Univerzita Komenského v Bratislave
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

d0341516-c7bf-45e7-a3ac-e8f410b10745

MOTIVAČNÉ PRÍKLADY K PREDMETOM MATEMATICKÉHO ZÁKLADU

2011, Martina Ďuratná

Univerzita Komenského v Bratislave

Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky

Motivačné príklady k predmetom matematického základu

Bakalárska práca

Martina ĎURATNÁ

9.1.9 Aplikovaná matematika

Ekonomická a finančná matematika

Školiteľ:

Beáta STEHLÍKOVÁ

BRATISLAVA 2011

Motivačné príklady k predmetom matematického základu

Martina Ďuratná
E-mail: *martina.duratna@gmail.com*

Beáta Stehlíková
E-mail: *stehlikova@pc2.iam.fmph.uniba.sk*

Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky
Univerzita Komenského v Bratislave
Mlynská dolina
842 48 Bratislava
Slovenská republika

Bakalárska práca v odbore 9.1.9 Aplikovaná matematika
Dátum kompilácie: 29. júna 2011
Typeset in LaTeX

Univerzita Komenského v Bratislave
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

ZADANIE ZÁVEREČNEJ PRÁCE

Meno a priezvisko študenta: Martina Ďuratná
Študijný program: ekonomická a finančná matematika (Jednoodborové štúdium, bakalársky I. st., denná forma)
Študijný odbor: 9.1.9. aplikovaná matematika
Typ záverečnej práce: bakalárska
Jazyk záverečnej práce: slovenský

Názov : Motivačné príklady k predmetom matematického základu

Cieľ : Zozbierať a spísať príklady, založené scénach z filmoch, kníh atď., v ktorých sa vyskytujú pojmy z predmetov matematického základu štúdia EFM.

Vedúci : RNDr. Mgr. Beáta Stehlíková, PhD.

Dátum zadania: 27.10.2010

Dátum schválenia: 08.11.2010

doc. RNDr. Margaréta Halická, CSc.
garant študijného programu

Ďuratná
študent

Stehlíková
vedúci práce

Dátum potvrdenia finálnej verzie práce, súhlas s jej odovzdaním (vrátane spôsobu sprístupnenia)

01.06.2011 Stehlíková
vedúci práce

Abstrakt

Cieľom tejto bakalárskej práce je ponúknuť rôzne príklady z predmetov matematického základu inšpirované najmä filmovými a literárnymi dielami. Tie potom majú čitateľa motivovať k ich vyriešeniu, alebo uňho aspoň vzbudiť záujem o danú problematiku, či matematiku ako takú. Zaujímavý výber príkladov môže pomôcť pritiahnuť pozornosť k príslušnému predmetu.

Kľúčové slová: motivačné príklady • matematický základ • zbierka príkladov • matematika vo filmoch • metódy dôkazov • diferenciálny počet • integrálny počet • diferenčné rovnice • algebra • pravdepodobnosť • teória čísel • teória grafov.

The purpose of this thesis is to offer various problems from the subjects of the mathematics fundamentals mostly inspired by movies and literary works. Those are meant to motivate the reader to solve them, or at least to raise his interest in the particular issue or in math itself. An interesting choice of problems might help draw attention to the corresponding subject.

Key words: motivational problems • mathematics fundamentals • collection of problems • mathematics in movies • methods of proving • differential calculus • integral calculus • diferential equations • algebra • probability • number theory • graph theory.

Poďakovanie

Chcela by som sa poďakovať Radoslavovi Harmanovi za návrh pravdepodobnostného priestoru použitého v siedmej kapitole. Taktiež aj svojej školiteľke, Beáte Stehlíkovej za podporu a pomoc. A tiež všetkým, ktorí o moju prácu prejavili záujem a zahrnuli ma tipmi na príklady.

Čestné prehlásenie

Čestne prehlasujem, že som bakalársku prácu vypracovala samostatne pod dohľadom vedúceho bakalárskej práce a s použitím uvedenej literatúry.

....

Martina Ďuratná

Obsah

1 Úvod

Matematika je hra hraná podľa istých jednoduchých pravidiel s nezmyselnými znakmi na papieri.

David Hilbert

Matematika. Buď ju milujete, alebo nenávidíte. Bohužiaľ u žiakov a študentov vo väčšine prípadov prevláda skôr tá druhá možnosť. Najlepšie to asi zhrnul maďarský matematik *George Pólya* v predslove druhého vydania svojej najznámejšej knihy ***How to solve it*** [22]:

> *Matematika má tu pochybnú česť byť najmenej populárnym predmetom v osnovách... Budúci učitelia sa prechádzajúc základnými školami naučia nenávidieť matematiku. Na strednej sa jej snažia čím skôr zbaviť. Na pedagogických fakultách sa jej vyhýbajú, lebo nie je vyžadovaná. Potom sa vrátia na základné školy, aby tej nenávisti priučili novú generáciu.* [22]

No je to škoda, lebo matematika má svoje nenapodobiteľné čaro, ktoré takto ostáva mnohým skryté. A v živote sa jej aj tak nedá vyhnúť. Veď ju môžeme nájsť úplne všade. Dokonca ani literatúra, filmy, seriály, ba ani divadelné predstavenia nie sú žiadnou výnimkou. A práve v nich môžeme nájsť užitočné motivačné príklady, ktoré sa dajú využiť na to, aby priblížili matematiku širšiemu obecenstvu. Pravdaže môžu zaujať aj matematikov, ktorí si radi niečo podobné prečítajú, či poslúžiť aj na oživenie pri učení.

Príklady uvedené v tejto bakalárskej práci sú zadelené podľa tematických okruhov, preberaných na Fakulte matematiky, fyziky a informatiky Univerzity Komenského v Bratislave, teda ide o príklady určené skôr študentom vysokých škôl. Viaceré sú však prístupné aj študentom posledných ročníkov stredných škôl. Keďže je cieľom tejto bakalárskej práce mladých ľudí motivovať, bol tomu prispôsobený i jej obsah a forma. To znamená, že je písaná o niečo uvoľnenejším spôsobom, ako je pre bakalárske práce obvyklé.

Témy tu preberané sú: metódy matematických dôkazov, diferenciálny a integrálny počet, diferenčné a diferenciálne rovnice, algebra, pravdepodobnosť, teória čísel a teória grafov.

2 Metódy matematických dôkazov

Asi nikoho neprekvapí, že akékoľvek nové tvrdenie, či už v matematike, alebo v iných vedných odboroch nie je prijaté len tak bez dôkazu. Matematici majú na dokazovanie tých svojich k dispozícii rôzne metódy. My si ukážeme dôkaz priamy, sporom a matematickou indukciou.

2.1 Trojuholník

V knihe ***Čudná príhoda so psom uprostred noci*** [11] od *Marka Haddona* sa stretávame s príbehom pätnásťročného autistického chlapca Christophera, ktorý sa rozhodol vyriešiť záhadu mŕtveho psa. Dej je popretkávaný početnými matematickými problémami. Za zmienku stojí aj fakt, že kapitoly sú číslované výlučne prvočíslami, takže prvá kapitola je označená číslom 2, druhá číslom 3 atď.

Jednou z vecí, na ktorej Christopherovi naozaj veľmi záleží, je pokročilý test z matematiky, na ktorý sa v knihe pripravuje a z ktorého chce bezpodmienečne dostať A, teda najlepšiu možnú známku.

Jeho najobľúbenejším príkladom z testu je dôkaz nasledujúceho tvrdenia: *Trojuholník so stranami, ktoré sa dajú zapísať v tvare $n^2 + 1$, $n^2 - 1$ a $2n$ (kde $n > 1$) je pravouhlý.* Treba tiež dokázať, že v opačnom smere táto implikácia neplatí.

Keďže je Christopherovo rozprávanie veľmi dôkladné, nachádzame príslušné riešenie v prílohe knihy. Dôkaz prvej časti je **priamy** a vyzerá približne takto:

Najprv musíme zistiť, ktorá zo strán o dĺžke $n^2 + 1$, $n^2 - 1$ a $2n$ (kde $n > 1$) je najdlhšia. Vieme, že platí:

$$n^2 + 1 - 2n = (n - 1)^2$$

a keď $n > 1$, tak $(n - 1)^2 > 0$. Preto $n^2 + 1 - 2n > 0$ a

$$n^2 + 1 > 2n.$$

Podobne $(n^2 + 1) - (n^2 - 1) = 2$ a preto $n^2 + 1 > n^2 - 1$.

Teraz skúsime spočítať sumu štvorcov dvoch kratších strán $n^2 - 1$ a $2n$:

$$(n^2 - 1)^2 + (2n)^2 = n^4 - 2n^2 + 1 + 4n^2 = n^4 + 2n^2 + 1 = (n^2 + 1)^2.$$

Z Pytagorovej vety vyplýva, že takýto trojuholník bude skutočne pravouhlý.

Naopak to však neplatí. Vhodným príkladom pravouhlého trojuholníka, ktorého strany sa v tvare $n^2 + 1$, $n^2 - 1$ a $2n$ zapísať nedajú, je trojuholník ABC, kde $a = 60$, $b = 25$, $c = 65$.

Ak by to totiž možné bolo, tak by muselo platiť $c = n^2 + 1$:

$$c = 65 = n^2 + 1,$$
$$n = 8.$$

Lenže potom

$$n^2 - 1 = 63,$$
$$2n = 16,$$

a toto sa nerovná našim zvyšným stranám b a a. Trojuholník ABC je teda naším hľadaným protipríkladom.

2.2 Matematik Moriarti

V knihe ***Čudná príhoda so psom uprostred noci*** [11] sa tiež dozvedáme, že hlavný hrdina Christopher je fanúšikom Sherlocka Holmesa. Jeho obľúbeným príbehom je ***Pes Baskervilský***.

No nie je to v tomto, ale v inom dieli Sherlockovskej ságy s názvom ***Posledný problém***, kde nám Holmes podrobnejšie opisuje svojho úhlavného nepriateľa Jamesa Moriartiho ako nadaného matematika:

> *Jeho kariéra bola neobyčajná. Je to muž dobrého pôvodu a vynikajúceho vzdelania, obdarený fenomenálnym zmyslom pre matematiku. Vo veku dvadsaťjeden rokov spísal pojednanie o binomickej vete, ktoré dosiahlo európsky ohlas.* [7]

Na binomickej vete si môžeme dobre ukázať využite **matematickej indukcie**. Táto veta znie:
Ak je dané ľubovolné, kladné, prirodzené číslo n, tak potom pre ľubovolné x a y platí:

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k. \tag{1}$$

Túto vetu budeme dokazovať už spomínanou matematickou indukciou. Pre $n = 1$ rovnosť platí, lebo:

$$(x+y)^1 = \sum_{k=0}^{1} \binom{1}{k} x^{1-k} y^k = x^1 + y^1 = x + y.$$

Indukčným predpokladom bude platnosť rovnice (1) pre exponent m. Potom pre $n = m + 1$ platí:

$$(x+y)^{m+1} = x(x+y)^m + y(x+y)^m,$$

kde dosadíme indukčný predpoklad

$$(x+y)^{m+1} = x\sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} x^{m-k} y^k \;+\; y\sum_{j=0}^{m} \binom{m}{j} x^{m-j} y^j$$

a ďalej upravujeme:

$$\begin{aligned}
(x+y)^{m+1} &= \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} x^{m-k+1} y^k \;+\; \sum_{j=0}^{m} \binom{m}{j} x^{m-j} y^{j+1} \\
&= \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} x^{m-k+1} y^k \;+\; \sum_{k=1}^{m+1} \binom{m}{k-1} x^{m-k+1} y^k \\
&= x^{m+1} + y^{m+1} + \sum_{k=1}^{m} \left[\binom{m}{k-1} + \binom{m}{k} \right] x^{m-k+1} y^k.
\end{aligned}$$

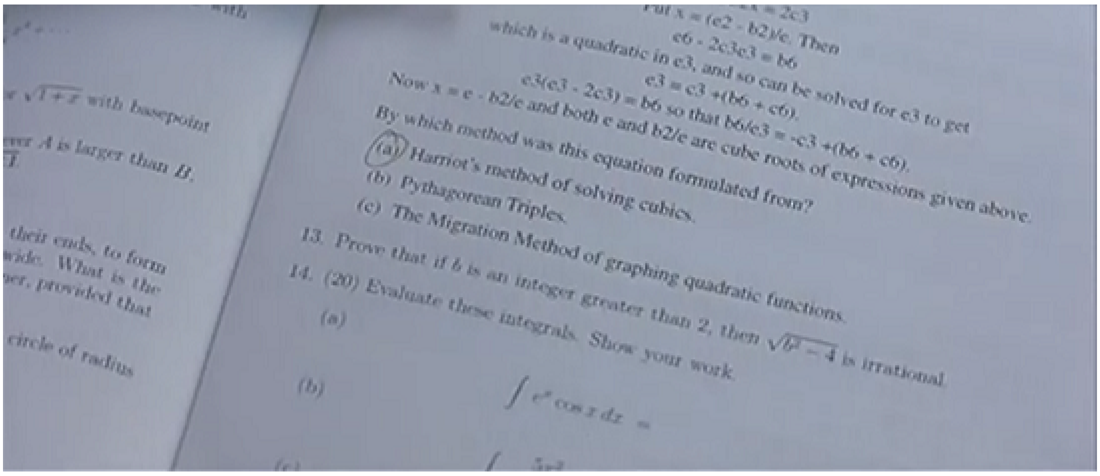
Využijeme Pascalovo pravidlo[1], podľa ktorého $\binom{m}{k-1} + \binom{m}{k} = \binom{m+1}{k}$, čím dostaneme:

$$\begin{aligned}(x+y)^{m+1} &= x^{m+1} + y^{m+1} + \sum_{k=1}^{m} \binom{m+1}{k} x^{m+1-k} y^k \\ &= \sum_{k=0}^{m+1} \binom{m+1}{k} x^{m+1-k} y^k.\end{aligned}$$

Tým pádom je veta dokázaná.

2.3 Zachráňte bratsvo!

Keď sa traja kamaráti Mitch, Frank a Bernard, hlavní predstavitelia filmu ***Mladosť v ťahu*** [40], snažia znovu prežiť svoje vysokoškolské časy, urobia to tak, že založia svoje vlastné bratstvo. No ako to už vo filmoch býva, nejde všetko tak hladko, ako by si to chlapci predstavovali a čoskoro musia bojovať o zachovanie svojho bratstva. Jednou z prekážok je test z matematiky, ktorý musia jeho členovia zvládnuť. Vedeli by ste vy prejsť týmto testom a zachrániť bratstvo?



Obr. 1: *Mladosť v ťahu*,test

Ako môžeme vidieť na obrázku 1, otázka číslo 13 v spomínanom teste znie: *Dokážte, že ak b je celé číslo väčšie ako 2 , tak* $\sqrt{b^2-4}$ *je iracionálne číslo.*

Pri podobných tvrdeniach sa najčastejšie využíva dôkaz **sporom**, takže skúsime túto metódu aj my.

Nech je $\sqrt{b^2-4}$ racionálne, teda existujú také nesúdeliteľné čísla $p, q \in \mathbb{N}$ (keďže $\sqrt{b^2-4} > 0$, môžeme požadovať $p, q > 0$), že

$$\sqrt{b^2-4} = \frac{p}{q}.$$

[1] Toto pravidlo vyjadruje princíp Pascalovho trojuholníka. Dá sa dokázať tiež indukciou alebo kombinatorickou úvahou [13].

Potom po umocnení dostávame:

$$b^2 - 4 = \frac{p^2}{q^2}.$$

Čísla p, q sú nesúdeliteľné, preto aj p^2, q^2 sú nesúdeliteľné. Keďže $b^2 - 4$ je prirodzené číslo, dostávame, že $q^2 = 1$. Teda

$$b^2 - 4 = p^2. \tag{2}$$

Túto rovnosť upravíme do tvaru

$$(b - p)(b + p) = 4. \tag{3}$$

Keďže b, p sú prirodzené čísla, pričom $b > p$ (vyplýva to z (2)), rovnosť (3) predstavuje rozklad čísla 4 na súčin dvoch prirodzených čísel, kde prvý činiteľ je menší ako druhý. Takýto rozklad však existuje len jeden:

$$4 = 1 \times 4.$$

Takže $b - p = 1$, $b + p = 4$, z čoho dostaneme $b = \frac{5}{2}$, $p = \frac{3}{2}$. To je spor s predpokladom $b \in \mathbb{N}$. Čize máme pôvodné tvrdenie dokázané.

3 Diferenciálny počet

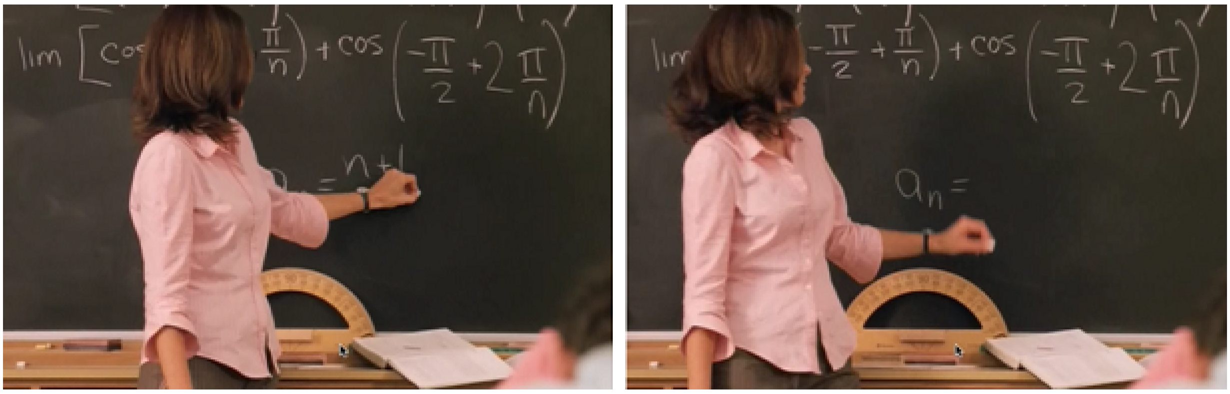
Dostávame sa k diferencálnemu počtu. S jeho základmi sa stretávame už v posledných ročníkoch na strednej škole. V tejto bakalárskej práci sú uvedené príklady na limity a Taylorov rozvoj. Začneme s limitami.

3.1 Nesústredená

Cady, hlavná hrdinka filmu ***Protivné baby*** [44] je šestnásťročné dievča, ktoré sa snaží zapadnúť v novej škole. Keďže je dobrá v matematike, nachádza sa v tomto filme hneď niekoľko matematických problémov a vzorcov. V jednej scéne, odohrávajúcej sa na hodine matematiky sa dá z tabule rozlúštiť nasledujúci výraz:

$$\lim \left[\cos\left(-\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{n}\right)+\cos\left(-\frac{\pi}{2}+2\frac{\pi}{n}\right)\right]. \tag{4}$$

Cady však viac ako problém na tabuli zaujíma pekný spolužiak Aaron sediaci v lavici pred ňou. Vedeli by sme na mieste Cady problém z tabule vyriešiť?



Obr. 2: *Protivné baby*, hodina matematiky

Nemáme údaj o tom, kam konverguje n. Takto sa však zvyknú označovať postupnosti, a teda budeme úlohu riešiť pre $n \to \infty$. Výpočet je jednoduchý, $(\pi/n) \to 0$, a teda:

$$\lim_{n\to\infty} \left[\cos\left(-\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{n}\right)+\cos\left(-\frac{\pi}{2}+2\frac{\pi}{n}\right)\right] = \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)+\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0.$$

Zaujímavú úlohu však dostaneme, ak namiesto postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, kde $a_n = \cos\left(-\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{n}\right)+\cos\left(-\frac{\pi}{2}+2\frac{\pi}{n}\right)$ budeme uvažovať funkciu $f(x) = \cos\left(-\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{x}\right)$ $+\cos\left(-\frac{\pi}{2}+2\frac{\pi}{x}\right)$ a budeme počítať limitu pre $x \to 0$. Ukážeme, že neexistuje.

Ak chceme dokázať, že táto limita neexistuje, môžeme tak urobiť tým, že nájdeme dve vybrané podpostupnosti bodov $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ a $\{x_l\}_{l=1}^{\infty}$ ktorých členy konvergujú k nule, ale pre ktoré

$$\lim_{k\to\infty} \left[\cos\left(-\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{x_k}\right)+\cos\left(-\frac{\pi}{2}+2\frac{\pi}{x_k}\right)\right]$$

$$\neq \lim_{l\to\infty}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{x_l}\right)+\cos\left(-\frac{\pi}{2}+2\frac{\pi}{x_l}\right)\right].$$

Najprv uvažujme postupnosť $\{x_k\}_{k=1}^{\infty} = \{\frac{1}{1+k}\}_{k=1}^{\infty}$. Táto postupnosť konverguje pre $k \to \infty$ k nule. Čomu sa rovná

$$\lim_{k\to\infty}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{x_k}\right)+\cos\left(-\frac{\pi}{2}+2\frac{\pi}{x_k}\right)\right]?$$

Vyšetríme, ako sa správajú jednotlivé kosínusy:

$$\cos\left(-\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{x_k}\right)=\cos\left(-\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{\frac{1}{1+k}}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}+k\pi\right)=\cos\frac{\pi}{2}=0,$$

$$\cos\left(-\frac{\pi}{2}+2\frac{\pi}{x_k}\right)=\cos\left(-\frac{\pi}{2}+2\frac{\pi}{\frac{1}{1+k}}\right)=\cos\left(\frac{3\pi}{2}+2k\pi\right)=\cos\frac{3\pi}{2}=0.$$

Teda :

$$\lim_{k\to\infty}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{x_k}\right)+\cos\left(-\frac{\pi}{2}+2\frac{\pi}{x_k}\right)\right]=0.$$

Teraz uvažujme postupnosť $\{x_l\}_{l=1}^{\infty} = \{\frac{2}{1+4l}\}_{l=1}^{\infty}$. Aj táto postupnosť konverguje pre $l \to \infty$ k nule. Čomu sa rovná

$$\lim_{l\to\infty}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{x_l}\right)+\cos\left(-\frac{\pi}{2}+2\frac{\pi}{x_l}\right)\right]?$$

Znovu vyšetríme, ako sa správajú jednotlivé kosínusy:

$$\cos\left(-\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{x_l}\right)=\cos\left(-\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{\frac{2}{1+4l}}\right)=\cos 2l\pi=\cos 0=1,$$

$$\cos\left(-\frac{\pi}{2}+2\frac{\pi}{x_l}\right)=\cos\left(-\frac{\pi}{2}+2\frac{\pi}{\frac{2}{1+4l}}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}+4l\pi\right)=\cos\frac{\pi}{2}=0.$$

Teda v tomto prípade

$$\lim_{k\to\infty}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{x_l}\right)+\cos\left(-\frac{\pi}{2}+2\frac{\pi}{x_l}\right)\right]=1.$$

Keďže $0 \neq 1$, tvrdenie o neexistencii limity je dokázané.

3.2 Rýchla smrť

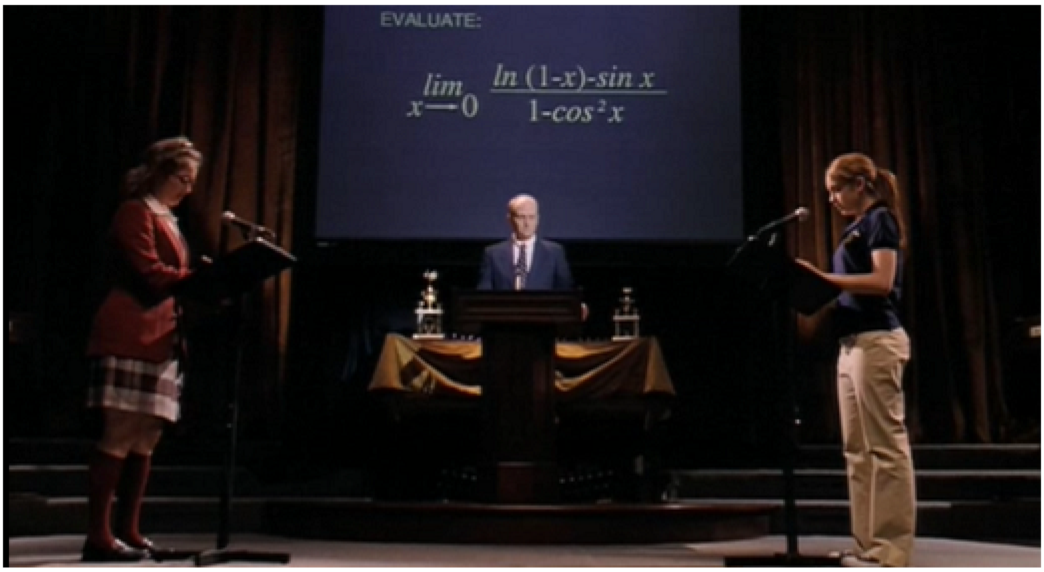
Ešte chvíľku zostaneme pri filme ***Protivné baby*** [44]. S ďalšou limitou sa stretávame v poslednom kole matematickej súťaže, ktorú na začiatku filmu označila kamarátka hlavnej hrdinky za "spoločenskú samovraždu" a ktorej sa Cady zúčastňuje viac-menej za trest. Ide o "rýchlu smrť", to znamená, že kto ako prvý správne zodpovie otázku, vyhráva. Súťažiace majú vyriešiť nasledujúcu limitu:

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{\ln(1-x) - \sin x}{1 - \cos^2 x} \right). \tag{5}$$

Cady počíta a vedie vnútorný monológ:

> *Slečna Caroline Craft potrebovala nutne vytrhať obočie. Jej outfit vyzeral, akoby ho vybrala slepá učiteľka z nedeľnej školy. A na perách mala lacný lesk. A vtedy mi to došlo. Uťahovaním si z Caroline Craftovej jej nezabránim v tom, aby ma porazila v tejto súťaži.*
> *To, že niekoho nazvete tučným, vás neurobí štíhlejšími. Ak niekoho nazvete hlúpym, tak sa nestanete múdrejšími. A zruinovanie Georgininho života ma určite neurobilo šťastnejšou.*
> *Všetko čo môžete v živote urobiť je pokúsiť sa vyriešiť problém, ktorý leží pred vami.* [44]

Medzitým prichádza jej súperka s riešením -1. Toto riešenie je však vyhlásené za nesprávne a naša hrdinka dostáva šancu odpovedať. Po ďalšom vnútornom monológu prichádza s výrokom, že limita (5) neexistuje. Má pravdu?



Obr. 3: *Protivné baby*, súťaž

Ak sa pokúsime vyriešiť túto limitu dosadením za x, dospejeme k zlomku $\frac{0}{0}$, nakoľko pre $x = 0$ je $\ln(1-x) - \sin x = 0$ a aj $1 - \cos^2 x = 0$. Teda je potrebné hľadať riešenie inak. Vieme, že $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$. Výraz v limite sa teda dá upraviť:

$$\frac{\ln(1-x) - \sin x}{1 - \cos^2 x} = \frac{\ln(1-x) - \sin x}{\sin^2 x} \, .$$

Skúsme vyšetriť, ako sa správa tento výraz v okolí nuly.

Ak je x kladné a dostatočne malé, je čitateľ kladný, lebo $\sin^2 x > 0$. Ďalej $\ln(1-x) < 0$ a $-\sin x < 0$, teda $\ln(1-x) - \sin x < 0$. Čitateľ je záporný, menovateľ kladný, teda celý výraz je záporný. Navyše vidíme, že platí:

$$\frac{\ln(1-x) - \sin x}{\sin^2 x} < \frac{-\sin x}{\sin^2 x} = \frac{-1}{\sin x},$$

a teda

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\ln(1-x) - \sin x}{\sin^2 x} \leq \lim_{x \to 0^+} \frac{-1}{\sin x} = -\infty.$$

Z toho dostávame, že

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\ln(1-x) - \sin x}{\sin^2 x} = -\infty.$$

Ak je x záporné a dostatočne malé, je menovateľ stále kladný, lebo $\sin^2 x > 0$. Ďalej $\ln(1-x) > 0$ a $-\sin x > 0$, teda $\ln(1-x) - \sin x > 0$. Čitateľ je kladný, menovateľ kladný, teda celý výraz je kladný. Navyše vidíme, že platí:

$$\frac{\ln(1-x) - \sin x}{\sin^2 x} > \frac{-\sin x}{\sin^2 x} = \frac{-1}{\sin x},$$

a teda

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{\ln(1-x) - \sin x}{\sin^2 x} \geq \lim_{x \to 0^-} \frac{-1}{\sin x} = \infty.$$

Z toho :

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{\ln(1-x) - \sin x}{\sin^2 x} = \infty \, .$$

Teda vidíme, že Cady mala pravdu a svojou odpoveďou oprávnene pomohla svojmu tímu vyhrať súťaž.

3.3 Mozog alebo abakus?

Kniha ***To snáď nemyslíte vážne, pán Feynman!*** [8] je autobiografiou známeho amerického fyzika, držiteľa Nobelovej ceny vo svojom odbore, *Richarda Feynmana*, do ktorej autor zahrnul mnohé zo svojich početných dobrodružstiev a zaujímavých príhod zo života. Richard Feynman sa okrem iného podieľal na výrobe atómovej bomby a vyšetrovaní tragédie raketoplánu Challenger.

Nasledujúca scéna sa nachádza ako v tejto knihe, tak aj vo filme ***Nekonečno*** [35], hoci tam je oproti knihe značne upravená. Richard Feynman v tejto scéne spomína na svoje stretnutie s predavačom abakusov, s ktorým si zmeral sily v počítaní postupne náročnejších matematických úloh. Aj keď Feynman spočiatku v rýchlosti zaostával, s pribúdajúcou náročnosťou sa rozdiel medzi nimi stieral, až napokon táto súťaž vyústila do počítania tretej odmocniny: $\sqrt[3]{1729,03}$.

V tejto disciplíne Feynman suverénne vyhráva. Zatiaľ čo si jeho súper siahol až na samé dno svojich schopností a zúrivo prehadzoval guličky počítadla zo strany na stranu, využil Feynman svoje matematické vedomosti a zvolil metódu aproximácie. V knihe píše:

> *To číslo bolo 1729,03. Náhodou som vedel, že kubická stopa obsahuje 1728 kubických palcov, a pretože jedna stopa má 12 palcov, riešenie je len o niečo viac ako 12. Podiel 1729,03/1728 sa líši od jednotky faktorom 1,03/1728, predstavujúcim skoro jeden diel z 2000. A z počítania s malými číslami som vedel, že tretia odmocnia z 1 + malé číslo je 1 + malé číslo /3. Takže mi stačilo nájsť zlomok 1/1728 a vynásobiť štyrmi (vydeliť tromi a vynásobiť dvanástimi). Týmto spôsobom som bol schopný získať veľa desatinných miest.* [8]

Podľa popisu vidíme, že asi použijeme **Taylorov rozvoj** (pozri napr. [14]):

$$f(a+x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}x + \frac{f''(a)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}x^n + \ldots \quad .$$

Obzvlášť o tom napovedá časť *tretia odmocnia z 1 + malé číslo je 1 + malé číslo /3*, nakoľko keď za funkciu f zoberieme tretiu odmocninu, za a dosadíme 1 a za x ono "malé číslo", tak prvý člen tohto rozvoja je 1 a $f'(1) = \frac{1}{3}1^{-\frac{2}{3}} = 1/3$, čiže druhý člen bude malé číslo /3:

$$\sqrt[3]{1+x} \approx 1 + \frac{1}{3}x.$$

Teda táto aproximácia, ktorú Feynman použil, vyzerá takto:

$$\sqrt[3]{1729,03} = \sqrt[3]{1728\left(1 + \frac{1,03}{1728}\right)} = 12\sqrt[3]{1 + \frac{1,03}{1728}}.$$

Teraz použijeme Taylorov rozvoj:

$$\sqrt[3]{1 + \frac{1,03}{1728}} = \sqrt[3]{1} + \frac{1}{3} \times \frac{1,03}{1728} - \frac{1}{9} \times \left(\frac{1,03}{1728}\right)^2 + ...$$

a ešte zaokrúhlime $1,03$ na 1, čo spôsobí len malý rozdiel. Teda dostávame:

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{1729,03} &= 12\sqrt[3]{1 + \frac{1,03}{1728}} \\ &\approx 12\left(1 + \frac{1}{3} \times \frac{1}{1728} - \frac{1}{9} \times \frac{1}{1728^2} + ...\right) \\ &= 12 + 4 \times \frac{1}{1728} - \frac{4}{3} \times \frac{1}{1728^2} + ... \quad .\end{aligned}$$

Feynman z tohto rozvoja zobral len prvé dva sčítance: $\sqrt[3]{1729,03} \approx 12 + 4 \times \frac{1}{1728}$. Toto sa už spamäti počíta oveľa jednoduchšie, ako tretie odmocniny, no nie?

3.4 Homer v 3-D

Obľúbený seriál ***Simpsonovci*** už počas rokov odvysielal vyše 400 epizód a za ten čas sa v ňom neraz objavila matematika. Taktiež vznikla tradícia špeciálnych Halloweenskych dielov.

V jednom z nich, nazvanom ***Špeciálny čarodejnícky diel VI.*** [37] nachádzame hneď niekoľko rovníc, ktoré stoja za zmienku. Homer v snahe schovať sa pred svojimi švagrinami zalezie za príborník, kde nájde ukrytý portál do iného, trojdimenzionálneho sveta. Kým sa mu toto miesto podarí svojou "šikovnosťou" zničiť, preletí okolo neho rovnica:

$$e^{i\pi} = -1.$$

Kreslené seriály nie sú práve známe svojou matematickou presnosťou, preto si ukážme, že na rozdiel od iných, ktoré budú uvedené neskôr, táto rovnosť platí.

Obr. 4: *Špeciálny čarodejnícky diel VI.*, 3-D Homer

Urobme Taylorov rozvoj funkcie e^{ix}:

$$\begin{aligned} e^{ix} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} i^k x^k \\ &= 1 + ix - \frac{x^2}{2!} - \frac{ix^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{ix^5}{5!} - ... \\ &= \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots\right) + i\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots\right) \quad . \end{aligned}$$

Ak sa pozrieme na Taylorove rozvoje funkcií $\cos x$ a $\sin x$:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - ... \ , \qquad \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - ... \ ,$$

môžeme si všimnúť, že podľa týchto rozvojov platí:

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x,$$

a teda:

$$e^{i\pi} = \cos \pi + i \sin \pi = -1 + i \times 0 = -1.$$

Táto rovnosť je medzi matematikmi veľmi obľúbená. Prepísaná do tvaru $e^{i\pi} + 1 = 0$ je považovaná za jednu z najkrajších a najelegantnejších rovností [3].

4 Integrálny počet

Diela *Julesa Verna* sú známe dobrodružstvami, ktoré predbehli svoju dobu. Kniha ***Cesta na Mesiac*** [32] je plná technických, matematických a fyzikálnych výrazov, o čom svedčí aj tento dialóg medzi hlavnými protagonistami Barbicanom a Michalom Ardanom:

> *"A keby dačo, čo vlastne je integrálny počet?"*
> *"Integrálny počet je opak diferenciálneho výpočtu," vravel Barbicane vážne.*
> *"Hlboká vďaka za vysvetlenie!"*
> *"Inými slovami, je to výpočet, ktorým hľadáme hodnoty funkcií, ak poznáme ich diferenciály."* [33]

Integrálny počet sa zdá byť v autorských kruhoch veľmi obľúbeným nástrojom pre zapojenie matematiky do deja, najčastejšie pre demonštráciu zvýšeného intelektu či nadania u postáv. Jednoducho povedané, príklady z integrálneho počtu nám sú zvyčajne predkladané ako náročné problémy, ktoré obyčajný človek len tak ľahko nevyrieši.

4.1 Premyslený podvod

V už spomínanom filme ***Mladosť v ťahu*** [40] nachádzame scénu, v ktorej členovia bratstva píšu test s pomocou "priateľov na telefóne", ktorí sedia vonku v dodávke a našepkávajú.

Jednou z otázok v teste je výpočet nasledujúceho integrálu:

$$\int e^x \cos x dx.$$

Výpočet tohto integrálu nie je ťažký. Na jeho vyriešenie stačí, ak ovládame používanie metódy **per partes**. Použitím tejto metódy dostaneme:

$$\begin{aligned}\int e^x \cos x dx &= \begin{vmatrix} u = e^x & u' = e^x \\ v' = \cos x & v = \sin x \end{vmatrix} = e^x \sin x - \int e^x \sin x dx \\ &= \begin{vmatrix} u = e^x & u' = e^x \\ v' = \sin x & v = -\cos x \end{vmatrix} = e^x \sin x + e^x \cos x - \int e^x \cos x dx.\end{aligned}$$

Teraz porovnáme začiatok a koniec nášho výpočtu:

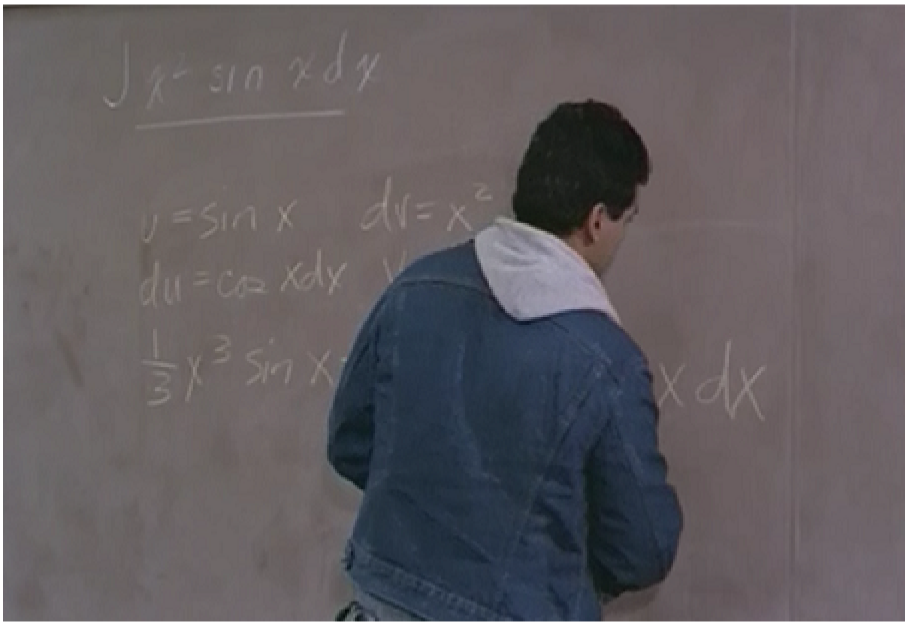
$$\int e^x \cos x dx = e^x \sin x + e^x \cos x - \int e^x \cos x dx.$$

Vieme teda vyjadriť hľadaný integrál :

$$2\int e^x \cos x dx = e^x \sin x + e^x \cos x,$$
$$\int e^x \cos x dx = \frac{e^x \sin x + e^x \cos x}{2}.$$

4.2 Ako to nespackať

Film ***Stand and deliver*** [39] je nakrútený na motívy skutočných udalostí zo života zanieteného stredoškolského učiteľa. Jaime Escalante sa ujal problémových študentov a odhodlaný ukázať svetu ich potenciál pre nich založil kurz pokročilej matematiky. V



Obr. 5: *Stand and deliver*

tomto filme nachádzame nasledujúcu scénu. Študent stojí pred tabuľou, na ktorej je napísané:

$$\int x^2 \sin x dx$$

a pokúša sa tento problém vyriešiť pomocou metódy **per partes**. Počíta:

$$\begin{aligned}\int x^2 \sin x dx &= \begin{vmatrix} u = \sin x & u' = \cos x \\ v' = x^2 & v = x^3/3 \end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{3}x^3 \sin x - \int \frac{1}{3}x^3 \sin x dx.\end{aligned}$$

V tomto momente sa zasekne a následne prehlási, že to nevie vypočítať. Kde urobil chybu?

Chyba nie je v samotnom výpočte - ten je správny, uvedená rovnosť platí. Je v spôsobe, akým túto metódu používa. Namiesto toho, aby si zvolil $u = \sin x$ a $v' = x^2$, čím sa mu situácia v ďalšom kroku iba skomplikovala, mal radšej voliť $u = x^2$ a $v' = \sin x$, teda :

$$\begin{aligned}\int x^2 \sin x dx &= \begin{vmatrix} u = x^2 & u' = 2x \\ v' = \sin x & v = -\cos x \end{vmatrix} \\ &= -x^2 \cos x + \int 2x \cos x dx \ ,\end{aligned}$$

a potom treba použiť per partes ešte raz:

$$\begin{aligned}
-x^2\cos x + \int 2x\cos x dx &= \begin{vmatrix} u = 2x & u' = 2 \\ v' = \cos x & v = \sin x \end{vmatrix} \\
&= -x^2\cos x + 2x\sin x - \int 2\sin x dx \\
&= -x^2\cos x + 2x\sin x + 2\cos x\ .
\end{aligned}$$

Ako vidíme, nie je to až také ťažké.

4.3 Trigonometrická substitúcia

Ako sa zdá, detektívky a matematika spolu idú ruka v ruke. Dobrým príkladom sú aj knihy autora *Erika Rosenthala*, ktorých hlavná postava Dan Brodsky je matematik vyučujúci na škole. Nie je teda prekvapením, že sa v jeho knihách matematika objavuje celkom často. Výnimkou nie je ani dielo s názvom ***The calculus of murder*** [26], kde hlavný predstaviteľ popisuje jedno svoje ráno takto:

> *Zobudil som sa skoro ráno, aby som si pripravil prednášku na kurz analýzy od deviatej do jedenástej. Študovali sme metódy integrovania, potreboval som príklady na ilustrovanie použitia trigonometrických substitúcií.* [26]

Trigonometrická substitúcia sa pri integrovaní využíva napríklad v prípade, že máme integrál obsahujúci $\sqrt{a^2 \pm x^2}$ alebo $\sqrt{x^2 \pm a^2}$ [30]. Dobrým príkladom na jej využitie je výpočet integrálu:

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx.$$

Je dosť možné, že práve takýto integrál by Dan na svojej prednáške použil. Jeho výpočet je nasledovný. Urobíme substitúciu $x = a\sin t$:

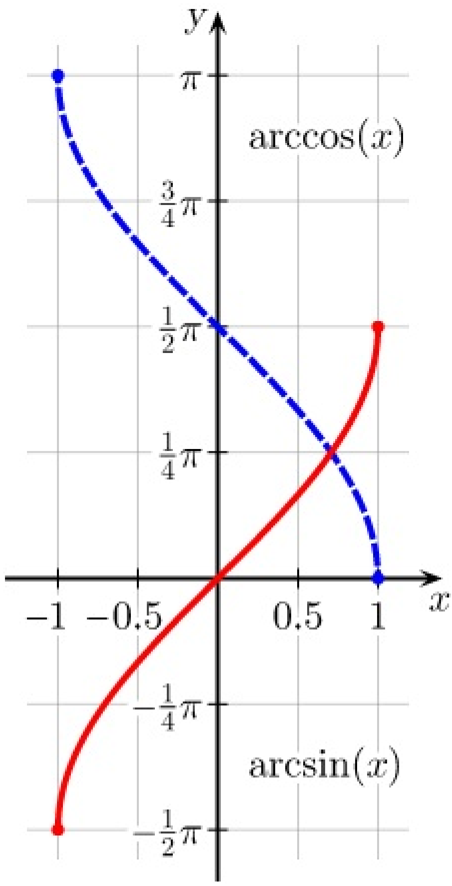
$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx &= \begin{vmatrix} x = a\sin t \\ dx = a\cos t dt \\ t = \arcsin\frac{x}{a} \end{vmatrix} = \int \frac{a\cos t}{\sqrt{a^2 - a^2\sin^2 t}} dt \\
&= \int \frac{\cos t}{\sqrt{1 - \sin^2 t}} dt = \int \frac{\cos t}{\sqrt{\cos^2 t}} dt \\
&= \int 1 dt \quad = t + c \quad = \left| t = \arcsin\frac{x}{a} \right| = \arcsin\frac{x}{a} + c.
\end{aligned}$$

Alternatívne sme mohli voliť substitúciu $x = a\cos t$. Potom by nám vyšlo:

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx &= \begin{vmatrix} x = a\cos t \\ dx = -a\sin t dt \\ t = \arccos\frac{x}{a} \end{vmatrix} = \int \frac{-a\sin t}{\sqrt{a^2 - a^2\cos^2 t}} dt \\
&= -\int \frac{\sin t}{\sqrt{1 - \cos^2 t}} dt = -\int \frac{\sin t}{\sqrt{\sin^2 t}} dt \\
&= -\int 1 dt \quad = -t + c \quad = \left| t = \arccos\frac{x}{a} \right| = -\arccos\frac{x}{a} + c.
\end{aligned}$$

Ide o jednoduchý príklad vhodný na ilustráciu trigonometrických substitúcií.

Dve primitívne funkcie by sa mali líšiť len o konštantu. Tu sme však jedným postupom dostali arkussínus a druhým arkuskosínus. Ako je to možné? Vysvetlením je, že $\arcsin(x) = -\arccos(x) - \pi/2$, teda naozaj sa riešenia líšia len o konštantu $\pi/2$ (viď obrázok 6).



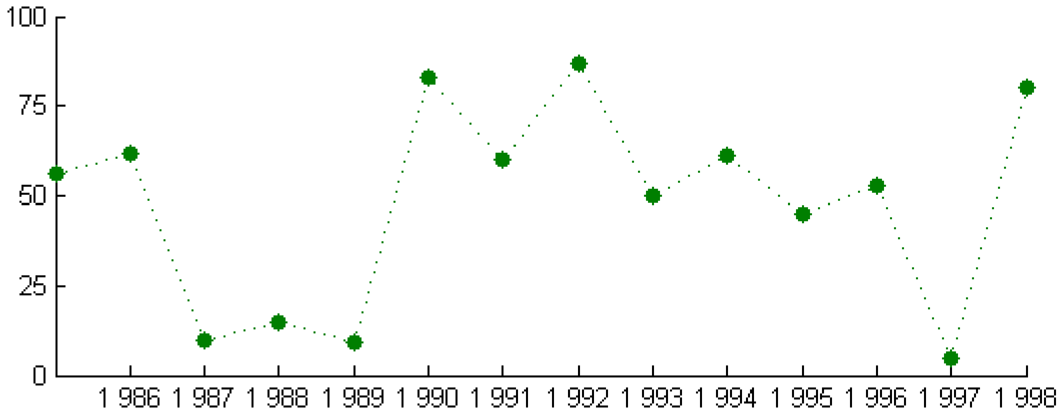
Obr. 6: Arkussínus a arkuskosínus

5 Diferenčné a diferenciálne rovnice

Diferenčné a diferenciálne rovnice majú široké využitie najmä pri popisovaní veľkostí populácií, alebo vývoja iných veličín v čase, a pri rôznych fyzikálnych výpočtoch. Svoje miesto si však našli aj v literatúre, ktorá nie je odborného charakteru.

5.1 Vývoj populácie žiab

Christopher, hlavný hrdina knihy ***Čudná príhoda so psom uprostred noci*** [11] nám spomína, že majú v škole rybník so žabami, aby sa naučili, ako zaobchádzať so zvieratami s úctou a rešpektom. Populácia žiab však z roka na rok mení svoju veľkosť. Christopher si nakreslil ilustračný graf množstva žiab (viď obrázok 7).



Obr. 7: Vývoj populácie žiab v čase

Vraví:

> *A ak by ste sa pozreli na tento graf, mohli by ste si myslieť, že bola v rokoch 1987, 1988, 1989 a 1997 veľmi studená zima alebo že prišla volavka a veľa žiab zjedla ...*
> *No niekedy to nemá nič spoločné so studenými zimami, mačkami či volavkami. Niekedy je to jednoducho matematika.* [11]

Taktiež nám predkladá **diferenčnú rovnicu**, podľa ktorej sa vraj populácie zvierat správajú:

$$N_{new} = \lambda N_{old}(1 - N_{old}),$$

kde N predstavuje hustotu populácie. Je to podiel aktuálneho počtu zvierat k maximálnemu počtu, aký by na danom území mohol žiť. Čiže ak $N = 1$, tak je populácia na absolútnom vrchole, čo znamená, že je najväčšia, aká môže byť. Nopak, ak je $N = 0$, populácia vymrela. N_{new} tu predstavuje populáciu v jednom roku a N_{old} populáciu v roku predtým. A λ je konštanta, ktorá, ako sa dá zistiť, môže nadobúdať hodnoty od 0 po 4.[2]

Označme $x(n+1) = N_{new}$ a $x(n) = N_{old}$. Dostávame obvyklý tvar diferenčnej rovnice:

$$x(n+1) = \lambda x(n)(1 - x(n)). \tag{6}$$

Pre budúce využitie definujme funkciu f:

$$f(x) = \lambda x(1 - x),$$

čiže $x(n+1) = f(x(n)$.

Pre takúto diferenčnú rovnicu vieme z matematického hľadiska všeličo zistiť. Je jasné, že veľkosť konštanty λ bude mať na správanie sa populácie výrazný vplyv.

Napríklad ak by bola λ nulová, tak pri akejkoľvek počiatočnej hodnote $x(0)$ je $x(n) = 0 \times x(n-1) \times [1 - x(n-1)] = 0$, takže by v takomto prípade populácia hneď vymrela.

Čo sa však bude diať, ak λ nulová nebude? Aj na túto otázku vieme aspoň čiastočne odpovedať. Christopher píše:

> *Keď je λ menšia ako 1, populácia sa zmenšuje a zmenšuje až vyhynie. A keď je λ medzi 1 a 3, popuácia sa zväčšuje a potom sa ustáli ...*
> *A keď je λ medzi 3 a 3,57, populácia sa správa cyklicky ...*
> *Ale keď je λ väčšia ako 3,57 populácia sa stáva chaotickou ako v prvom grafe.* [11]

a kreslí obrázky k jednotlivým prípadom. Podobné obrázky sú uvedené aj tu - ide o obrázky 8 - 11. Pozrime sa, čo vieme o Christopherovych riešeniach dokázať. Tiež sa neskôr vrátime k obrázkom a ukážeme si, aké priebehy ilustrujú.

Najjednoduchšie je nájsť stacionárne body. Stacionárny bod je taká hustota populácie žiab, ktorá sa z roka na rok nemení. Nech $\lambda > 0$. Pre stacionárny bod $\hat{x}$ rovnice (6) platí:

$$\hat{x} = \lambda \hat{x}(1 - \hat{x}).$$

Po úprave dostaneme:

$$\lambda \hat{x}[(1 - \frac{1}{\lambda}) - \hat{x}] = 0,$$

a teda máme dva pevné body $\hat{x}_1 = 0$ a $\hat{x}_2 = 1 - \frac{1}{\lambda}$. To znamená, že ak je tento rok hustota nulová alebo rovná $1 - \frac{1}{\lambda}$, tak taká bude aj ten ďalší rok a zostane rovnaká aj po nasledujúce roky. Čo ak sa ale tohtoročná populácia žiab nerovná ani jednej z týchto hodnôt?

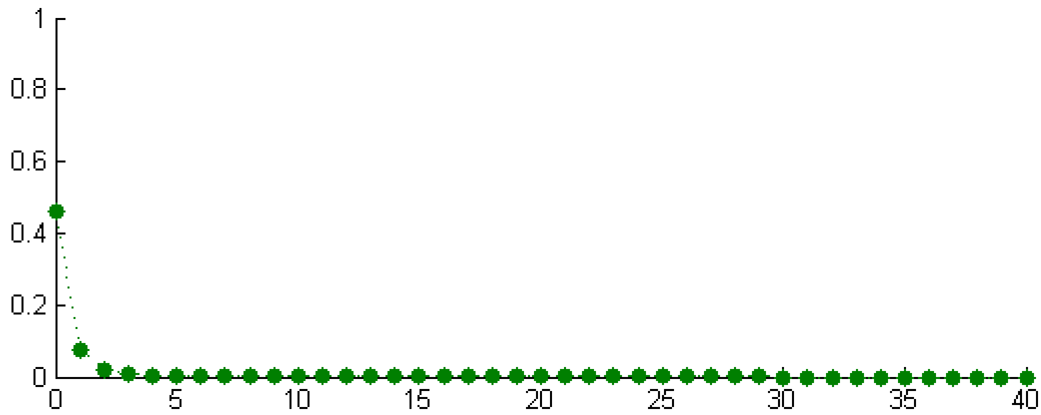
[2] N_{new} musí byť z intervalu $\langle 0; 1\rangle$. Pre akékoľvek $N_{old} \in \langle 0; 1\rangle$ je výraz $N_{old}(1 - N_{old}) \geq 0$ a teda aj $\lambda \geq 0$. Navyše maximum tohto výrazu sa nachádza v bode $N_{old} = \frac{1}{2}$, pre ktorý platí $N_{old}(1 - N_{old}) = \frac{1}{4}$ a teda aby tento výraz po prenásobení λ nenadobúdal hodnotu vyššiu ako 1, musí byť $\lambda \leq 4$.

Jednou možnosťou je, že sa dlhodobo ustáli na jednom z pevných bodov. Ak pri začiatočnej hustote z okolia pevného bodu nastane takáto konvergencia, nazývame to asymptotickou stabilitou daného bodu. Ďalším krokom našej analýzy je teda zistiť, či a v ktorých prípadoch sú tieto pevné body asymptoticky stabilné.

Vieme, že pevný bod $\hat{x}$ je asymptoticky stabilný, ak derivácia funkcie $f(x)$ podľa x v bode $\hat{x}$ je v absolútnej hodnote menšia ako 1 (pozri [4]). Najprv spravíme deriváciu funkcie $f(x)$ podľa x v bode $x = \hat{x}_1 = 0$:

$$f'(x) = \lambda(1-2x)|_{x=\hat{x}_1=0} = \lambda(1 - 2 \times 0) = \lambda.$$

Teda nula bude asymptoticky stabilným pevným bodom práve vtedy, keď $\lambda < 1$. Ak teda $\lambda < 1$ a začneme s malou hustotou populácie (blízko nule), tak sa postupom času budú viac a viac približovať nule, a teda populácia sa bude zmenšovať a postupne vyhynie[3]. Na obrázku 8 vidíme, ako sa správa populácia pre $\lambda = 0,3$ a počiatočnú hustotu populácie rovnú $0,46$.



Obr. 8: $\lambda = 0,3$, počiatočná hustota $0,46$

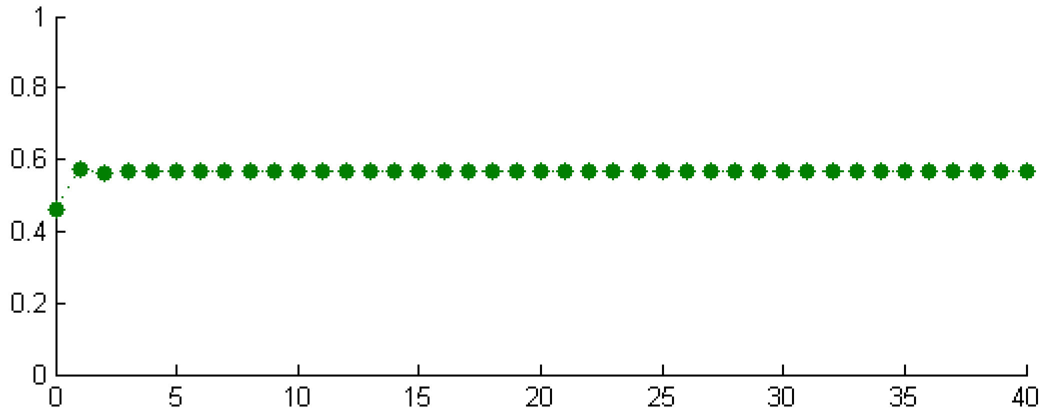
Teraz vyšetríme druhý pevný bod $\hat{x}_2 = 1 - \frac{1}{\lambda}$:

$$f'\left(1 - \frac{1}{\lambda}\right) = \lambda(1-2x)|_{x=\hat{x}_2=1-\frac{1}{\lambda}} = \lambda\left[1 - 2 \times \left(1 - \frac{1}{\lambda}\right)\right] = 2 - \lambda.$$

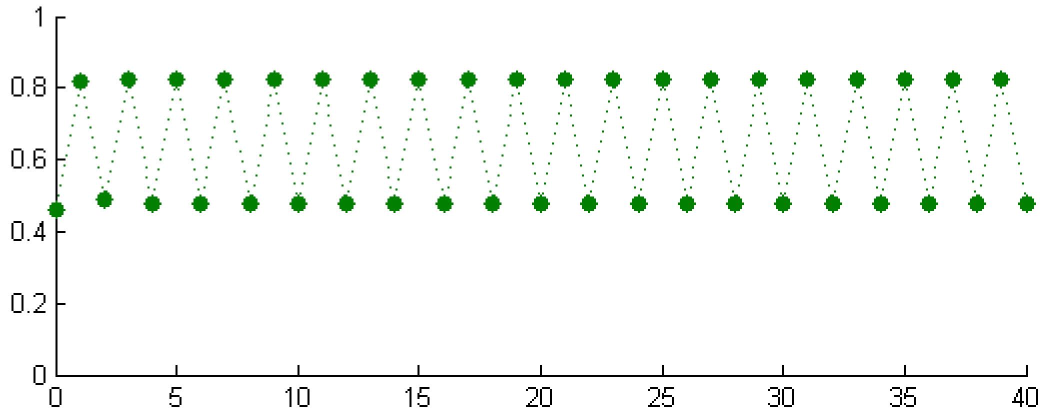
Bod $\hat{x}_2$ bude asymptoticky stabilným pevným bodom práve vtedy, keď $|2-\lambda| < 1$, čo nastáva, ak $1 < \lambda < 3$. Teda ak $1 < \lambda < 3$ a začneme s hustotou populácie niekde blízko $1 - \frac{1}{\lambda}$, tak sa postupom času ustáli populácia na tejto stacionárnej hustote. Na obrázku 9 vidíme, ako sa správa populácia pre $\lambda = 2,3$ a počiatočnú hustotu populácie rovnú $0,46$.

Na obrázku 10 vidíme, ako sa hustota populácie ustáli na tom, že osciluje medzi dvomi hustotami. Nájdenie takýchto cyklov nie je oveľa ťažšie ako nájdenie stacionárnych bodov. Budeme postupovať podľa [10]. Definujme funkciu

[3]Presnejšie povedané, nikdy nevyhynie úplne, ale bude k tejto nulovej hodnote konvergovať. Takto treba chápať výraz "ustáli sa" v ďalšom texte.



Obr. 9: $\lambda = 2,3$, počiatočná hustota $0,46$



Obr. 10: $\lambda = 3,3$, počiatočná hustota $0,46$

$$g(x) = f(f(x)).$$

Riešenie s periódou 2 (teda $\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_1, \hat{x}_2, \ldots$) vieme pomocou funkcie g vyjadriť podmienkami:

$$\hat{x}_1 = g(\hat{x}_1), \qquad \hat{x}_2 = g(\hat{x}_2).$$

V našom prípade:

$$\begin{aligned} g(x) &= \lambda(\lambda\ x\ (1-x)(1-(\lambda\ x\ (1-x)) \\ &= \lambda^2 x(1-x)(1-\lambda x(1-x)). \end{aligned}$$

Budeme riešiť rovnicu $\hat{x} = g(\hat{x})$, t. j.:

$$\lambda^2 \hat{x}(1-\hat{x})(1-\lambda\hat{x}(1-\hat{x})) = \hat{x}.$$

Rovnicu môžeme vydeliť $\hat{x}$, lebo riešenie $\hat{x} = 0$ nás nezaujíma, zodpovedá totiž pevnému bodu $\hat{x} = 0$.[4] Dostaneme:

$$1 = \lambda^2(1-\hat{x})(1-\lambda\hat{x}(1-\hat{x})),$$
$$0 = \lambda^2(1-\hat{x})(1-\lambda\hat{x}(1-\hat{x})) - 1.$$

Roznásobíme:

$$\hat{x}^3 - \hat{x}^2 + \left(1+\frac{1}{\lambda}\right)\hat{x} + \left(\frac{1}{\lambda^3}+\frac{1}{\lambda}\right) = 0.$$

Znovu využijeme predchádzajúcu poznámku, že aj pevné body sú riešením. Teda aj $\hat{x} = 1 - \frac{1}{\lambda}$, takže sa dá vyňať koreňový činiteľ $\hat{x} - \left(1 - \frac{1}{\lambda}\right)$:

$$\left[\hat{x} - \left(1-\frac{1}{\lambda}\right)\right] \times \left[\hat{x}^2 - \left(1+\frac{1}{\lambda}\right)\hat{x} + \left(\frac{1}{\lambda^2}+\frac{1}{\lambda}\right)\right] = 0.$$

Zostane kvadratická rovnica:

$$\hat{x}^2 - \left(1+\frac{1}{\lambda}\right)\hat{x} + \left(\frac{1}{\lambda^2}+\frac{1}{\lambda}\right) = 0,$$

ktorú už vieme jednoducho vyriešiť. Dostaneme:

$$\hat{x}_{1,2} = \frac{1}{2}\left(\frac{\lambda+1}{\lambda} \pm \sqrt{\left(\frac{\lambda+1}{\lambda}\right)^2 - \frac{4(\lambda+1)}{\lambda^2}}\right).$$

Toto vieme zjednodušiť:

$$\hat{x}_{1,2} = \frac{\lambda+1 \pm \sqrt{(\lambda-3)(\lambda+1)}}{2\lambda}.$$

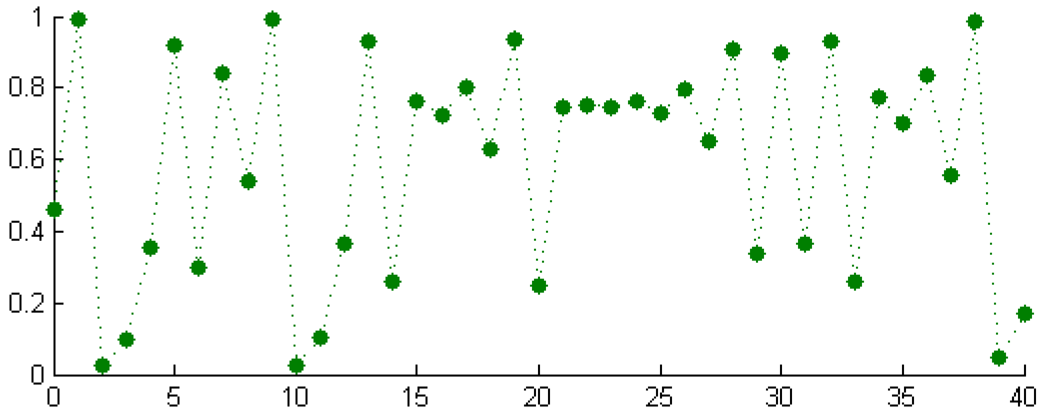
Tieto $\hat{x}_1$, $\hat{x}_2$ sú reálne, ak $\lambda < -1$ alebo ak $\lambda > 3$. Keďže máme $\lambda \geq 0$, musí byť $\lambda > 3$. Pre $\lambda > 3$ teda existuje periodické riešenie s periódou 2. Na obrázku 10 je $\lambda = 3,3$ čomu zodpovedá $\hat{x}_1 = \frac{4{,}3+\sqrt{1{,}29}}{6{,}6} \doteq 0,8236$ a $\hat{x}_2 = \frac{4{,}3-\sqrt{1{,}29}}{6{,}6} \doteq 0,479427$.

Na koniec si aspoň pre zaujímavosť na obrázku 11 ukážme, ako vyzerá graf pre $\lambda = 4$ (a počiatočnú hustotu $0,46$). Vidíme, že pre takto zvolené hodnoty vyzerá graf naozaj chaoticky.

5.2 Delová guľa

Vo *Verneho* knihe ***Cesta na mesiac*** [32] bola v delovej guli do vesmíru vystrelená trojica Michal Ardan, Barbicane a Nicholl. Malo ísť o cestu na Mesiac, no kvôli chybe vo výpočtoch sa celá expedícia zvrtla. V istom momente sú naši hrdinovia presvedčení, že sa ich vesmírna loď bude pohybovať jedným z dvoch možných spôsobov:

[4] Pevné body $\hat{x}$ funkcie f tiež spĺňajú $g(\hat{x}) = \hat{x}$, lebo pre ne platí $g(\hat{x}) = f(f(\hat{x})) = f(\hat{x}) = \hat{x}$.



Obr. 11: $\lambda = 4$, počiatočná hustota $0,46$

"Projektil má na výber medzi dvoma matematickými krivkami a poletí alebo podľa jednej, alebo podľa druhej; to už bude záležať na rýchlosti, ktorá ho bude hnať a ktorú v tejto chvíli neviem odhadnúť."
"Áno,"potvrdil Nicholl,"strela poletí buď podľa paraboly, alebo podľa hyperboly."
"Hej, je tak," odvetil Barbicane. "Pri určitej rýchlosti jej smer bude parabolický, pri väčšej rýchlosti hyperbolický."
"Mám rád takéto veľké slová,"zvolal Michal Ardan. "Každý ihneď vie, čo to má znamenať. Prosím vás pekne, čo je to tá vaša parabola?"
"Môj milý priateľu," odvetil mu kapitán, "parabola je krivka druhého stupňa, ktorá vznikne, ak rovina pretne kužeľ rovnobežne s jeho povrchovou priamkou."
"Aha, aha, čiže tak,"povedal Michal uspokojene.
"Je to takmer dráha, ktorú opíše guľa vystrelená z dela," objasňoval Nicholl.
[32]

Neskôr sa dozvedáme, že práve parabola je krivka, po ktorej letia. Ako však vyzerajú vzorce podľa ktorých sa táto krivka kreslí?

Zrejme len málokto ich vie naspamäť. No tí šikovnejší si ich vedia celkom rýchlo a bez problémov odvodiť. Stačí vedieť, že prvá derivácia funkcie polohy telesa podľa času je jeho okamžitá rýchlosť a druhá je zrýchlenie. V našom prípade hľadáme takéto funkcie dve - jednu pre x-ovú (horizontálnu) zložku a druhú pre y-ovú (vertikálnu) zložku.

Ak budeme predpokladať, že neexistuje odpor vzduchu, tak jediné zrýchlenie pôsobiace na delovú guľu je gravitácia. Tá pôsobí len na y-ovú zložku. Teda ak označíme gravitačné zrýchlenie ako g, tak:

$$x''(t) = 0, \qquad y''(t) = -g. \tag{7}$$

Z tohto vieme vypočítať funkcie pre rýchlosti v x-ovom a y-ovom smere. (Postup riešenia rôznych **diferenciálnych rovníc** sa dá nájsť napríklad v [4].) Keďže druhé derivácie (zrýchlenia) sú konštanty, budeme hľadať prvé derivácie (rýchlosti) v tvare:

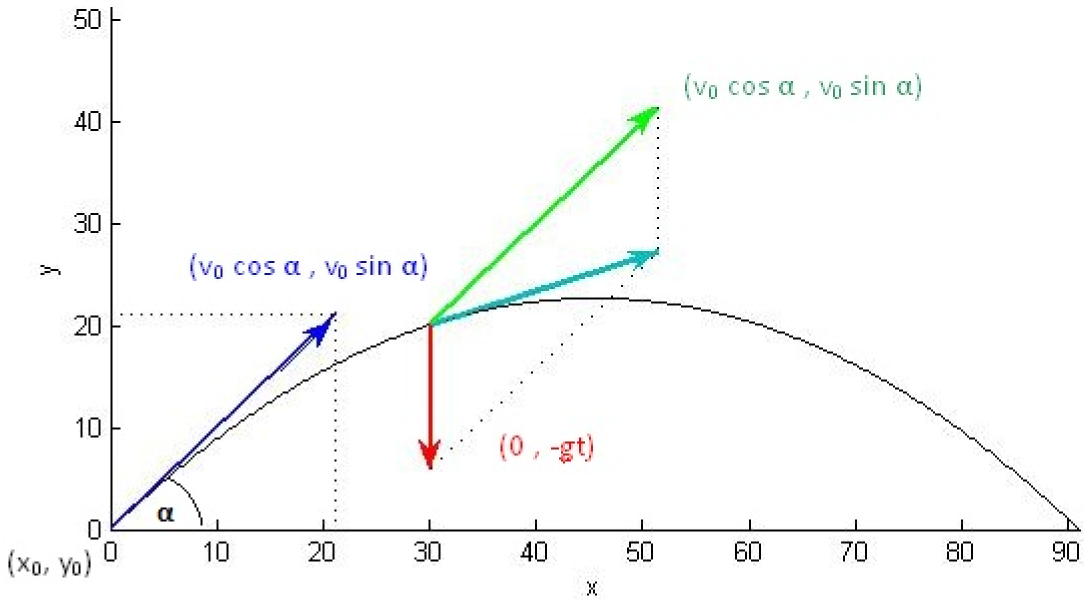
$$x'(t) = a + b \times t, \qquad y'(t) = c + d \times t, \tag{8}$$

tak, aby spĺňali tieto podmienky:

- Rovnice zo (7) musia byť splnené, teda ak zderivujeme v_x, musíme dostať $x''(t) = 0$ a ak zderivujeme v_y, musíme dostať $y''(t) = -g$. Ak zderivujeme (8), dostaneme $x''(t) = b$, $y''(t) = d$. Teda $b = 0$, $d = -g$.
- Platí $x'(0) = v_0 \cos\alpha$ a $y'(0) = v_0 \sin\alpha$, kde v_0 predstavuje rýchlosť s akou sa projektil na začiatku pohyboval a α predstavuje uhol, pod akým bol vystrelený (viď obrázok 12). Dosadením do (8) dostaneme $x'(0) = a$, $y'(0) = c$. Teda $a = v_0 \cos\alpha$, $c = v_0 \sin\alpha$.

Vyjde nám:

$$v_x(t) = x'(t) = v_0 \cos\alpha, \qquad v_y(t) = y'(t) = v_0 \sin\alpha - gt.$$



Obr. 12: Delová guľa

Zopakovaním tohto postupu potom dostávame rovnice pre funkcie polohy gule, ktoré vyzerajú nasledovne:

$$x(t) = x_0 + v_0 t \cos\alpha,$$
$$y(t) = y_0 + v_0 t \sin\alpha - \frac{g\, t^2}{2},$$

kde (x_0, y_0) predstavuje súradnice počiatočného bodu, odkiaľ modul vylieta, v_0 už spomínanú počiatočnú rýchlosť a α uhol, pod akým modul počiatočný bod opustil.

Ak vyjadríme y ako funkciu x, dostaneme

$$\begin{aligned}
y &= y_0 + \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}(x - x_0) - \frac{g}{2v_0\cos\alpha}(x - x_0)^2 \\
&= -\frac{g}{2v_0\cos\alpha}x^2 + \left(\frac{gx_0}{2v_0\cos\alpha} - \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\right)x + \left(-\frac{gx_0^2}{2v_0\cos\alpha} - \frac{x_0\sin\alpha}{\cos\alpha} + y_0\right),
\end{aligned}$$

čo je naozaj parabola.

Vďaka týmto rovniciam by si mohli prípadní vesmírni kovboji (ak by boli samozrejme dostatočne zbehlí v matematike) vypočítať dráhy svojich guliek, vystrelených v nejakom gravitačnom poli.

Tí pozemskí ich síce môžu využívať tiež. Avšak vieme, že na guľky pôsobia ďalšie sily, ako napríklad odpor vzduchu. Takže vypočítaná parabola nie je úplne presne trajektóriou. Hoci by ich to zrejme od strieľania aj tak neodradilo. Konieckoncov zatiaľ sa najmä vo filmoch a kriminálnych seriáloch strieľa ostošesť.

6 Algebra

Algebra patrí k naozaj najzákladnejším matematickým odvetviam. Bez nej by sme neboli schopní pohnúť sa vo výpočtoch ďalej. Možno i preto si našla svoje miesto aj v literatúre a kinematografii.

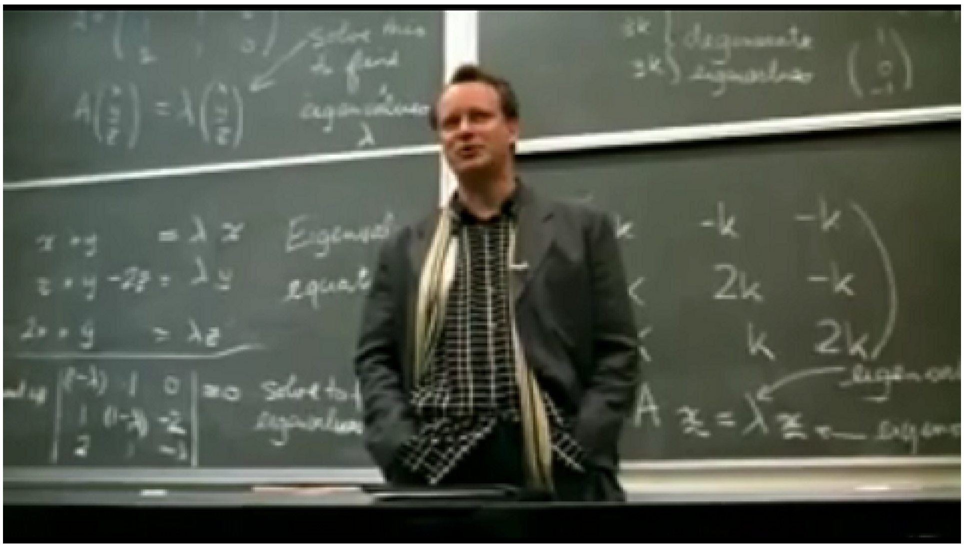
6.1 Prednáška profesora Lambeaua

Ak sa povie matematika vo filmoch, väčšine ľudí okamžite zíde na um snímka ***Dobrý Will Hunting*** [43]. Ide o príbeh mladého a nesmierne nadaného mladíka Willa, ktorý pracuje ako údržbár na technickej vysokej škole. Keďže má byť hlavná postava matematický génius, nie je prekvapením, že sa v tomto filme objavuje hojne matematika. Okrem dvoch problémov, ktorých vyriešením si Will získa pozornosť profesora Geralda Lambeaua a ktorým sa budeme venovať neskôr, vieme nájsť aj iné, menej nápadné námety na príklady.

Jeden nachádzame na tabuli za profesorom Lambeauom, keď ho po druhý krát vidíme stáť pred prednáškovou sálou plnou študentov. Ide o maticu:

$$A = \begin{pmatrix} 2k & -k & -k \\ k & 2k & -k \\ k & k & 2k \end{pmatrix}.$$

Ako môžeme na obrázku 13 vidieť, tvorcovia filmu nám dali k dispozícii nielen maticu A, ale aj potrebné definície a postup výpočtu. Skúsme nájsť **vlastné hodnoty** a **vlastné vektory** matice pre rôzne hodnoty parametra $k \in \mathbb{R}$.



Obr. 13: *Dobrý Will Hunting*, prednáška

Môžeme predpokladať, že $k \neq 0$, nakoľko je riešenie pre $k = 0$ triviálne. Pre $k = 0$ je totiž matica A nulová, jej vlastné hodnoty sú taktiež nulové a za vlastné vektory môžeme zvoliť ľubovoľné tri lineárne nezávislé vektory, napríklad:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Nech teda $k \neq 0$. Hľadáme také hodnoty λ a príslušné vektory $(x, y, z)^T$, ktoré spĺňajú

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda I_{3\times 3} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Po predelení k dostávame

$$A' \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{\lambda}{k} I_{3\times 3} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

kde

$$A' = \frac{1}{k} A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Označme $\lambda' = \frac{\lambda}{k}$. Vidíme, že stačí, ak nájdeme vlastné hodnoty λ' matice A' a po prenásobení číslom k dostaneme vlastné hodnoty pôvodnej matice A a vlastné vektory prislúchajúce k λ' budú zároveň aj vlastnými vektormi matice A. Najskôr nájdeme korene charakteristického polynómu, t. j. také $\lambda'_{1,2,3}$, aby platilo

$$\begin{aligned} 0 = \begin{vmatrix} 2-\lambda' & -1 & -1 \\ 1 & 2-\lambda' & -1 \\ 1 & 1 & 2-\lambda' \end{vmatrix} &= (2-\lambda')^3 + 3(2-\lambda') \\ = (2-\lambda')[(2-\lambda')^2 + 3] &= (2-\lambda')[(\lambda')^2 - 4\lambda' + 7]. \end{aligned}$$

Dostávame $\lambda'_1 = 2$ a $\lambda'_{2,3} = 2 \pm i\sqrt{3}$. Z toho dostávame vlastné hodnoty matice A: $\lambda_1 = 2k$ a $\lambda_{2,3} = 2k \pm ik\sqrt{3}$.

Prejdime k výpočtu vlastných vektorov. Začnime s $\lambda'_1 = 2$. Hľadáme vektor $v_1 \neq 0_{3\times 1}$, ktorý spĺňa

$$(A' - \lambda'_1 I_{3\times 3}) v_1 = 0_{3\times 1},$$

teda

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} v_1 = 0_{3\times 1}.$$

Riešením tejto sústavy je napr. vektor $v_1 = (1; -1; 1)^T$.

Ďalej pokračujme s $\lambda_2' = 2 + i\sqrt{3}$. Hľadáme vektor $v_2 \neq 0_{3\times 1}$, ktorý spĺňa

$$(A' - \lambda_2' I_{3\times 3})v_2 = 0_{3\times 1},$$

teda

$$\begin{pmatrix} -i\sqrt{3} & -1 & -1 \\ 1 & -i\sqrt{3} & -1 \\ 1 & 1 & -i\sqrt{3} \end{pmatrix} v_2 = 0_{3\times 1}.$$

Vektor, ktorý by riešil túto sústavu je napr. $v_2 = (-1 + i\sqrt{3}; 1 + i\sqrt{3}; 2)^T$.

Keďže $\lambda_3' = 2 + i\sqrt{3}$ je komplexne združeným číslom k λ_2', tak aj vlastný vektor v_3 bude komplexne združeným vektorom k v_2. Teda $v_3 = (-1 - i\sqrt{3}; 1 - i\sqrt{3}; 2)^T$. Čiže vlastné vektory matice A sú:

$$\lambda_1 = 2k, \quad \lambda_2 = 2k + ik\sqrt{3}, \quad \lambda_3 = 2k - ik\sqrt{3}$$

a k nim prislúchajúce vlastné vektory sú

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} -1 + i\sqrt{3} \\ 1 + i\sqrt{3} \\ 2 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} -1 - i\sqrt{3} \\ 1 - i\sqrt{3} \\ 2 \end{pmatrix}.$$

6.2 Harriotova metóda na riešenie koreňov kubických rovníc

Už v prváckej algebre sa prednáša veta, ktorá hovorí o koreňoch algebraických rovníc. Známa je pod názvom **základná veta algebry** a hovorí, že každý polynóm stupňa aspoň jeden s komplexnými koeficientami má aspoň jeden komplexný koreň. Jej dôkaz je však náročnejší a vyžaduje znalosti z ďalších matematických oblastí, napr. komplexnej analýzy. Ďalšia dôležitá veta je tá, ktorá hovorí, že rovnica stupňa n má n koreňov (Obe nájdeme napríklad v [2]).

Zo strednej školy je nám zase známy vzorec pre výpočet koreňov kvadratickej rovnice pomocou diskriminantu, ktorý nachádzame napríklad aj v knihe ***Čudná príhoda so psom uprostred noci*** [11].

Vo všeobecnosti takéto vzorce neexistujú. Ak je stupeň polynómu väčší alebo rovný 5, neexistuje predpis v radikáloch, ktorý by udával korene všeobecného polynómu. Toto tvrdenie dokázal ešte Évariste Galois, francúzsky matematik, ktorý bohužiaľ skonal veľmi mladý (zomrel v súboji v roku 1832 ako dvadsaťročný). Kniha ***The French mathematician: a novel*** [21] od autora *Toma Petsinisa* predstavuje fiktívne Galoisove spomienky.

Vráťme sa však k hľadaniu koreňov algebraických rovníc. Vo filme ***Mladosť v ťahu*** [40] je v teste, ktorý hrdinovia píšu, uvedený nasledujúci spôsob hľadania koreňov kubických rovníc. Otázka znie, ako sa táto metóda volá. Správna odpoveď je **Harriotova metóda na riešenie kubických rovníc**.

Majme kubickú rovnicu nasledovného špeciálneho tvaru:

$$x^3 + 3b^2x = 2c^3, \tag{9}$$

kde $b, c \in \mathbb{R}$ sú konštanty.

Metóda uvedená v teste spočíva v tom, že si urobíme substitúciu $x = \frac{y^2-b^2}{y}$, z čoho po úprave dostaneme:

$$y^6 - 2c^3y^3 - b^6 = 0. \tag{10}$$

Táto rovnica sa dá ďalšou substitúciou $z = y^3$ previesť na kvadratickú rovnicu

$$z^2 - 2c^3z - b^6 = 0, \tag{11}$$

ktorú už vieme jednoducho vyriešiť. Jeden jej koreň je $z = c^3 + \sqrt{(c^6 + b^6)}$, čo prevedieme znovu na

$$y^3 = c^3 + \sqrt{(c^6 + b^6)}. \tag{12}$$

Rovnosť (10) vieme jednoducho upraviť na $y^3\left(y^3 - 2c^3\right) = b^6$ a po predelení oboch strán y^3 dostaneme:

$$y^3 - 2c^3 = b^6/y^3.$$

Z toho po dosadení $y^3 = c^3 + \sqrt{(c^6 + b^6)}$ máme:

$$c^3 + \sqrt{(c^6 + b^6)} - 2c^3 = b^6/y^3,$$

$$-c^3 + \sqrt{(c^6 + b^6)} = b^6/y^3. \tag{13}$$

Ak teraz urobíme tretie odmocniny z (12) a (13):

$$y = \sqrt[3]{c^3 + \sqrt{(c^6 + b^6)}}, \tag{14}$$

$$b^2/y = \sqrt[3]{-c^3 + \sqrt{(c^6 + b^6)}}, \tag{15}$$

dostaneme vzorec na výpočet jedného koreňa pôvodnej kubickej rovnice (9) :

$$\begin{aligned} x = y - b^2/y &= \sqrt[3]{c^3 + \sqrt{(c^6 + b^6)}} - \sqrt[3]{-c^3 + \sqrt{(c^6 + b^6)}} \\ &= \sqrt[3]{c^3 + \sqrt{(c^6 + b^6)}} + \sqrt[3]{c^3 - \sqrt{(c^6 + b^6)}}. \end{aligned} \tag{16}$$

Našli sme teda jeden koreň kubickej rovnice (9). Tu popis tohto postupu končí. Od našepkávačov sediacich v aute sa dozvedáme, že ide Harriotovu metódu riešenia kubických rovníc [20]. Zostáva však niekoľko nezodpovedaných otázok:

- Podľa základnej vety algebry, ktorú sme uviedli na začiatku kapitoly, má každá kubická rovnica (a teda aj rovnica v špeciálnom tvare (9)) tri korene. Kde sú potom zvyšné dva?
- Pri výpočte koreňov kvadratickej rovnice (11) sme zobrali len jeden z koreňov. Nemali by sme zobrať aj druhý a tým získať ďalšie riešenie pôvodnej kubickej rovnice? (Aj tak nám však zostáva tretí koreň, ktorý sa niekde "stratil".)

Najskôr zodpovieme otázku o druhom koreni kvadratickej rovnice (11). Ak zoberieme $\tilde{z} = c^3 - \sqrt{(c^6 + b^6)}$, tak rovnakým postupom dostaneme:

$$\tilde{y} = \sqrt[3]{c^3 - \sqrt{(c^6 + b^6)}}, \qquad b^2/\tilde{y} = \sqrt[3]{-c^3 - \sqrt{(c^6 + b^6)}}\ .$$

A teraz vypočítame:

$$\begin{aligned}\tilde{x} = \tilde{y} - b^2/\tilde{y} &= \sqrt[3]{c^3 - \sqrt{(c^6 + b^6)}} - \sqrt[3]{-c^3 - \sqrt{(c^6 + b^6)}} \\ &= \sqrt[3]{c^3 + \sqrt{(c^6 + b^6)}} + \sqrt[3]{c^3 - \sqrt{(c^6 + b^6)}}\ ,\end{aligned}$$

čo je to isté, ako to, čo sme dostali predtým.

V skutočnosti sme mohli vidieť hneď z rovnice (9), že má práve jeden reálny koreň. Existencia takéhoto koreňa vyplýva z toho, že $x^3 + 3b^2x \to +\infty$ pre $x \to +\infty$ a $x^3 + 3b^2x \to -\infty$ pre $x \to -\infty$. Existuje teda také x, pre ktoré $x^3 + 3b^2x = 2c^3$. Takýchto x nemôže byť viac, lebo funkcia $x^3 + 3b^2x$ je rastúca (môžeme sa o tom presvedčiť priamo z definície alebo výpočtom derivácie).

Základná veta algebry hovorí o komplexných koreňoch. Zvyšné dva korene rovnice (9) sú teda komplexné. "Stratili" sa nám pri výpočte tretej odmocniny, vo vzťahoch (14) a (15). Okrem týchto reálnych tretích odmocnín existujú ešte dve komplexné.

Ak nás však zaujímajú iba reálne korene, rovnica (9) má vždy jeden reálny koreň, ktorý je daný vzorcom (16).

7 Pravdepodobnosť

S pravdepodobnosťami sa stretávame dennodenne, hoci si to zrejme neuvedomujeme. Napríklad už ráno, keď vstaneme a začneme sa chystať na cestu do práce či školy, myslíme pri pohľade z okna na to, aké je pravdepodobné, že bude pršať a tomu sa snažíme prispôsobiť svoj výber oblečenia. Samozrejme, v takomto prípade nejde o presné výpočty, skôr o akési odhady. A len málokto sa nad vecami, ako je dážď, zamýšľa až do takej miery ako postavy filmu ***Butterfly Dreaming*** [45], keď sa v jednej scéne pýta hlavného hrdinu jeho manželka:

> *"Aká je šanca, že dve dažďové kvapky dopadnú na ten istý list?"*
> *"Za predpokladu, že zasiahnu tamten strom?"*
> *"Napríklad."*
> *"Hmm.Tak sa na to pozrime...ten strom má približne osem stôp, od spodu sa rozkonáruje asi 12-krát, takže povedzme, že ich je asi* 2^{12} *a ak je každý zakončený jedným listom, čo dáva približne 8000 listov* [5]*, tak je to asi 1 k 8000."* [45]

Napriek tomu majú pravdepodobnosti určite svoje čaro. Obzvlášť v súvislosti s rôznymi súťažami a hazardnými hrami. A v takejto podobe po nich literárni autori a scenáristi radi siahajú.

7.1 Monty Hall

V knihe ***Čudná príhoda so psom uprostred noci*** [11] hlavný hrdina Christopher vraví:

> *Pán Jeavons tvrdí, že mám rád matematiku lebo je bezpečná. Povedal, že mám rád matematiku, lebo to znamená riešiť problémy a tieto problémy sú ťažké a zaujímavé, no na konci vždy čaká jednoznačná odpoveď. A čo tým myslel bolo, že matematika nie je ako život, lebo v živote na konci jednoznačné odpovede nie sú. Viem, že je to tak, lebo mi to povedal.*
> *No je to preto, lebo pán Jeavons nerozumie číslam.*
> *Tu je slávny príbeh zvaný* ***Monty Hall problém****, ktorý som to tejto knihy zahrnul, lebo najlepšie ilustruje, čo som tým myslel.* [11]

The Monty Hall problem je štatistická úloha s ktorou sa potýkali účastníci americkej televíznej súťaže *Let's make a deal.* Problém bol pomenovaný po pôvodnom moderátorovi súťaže (*Monty Hall*).

Úloha znie: Ste súťažiaci v *Let's make a deal.* Chcete vyhrať auto. Moderátor vám ukáže tri dvere a povie vám, že za jednými je vaša vysnená cena a za zvyšnými dvomi sú kozy. Vy si jedny dvere vyberiete. Tieto dvere ostanú zatvorené. Zo zvyšných dvoch moderátor jedny otvorí, a pretože on vie, kde je auto, otvorí také, za ktorými stojí koza. V tejto chvíli sa vás spýta, či chcete zmeniť svoj výber a zvoliť druhé neotvorené

[5] Ak si to však prepočítame tak vidíme, že $2^{12} = 4096$, a až $2^{13} = 8192 \approx 8000$, čiže ide buď o chybu v preklade, alebo sa zmýlili tvorcovia filmu.

dvere, alebo či chcete radšej ostať pri svojom pôvodnom výbere. Akú taktiku by ste mali zvoliť a prečo?

Hlavný hrdina nám spomína, že keď bol tento problém predostretý pred Marilyn vos Savant, toho času držiteľku Guinessovho rekordu za najvyššie namerané IQ, tak:

> *Marilyn vos Savant povedala, že by ste mali vždy zmeniť svoj výber a zvoliť posledné dvere, pretože je šanca 2 z 3, že za nimi bude auto.*
> *No keď použijete svoju intuíciu tak si myslíte, že šanca je 50:50, pretože si myslíte, že je pravdepodobnosť pre obe dvere rovnaká.*

Jej tvrdenie Marilyn vyslúžilo množstvo nahnevaných a rozhorčených odoziev, nemálo z nich od matematikov, nakoľko je kontrainuitívne. Christopher nám podáva dva spôsoby, ako ukázať, že sa Marilyn vos Savant nemýlila.

Prvým spôsobom je jednoducho spočítať pravdepodobnosť výhry, ak sme sa rozhodli zmeniť svoj prvotný výber. Christopher píše:

> *Označme dvere ako X, Y, Z.*
>
> *Nech C_X je prípad, že auto je za dverami X, atď. .*
>
> *Nech H_X je prípad, keď moderátor otvorí dvere X, atď..*
>
> *Predpokladajúc, že si vyberiete dvere X, je pravdepodobnosť výhry auta, ak potom zmeníte svoje rozhodnutie, daná rovnicou:*
>
> $$\begin{aligned} &P(H_Y \wedge C_Z) + P(H_Z \wedge C_Y) \\ &= P(C_Z)P(H_Y|C_Z) + P(C_Y)P(H_Z|C_Y) \\ &= \frac{1}{3} \times 1 + \frac{1}{3} \times 1 = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

Ako na to Christopher prišiel? Asi podobným myšlienkovým postupom, ako je tento:

Bez ujmy na všeobecnosti povedzme, že sme si na začiatku zvolili dvere X. Teda moderátor otvorí buď dvere Y alebo Z. Potom zmeníme svoje rozhodnutie. Pravdepodobnosť výhry je súčtom pravdepodobností:

$$P(\text{moderátor otvorí dvere Y a súčasne je auto za dverami Z})+$$

$$P(\text{moderátor otvorí dvere Z a súčasne je auto za dverami Y}) =$$

$$= P(H_Y \wedge C_Z) + P(H_Z \wedge C_Y).$$

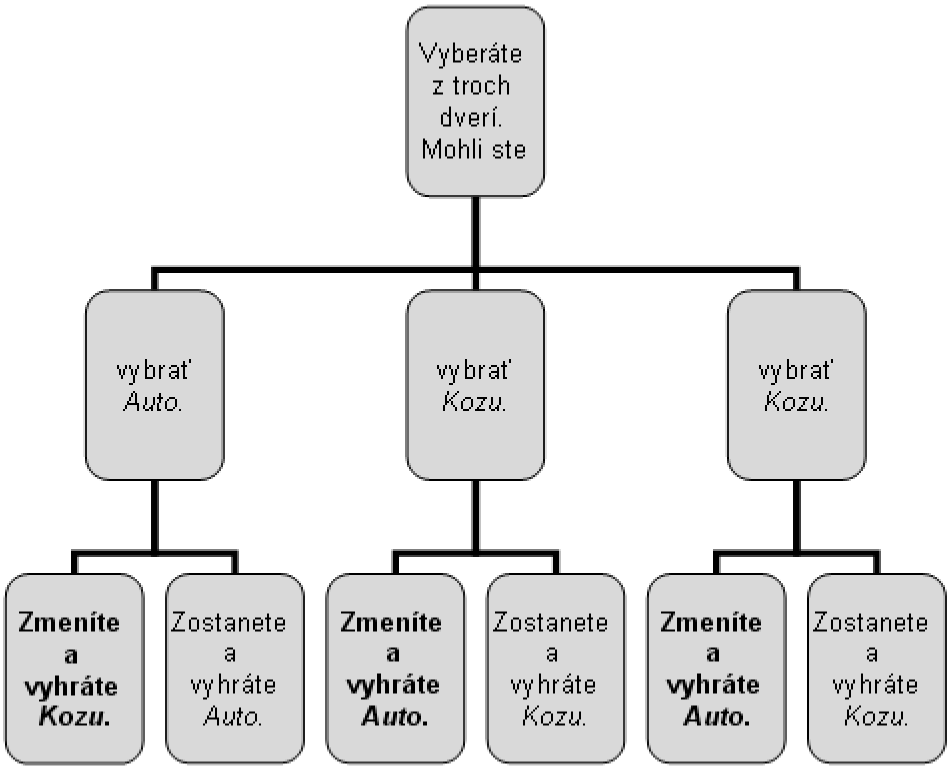
Použitím vzťahu $P(A \wedge B) = P(A)P(A|B)$ vieme tento výraz ďalej upraviť:

$$P(C_Z)P(H_Y|C_Z) + P(C_Y)P(H_Z|C_Y).$$

Platí $P(C_Z) = P(C_Y) = P(C_X) = \frac{1}{3}$, lebo ide o pravdepodobnosť, že sa auto nachádza za dverami $x \in \{X, Y, Z\}$ a $P(H_Y|C_Z) = P(H_Z|C_Y) = 1$, lebo ide o pravdepodobnosti, že moderátor otvorí dvere Y (resp. Z) v prípade, že sa auto nachádza za dverami Z (resp. Y), čo je jedna, nakoľko dvere X ste si zvolili vy a za dverami Z (resp. Y) je auto a on môže otvoriť len dvere, za ktorými je koza, takže nemá inú možnosť, než vybrať dvere Y (resp. Z). Teda:

$$P(C_Z)P(H_Y|C_Z) + P(C_Y)P(H_Z|C_Y) = \frac{1}{3} \times 1 + \frac{1}{3} \times 1 = \frac{2}{3}.$$

Druhým spôsobom je nakreslenie diagramu z názorňujúcom všetky možné akcie, ktoré máme k dispozícii, pozri obrázok 14. Aj tento spôsob nachádzame v knihe ***Čudná príhoda so psom uprostred noci*** [11].



Obr. 14: Monty Hall problém

Teda ak je vašou stratégiou vždy svoj výber zmeniť, tak vyhráte auto v dvoch z troch prípadov.

Tento problém sa často vyskytuje na internete v diskusiách [12], [23], [24]. Mnoho ľudí predchádzajúce riešenie spochybňuje.

Skúsme sa teda na tento problém pozrieť úplne od podlahy. Spravme si základný pravdepodobnostný model - **pravdepodobnostný priestor**. Ak sa zhodneme na tom, ako by mal vyzerať, výpočet ľubovoľných pravdepodobností je už jednoznačný a neponecháva priestor na špekulácie. Pravdepodobnostný priestor pozostáva z množiny elementárnych udalostí Ω, sigma algebry S a pravdepodobnosti P [34].

Ako bude vyzerať množina Ω? Presnejšie - čo budú v tomto prípade elementárne udalosti, čím charakterizujeme výsledok hry? Potrebujeme určiť, za ktorými dverami je auto a ktoré dvere otvoril moderátor. Našu druhú voľbu na tomto mieste nešpecifikujeme. Po vytvorení pravdepodobnostného priestoru budeme vedieť pre konkrétne stratégie (napr. "zostanem pri pôvodnej voľbe") vybrať tie elementárne udalosti, pri ktorých by sme vyhrali a vypočítať pravdepodobnosť výhry. Označme dvere X, Y, Z. Potom $\Omega = \{w_i\}$, kde w_i má tvar:

$$w_i = (\text{dvere s autom, náš prvý výber, dvere otvorené moderátorom}).$$

Každý prvok tejto usporiadanej trojice je z množiny $\{X, Y, Z\}$. Nie všetky trojice sú možné. Napríklad:

- (X, Y, X) nemôže nastať, lebo moderátor neotvorí dvere, za ktorými je auto,
- (X, Y, Y) nemôže nastať, lebo moderátor neotvorí dvere, ktoré sme si vybrali.

Vo všeobecnosti, posledná zložka sa nemôže zhodovať ani s prvou ani s druhou, teda:

$$\Omega = \{(a, b, c) : a, b, c \in \{X, Y, Z\}, c \neq a, c \neq b\} \ .$$

Množina Ω má teda 12 prvkov:

$$\begin{array}{rlll} \Omega = \{ & (X,X,Y), & (Y,X,Z), & (Z,X,Y) \\ & (X,X,Z), & (Y,Y,X), & (Z,Y,X) \\ & (X,Y,Z), & (Y,Y,Z), & (Z,Z,X) \\ & (X,Z,Y), & (Y,Z,X), & (Z,Z,Y) \quad \} \ . \end{array}$$

Množina Ω je konečná, v tomto prípade sa obvykle berie $S = 2^\Omega$ [34] (t.j. systém všetkých podmnožín) a spravíme to aj teraz. Na definovanie pravdepodobnosti P (čo je funkcia $S \to [0, 1]$) potom stačí definovať pravdepodobnosť jednotlivých elementárnych udalostí. Zavedieme označenie podľa tabuľky 1.

w_i	$P(\{w_i\})$	w_i	$P(\{w_i\})$	w_i	$P(\{w_i\})$
(X,X,Y)	p_1	(Y,X,Z)	p_5	(Z,X,Y)	p_9
(X,X,Z)	p_2	(Y,Y,X)	p_6	(Z,Y,X)	p_{10}
(X,Y,Z)	p_3	(Y,Y,Z)	p_7	(Z,Z,X)	p_{11}
(X,Z,Y)	p_4	(Y,Z,X)	p_8	(Z,Z,Y)	p_{12}

Tabuľka 1: Pravdepodobnosti elementárnych udalostí

Čo musia tieto pravdepodobnosti spĺňať, aby zodpovedali hre? Vypíšeme si tieto podmienky a ukážeme, že pravdepodobnosti sú už nimi jednoznačne určené. Podmienky sú:

1. Auto je s rovnakou pravdepodobnosťou za dverami 1,2,3.

2. Nevieme, kde je auto, preto podmienené pravdepodobnosti
   $P(\text{vyberieme dvere } X|\text{ auto je za dverami } X)$[6],
   $P(\text{vyberieme dvere } X|\text{ auto je za dverami } Y)$ a
   $P(\text{vyberieme dvere } X|\text{ auto je za dverami } Z)$ musia byť rovnaké.

3. Dvere X, Y, Z vyberáme náhodne, každé s pravdepodobnosťou 1/3.

4. Ak má moderátor možnosť výberu, ktoré dvere otvorí, vyberá ich náhodne, každé s pravdepodobnosťou 1/2.

Prepíšeme tieto podmienky pomocou pravdepodobností p_i:

1. $p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 1/3$, $p_5 + p_6 + p_7 + p_8 = 1/3$, $p_9 + p_{10} + p_{11} + p_{12} = 1/3$

2. $\frac{p_1+p_2}{\sum_{i=1}^4 p_i} = \frac{p_5}{\sum_{i=5}^8 p_i} = \frac{p_9}{\sum_{i=9}^{12} p_i}$, $\frac{p_3}{\sum_{i=1}^4 p_i} = \frac{p_6+p_7}{\sum_{i=5}^8 p_i} = \frac{p_{10}}{\sum_{i=9}^{12} p_i}$, $\frac{p_4}{\sum_{i=1}^4 p_i} = \frac{p_8}{\sum_{i=5}^8 p_i} =$
   $= \frac{p_{11}+p_{12}}{\sum_{i=9}^{12} p_i}$

3. $p_1 + p_2 + p_5 + p_9 = 1/3$, $p_3 + p_6 + p_7 + p_{10} = 1/3$, $p_4 + p_8 + p_{11} + p_{12} = 1/3$

4. $p_1 = p_2$, $p_6 = p_7$, $p_{11} = p_{12}$

Dosadíme rovnosti z bodu 1. do rovností z bodu 2. a prenásobením rovníc z bodu 2. číslom 1/3 dostávame:

$$p_1 + p_2 = p_5 = p_9 \ , \ p_3 = p_6 + p_7 = p_{10} \ , \ p_4 = p_8 = p_{11} + p_{12}$$

a tým dostaneme systém 6 nezávislých rovníc. Spolu s rovnicami z bodov 3. a 4. je to 12 rovníc s 12 neznámymi, ktoré majú práve jedno riešenie, uvedené v tabuľke 2.

w_i	$P(\{w_i\})$	w_i	$P(\{w_i\})$	w_i	$P(\{w_i\})$
(X,X,Y)	1/18	(Y,X,Z)	2/18	(Z,X,Y)	2/18
(X,X,Z)	1/18	(Y,Y,X)	1/18	(Z,Y,X)	2/18
(X,Y,Z)	2/18	(Y,Y,Z)	1/18	(Z,Z,X)	1/18
(X,Z,Y)	2/18	(Y,Z,X)	2/18	(Z,Z,Y)	1/18

Tabuľka 2: Pravdepodobnosti elementárnych udalostí pri konkrétnych číslach

Teraz už môžeme jednoducho počítať akékoľvek pravdepodobnosti. Stačí si premyslieť, ktoré elementárne udalosti vedú pri danej stratégii k výhre a ktoré nie.

Týmto postupom vieme prehľadne riešiť aj "zamotanejšie" modifikácie tejto úlohy. Predstavme si, že auto je za dverami X s pravdepodobnosťou 1/2, za dverami Y s pravdepodobnosťou 1/3 a za dverami Z s pravdepodobnosťou 1/6. Tieto pravdepodobnosti sú nám vopred známe, a s takýmito pravdepodobnosťami sa rozhodneme voliť dvere v prvom kroku. Čo je výhodnejšie spraviť v druhom kroku, ak ostatné pravidlá zostávajú nezmenené?

[6]Vieme, že platí $P(\text{vyberieme dvere } X|\text{ auto je za dverami } X) = P(\text{vyberieme dvere } X \wedge \text{auto je za dverami } X) \ / \ P(\text{auto je za dverami } X)$.

1. zostať pri pôvodnej voľbe,
2. zmeniť výber dverí,
3. zmeniť výber dverí, to znamená vybrať dvere A, inak zostať pri pôvodnej voľbe.

Nájdete lepšiu stratégiu ako sú tieto?

7.2 Lotéria

V epizóde ***Spasiteľ zabijakom*** [36] Springfield podľahol ošiaľu zvanému lotéria. Slogan znie: *Štátna lotéria, v ktorej vyhráva každý.* V reklame sa len malým písmom objaví informácia, že skutočné šance na výhru sú jeden k tristoosemdesiatim miliónom. Každý vsádza na svojich obľúbených 6 čísel s vidinou možnosti obrovskej výhry. Jediné, čo nám ako divákom zostalo zatajené, je to, z koľkých čísel sa žrebuje. Avšak tento údaj si vieme dopočítať.

Obr. 15: Lotéria

Vieme, že princíp lotérie spočíva v tom, že máme na žreb, na ktorom je napísaných n čísel, z ktorých si vyberieme a zaškrtneme 6. Na poradí vylosovaných čísel nezáleží. V takomto prípade sa pravdepodobnosť výhry vypočíta pomocou vzorca:

$$P(\text{výhra v lotérii}) = \frac{1}{\binom{n}{6}} = \frac{1}{\frac{n!}{(n-6)!6!}} = \frac{(n-6)!6!}{n!} = \frac{720}{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)},$$

kde n nepoznáme ale zato vieme, že $P(\text{výhra v lotérii}) \approx \frac{1}{380\ 000\ 000}$.

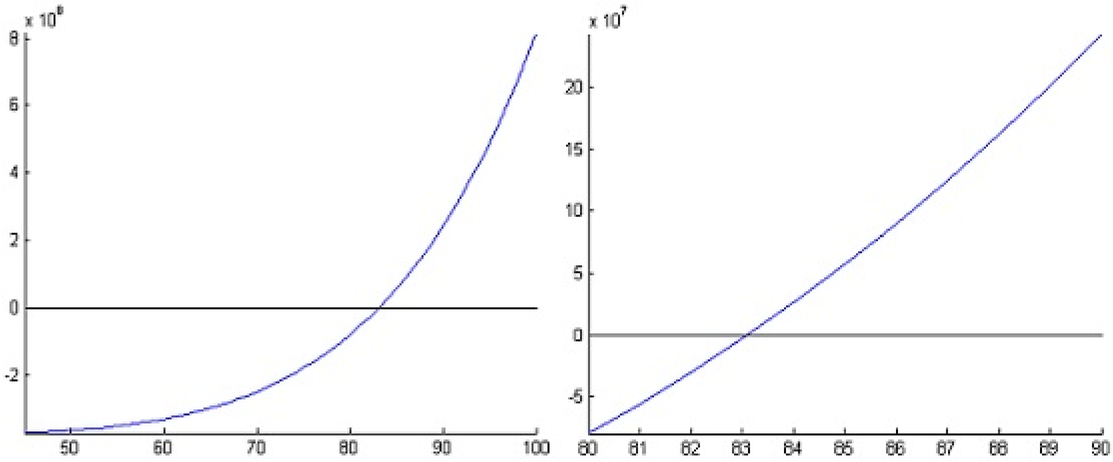
Takže vlastne hľadáme také prirodzené číslo n, pre ktoré:

$$\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}{720} \approx 380\ 000\ 000.$$

Nakreslíme funkciu:

$$f(x) = \frac{x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)}{720} - 380\ 000\ 000$$

a budeme hľadať také $n \in \mathbb{N}$, ktoré je blízko nulového bodu funkcie f. Vieme, že nám stačí kresliť od $x = 49$, lebo boli vylosované čísla $3, 17, 26, 36, 41, 49$, takže sa určite losuje aspoň z 49 čísel. Z obrázku 16 vľavo vidíme, že riešenie sa nachádza niekde medzi $n = 80$ a $n = 90$. Po priblížení (viď obrázok 16 vpravo), je možné vidieť, že naše



Obr. 16: Graf funkcie $f(x)$ a jeho priblíženie

riešenie je okolo $n = 83$. A naozaj:

$$\binom{83}{6} = \frac{83!}{77!6!} = 377\ 447\ 148 \approx 380\ 000\ 000.$$

Teda v Springfieldskej lotérii ste by ste mali na výber z osemdesiatich troch čísel.

7.3 Feynman vo Vegas

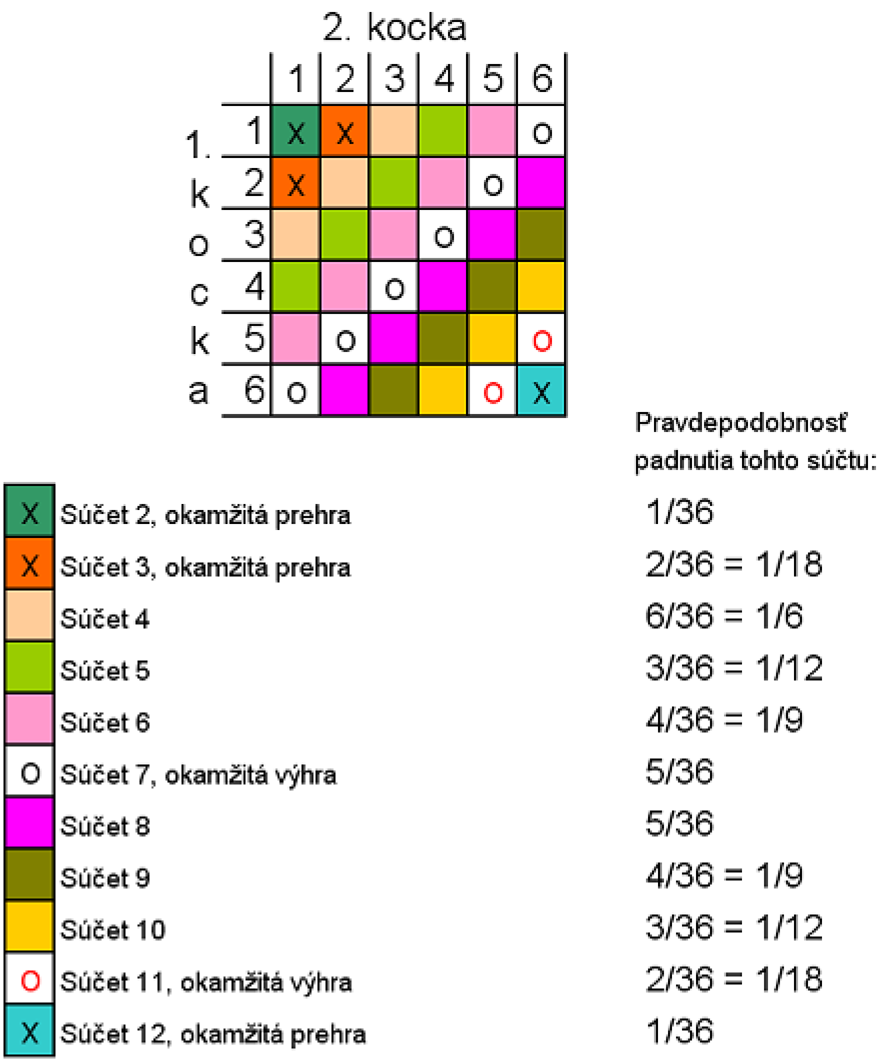
Opäť sa vraciame k *Richardovi Feynmanovi* a knihe ***To snáď nemyslíte vážne, pán Feynman!*** [8]. Keď bol prýkrát v Las Vegas, spočítal si pravdepodobnosti výhier v jednotlivých hazardných hrách. Spomína:

> *... zistil som, že pre stoly, kde sa hrali kocky, je to čosi ako 0,493.* [8]

Prekradateľ vysvetľuje v poznámke pod čiarou, že ide o hru *craps* a uvádza aj jej pravidlá: Hádže sa dvomi kockami. Ak padne v súčte číslo 7 alebo číslo 11, hráč okamžite vyhráva. Ak padne 2, 3 alebo 12, okamžite prehráva. Inak hádže znovu. Hra končí, pokiaľ padne 7 (vtedy prehráva) alebo ten istý súčet ako v prvom kole (vtedy vyhráva). Overme teraz Feynmanov výsledok pre pravdepodobnosť výhry.

Najprv si spočítajme pravdepodobnosť prehry:

$$\begin{aligned} P(\text{prehra}) = P(\text{prehrá hneď}) &+ P(\text{prehrá}|\text{padla } 4) \times P(\text{padla } 4) \\ &+ P(\text{prehrá}|\text{padla } 5) \times P(\text{padla } 5) \\ &+ P(\text{prehrá}|\text{padla } 6) \times P(\text{padla } 6) \\ &+ P(\text{prehrá}|\text{padla } 8) \times P(\text{padla } 8) \\ &+ P(\text{prehrá}|\text{padla } 9) \times P(\text{padla } 9) \\ &+ P(\text{prehrá}|\text{padla } 10) \times P(\text{padla } 10). \end{aligned} \tag{17}$$



Obr. 17: Craps

Potrebujeme spočítať pravdepodobnosť typu $P(\text{prehrá}|\text{padol súčet } k)$. To nastane v takýchto situáciách:

$$\begin{array}{lll} 7 & & \\ y_k & 7 & \\ y_k & y_k & 7 \\ \vdots & & \end{array}$$

kde y_k je súčet iný ako k a 7. Čiže ak v prvom kole padol súčet k, predstavuje prvý riadok prípad, kedy padol v druhom kole súčet 7, druhý riadok simuluje udalosť, že v druhom kole padol súčet y_k a v treťom 7, atď. Pravdepodobnosti týchto udalostí sú uvedené v tabuľke 3, pričom platí, že $p_k = P(y_k) = 1 - P(\text{padne } 7) - P(\text{padne } k)$. Po zosumovaní:

$$\frac{1}{6}(1 + p_k + p_k^2 + \ldots) = \frac{1}{6}\frac{1}{1 - p_k}.$$

udalosť	pravdepodobnosť
7	$\frac{1}{6}$
y_k 7	$p_k \frac{1}{6}$
y_k y_k 7	$p_k^2 \frac{1}{6}$
y_k y_k y_k 7	$p_k^3 \frac{1}{6}$
$\vdots$	$\vdots$

Tabuľka 3: P(prehrá|padol súčet k)

Vypočítame tieto pravdepodobnosti pre $k = 4, 5, 6, 8, 9, 10$ (viď tabuľka 4).

k	p_k	$\frac{1}{6}\frac{1}{1-p_k}$
4	$\frac{3}{4}$	$\frac{2}{3}$
5	$\frac{13}{18}$	$\frac{3}{5}$
6	$\frac{25}{36}$	$\frac{6}{11}$
8	$\frac{25}{36}$	$\frac{6}{11}$
9	$\frac{13}{18}$	$\frac{3}{5}$
10	$\frac{3}{4}$	$\frac{2}{3}$

Tabuľka 4: Pravdepodobnosti p_k

Dosadíme do (17):

$$P(\text{prehra}) = \frac{1}{9} + \frac{2}{3} \times \frac{1}{12} + \frac{3}{5} \times \frac{1}{9} + \frac{2}{3} \times \frac{1}{12} + \frac{3}{5} \times \frac{1}{9} + \frac{6}{11} \times \frac{5}{36} = \frac{251}{495}$$

a teda $P(\text{výhra}) = 1 - P(\text{prehra}) = \frac{244}{495} \doteq 0,4929$.

Ak hráč staví v kasíne v tejto hre jeden dolár a vyhrá, získa ďalší dolár. Ak prehrá, príde o svoj vklad. Pri pravdepodobnosti výhry p je stredná hodnota zisku z jednej hry $1 \times p + (-1) \times (1 - p) = 2p - 1$. V našom prípade je $p = 244/495$, čiže $2p - 1 = -7/495 \doteq -0,014$. Ak stavíme jeden dolár, v priemere stratíme 1,4 centa. Pri piatich hrách je to 7 centov. To nie je až tak veľa a môžeme si povedať, že to stojí za pôžitok z hry. K rovnakému názoru dospel i Feynman, a dopadlo to takto:

Keď vsadím dolár, bude ma to stáť len 1,4 centa. Tak som si povedal: Prečo stále váham? Veď to dokopy nič nestojí.
Tak som začal vsádzať a hneď som prehral päť dolárov za sebou - jeden, dva, tri, štyri, päť. Podľa predpokladu som mal stratiť len sedem centov; namiesto toho som bol ľahší o päť dolárov! Od tej doby som už nevsádzal (svoje vlastné peniaze, aby som bol presný). Mal som šťastie, že som začal hneď od začiatku prehrávať. [8]

Môže nám napadnúť: Aká je pravdepodobnosť toho, že človek päťkrát za sebou prehrá? A aké je vlastne pravdepodobnostné rozdelenie zisku po piatich hrách?

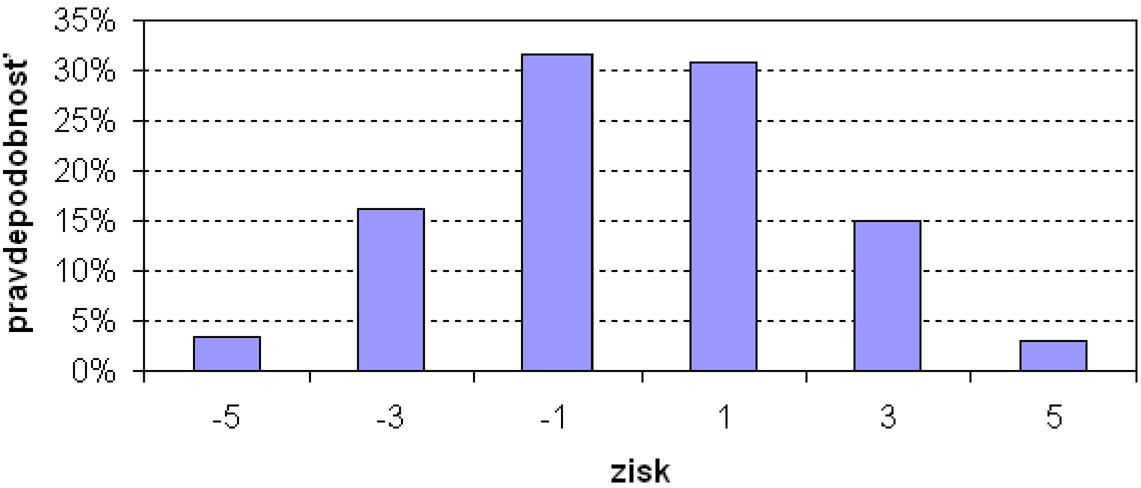
Poďme najprv zodpovedať prvú otázku. Pravdepodobnosť prehry v jednej hre je 251/495, a teda prehra v piatich po sebe idúcich nezávislých kolách je $(251/495)^5 \doteq 0.0335$, čiže približne 3,35%.

Teraz sa pozrime na zisk po piatich hrách. Ak označíme X počet výhier, tak X má binomické rozdelenie Bin(5, 244/495) a výška zisku je $X - (5 - X) = 2X - 5$. Vieme, že pre $k = 0, 1, \ldots, 5$ je pravdepodobnosť toho, že $X = k$, rovná $\binom{5}{k}\left(\frac{244}{495}\right)^k\left(\frac{251}{495}\right)^{5-k}$. Môžeme teda zostaviť nasledovnú tabuľku:

počet výhier	0	1	2	3	4	5
pravdepodobnosti	0,033523	0,16294	0,316792	0,307958	0,149685	0,029102
zisk	-5	-3	-1	1	3	5

Tabuľka 5: Pravdepodobnostné rozdelenie

Pravdepodobnostné rozdelenie výhry môžeme znázorniť aj graficky (obrázok 18):



Obr. 18: Graf pravdepodobnostného rozdelenia

Ukončime túto kapitolu návodom, ako predsa len zarobiť na hazardných hrách. Vyzerá to byť nemožné? Feynmanovi sa to tiež nezdalo, keď mu ukázali Nicka, ktorý bol vraj profesionálnym hráčom. Veď výhry v kasíne sú určené tak, aby boli v prospech kasína.

> *"Tak to by som rád vedel, ako môžete zarábať hazardným hraním, keď je pri stole pravdepodobnosť výhry 0,493."*
> *"To máte pravdu," povedal. "Vysvetlím vám to. Ja nevsádzam pri stole a podobných zariadeniach. Vsádzam, len keď mám pravdepodobnosť vo svoj prospech."*
> *"Čože? To je snáď pravdepodobnosť niekedy vo váš prospech?" opýtal som sa neveriacky.*
> *"V skutočnosti je to celkom jednoduché." povedal. "Postávam okolo stola a nejaký chlap povie: 'Padne deviatka. Naisto to bude deviatka.' Chlap je rozpálený, myslí si, že to bude deviatka a chce sa vsadiť. Lenže ja poznám pravdepodobnosť pre všetky čísla naspamäť, aj keby ste ma zobudili o polnoci, takže mu poviem: 'Vsadím sa s vami štyri ku trom, že to deviatka nebude', a dlhodobo vyhrávam. Nevsádzam na to, čo sa hrá pri stole; namiesto toho sa vsádzam s ľuďmi okolo stola, s tými, ktorí majú predsudky, poverčivé predstavy o šťastných číslach."* [8]

Aby bola stávka spravodlivá, pravdepodobnosť, že deviatka padne by mala byť $3/7 \doteq 0,43$. Z výpočtov pri analýze hry *craps* však vieme, že je to $1/9$ čo je približne $0,11$, teda oveľa menej. Dlhodobo teda mohol tento "profesionálny hráč"naozaj vyhrávať. Ako je ale možné, že boli ľudia ochotní staviť sa s ním? To zostáva naďalej záhadou, ktorú pomocou teórie pravdepodobnosti nevyriešime. Trochu svetla do tohto problému vnáša sám "profesionálny hráč" Nick:

> *"A teraz, keď už som známy, je to dokonca ešte ľahšie, lebo ľudia sa so mnou stavia, aj keď vedia, že nemajú veľmi veľkú šancu. Stavia sa jednoducho preto, že ak by vyhrali, tak by mohli rozprávať, ako vyhrali nad Grékom Nickom."* [8]

7.4 Ako dlho treba čakať na draka

Zbierka noviel od známeho poľského autora sci-fi *Stanislawa Lema* s názvom ***Kyberiáda*** [16] obsahuje dvanásť krátkych vtipných príbehov, ktorých centrálnymi postavami je dvojica Trurl a Klapacius. Títo dvaja vedátori spolu prežívajú rôzne dobrodružstvá. V novele nazvanej ***Výprava tretia, draky pravdepodobnosti*** autor píše:

> *Trurl s Klapaciusom boli žiakmi známeho Kerebrona z Umpapílie, ktorý prednášal všeobecnú teóriu drakov celých štyridsaťsedem rokov na vysokej škole nulity. Je dobre známe, že draky neexistujú. Laikovi toto jednoduché konštatovanie postačí, nemôže však uspokojiť vedcov. ...*
> *... Geniálny Kerebron sa s problémom potýkal metódami analytickými a odhalil tri druhy drakov: mýtické, chimérické a čisto hypotetické.* [16]

Naši hrdinovia Trurl a Klapacius sa problémom neexistencie resp. pravdepodobnosti existencie drakov zaoberali z matematického hľadiska a vytvorili takzvanú "štatistiku drakoniky". Dozvedáme sa, že:

Podľa tejto rovnice je nutné čakať na spontánnu manifestáciu priemerného draka aspoň šestnásť kvintokvadriliónov heptiliónov rokov. [16]

Teda zrejme dosť dlho. Ak si dovolíme spraviť jednu malú zmenu a *na spontánnu manifestáciu priemerného draka je nutné čakať aspoň...* nahradíme *na spontánnu manifestáciu priemerného draka je nutné čakať v priemere...*, dostaneme celkom zaujímavý príklad. Budeme na základe zadaných údajov počítať pravdepodobnosť vzniku draka.

Avšak natriafame na malú prekážku: *šestnásť kvintokvadriliónov heptiliónov rokov* je pravdepodobne slovná hračka, a nie naozajstné číslo. Je totiž podozrivé, že sa tu miešajú latinské (kvinto-, t. j. 5 a kvadri-, t.j. 4) a grécke (hepto-, t. j. 7) predpony[7]. Preto nahradíme toto "číslo" všeobecnou hodnotou, napríklad x dní.

Nech p je pravdepodobnosť, s akou v daný konkrétny deň vznikne drak. Predpokladajme, že spontánna manifestácia draka môže nastať každý deň v rovnakom čase, napríklad presne na obed. Ďalej predpokladajme, že to, či dnes drak vznikne, nezávisí od minulosti (v ktorých dňoch draky vznikli a v ktorých nie). Potom platí:

$$\begin{aligned}
P(\text{vznikne dnes}) &= p, \\
P(\text{nevznikne dnes, ale vznikne zajtra}) &= (1-p)\,p, \\
P(\text{nevznikne dnes ani zajtra, ale vznikne pozajtra}) &= (1-p)\,(1-p)\,p, \\
&\vdots \\
P(\text{prvý drak vznikne o } k \text{ dní}) &= (1-p)^k\,p.
\end{aligned}$$

Ak označíme X počet dní čakania na prvého draka, tak strednú hodnotu z X vypočítame ako (pozri napríklad [34]):

$$\begin{aligned}
E[X] &= \sum_{k=0}^{\infty} k(1-p)^k p \\
&= p \times \left[0 + (1-p) + 2(1-p)^2 + 3(1-p)^3 + 4(1-p)^4 + \ldots\right] \\
&= p \times \{\ \ (1-p) \times \left[1 + (1-p) + (1-p)^2 + (1-p)^3 + \ldots\right] \\
&\qquad + (1-p)^2 \times \left[1 + (1-p) + (1-p)^2 + (1-p)^3 + \ldots\right] \\
&\qquad + (1-p)^3 \times \left[1 + (1-p) + (1-p)^2 + (1-p)^3 + \ldots\right] + \ldots\} \\
&= p \times [(1-p)\sum_{k=0}^{\infty}(1-p)^k + (1-p)^2\sum_{k=0}^{\infty}(1-p)^k + (1-p)^3\sum_{k=0}^{\infty}(1-p)^k + \ldots] \\
&= p \times \left[(1-p)\frac{1}{1-(1-p)} + (1-p)^2\frac{1}{1-(1-p)} + (1-p)^3\frac{1}{1-(1-p)} + \ldots\right] \\
&= p\,\frac{1}{p}\,(1-p)\,\sum_{k=0}^{\infty}(1-p)^k = (1-p)\,\frac{1}{1-(1-p)} = \frac{1-p}{p} = \frac{1}{p} - 1.
\end{aligned}$$

[7] V chémii sa sídce vyskytujú súbežne latinské a grécke základy, no v prípade označovania veľkých čísel tomu tak nie je [27].

Ak teda máme informáciu, že v priemere treba čakať x dní, teda že $E[X] = x$, vieme z nej vypočítať pravdepodobnosť vzniku draka v jednom konkrétnom dni:

$$x = \frac{1}{p} - 1,$$
$$p = \frac{1}{1+x}.$$

8 Teória čísel

Teória čísel sa zaoberá celými číslami, deliteľnosťou, prvočíslami a mnohými inými témami. Jedným z jej najznámejších problémov je **veľká Fermatova veta**.

8.1 Veľká Fermatova veta

Pierre de Fermat, francúzsky matematik žijúci začiatkom sedemnásteho storočia, je často označovaný za zakladateľa modernej teórie čísel. Veľká Fermatova veta bola nájdená vo forme poznámky na okraji kópie knihy ***Arithmetica***, ktorej autorom je grécky matematik *Diofantos*. Pierre de Fermat v tejto poznámke tvrdí, že rovnica:

$$x^n + y^n = z^n$$

nemá riešenie pre $x, y, z, n \in \mathbb{Z}$, kde $x, y, z \neq 0$ a $n > 2$. Takisto napísal, že našiel *skutočne úžasný dôkaz tohto tvrdenia*, no bohužiaľ pre nás sa *nezmestil na okraj tejto knihy* [18] a Fermat sa ho ďalej už neunúval spísať. Nakoľko bola táto poznámka nájdená až po jeho smrti, nebolo už možné sa ho naň spýtať.

Veľká Fermatova veta sa vo filmoch, seriáloch a knihách objavuje celkom často. Dobrým príkladom je snímka ***Zmluva s diablom*** [41]. Diabol, v podaní krásnej herečky *Liz Hurleyovej* sľúbi hlavnému hrdinovi Elliotovi splnenie siedmich želaní výmenou za jeho dušu. Pri plnení týchto želaní ich však vždy nejako prekrúti, takže to nedopadne podľa Elliotovych predstáv. Objavuje sa vo viacerých podobách, napríklad ako učiteľka. V tejto scéne sa objaví záber, na ktorom vidíme na tabuli zadania domácich úloh. Jednou z nich je vyriešiť rovnicu $x^n + y^n = z^n$ pre $n > 2$.

Obr. 19: Zmluva s diablom

Napriek jednoduchej formulácii problému vôbec nejde o jednoduchú úlohu školského typu. Naopak, dlho sa s ňou trápili viacerí významní matematici a riešenie, ktoré našiel

Andrew Wiles niekoľko storočí po Fermatovi, je komplikované. Ranjit Subramanian, hlavná postava knihy ***The last theorem*** [5], sa snaží vysvetliť jeho hlavnú myšlienku otcovi, keď mu rozpráva o svojom štúdiu na univerzite:

> *"Najmä,"povedal, "to bola matematika, ktorá ma zamestnávala. Poznáš veľkú Fermatovu vetu... "A vtedy, keď na Ganeshovej tvári bolo po prvýkrát vidieť pobavenie, Ranjit povedal "No, samozrejme, že poznáš. Ty si mi dal Hardyho knihu, nie? Takže je tu tento takzvaný dôkaz od Wilesa. Je to hrôza. Ako Wiles vetu dokazuje? Vracia sa k vyhláseniu Kena Ribeta, že dokázal vzťah medzi Fermatom a Tanijamom-Šimurom. To je domnienka, ktorá hovorí ..."*
> *Ganesh ho potľapkal po pleci "Áno Ranjit,"povedal jemne, "ale nenamáhaj sa s vysvetľovaním tejto Tanijamovej-Šimurovej veci."*
> *"Dobre."Ranjit sa na chíľu zamyslel. "Zjednoduším to. Základom Wilesovho dôkazu sú dve vety. Prvá hovorí, že určitá eliptická krivka je semistabilná, ale nie je modulárna. A podľa druhej všetky semistabilné eliptické krivky s racionálnymi koeficientami sú určite modulárne. To znamená, že je tam spor a ..."*
> *Ganesh si vzdychol. "Ty sa tým naozaj intenzívne zaoberáš, však? Ale vieš, tvoja matematika je ďaleko od mojich schopností, takže hovorme o niečom inom. Čo tvoje ostatné predmety?"* [5]

Táto zmena témy sa Ranjitovi nepáčila. *"Načo sa mám učiť francúzštinu?"* sťažoval sa. *"Aby som mohol ísť na letisko a predávať suveníry turistom z Madagaskaru alebo Quebecu?"*

Vráťme sa však k Fermatovej vete. O histórii jej dokazovania sa môžeme dočítať napríklad aj v detektívke ***Flowers stained with moonlight*** [28] od *Catherine Shawowej.* Vetu nakoniec dokázal - ako už bolo spomenuté - Andrew Wiles. Prvý dôkaz zverejnil v roku 1993, ale ukázalo sa, že je v ňom chyba. O rok neskôr predložil spolu so svojim študentom opravenú verziu. Tieto udalisti boli inšpiráciou muzikálu ***Fermat's last tango*** [25]. Hlavný hrdina je Daniel Kane (predstavuje vlastne A. Wilesa), ktorý sa snaží Fermatovu vetu dokázať. Keď už si myslí, že dôkaz má, z nadšenia ho vyvedie Fermatov duch, ktorý ho piesňou ***Your proof contains a big fat hole***[8] upozorní na chybu a ďalej ho prenasleduje.

8.2 Niektoré špeciálne prípady

Všoebecný Wilesov dôkaz je zložitý. Ako sme už mohli vidiť v ukážke z románu ***The last theorem*** [5], Ranjitovi sa takáto komplikovanosť vôbec nepáčila. V knihe sa dozvedáme, že sa mu podarilo nájsť jednoduchší dôkaz. Nenechal sa odradiť ani presvedčivými námietkami, aké zaznievajú aj v tomto dialógu:

> *"Myslím tým,"Davoodbhoy dodal, "pozri sa na vec takto. Zrejme vieš, že Fermat strávil veľa svojho času, až do dňa, kedy zomrel, pokúšajúc sa dokázať,*

[8] V preklade ***Tvoj dôkaz má obrovskú dieru***.

že jeho tvrdenie platí pre exponent rovný trom, štyrom a piatim. Skús sa nad tým zamyslieť. Dáva to nejaký zmysel? Veď ak už mal všeobecný dôkaz tohto pravidla pre exponenty väčšie než dva, prečo by sa trápil dokazovaním niekoľkých separátnych prípadov?..."
"Dovoľ mi, nich ti predložím svoju teóriu toho, čo sa stalo, Subramanian. Predpokladajme, že - ktorý rok to bol, 1637? - v roku 1637 Monsieur Fermat práve dokončil to, o čom si myslel, že je dôkazom. Neskôr v ten večer, zatiaľ čo si čítal pred spaním vo svojej knižnici, predpokladajme, že si jednoducho nevedel pomôcť a napísal onú poznámku do svojej knihy. ..."
"Ďalej predpokladajme, že o niečo neskôr kontroloval svoj dôkaz a našiel závažnú chybu. Nebolo by to po prvý krát, no nie? Veď sa to už stalo s viacerými inými 'dôkazmi', ktoré, ako neskôr priznal, boli chybné, však?"Našťastie od Ranjita nevyžadoval odpoveď a pokračoval. "Tak sa pokúsil svoj dôkaz opraviť všetkými možnými spôsobmi. Bohužiaľ zlyhal. Tak, snažiac sa zachrániť aspoň niečo, vrhol sa na jednoduchšiu úlohu, a síce dokázať tvrdenie pre ľahší prípad ako napríklad exponent p rovný trom, kde uspel; a pre p rovné štyrom, kde uspel znovu. Ten pre p rovné piatim nikdy nedokončil, no bol si celkom istý, že nejaký existoval. A mal pravdu, lebo to neskôr niekto po jeho smrti dokázal. A po celý ten čas jeho poznámka v Diofantovi sedela na poličke v jeho knižnici. Ak si aj vôbec spomenul, že ju napísal, tak si asi pomyslel, že by sa asi vrátiť a vymazať ju, Lenže aká je šanca, že to niekto voľakedy uvidí? A potom zomrel a voľakto sa vŕtal v jeho knihách a zbadal ju... a nevedel, že si to ten veľký muž medzičasom rozmyslel."[5]

Ranjitov krátky, len niekoľkostranový dôkaz Veľkej Fermatovej vety je fikcia známeho sci-fi autora A.C. Clarka, ktorý je spoluautorom knihy ***The last theorem***. Ale to, že dôkazy pre niektoré n nie sú zložité, je pravda.

Oveľa jednoduchší než Wilesov všeobecný dôkaz, je napríklad dôkaz pre $n = 3$, ktorý našiel významný matematik *Leonhard Euler*. Tento dôkaz je založený na myšlienke nekonečného zostupu [9] a využíva isté tvrdenia o deliteľnosti. Predpokladáme, že existuje riešenie - trojica prirodzených čísle (x, y, z) - a ukážeme, že potom existuje aj riešenie s menšími hodnotami. Rovnicu ale riešime v množine prirodzených čísel, ktorá je zdola ohraničená, takže takáto vlastnosť je vlastne sporom. Iný spôsob dôkazu využíva postupy, ktoré nachádzame napríklad v skriptách z teórie čísel [29].

V knihe ***Dievča, ktoré sa hralo s ohňom*** [15], jednom dieli z trilógie detektívok známych pod súhrnným názvom ***Millenium*** od nedávno zosnulého autora *Stiega Larssona* sa hlavná hrdinka Lisbeth Salanderová potýka práve s problémom

$$x^3 + y^3 = z^3,$$

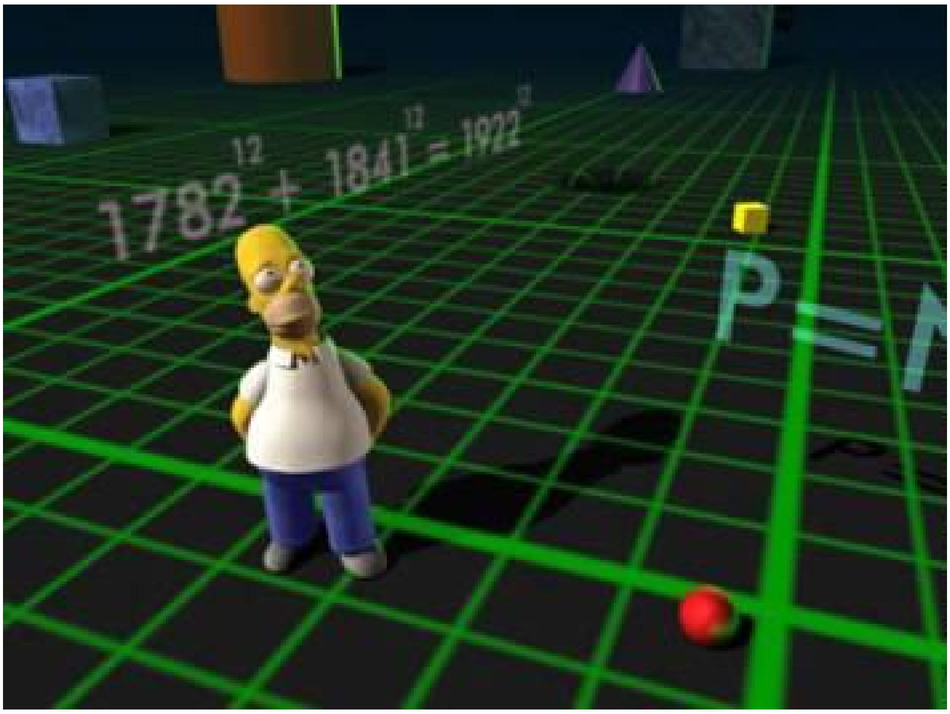
a ako sa zdá, riešenie sa jej podarilo po kratšom premýšľaní nájsť. Keďže vieme, že platnosť veľkej Fermatovej vety je dokázaná, ide buď o chybu prekladu, alebo pán Larsson tieto dôkazy nepoznal, či sa ich proste rozhodol ignorovať.

8.3 Zdanlivé protipríklady

Epizódu ***Špeciálny čarodejnícky diel VI.*** [37] seriálu ***Simpsonovci*** sme už spomínali v súvislosti s rovnicou $e^{i\pi} = -1$. Rovníc je však v tejto epizóde viac. Ďalšou je:

$$1782^{12} + 1841^{12} = 1922^{12}. \tag{18}$$

Táto rovnica letiaca okolo okolo 3-D Homera sa po prekontrolovaní pomocou mate-



Obr. 20: *Špeciálny čarodejnícky diel VI.*, veľká Fermatova veta

matických softvérov, napríklad pomocou MATLAB-u, môže zdať ako pravdivá (viď obrázok 21).

```
>> (1782^12+1841^12)^(1/12)

ans =

  1.9220e+003

>>
```

Obr. 21: Zdanlivý protipríklad 1

Je možné, že ide o protipríklad k veľkej Fermatovej vete?

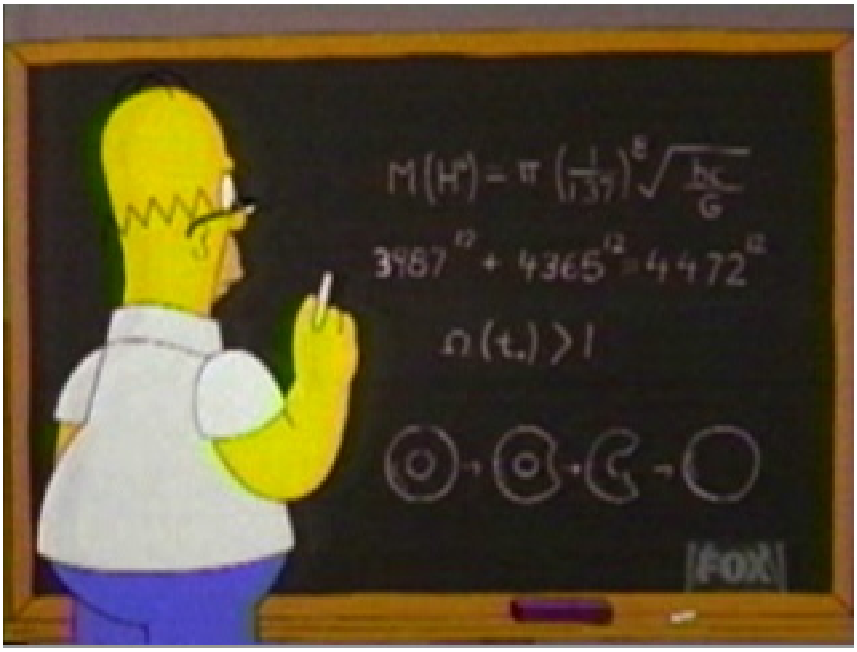
Nie, nejde o protipríklad. V skutočnosti je ľahko vidieť, že táto rovnica neplatí. Stačí, ak sa pozrieme na paritu pravej a ľavej strany: číslo 1782^{12} je párne, 1841^{12} je nepárne, teda ich súčet, t. j. číslo na ľavej strane, je nepárne. Na pravej strane je však 1922^{12}, čo je párne číslo.

Dôvod, prečo pre $(1782^{12}+1841^{12})^{\frac{1}{12}}$ výsledok v MATLAB-e zdanlivo rovnicu (18) potvrdzuje, je to, že odchýlka výsledku od čísla 1922 sa prejaví až na vzdialenejších desatinných miestach a pri zaokrúhľovaní sa stratí:

$$\left(1782^{12}+1841^{12}\right)^{\frac{1}{12}} = 1921{,}99999995587.$$

Špeciálny čarodejnícky diel VI. nie je jediný diel Simpsonovcov, v ktorom sa objavuje veľká Fermatova veta. Ďalším takým dielom je ***Kúzelník z Evergreen Terrace*** [38]. Homer prechádza krízou stredného veku a snaží sa po vzore Thomasa Edisona stať vynálezcom. V jednej scéne vidíme jeho výpočty na tabuli. Tu sa objavuje ďalšia rovnica, ktorá navonok popiera Veľkú Fermatovu vetu:

$$3987^{12}+4365^{12}=4472^{12}. \tag{19}$$



Obr. 22: *Kúzelník z Evergreen Terrace*, veľká Fermatova veta

Túto rovnicu, na rozdiel od tej predchádzajúcej, však nie je možné vyvrátiť pomocou parity - na ľavej strane je súčet dvoch nepárnych čísel, na pravej strane jedno párne číslo. Dokonca sa ukazuje, že posledná cifra je pre obe strany rovnaká, a to konkrétne číslo 6.Vidíme to, ak si vypíšeme množiny posledných cifier mocnín čísel 3987, 4365, a 4472, ktoré sú totožné s množinami posledných cifier[9] mocnín čísel 7, 5 a 2. Pre 7,

[9]Pri rozvoji $(10n+k)^m$ je totiž vo všetkých členoch okrem k^m prítomná nejaká mocnina 10, takže na poslednú cifru má vplyv len člen k^m.

teda aj pre 3987 (začínajúc od 7^1, potom 7^2 atď.), to budú:

$$\{7, 9, 3, 1, 7, 9, 3, 1, 7, 9, 3, 1, 7, 9, ...\},$$

pre 5 (a teda aj 4365):

$$\{5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, ...\},$$

a nakoniec pre 2 (a súčasne pre 4472):

$$\{2, 4, 8, 6, 2, 4, 8, 6, 2, 4, 8, 6, 2, 4, ...\}\ .$$

Ak teraz spočítame dvanáste členy prvých dvoch množín a porovnáme s dvanástym členom poslednej množiny, vidíme, že v oboch prípadoch nám vyjde číslo 6.

MATLAB nám pre $(3987^{12}+4365^{12})^{\frac{1}{12}}$ opäť dá výsledok, podľa ktorého by sa mohlo zdať, že je rovnica (19) pravdivá. No aj v tomto prípade sa výsledok od čísla 4472 líši vo vzdialenejších desatinných miestach.

```
>> (3987^12 + 4365^12)^(1/12)

ans =

   4.4720e+003

>>
```

Obr. 23: Zdanlivý protipríklad 2

Nepravdivosť tejto rovnosti sa dá ukázať napríklad pomocou deliteľnosti číslom 3. Nech rovnica platí. Keďže 3 delí 3987 (ciferný súčet $3 + 9 + 8 + 7 = 27$ je deliteľný tromi) a aj 4365 (ciferný súčet $4 + 3 + 6 + 5 = 18$ je deliteľný tromi), tak by mala 3 deliť aj číslo 4472. Avšak 4472 nie je tromi deliteľné ($4 + 4 + 7 + 2 = 17$).

9 Teória grafov

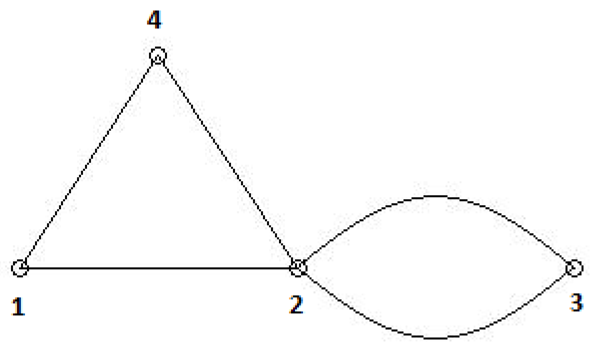
Poslednou kategóriou, ktorej sa budeme venovať, je teória grafov. Jej výhodou je, že základné pojmy ako graf, strom, či stupeň sa dajú jednoducho a názorne vysvetliť (ich definície môžeme nájsť napríklad v [13]).

V tejto kapitole si najprv zmeráme sily so slávnym fiktívnym filmovým géniom a potom sa pokúsime vyriešiť brutálnu vraždu. A to všetko pomocou teórie grafov.

9.1 Údržbár - génius

Vráťme sa k filmu ***Dobrý Will Hunting*** [43]. Ocitáme sa opäť na prvej hodine prednášky, kde sa profesor Gerald Lambeau pokúša navnadiť svojich študentov na riešenie náročného problému, napísaného na tabuli na chodbe. Pre graf na obrázku 24 treba nájsť

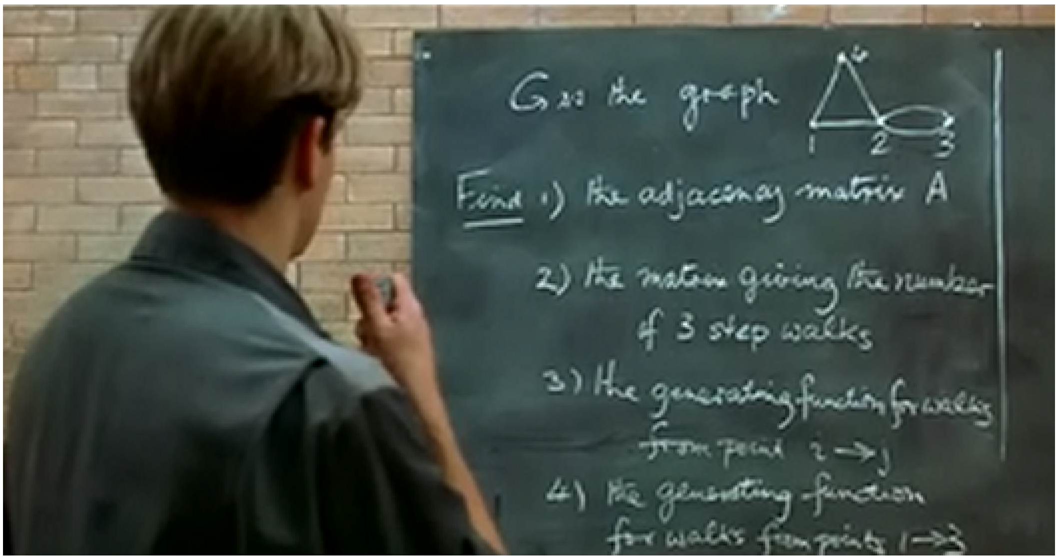
- maticu susednosti A,
- maticu, udávajúcu počet sledov dĺžky 3,
- generujúcu funkciu pre sledy z bodu i do bodu j,
- generujúcu funkciu pre sledy z bodu 1 do bodu 3.



Obr. 24: Graf G

Podľa profesora ten, ktorý túto úlohu vyrieši do konca semestra, si zaslúži nielen jeho priazeň, ale aj článok v školskom časopise. Taktiež naznačuje, že predchádzajúci úspešní riešitelia sú v súčasnosti známymi odborníkmi v danom obore. Teda divák nadobúda dojem, že úloha je nesmierne náročná. Je to však skutočne tak?

Začnime pekne po poriadku a pripomeňme si použité pojmy (pozri napríklad [6]). Matica susednosti je taká matica, ktorá má na mieste $a_{i,j}$ číslo označujúce počet hrán

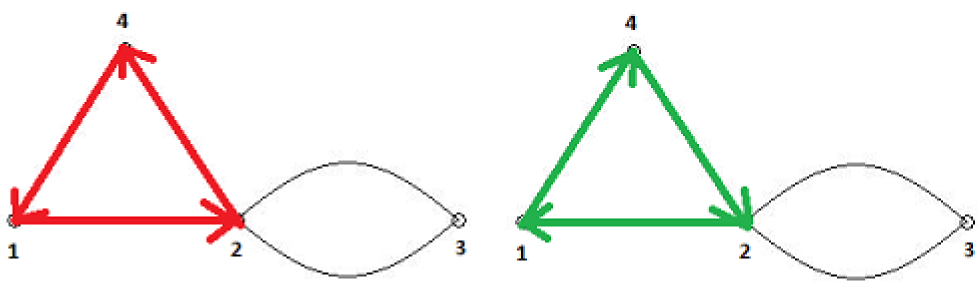


Obr. 25: *Dobrý Will Hunting*, prvá úloha

spájajúcich vrcholy i a j. Teda napríklad na našom obrázku vidíme, že vrcholy 2 a 3 spájajú 2 hrany, teda $a_{2,3} = 2$, alebo že vrcholy 1 a 3 žiadna hrana nespája, čiže $a_{1,3} = 0$. Logicky vidno, že matica A bude symetrická (lebo napríklad ak vrcholy 2 a 3 spájajú 2 hrany, tak aj vrcholy 3 a 2 spájajú 2 hrany). Ľahko prídeme na to, že matica A bude vyzerať takto:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ďalšou úlohou je nájsť maticu, udávajúcu počet sledov dĺžky 3. Sledom dĺžky n v grafe G sa rozumie postupnosť vrcholov a hrán $v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, ..., e_n, v_n$, v ktorej vždy hrana e_i má koncové vrcholy v_{i-1}, v_i, kde sa ako vrcholy, tak aj hrany môžu opakovať [13]. Čiže hľadáme takú maticu L, kde $l_{i,j}$ bude predstavovať počet sledov z vrcholu i do vrcholu j. Napríklad sledy z vrcholu 4 do vrcholu 4 sú dva (t. j. $l_{4,4} = 2$) a sú zakreslené na obrázku 26.



Obr. 26: Sledy dĺžky 3 z vrcholu 4 do vrcholu 4

K výsledku sa však dokážeme dopracovať aj oveľa rýchlejšie a pohodlnejšie. Vieme, že $[A^2]_{i,j} = a_{i,1}a_{1,j} + a_{i,2}a_{2,j} + a_{i,3}a_{3,j} + a_{i,4}a_{4,j}$ a keď A je matica susednosti, tak $a_{i,k}$ predstavuje počet sledov dĺžky 1 z i do k a $a_{k,j}$ počet sledov dĺžky 1 z k do j. Teda $a_{i,k}a_{k,j}$ predstavuje počet sledov dĺžky 2 z i do j prechádzajúcich cez k. Teda matica A^2 bude predstavovať maticu sledov dĺžky 2. Obdobne A^n bude predstavovať maticu sledov dĺžky n. Toto tvrdenie sa dokazuje pomocou matematickej indukcie a môžeme ho nájsť napríklad v knihe [19]. Čiže:

$$L = A^3 = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 2 & 3 \\ 7 & 2 & 12 & 7 \\ 2 & 12 & 0 & 2 \\ 3 & 7 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Generujúca funkcia [17] $f_{i,j}(z)$ pre sledy z vrcholu i do vrcholu j pre graf na obrázku 24 je definovaná ako:

$$f_{i,j}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} [A^n]_{i,j} z^n = \left[\sum_{n=0}^{\infty} A^n z^n\right]_{i,j} = [(I - Az)^{-1}]_{i,j},$$

kde

$$Az = \begin{pmatrix} 0 & z & 0 & z \\ z & 0 & 2z & z \\ 0 & 2z & 0 & 0 \\ z & z & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Inverznú maticu [31] k matici M vieme napísať v tvare

$$[M^{-1}]_{i,j} = det(Adj(M_{i,j}))/det(M)],$$

pričom

$$Adj(M_{i,j}) = (-1)^{i+j} M'_{i,j},$$

kde $M'_{i,j}$ je matica, ktorá zostane z matice M po vynechaní i-teho riadku a j-teho stĺpca. Takže

$$f_{i,j}(z) = [(I - Az)^{-1}]_{i,j} = \frac{det(Adj([I - Az]_{i,j}))}{det(I - Az)}.$$

Poslednou úlohou je nájsť generujúcu funkciu pre sledy z vrcholu 1 do vrcholu 3. Vlastne hľadáme

$$f_{1,3}(z) = \frac{det(Adj([I - Az]_{1,3}))}{det(I - Az)} = (-1)^{1+3} \frac{\begin{vmatrix} -z & 1 & -z \\ 0 & -2z & 0 \\ -z & -z & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -z & 0 & -z \\ -z & 1 & -2z & -z \\ 0 & -2z & 1 & 0 \\ -z & -z & 0 & 1 \end{vmatrix}}.$$

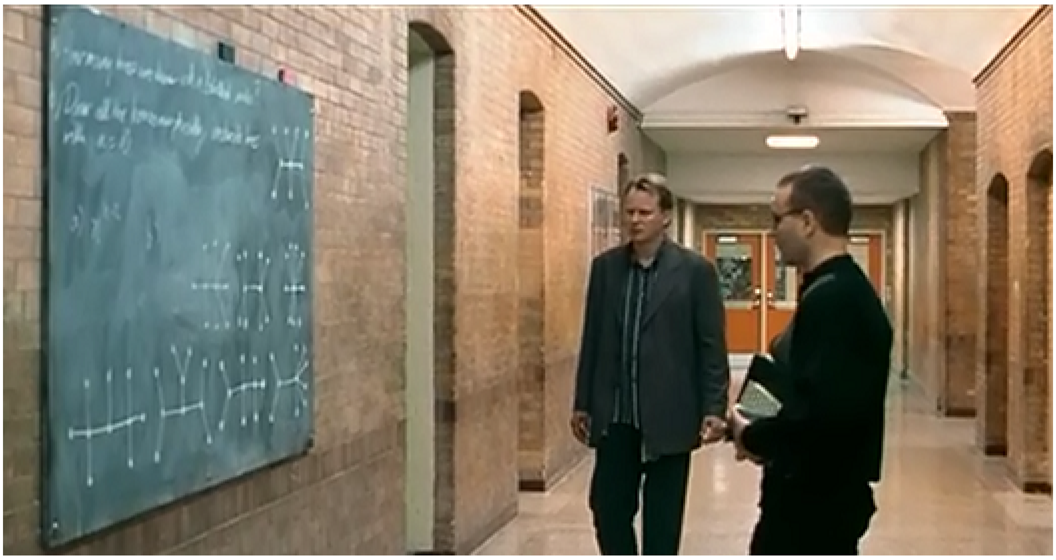
Takže odpoveď znie:

$$f_{1,3}(z) = \frac{2z^2 + 2z^3}{1 - 7z^2 - 2z^3 + 4z^4}.$$

Nebolo to až také ťažké, však?

No profesor i jeho študenti boli uchvátení nadaním neznámeho riešiteľa a tak, aby ho preskúšal, napísal profesor na tabuľu na chodbe nový problém, na ktorého riešení vraj pracovali odborníci celé dva roky. Ten problém znel:

Nájdi všetky stromy s desiatimi vrcholmi tak, aby ani jeden z nich nemal vrchol stupňa 2.



Obr. 27: *Dobrý Will Hunting*, druhá úloha

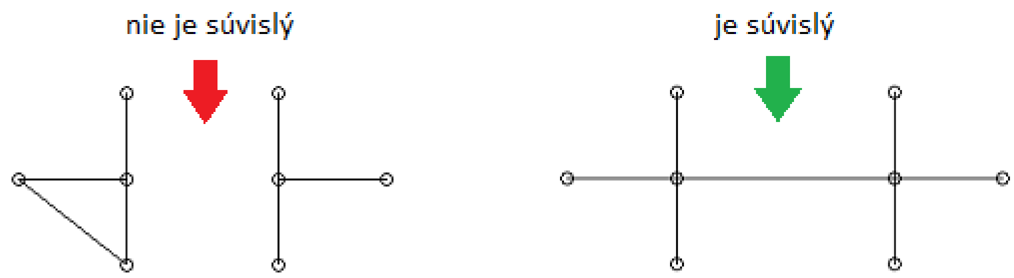
Je tento problém skutočne až taký náročný, ako sa nám tvorcovia filmu snažia nahovoriť? Ukazuje sa, že v súlade s Hollywoodskou tradíciou je jeho obtiažnosť poriadne nafúknutá. V skutočnosti stačí len trocha trpezlivosti a naozaj zbežné znalosti teórie grafov. Vlastne je potrebné vedieť len, čo v teórii grafov znamená strom a stupeň vrcholu. Zopakujme si to.

Strom je súvislý graf (z hociktorého vrcholu u sa po hranách vieme dostať do ľubovoľného vrcholu v), ktorý má n vrcholov a $n-1$ hrán (pozri [13]). Na nasledujúcich grafoch s ôsmimi ($n = 8$) vrcholmi a siedmimi ($n - 1 = 7$) hranami si to názorne ukážeme. Graf na obrázku 28 naľavo nie je stromom, lebo nie je súvislý.

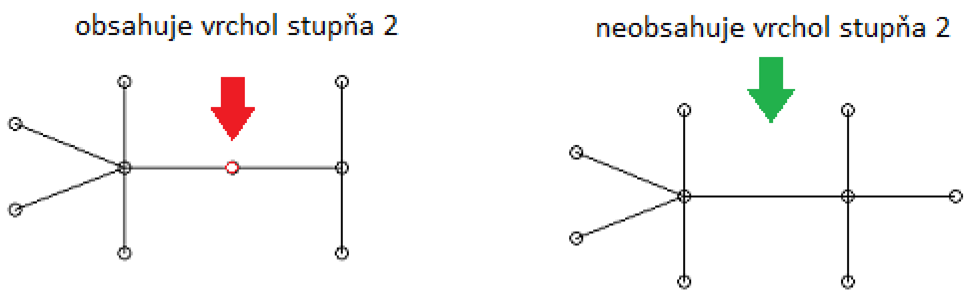
Ešte nám zostala jedna podmienka, a to že hľadané stromy nesmú obrahovať vrchol stupňa 2. Stupňom vrchola v nazývame počet hrán grafu susedných s vrcholom v. Názorne si to ukážeme na obrázku 29.

Ak sa budeme chvíľku s takýmito grafmi hrať, prídeme čoskoro s riešením celého problému, ktoré môžeme vidieť na obrázku 30.

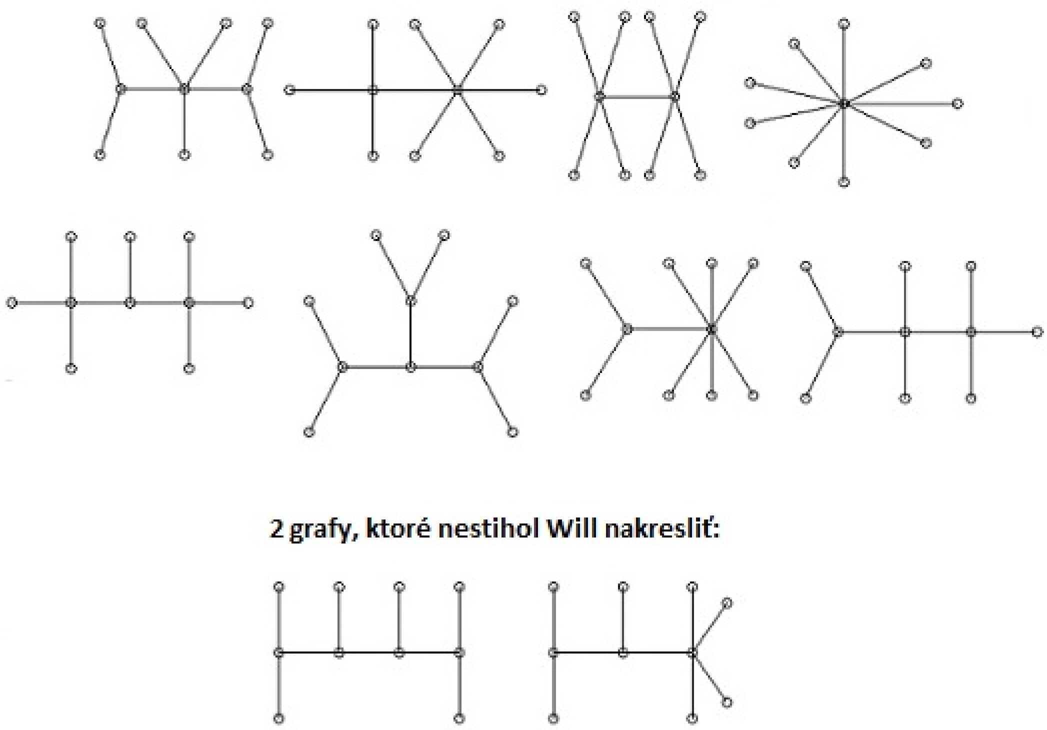
Náročnejšie by mohlo byť dokázať, že sú to skutočne všetky stromy s požadovanými vlastnosťami. To sa však už od Willa nechcelo.



Obr. 28: Nesúvislý vs. súvislý graf



Obr. 29: Vrchol stupňa 2



Obr. 30: Stromy

9.2 Výbušná povaha

Claude Berge je považovaný za jedného z moderných zakladateľov teórie grafov. Okrem tvorby odborných diel napísal aj detektívku založenú na teórii grafov s názvom ***Who killed the duke of Densmore?*** [1].

Máme osem žien, z ktorých jedna spáchala vraždu. Vojvoda z Densmoru zomrel pri výbuchu svojho zámku. Išlo o časovanú nálož, ktorú ktosi na ostrove nielen schoval, ale aj pripravil. Výroba bomby by však vyžadovala veľa času stráveného ukrývaním sa v hlbinách tamojšieho labyrintu. Každá žena navštívila vojvodu na ostrove a strávila tam istý čas. Aj keď si podozrivé nepamätajú, kedy na ostrove boli, pamätajú si, alebo to aspoň tvrdia, s kým sa tam stretli. Podľa ich výpovedí:

- Ann stretla Betty, Cynthiu,Emily, Feliciu a Georgiu.
- Betty stretla Ann, Cynthiu a Helen.
- Cynhia stretla Ann, Betty, Dianu, Emily a Helen.
- Diana stretla Cynthiu a Emily.
- Emily stretla Ann, Cynthiu, Dianu a Feliciu.
- Felicia stretla Ann a Emily.
- Georgia stretla Ann a Helen.
- Helen stretla Betty, Cynthiu a Georgiu.

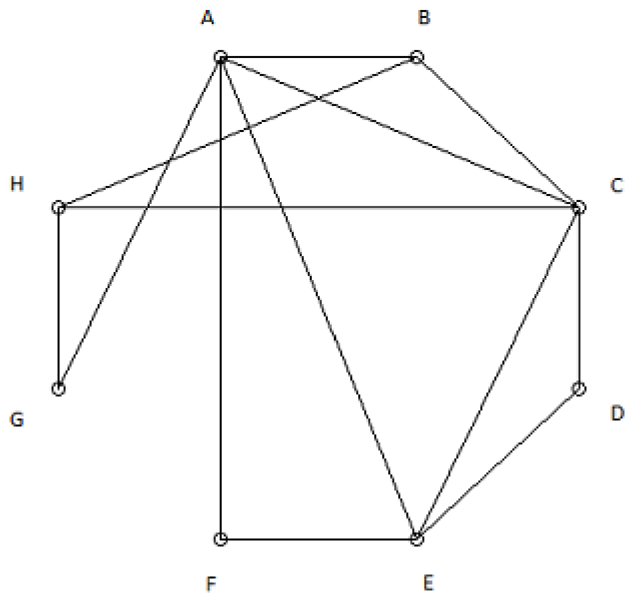
Predpokladáme, že všetky hovoria pravdu. Takúto situáciu je možné zakresliť pomocou grafu, kde čiary zobrazujú kto sa s kým stretol. Vrcholy predstavujú jednotlivé osoby a na ich pomenovanie sme použili iniciály krstných mien návštevníčok. Spomínaný graf vidíme na obrázku 31.

Našim cieľom je zistiť, ktorá z nich sa ukryla v labyrinte, a teda má na svedomí smrť vojvodu. Páchateľku môže prezradiť jedine fakt, že počas svojho skrývania zmeškala stretnutie s inými návštevníčkami, s ktorými by sa za iných okolností stretla. V grafe takúto situáciu znázorňujú napríklad štvoruholníky bez uhlopriečok, ako obrázok 32 naľavo.

Ak by sa ani jedna z týchto dám nebola počas svojho pobytu ukryla, museli by sa buď Betty a Georgia alebo Ann a Helen stretnúť, pretože ako vidíme na obrázku 32 napravo, keď chceme zakresliť, ako sa na časovej osi ich pobyty prekrývali, nepodarí sa nám to. Dokážme si to.

Vidíme, že môžme bez ujmy na všeobecnosti začať s ľubovoľnou týchto štyroch. Predpokladajme, že:

- Stretnutia prebiehali tak, ako vidíme na obrázku 32 vľavo.
- Každá z nich bola na ostrove istý časový úsek, počas ktorého sa nikde neskrývala a teda sa strela s každým, kto sa počas jej pobytu u vojvodu zastavil.



Obr. 31: Stretnutia

Začínajúc od Ann, nakreslíme jej pobyt ako úsečku. Keďže Betty a Georgia sa s Ann stretli, no nestretli sa navzájom, zakreslíme ich návštevy ako navzájom sa horizontálne neprekrývajúce úsečky, ktoré majú ale prienik s A. Ak sa vsak v tomto momente pokúsime nakresliť pobyt Helen, nejde to tak, aby boli dodržané vsetky predpoklady.

Takéto štoruholníky bez uhlopriečok sa v obrázku 31 vyskytnú dva. V obrázku 33 je štvoruholník ABHG vyznačený červenou a štvoruholník ACHG zelenou farbou.

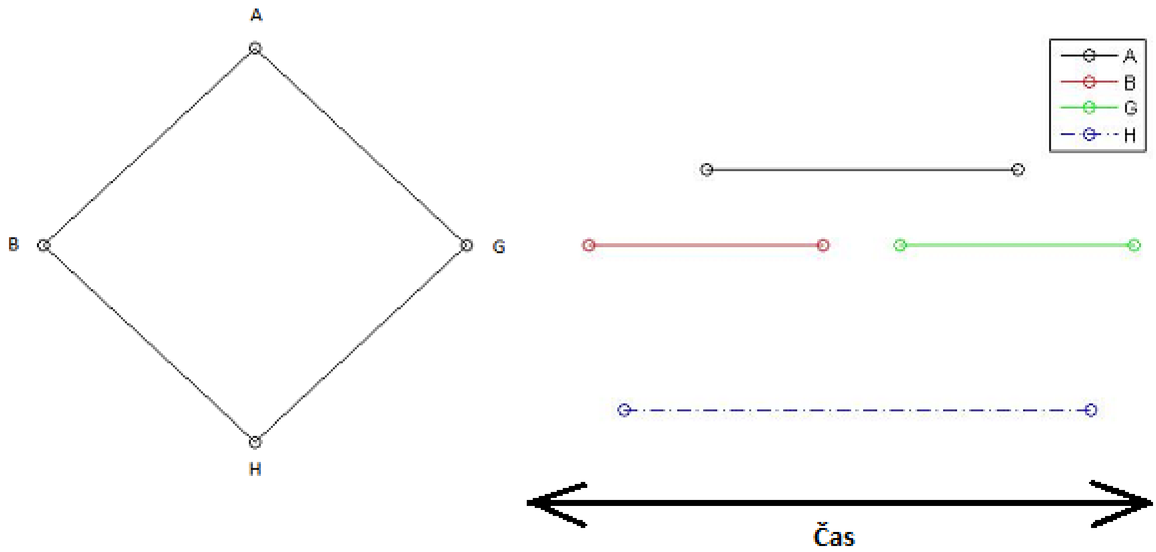
Počet podozrivých sa nám v tejto chvíli scvrkol na 3: Ann, Georgia a Helen. Len tieto tri osoby sa nachádzajú v oboch štvoruholníkoch.

Toto ale nie sú jediné útvary, ktoré robia problémy. Problematická je tiež situácia znázornená na obrázku 34.

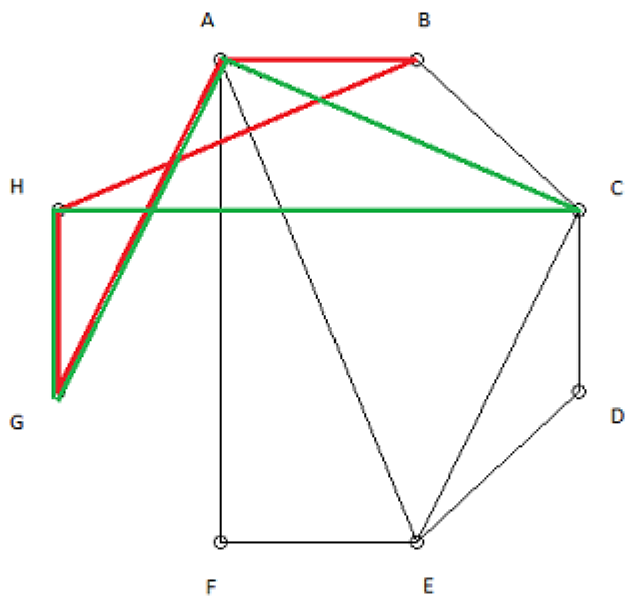
Hoci sa to tak spočiatku nemusí javiť, ani v tomto prípade nie je možné, aby sa stretnutia odohrali tak, ako sú zakreslené. Ukážme si prečo.

Začíname kresliť napríklad od Cynthie (čierna). Tá sa stretla okrem iných s Betty (tmavomodrá) a Emily (žltá), ktoré však nestretli jedna druhú. Emily sa stretla s Dianou (zelená), ktorá sa síce stretla so Cynthiou, no nestretla sa s Betty. Ďalej sa Emily stretla s Feliciou (svetlomodrá), ktorá sa ale nestretla ani so Cynthiou, ani s Betty či Dianou.V tomto momente prichádza na rad Ann (červená). Tá sa stretla s Betty aj Feliciou, no nestretla sa s Dianou, takže ju nevieme do obrázku zakresliť bez toho, aby sme porušili jeden z predpokladov.

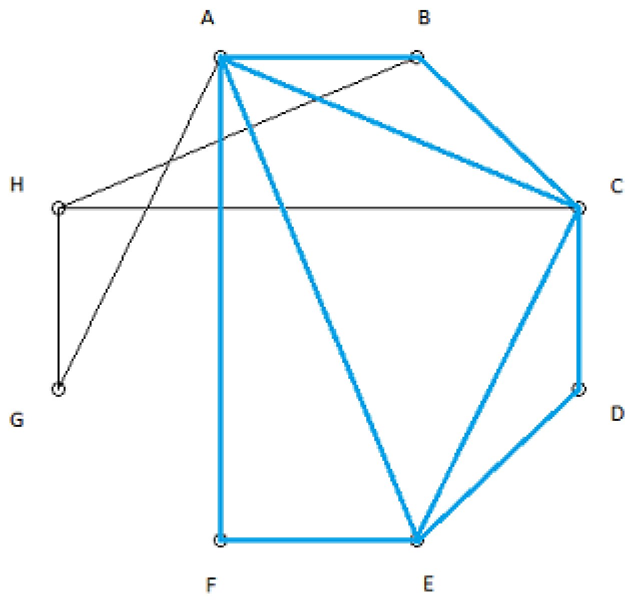
Teda aspoň jedna z nich sa musela počas svojho pobytu skrývať. Jediná zo žien, ktorá sa vyskytuje vo všetkých problematických útvaroch je Ann. A ako sa ukazuje, toto riešenie súhlasí s tým ktoré nám autor podáva, teda našou vrahyňou je Ann.



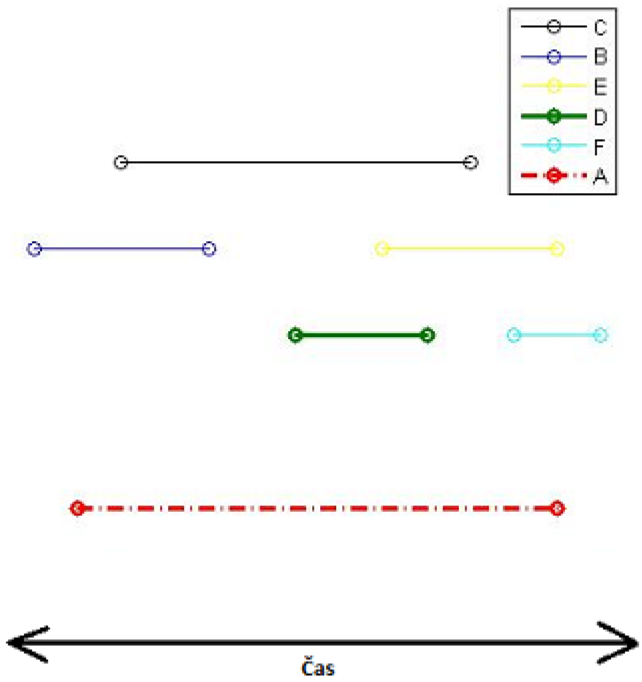
Obr. 32: Nesplniteľná situácia 1



Obr. 33: Podozrivé štvoruholníky



Obr. 34: Problematický útvar



Obr. 35: Nesplniteľná situácia 2

10 Záver

Podobných príkladov je samozrejme možné nájsť oveľa viac, než sa do bakalárskej práce zmestí. Za tie, pre ktoré sa miesto neušlo stoja za zmienku napríklad príklady objavujúce sa v kriminálnom seriály ***Vražedné čísla*** [42].

Na záver ešte uvediem úryvok z už spomínanej knihy ***Kyberiáda*** [16] od *Stanislawa Lema*, v ktorom sa hlavné postavy, konštruktéri Trurl a Klapacius snažia stvoriť pre kráľa Kruťáka príšeru, ktorú by nebolo ľahké skoliť. Tento text obsahuje až neuveriteľné množstvo matematických výrazov. Konieckoncov posúďte sami:

> *Násobné integrály zvieraťa sa krútili a zvíjali pod kráľovými polynomickými údermi, po čom sa rozpadli na nekonečný rad neurčitých členov, ale za chvíľu sa zviera umocnené na n-tú opäť vzpamätalo; avšak kráľ mu uštedroval rany diferenciálmi a parciálnymi deriváciami, pokiaľ nezredukoval jeho Fourierov rad, na čo sa v nadchádzajúcej bojovej vrave obaja protivníci ztratili v húšti matematických značiek. Konštruktéri si urobili krátku prestávku, pretiahli sa, logli si z leidenského džbánku a s novou vervou zase začali od začiatku. Tentoraz vyrukovali s celým arzenálom tenzorových matíc a kanonicky združených veličín a dali sa do riešenia problémov s takým zápalom, že mnoho nechýbalo a papier by sa vznietil. Kráľ vyzbrojený krutými koordinátmi a výberovými variačnými koeficientami sa hnal prudko dopredu, zablúdil v hlbokom lese logaritmov a odmocnín, musel sa vrátiť tadiaľ odkiaľ prišiel, v Hilbertovom priestore uvidel zviera a kým by človek do piatich napočítal, udrel naň všetkými desiatimi, takže kleslo o dve desatinné miesta a stratilo x a dva ypsilony - lenže potom zviera podliezlo zlomkovú čiaru a skrylo sa vo fázovom priestore ortogonálnej projekcie, kde sa interpoláciou zväčšilo a zaryto zozadu zaútočilo a kráľa poriadne poranilo. To ho nezlomilo - kráľ si okolo tela omotal reťazové zlomky, prírastok funkcie priradil k aktuálnemu nekonečnu, na čo priesečníkom rozťal hranaté aj guľaté zátvorky a zvieraťu zasadil taký úder, že vpredu mu odsekol logaritmus a vzadu mocnitele. Lenže zviera porazené nebolo - bum! bác! - ceruzky behali ako divoké po papieri, kde pribúdali výberové regresné koeficienty a transcendentné funkcie, a keď následne kráľ zrazený k zemi nebol schopný v boji ďalej pokračovať, konštruktéri vyskočili, krepčili po miestnosti a s radostným smiechom trhali na kúsky popísané papiere, ktoré sa márne snažili rozlúštiť špehovia sediaci s ďalekohľadmi na lustri, pretože sa nevyznali v odtienkoch vyššej matematiky a teda nemohli pochopiť, prečo Trurl s Klapaciusom kričia jeden cez druhého: "Sláva! Zvíťazili sme!"* [16]

Úžasné, no nie?

Literatúra

[1] BERGE, C.: *Who Killed the Duke of Densmore?* 1994, ISBN 2161302920.

[2] BIRKHOFF, G., MacLANE, S.: *A Survey of Modern Algebra.* Macmillan Publishing Co., New York, 1977, ISBN 0023100702.

[3] BRENT: *The Most Beautiful Equation in the World.* http://mathlesstraveled.com/2007/04/13/the-most-beautiful-equation-in-the-world/ , 13.4.2007.

[4] BRUNOVSKÝ, P.: *Diferenčné a diferenciálne rovnice.* Skriptá MFFUK, www.iam.fmph.uniba.sk/skripta/brunovsky .

[5] CLARKE, A.C.; POHL F.: *The Last Theorem.* HarperVoyager, 2008, ISBN 0007289981.

[6] DIESTEL, R.: *Graph Theory.* Springer-Verlag, Heidelberg, 2010, ISBN 3642142789.

[7] DOYLE, A.C.: *The Complete Sherlock Holmes.* Doubleday, New York, 1970, ISBN 0385006896.

[8] FEYNMAN, R. P.: *To nemyslíte vážně, pane Feynmane!* Aurora, Praha, 2001, ISBN 8072990047.

[9] FREEMAN, L.: *Fermat's Last Theorem.* http://fermatslasttheorem.blogspot.com/2005/05/fermats-last-theorem-proof-for-n3.html , 22.5. 2005.

[10] GONZE, D.: *The Logistic Equation.* http://homepages.ulb.ac.be/∼dgonze/ TEACHING/logistic.pdf , 2011.

[11] HADDON, M.: *The curious incident of the dog in the night-time.* Random House Children's Books, London, 2007, ISBN 0099456761.

[12] JEPPESEN, R.: *Monty Hall solution flawed?* http://discuss.fogcreek.com/techInter view/default.asp?cmd=show&ixPost=17 59&ixReplies=13, 22.1.2004.

[13] KNOR, M.: *Kombinatorika a Teória Grafov.* Skriptá MFFUK, 2000, ISBN 8022313394.

[14] KUBÁČEK, Z., VALÁŠEK, J.: *Cvičenia z matematickej analýzy I.* Skriptá MFF UK, 1989.

[15] LARSSON, S.: *The Girl Who Played with Fire.* Quercus Publishing Plc, London, 2009, ISBN 1906694184.

[16] LEM, S.: *Kyberiáda.* Československý spisovatel, Praha, 1983, ISBN 2207083.

[17] LOVÁSZ, L.: *Random Walks on Graphs: A Survey* http://www.stanford.edu/class/msande337/notes/erdos.pdf, 1993.

[18] MAHONEY, M. S.: *The mathematical career of Pierre de Fermat, 1601 - 1665.* Princeton Univ. Press, 1994, ISBN 0691036667.

[19] MATOUŠEK, J., NEŠETŘIL, J.: *Kapitoly z diskrétní matematiky.* Karolinum, 2007, ISBN 8024614113.

[20] O'CONNOR, J.J.,ROBERTSON, E.F.: *Quadratic, cubic and quartic equations.* http://www.gap-system.org/~history/HistTopics/Quadratic_etc_equations.html, Február 1996.

[21] PETSINIS, T.: *The French Mathematician.* Berkley Trade, USA, 2000, ISBN 0425172910.

[22] POLYA, G.: *How to Solve it.* Princeton Univ. Press, New Jersey, 1973, ISBN 0691023565.

[23] POSIDUCK: *Monty Hall Problem.* http://forums.xkcd.com/viewtopic.php?t=244, 11.9.2006.

[24] QUINCY: *Bertrand's Box Paradox and Monty Hall Problem.* http://www.physicsforums.com/showthread.php?t=259707, 27.9.2008.

[25] ROSENBLUM, J., LESSNER, J. S.: *Fermat's Last Tango.* Notices of the American Mathematical Society, http://www.ams.org/notices/200111/rev-osserman.pdf, December 2001.

[26] ROSENTHAL, E.: *The Calculus of Murder.* Ulverscroft Large Print, 1988, ISBN 0708918875.

[27] ROWLETT, R.: *Names for large numbers.* http://www.unc.edu/ rowlett/units/large.html, 1.11.2001.

[28] SHAW, C.: *Flowers Stained with Moonlight.* Allison& Busby, 2006, ISBN 0749082086.

[29] SLEZIAK, M.: *Teórie grafov.* http://thales.doa.fmph.uniba.sk/sleziak/vyuka/2007/tc/tc.pdf, 8.12.2007.

[30] STEWART, J.: *Calculus: Early Transcendentals*Bro.oks C.o.le, 2002, ISBN 054393217.

[31] STRANG, G.: *Linear Algebra and its Applications, 2nd edition.* Ac.demic Press Inc ,1980, 012673660X.

[32] VERNE, J.: *Cesta na Mesiac.* Mladé letá, Bratislava, 1960.

[33] VERNE, J.: *Cesta na Mesiac.* Mladé letá, Bratislava, 1971, ISBN 6614071.

[34] ZVÁRA, K.; ŠTEĚPÁN, J.: *Pravděpodobnost a matematická statistika.* Matfzypress, 1997.

Filmy a seriály

[35] BRODERICK, M.:*Infinity*. First Look Pictures, USA, 1996.

[36] GROENING, M.:*The Simpsons*. Gracie Films & 20th Century Fox Television, USA, 1992, *Dog of Death*, 3. séria, 19. diel.

[37] GROENING, M.:*The Simpsons*. Gracie Films & 20th Century Fox Television, USA, 1995, *Treehouse of Horror VI*, 7. séria, 6. diel.

[38] GROENING, M.:*The Simpsons*. Gracie Films & 20th Century Fox Television, USA, 1998, *The Wizard of Evergreen Terrace*, 10. séria, 2. diel.

[39] MENÉNDEZ, R.:*Stand and Deliver*. Warner Bros., USA, 1988.

[40] PHILLIPS, T.:*Old School*. The Montecito Picture Company, USA, 2003.

[41] RAMIS, H.:*Bedazzled*. 20th Century Fox, USA, 2000.

[42] SCOTT, R., SCOTT, T.:*Numb3rs*. CBS Television Studios, USA, 2005-2010.

[43] VAN SANT, G.:*Good Will Hunting*. Lawrence Bender Productions, USA, 1997.

[44] WATERS, M.:*Mean Girls*. Paramount Pictures, USA a Canada, 2004.

[45] WILLIAMS, R.:*Butterfly Dreaming*. Private Universe Films, USA, 2008.