8] IVAN, J. 1989. *Matematika 2*. Bratislava: Alfa, 1989. ISBN 80-050-011-42.
- [9] website: www.ssag.sk/SSAG%20study/FYZ/superpozicia.pdf.