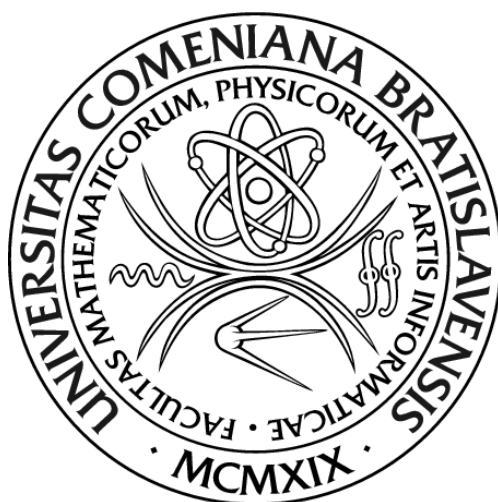


UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY



PREČO CHODÍ ČLOVEK V KRUHU

2011

JÁN DZÚRIK

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY

45a87a64-1ec1-4718-a32f-6ba49c57d795

PREČO CHODÍ ČLOVEK V KRUHU

Študijný program: Ekonomická a finančná matematika

Študijný odbor: 9.1.9 Aplikovaná matematika

Školiace pracovisko: Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky

Školiteľ: Mgr. Katarína Boďová, PhD.

2011

JÁN DZÚRIK



Univerzita Komenského v Bratislave
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

ZADANIE ZÁVEREČNEJ PRÁCE

Meno a priezvisko študenta: Ján Dzurik
Študijný program: ekonomická a finančná matematika (Jednoodborové štúdium,
bakalársky I. st., denná forma)
Študijný odbor: 9.1.9. aplikovaná matematika
Typ záverečnej práce: bakalárska
Jazyk záverečnej práce: slovenský

Názov: Prečo chodí človek v kruhu

Cieľ: Jan L. Souman nedávno experimentálne ukázal, že človek, ktorý sa snaží ísť rovno dopredu a nemá žiaden orientačný bod (slnko, hviezdy), zväčša chodí dookola v kruhu. Cieľom práce je vysvetliť tento fenomén matematickým modelom a zároveň skúmať vplyv stavby ľudského tela, dĺžky kroku a lokálneho rehému na jeho trajektóriu.

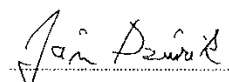
Literatúra: JL Souman, Walking Straight into Circles, Current Biology 2009, <http://veda.sme.sk/c/5000414/pravdivy-pribeh-o-kruhoch.html>

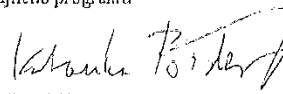
Vedúci: Mgr. Katarína Boďová, PhD.

Dátum zadania: 27.10.2010

Dátum schválenia: 08.11.2010

.....
doc. RNDr. Margaréta Halická, CSc.
garant študijného programu


.....
študent


.....
vedúci práce

Dátum potvrdenia finálnej verzie práce, súhlas s jej odovzdaním (vrátane spôsobu prístupnosti)

.....
vedúci práce

Čestné prehlásenie

Čestne vyhlasujem, že som túto bakalársku prácu vypracoval samostatne za pomoci konzultácií a uvedených bibliografických odkazov.

V Bratislave, jún 2011

.....

Ján Dzúrik

Pod'akovanie

Ďakujem vedúcemu svojej bakalárskej práce Mgr. Kataríne Boďovej, PhD.
za aktívne vedenie pri vypracovávaní témy a za ochotu a snahu naučiť.

Abstrakt

Dzúrik Ján, Prečo chodí človek v kruhu, Univerzita Komenského v Bratislave, Fakulta matematiky fyziky a informatiky, Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky, vedúci práce Mgr. Katarína Boďová, PhD., Bratislava, 2011, 21 strán.

Cieľom mojej bakalárskej práce, je matematické vysvetlenie fenoménov, objavujúcich sa pri ľudskej chôdzi, pozorovaných v biologickej experimentálnej štúdií od J.L Soumana[1] za predpokladu, že sa človek snaží udržiavať vopred stanovený smer. V tejto práci sa zameriavam na zostavenie jednoduchých matematických modelov, ktoré zahŕňajú náhodné faktory a na ich štúdium pomocou numerických simulácií.

Kľúčové slová: matematické modelovanie, diferenčné rovnice, numerické simulácie, náhodné prechádzky

Abstract

Dzúrik Ján, Why does men walk in circles, Comenius University, Bratislava, Faculty of Mathematics, Physics and Informatics, Department of Applied Mathematics and Statistics, supervisor Mgr. Katarína Boďová PhD., Bratislava, 2011, 21 pages

The aim of the bachelor thesis is mathematical explanation of the phenomenon appearing in human walking, observed in experimental biological studies by J.L. Souman [1], assuming that one tries to maintain a predetermined direction. This work aims to build simple mathematical models that include random factors and their study using numerical simulations.

Key words: mathematical modeling, difference equation, numerical simulations, random walk

Obsah

1	Úvod.....	2
2	Matematický model.....	4
2.1	Predpoklady pre model a jeho tvorenie	4
2.2	Použité modely a ich vlastnosti	7
3	Testovanie a výsledky.....	13
3.1	Vplyv dĺžky trvania chôdze na jej vychylenie.....	13
3.2	Kruhy v prechádzkach	15
3.2.1	Hľadanie kruhov na trajektóriách	16
3.3	Galéria trajektórií pre jednotlivé modely.....	19
	Záver	22
	Referencie	23

Úvod

Cieľom mojej bakalárskej práce, je matematické vysvetlenie fenoménov, objavujúcich sa pri ľudskej chôdzi, pozorovaných v biologickej experimentálnej štúdii od J.L Soumana[1] za predpokladu, že sa človek snaží udržiavať vopred stanovený smer. V tejto práci sa zameriavam na zostavenie jednoduchých matematických modelov, ktoré zahŕňajú náhodné faktory a na ich štúdium pomocou numerických simulácií. Hlavným cieľom tejto práce je čo najjednoduchším matematickým mechanizmom vysvetliť, prečo sa človek so snahou ísť rovno vracia na tie isté miesta a tiež, ako dlho im takáto slučka/kruh v priemere potrvá. V článku J.L. Soumana[1] bolo skúmané, či človek dokáže udržať vopred stanovený smer v prostredí ktoré nepozná aj bez toho, aby mal pomocné orientačné body. Pod orientačnými bodmi rozumieme napríklad slnko či mesiac, stromy, domy, kopce a podobne. Výsledky pre skupinu 15 subjektov ukázali, že v neprítomnosti orientačných bodov každá testovaná osoba počas chôdze často menila smer, pričom niektoré testované osoby nedokázali tento smer udržať vôbec, a viackrát sa vracali na miesto, ktorým už predtým prešli, čím vznikali na ich trajektóriách kruhy (pod kruhami rozumieme uzavretú trajektóriu vychádzajúcu a vchádzajúcu do toho istého bodu). Taktiež autori článku skúmali navigačné schopnosti a priestorovú orientáciu na ľuďoch bez vizuálneho kontaktu s prostredím (testované osoby mali zaviazané oči), kde všetky zúčastnené osoby vykazovali kruhy v trajektóriách. Ďalej sa zaoberali vplyvom dĺžky trvania chôdze so zaviazanými očami na možné narastajúce výchylky v trajektóriách. Testovania prebiehali na čo najrovnejšom povrchu, tak aby čo najviac vyhovovali požadovaným podmienkam, konkrétne v Bienwaldskom lese v Nemecku a na saharskej púšti v Tunisku.

Z článku, od Wolbers a kolektívu[2] o faktoroch, ktoré vplývajú na navigačné schopnosti ľudského organizmu vyplýva, že ľudia využívajú viacero komplexných procesov na orientáciu v priestore, ktoré sa delia na tri nezávislé kategórie:

- 1. Vnemový a poznávací faktor**
- 2. Nervové spracovanie informácií**

1. Vnemový a poznávací faktor: Schopnosť pohybovať sa po priestore je jednou zo základných poznávacích ľudských vlastností. Je nenahraditeľnou súčasťou našich každodenných životov, či už potrebujeme naplánovať našu každodennú cestu do práce, alebo ak sa potrebujeme zorientovať v neznámom priestore. Priestorová navigácia môže závisieť od externých zdrojov akými sú mapy alebo schémy územia, alebo od interných zdrojov, ktorými sú zmyslové poznatky. Ľudia sa líšia v spracúvaní

zmyslových poznatkov, ako napríklad v zmysle pre orientáciu. Medzi najdôležitejšie faktory, ktoré ovplyvňujú naše orientačné schopnosti patria :

- Priestorové pomôcky
 - o Objekty nachádzajúce sa v okolí: špecifické okolie prostredia, všeobecné záchytné body, geometrická stavba okolia, mapy ako symbolická reprezentácia okolia, slovný opis prostredia.
 - o Podnetové vnemy: vnímanie rovnováhy, vytváranie návykov a mechanizmov v ľudskom tele, ktoré sa spúšťajú ako reakcia na očakávanie podnetu, vnem ktorý zaznamenáva, či sa telo hýbe s dostatočným úsilím a zaznamenáva vzájomnú polohu častí tela, informácie zo zrakového, sluchového a hmatového orgánu.
- Výpočtové a odhadovacie mechanizmy
 - o Priestorové výpočty a odhady: výpočet vzdialenosti od objektov, prepočítavanie prejdenej vzdialenosti, nepresnosti v odhade priestorového vnímania, spomienky na okolitý priestor, chôdza po známej trase.
 - o Výber a plánovanie cesty, oboznámenie sa s nepoznaným okolím, výber a udržiavanie cieľov na stanovenej trase, vysporiadanie sa s konfliktom a neistotou v navigácii.

2. Nervové spracovanie informácií: Ľudia sa líšia v spracovaní informácií z okolia, alebo v odhadovaní vzdialeností medzi objektmi. Presnejšie rozdiely ešte nie sú podrobne preskúmané. Aj keď ľudia dokážu určiť svoj pohyb pomocou podnetových vnemov, pribúdajúcou prejdenou vzdialenosťou sa zväčšuje aj nakumulovaný šum, ktorý spôsobuje vychýlenie od požadovaného smeru a zabudnutie pôvodne určeného počítačného smeru. Je možné zdokonaľiť sa v priestorovej orientácii pomocou vizuálneho kontaktu, či už ide o mapu, video, alebo priamym získavaním informácií z priestoru. Jedine však priamym kontaktom v priestore získame nielen vizuálne informácie, ale aj informácie pomocou podnetových vnemov ktoré prispievajú k lepšiemu odhadu okolia a prepočítavania trasy.

Navigačná schopnosť, alebo schopnosť pohybovať sa v priestore, sa často aj líši podľa jedinca. Hlavné rozdiely sú nielen v stavbe tela, ako napríklad dĺžka končatín, ale aj v množstve skúseností s navigáciou v priestore. My sa v práci sústredíme iba na mechanické faktory a individuálne faktory pre jednoduchosť vynecháme. Po verifikácii jednoduchého modelu je možné tieto faktory do modelu pridať. Prvoradým cieľom je zostavenie čo najjednoduchšieho matematického modelu ktorý bude zahŕňať náhodnosť, reflektujúcu viacero zanedbaných faktorov.

1. Matematický model

1.1 Predpoklady pre model a jeho tvorenie

Cieľom tejto časti je zostavenie matematického modelu, charakterizujúceho problém opísaný v úvode.

Hlavné požiadavky na model sú:

- Jednoduchosť modelu
- Biologická relevancia
- Správny popis mechaniky pohybu
- Zahrnutie náhodných vplyvov

Zaujímavými otázkami sú, súvis medzi dĺžkou trvania chôdze a pribúdajúcim šumom počas chôdze, vývoj trajektórií pre jednotlivé modely, tvorba a veľkosť vytváraných kruhov.

Podobne ako v článku J.L.Soumana[1], my budeme uvažovať nasledujúce predpoklady

Chôdza po rovnom povrchu – v predchádzajúcej časti sme sa dozvedeli, že aj zmena v členitosti povrchu, ako napríklad stúpanie alebo klesanie, by mohla ovplyvniť trajektóriu chôdze. Tomuto chceli predísť aj v článku J.L.Soumana[1] v ktorom sa snažili previesť experimenty na čo najrovnejšom povrchu. Preto sa priame testovanie uskutočnilo v Bienwaldskom lese v Nemecku a na saharskej púšti v Tunisku. V matematickom modeli nebudeme brať do úvahy členitosť povrchu, ale môžeme sa sústrediť na chôdzu po rovnom povrchu, budeme modelovať chôdzu v rovine.

Navigácia bez vonkajších faktorov – chôdza je často ovplyvnená naším okolím, teda tým, čo vidíme a podľa čoho sa môžeme usmerňovať v pohybe, ako sú napríklad slnko, mesiac, vysoký kopec alebo strom. Často nám pomôžu lepšie sa zorientovať v okolí a udržať správny smer, ak by sme náhodou zabúdli, vieme podľa týchto vonkajších faktorov určiť polohu v priestore, a teda aj náš ďalší pohyb. Aj počas experimentov, ktoré boli prevedené na saharskej púšti a v Bienwaldskom lese, mali väčšinou jednotlivé osoby znemožnený výhľad na svoje okolie, či už hustým lesom, alebo zamračenou oblohou. V takýchto testovacích podmienkach sa musí človek viac spoliehať na svoje vnútorné procesy, ktoré používa na priestorovú navigáciu a výpočet cesty, v porovnaní s navigáciou pomocou vonkajších vplyvov. V matematickom modeli predpokladáme, že vonkajšie vplyvy nehrajú rolu, preto ich nezahrnieme do rovníc.

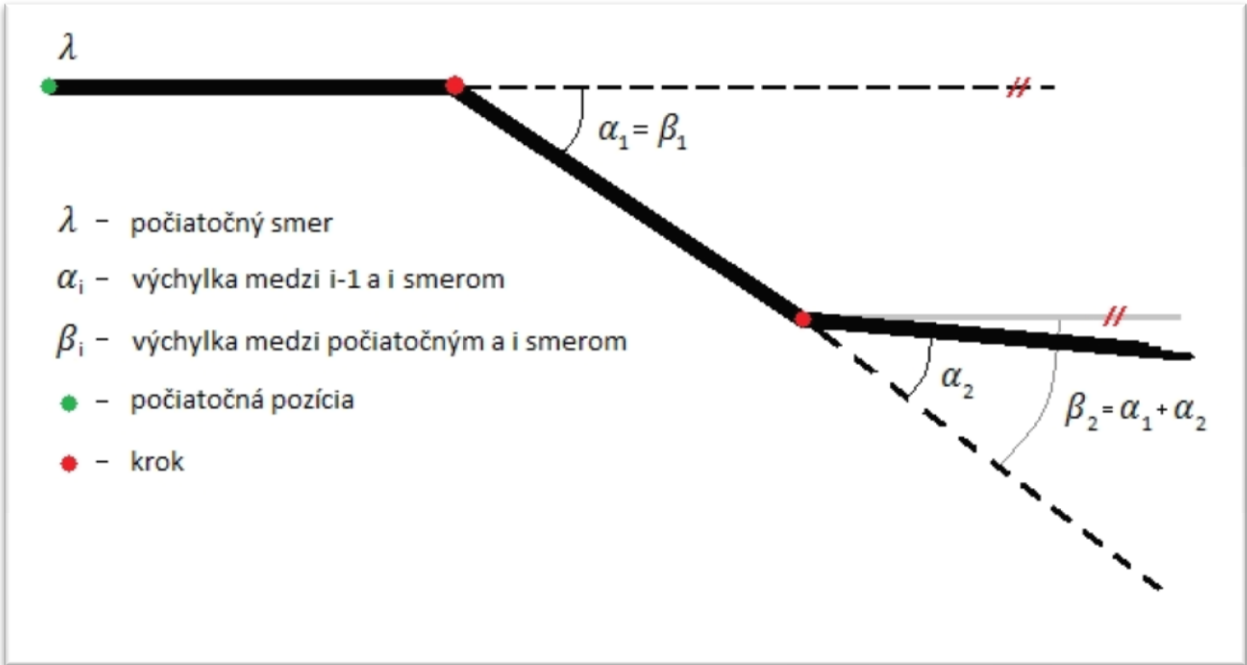
Spojením všetkých poznatkov čo sme doteraz získali, a na základe predpokladov, ktoré sme si stanovili, zostavíme matematický model opisujúci ľudskú chôdzu. Takisto pre jednoduchosť uvažujeme o konštantnej dĺžke kroku a rýchlosti chôdze. Chôdza je reprezentovaná pohybom zloženého z krokov, ktorý nám nakoniec dáva celú trajektóriu. Hlavnou premennou v modeli je výchylka medzi jednotlivými krokmi, čím rozumieme vychýlenie smeru predchádzajúceho od nastávajúceho kroku. Zadáme počiatočnú pozíciu a smer, a pomocou jednotlivých výchýliek vieme reprezentovať celú trajektóriu. Problémy tohto typu sú študované v teórii diferencných a diferenciálnych rovníc. Keďže chôdza v našom modeli nie je súvislá krivka, ale je súborom diskretných krokov budeme používať iba diferencné rovnice, lebo sa snažíme o čo najjednoduchší model.

Pri ľudskej chôdzi sa pohybujeme podľa subjektívneho smeru, ktorý sa vytvára za pomoci stanoveného počiatočného smeru a faktorov ovplyvňujúcich navigačné schopnosti v priestore. Preto sa pri ľudskej chôdzi uberáme subjektívnym smerom a nie vopred stanoveným počiatočným smerom, čo zároveň prispieva k tvorbe šumu počas chôdze. Krok je definovaný svojou počiatočnou pozíciou, smerom a dĺžkou. Potom môžeme definovať skutočnú výchylku medzi dvomi, po sebe idúcimi, krokmi ako uhol, ktorý je daný rozdielom ich smerov. Pre jednoduchosť budeme predpokladať, že počas jedného kroku nepôsobia žiadne vplyvy na zmenu trajektórie, a teda že miesto došľapu, a teda aj odchýlka, je presne stanovená už pri začatí tohto kroku. Z toho vyplýva, že model zostavíme na základe teórie o diferencných rovniciach. Ako stavovú premennú zvolíme odchýlku medzi dvoma krokmi, keďže najlepšie opisuje vývin celej trajektórie.

Majme teda počiatočný smer λ , (bez ujmy na všeobecnosti budeme uvažovať, že počiatočný smer bude zarovno s x-ovou osou, ak keby sme si zvolili ľubovoľný počiatočný smer, potom by sme pomocou projekčnej matice otočili celú trajektóriu do x-ového smeru pre jednoduchšie výpočty), ktorým sa má trajektória uberať. Zvolíme si odchýlky medzi jednotlivými krokmi ako α_n . Ďalej definujeme β_n ako súčet všetkých doterajších výchýliek medzi jednotlivými krokmi, a teda:

$$\beta_n = \sum_{i=1}^n \alpha_n \quad (1.1)$$

Takéto vyjadrenie β_n označuje celkovú výchylku medzi počiatočným smerom a n-tým krokom, a umožňuje nám priame vykreslenie trajektórií.



Obrázok 1, vidíme zaznačený počiatočný smer λ , a dva nasledujúce kroky s odchylkami α_1 a α_2 .

Keďže celá trajektória závisí od toho, ako si zadefinujeme výchylky medzi jednotlivými krokmi, budeme uvažovať o nasledujúcom modeli pre každú výchylku, α_n , a teda:

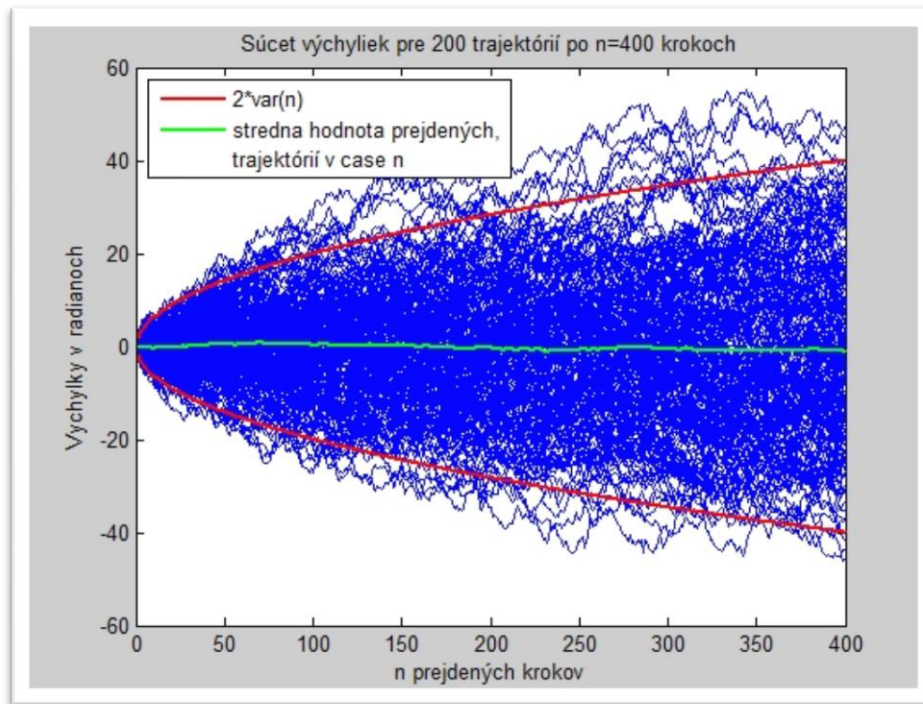
$$\alpha_{n+1} = f(\alpha_n) + g(\alpha_n)\xi_n, \quad \xi_n \sim \mathcal{N}(0,1) \quad (1.2)$$

Pričom funkcia $f(\alpha_n)$ označuje závislosť medzi jednotlivými výchylkami (v jednom kroku urobím výchylku doprava tak sa s kladnou, či zápornou váhou odzrkadlí na ďalšom kroku, a teda aj v nasledujúcej výchylke), a funkcia $g(\alpha_n)$ označuje vplyv faktoru náhodnosti na ľudskú chôdzu, preto je aj prenasobená náhodnou premennou ξ_n . Zvolenie rozdelenia ξ_n vychádza z predpokladu, že pri chôdzi najčastejšie spravíme malé výchylky od predchádzajúceho kroku, a čím väčšiu výchylku budeme uvažovať, tým sa bude zriedkavejšie vyskytovať v trajektórii, keďže môžeme urobiť výchylku doprava či doľava, bude naše rozdelenie hustoty symetrické. Pre jednoduchosť zoberieme $\xi_n \sim \mathcal{N}(0,1)$ (taktiež by sme mohli zobrať iné rozdelenia napr. Studentovo rozdelenie)

1.2 Použité modely a ich vlastnosti:

1. Model s konštantným driftom $f(\alpha_n) = \delta$ a $g(\alpha_n) = \varepsilon$
 - a) Čisto náhodný pohyb $\delta = 0$
 - b) Pohyb s konštantnou odozvou $\delta \neq 0$
2. Model s lineárnym driftom $f(\alpha_n) = \delta\alpha_n$ a $g(\alpha_n) = \varepsilon$
 - a) Perzistencia $\delta \in [0,1]$
 - b) Korekcia $\delta \in [-1,0]$
3. Model s funkciou odozvy (konštantný) $f(\alpha_n) = \Omega(\alpha_n, \delta, a, b)$ a $g(\alpha_n) = \varepsilon$
4. Model s funkciou odozvy (lineárny) $f(\alpha_n) = \Omega(\alpha_n, \delta, a, b)\alpha_n$ a $g(\alpha_n) = \varepsilon$

1a. Je to najjednoduchší stochastický model, bez závislosti od predchádzajúceho kroku, ktorá je vyjadrená $\delta = 0$, robíme vždy náhodnú výchylku doprava alebo doľava, ktorá je určená náhodnou premennou $\xi_n \sim \mathcal{N}(0,1)$ a konštantou ε , ktorá upravuje hodnotu vybranú z normálneho rozdelenia. Taktiež sa dá jednoducho určiť približná výchylka od počiatočného smeru po n krokoch. Keďže poznáme rozdelenie $\xi_n \sim \mathcal{N}(0,1)$, potom vieme určiť približnú výchylku po n -tom kroku, a teda $\varepsilon\xi_1 + \varepsilon\xi_2 + \dots + \varepsilon\xi_n = X_n \sim \mathcal{N}(0, \varepsilon^2\sqrt{n})$.



Obrázok 2 opisuje vývoj výchyliek β_i v čase i , až po čas $n=400$. Obrázok je zostavený z 200 trajektórií. Takisto je zaznačená stredná hodnota (zelenou) pre β_i , z každej trajektórie, rovanko je zaznačená dvojnásobná hodnota variance (červenou) pre β_i

Takisto si môžeme všimnúť že stredná hodnota výchyliek sa pohybuje v okolí nulových hodnôt. Rovnica pre prvý model bude vyzerat'

$$\alpha_{n+1} = \varepsilon \xi_n, \quad \xi_n \sim \mathcal{N}(0,1) \quad (1.3)$$

1b. Tento model má podobné vlastnosti ako model 1a, len teraz budeme uvažovať o nenulovom koeficiente δ , čo vychádza z preferovania určitej strany do ktorej môžeme robiť výchylku. Stáva sa to napríklad ak má človek jednu končatinu dlhšiu ako druhú, alebo ak počas chôdze kríva. Pri takomto modeli očakávame, že trajektórie budú poznačené týmto faktorom, na základe zatočenia do pravej alebo ľavej strany, a teda uvidíme možné kružnice v grafoch.

$$\alpha_{n+1} = \delta + \varepsilon \xi_n, \quad \delta \neq 0, \quad \xi_n \sim \mathcal{N}(0,1) \quad (1.4)$$

2a. V tomto modeli už máme zahrnutú aj závislosť medzi jednotlivými výchylkami počas chôdze, ktorá je vyjadrená $f(\alpha_n) = \delta \alpha_n$ pričom koeficient $\delta \in (0,1)$. Ak zanedbáme pribúdanie šumu pri každom kroku, dostaneme jednoduchý deterministický systém, ktorého vychýlenie od počiatočného smeru po n krokoch bude $\beta_n = \delta^n$. Ak by bol koeficient δ väčší ako 1, výchylka by postupne exponenciálne narastala, a celková trajektória by nemala žiadnu výpovednú hodnotu. Preto volíme koeficient δ z intervalu $(0,1)$, aby veľmi neovplyvňoval celkovú trajektóriu, ale zároveň aby aj kladne vplýval na nasledujúcu výchylku. Napríklad, ak spravíme miernu výchylku doprava, tak v ďalšom kroku sa to odrazí v určitej miere na tejto výchylke podľa rovnice:

$$\alpha_{n+1} = \delta \alpha_n + \varepsilon \xi_n, \quad \delta \in [0,1], \quad \xi_n \sim \mathcal{N}(0,1) \quad (1.5)$$

Tento model budeme používať aj vo výpočtovej časti, keďže má najjednoduchšie odhadnuteľné koeficienty, ale zároveň je aj dobre použiteľný na opis trajektórie ľudskej chôdze. Jedným z cieľov práce je určiť koeficienty pre dané modely tak, aby sme dostali výsledky konzistentné s výsledkami z článku J.L Soumana

2b. Tento model je podobný modelu 2b, pričom parameter δ , ktorý určuje závislosť medzi výchylkami, patrí do intervalu $[-1,0]$. Takáto trajektória bude opisovať pohyb človeka, ktorý sa snaží korigovať veľké výchylky tým, že pri ďalšom kroku spraví miernu úpravu v protismere predošlej výchylky. Parameter, δ ,

nemôže presahovať hodnotu -1, lebo v tomto prípade by sa zase jednalo o výchyľky ktoré by predstavovali nereálne pohyby v reálnom živote. Model má tvar:

$$\alpha_{n+1} = \delta\alpha_n + \varepsilon\xi_n, \quad \delta \in [-1,0], \quad \xi_n \sim \mathcal{N}(0,1) \quad (1.6)$$

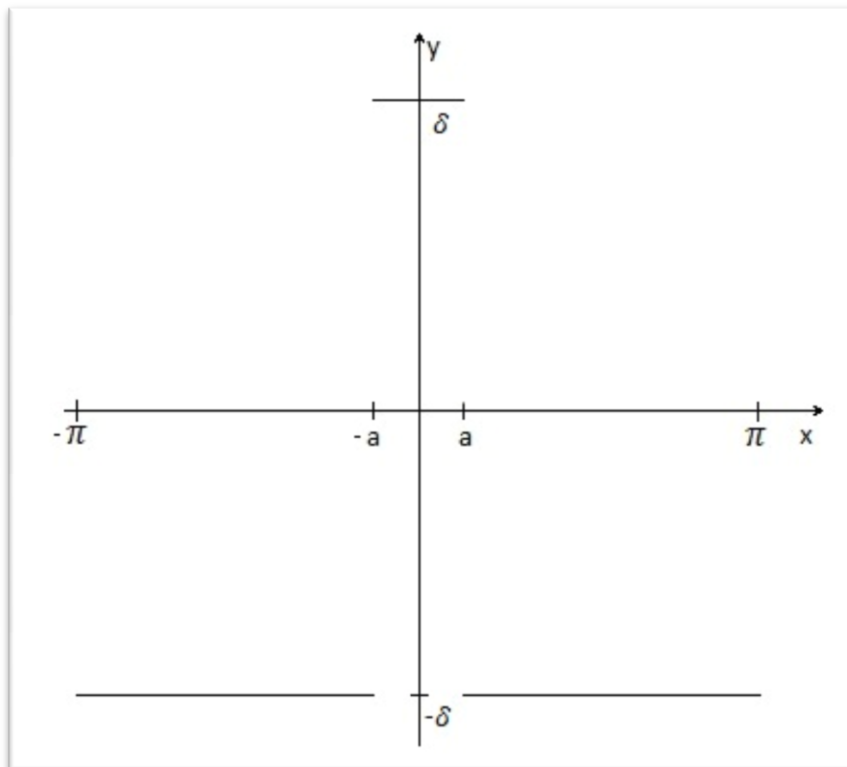
3. Počas chôdze nedokáže človek po dlhšom čase udržať priami smer, ktorým sa chce hýbať. Každým krokom sa vytvárajú výchyľky rôznej veľkosti. Niekedy spravíme väčšiu výchyľku, ktorú máme za potrebu kompenzovať, a niekedy spravíme malú výchyľku, ktorú ani nezaznaménáme. V tomto modeli predpokladáme, že si uvedomujeme váhu každej svojej výchyľky, a jej vplyv na našu trajektóriu, preto budeme uvažovať, že pre každú výchyľku bude rozdielná miera kompenzácie. Definujme funkciu odozvy $\Omega(\alpha_n, \delta, a, b)$, ktorá bude určovať mieru kompenzácie podľa jej funkčného predpisu, a vstupných parametrov Funkcia odozvy môže mať nasledovné tvary: (i) po častiach konštantná, (ii) po častiach lineárna a (iii) nelineárna.

$$\alpha_{n+1} = \Omega(\alpha_n, \delta, a, b) + \varepsilon\xi_n, \quad \xi_n \sim \mathcal{N}(0,1) \quad (1.7)$$

(i) Po častiach konštantná

Predpis funkcie odozvy $\Omega(\alpha_n)$, je v tomto prípade :

$$\Omega(\alpha_n) = \begin{cases} \delta, & x \in \langle -a, a \rangle \\ -\delta, & x \in \langle -\pi, -a \rangle \cup \langle a, \pi \rangle \end{cases} \quad (1.8)$$



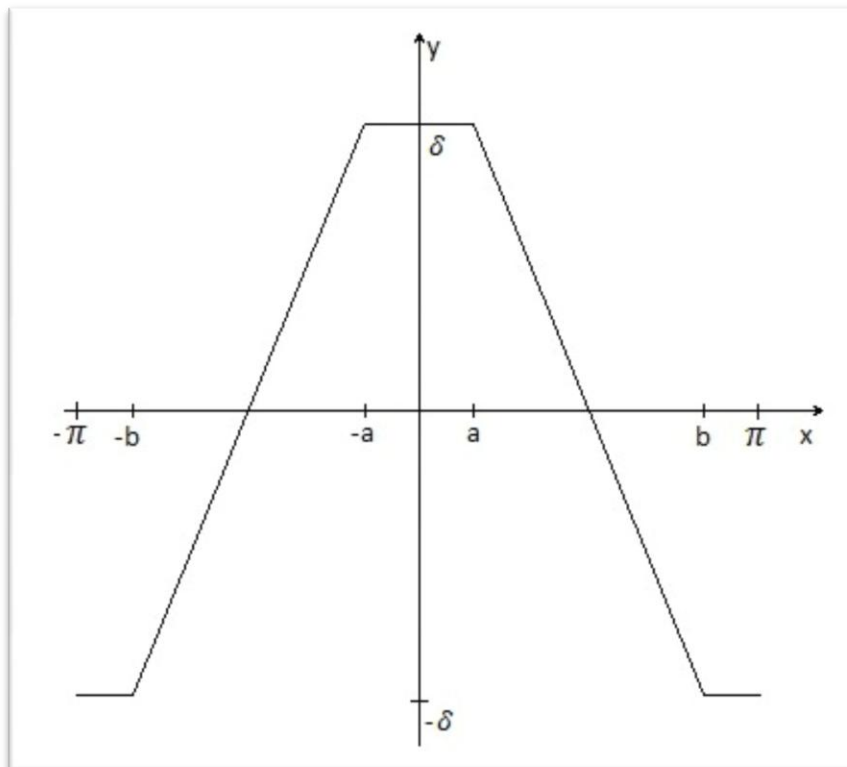
Obrázok 3, tvar po častiach konštantnej funkcie odozvy

Podľa obrázka, výchyľky ktoré nepovažujeme dostatočne významné na to, aby sme ich kompenzovali spadajú do intervalu $\langle -a, a \rangle$, ostatné výchyľky ktoré sú väčšie ako stanovený parameter a , alebo menšie ako $-a$, budú kompenzované váhou udanou funkciou odozvy. Pre takýto tvar nepotrebujeme parameter b , lebo v ňom nemá využitie. Výchyľky sú v rozmedzí $\langle -\pi, \pi \rangle$, aj keď v reálnom svete nespravíme výchyľku o 180° , je dobré modelovať na celom rozmedzí, preto je dobré dať si pozor na správny výber parametra a .

(ii) Po častiach lineárna

Predpis funkcie odozvy $\Omega(\alpha_n)$, je v tomto prípade :

$$\Omega(\alpha_n) = \begin{cases} \frac{2}{b-a}|x| - \frac{a+b}{a-b} & x \in \langle -b, -a \rangle \cup \langle a, b \rangle \\ \delta & x \in \langle -a, a \rangle \\ -\delta & x \in \langle -\pi, -b \rangle \cup \langle b, \pi \rangle \end{cases} \quad (1.9)$$



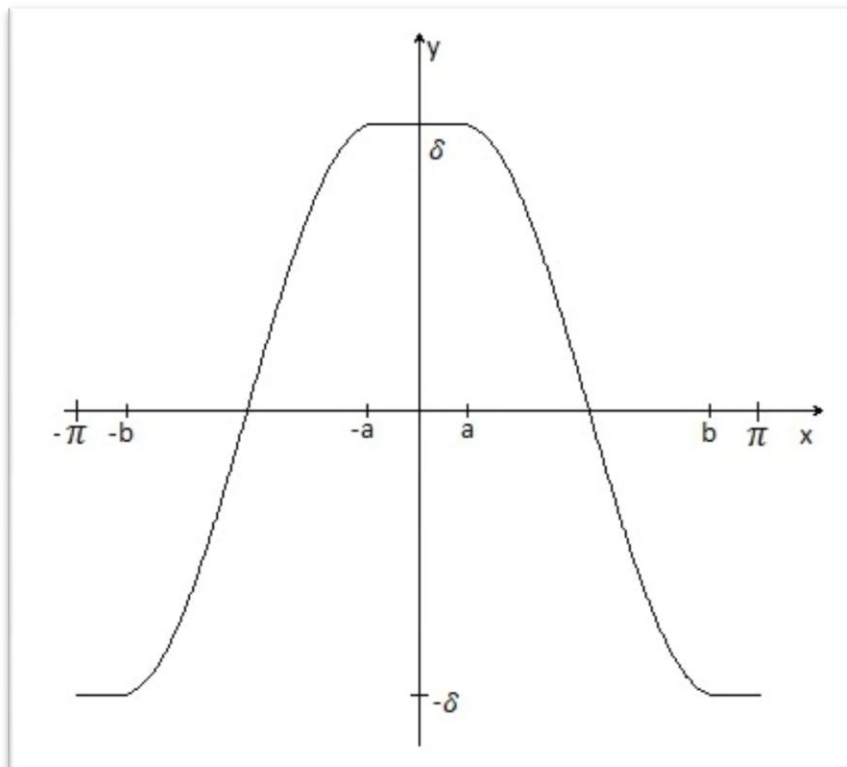
Obrázok 4, tvar po častiach lineárnej funkcie odozvy

Lineárny tvar je zhladením po častiach konštantnej funkcie odozvy. Pribudol ďalší parameter b , ktorý označuje výchylky, ktoré budeme kompenzovať ich celou váhou. Pribudla aj symetrická lineárna funkcia ktorá je na intervale $\langle -b, -a \rangle$ rastúca a na intervale $\langle a, b \rangle$ klesajúca, pričom maximálnou hodnotou, ktorú dosahuje je δ , a minimálnou hodnotou je $-\delta$. Táto funkcia má za úlohu posúdiť veľkosť výchylky ktorá nastala v predchádzajúcom kroku a na základe jej predpisu ju príznačne ju kompenzovať.

(iii) Po častiach nelineárna

Predpis funkcie odozvy $\Omega(\alpha_n)$ je v tomto prípade:

$$\Omega(\alpha_n) = \begin{cases} \delta & x \in \langle -a, a \rangle \\ -\delta & x \in \langle -\pi, -b \rangle \cup \langle b, \pi \rangle \\ \cos\left(\frac{\pi}{\pi - a - b}(x - a)\right) & x \in \langle a, b \rangle \\ \cos\left(\frac{\pi}{\pi - a - b}(x + a)\right) & x \in \langle -b, -a \rangle \end{cases} \quad (1.10)$$



Obrázok 5, tvar po častiach nelineárnej funkcie odozvy

Táto funkcia je zhladením po častiach konštantnej funkcie odozvy. Zmena nastala vo váhe, ktorou budeme nadmiernu výchylku kompenzovať a následne ovplyvňovať budúcu výchylku.

4. Pre tento model budeme uvažovať o rovnakých vlastnostiach ako mal model 3, avšak funkcia odozvy $\Omega(\alpha_n, \delta, a, b)$ bude v tomto prípade určovať, akou váhou bude predchádzajúca výchylka ovplyvňovať tú nasledujúcu. A teda miera kompenzácie bude ovplyvnená aj predchádzajúcou výchylkou. Taktiež budeme uvažovať o rovnakých tvaroch funkcie odozvy ako pre model 3. Teda (i) po častiach konštantná, (ii) po častiach lineárna a (iii) nelineárna funkcia odozvy. Potom predpis pre tento model je:

$$\alpha_{n+1} = \Omega(\alpha_n, \delta, a, b)\alpha_n + \varepsilon\xi_n, \quad \xi_n \sim \mathcal{N}(0,1) \quad (1.11)$$

Na vykresľovanie trajektórií pomocou matematického programu Matlab budeme potrebovať vypočítať súradnice každého kroku, namiesto toho aby sme každý nový krok získavali pomocou výchylky od toho predchádzajúceho, využijeme vzťah $\beta_n = \sum_{i=1}^n \alpha_n$, kde β_n definuje výchylku n-tého kroku od počiatočného smeru, α_0 . Teda pre súradnice (n+1)-ého kroku $[X_{n+1}, Y_{n+1}]$, existuje vzťah závisiaci od súradníc predchádzajúceho n-tého kroku $[X_n, Y_n]$, a za pomoci výchylky n-tého kroku, β_n , od počiatočného smeru, α_0 . Tento vzťah je určený predpisom (pri konštantnej dĺžke kroku $D \in \mathbb{R}$):

$$\begin{aligned} X_{n+1} &= X_n + D \cos(\beta_n) \\ Y_{n+1} &= Y_n + D \sin(\beta_n) \end{aligned} \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots, \quad (1.12)$$

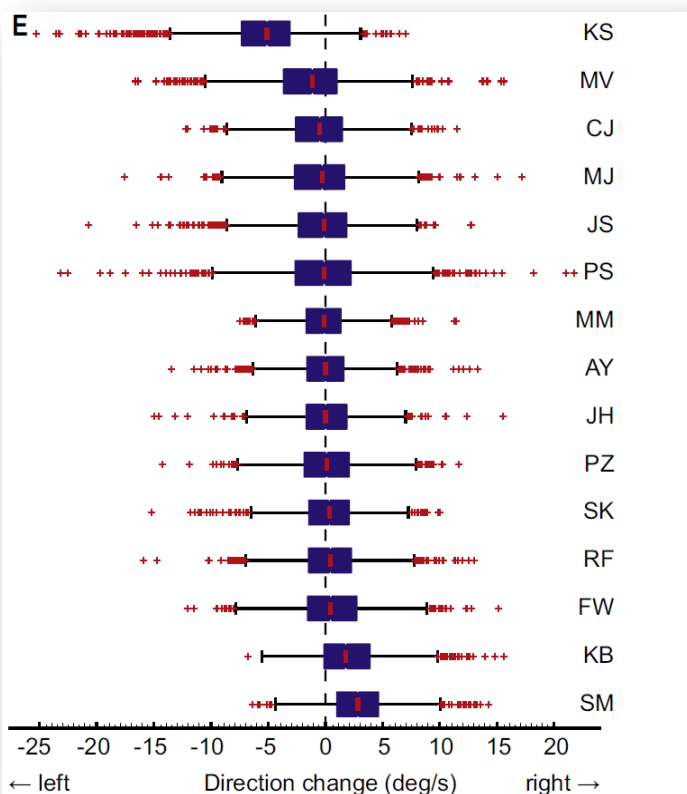
Postup na generovanie trajektórie bude nasledovný:

1. Zvolíme model s ktorým budeme chcieť pracovať
2. Zvolíme správne parametre pre $f(\alpha_n) + g(\alpha_n)$, vygenerujeme výchylky α_n
3. Vypočítame celkové výchylky, β_n , od počiatočného smeru, α_0 ,
4. Vypočítame súradnice jednotlivých krokov a vykreslíme

2 Testovanie a výsledky

2.1 Oplyvňuje dĺžka chôdze veľkosť akumulovaného šumu, ktorý sa tvorí počas chôdze poslepiacky?

V Článku J.L.Soumana[1] boli vykonané experimentálne pokusy, pri ktorých malo 15 testovaných osôb, so zaviazanými očami, za úlohu čo najpresnejšie sa pohybovať vo vopred stanovenom smere. Subjekty boli rozdelené na dve testovacie skupiny, obe mali dĺžku trvania prechádzky 50 minút, pričom jedna zo skupín, tvorená 9 osobami, mala prestávku každých 5 minút s dĺžkou trvania 1min a druhá skupina, tvorená 6 osobami, mala prestávku každých 10 minút s dĺžkou trvania 2 min medzi jednotlivými prechádzkami. V článku sú opísané výchylky v smere pohybu zaznamenávané každú sekundu počas celého trvania prechádzky. Z tohto obrázku sme odhadli 25% kvartil, 75% kvartil, strednú hodnotu, medzikvartilové rozpätie a hodnoty pre strednú hodnotu plus štandardná odchýlka a stredná hodnota mínus štandardná odchýlka. Cieľom bolo zistiť vplyv dĺžky trvania na veľkosť akumulovaného šumu, porovnali sme veľkosti medzikvartilového rozpätia (medzikvartilové rozpätie nám dáva najväčšiu informáciu o rozptyle výchyliek).



Obrázok 6 opisuje zmenu v smere chôdze zaznamenávanú každú sekundu.

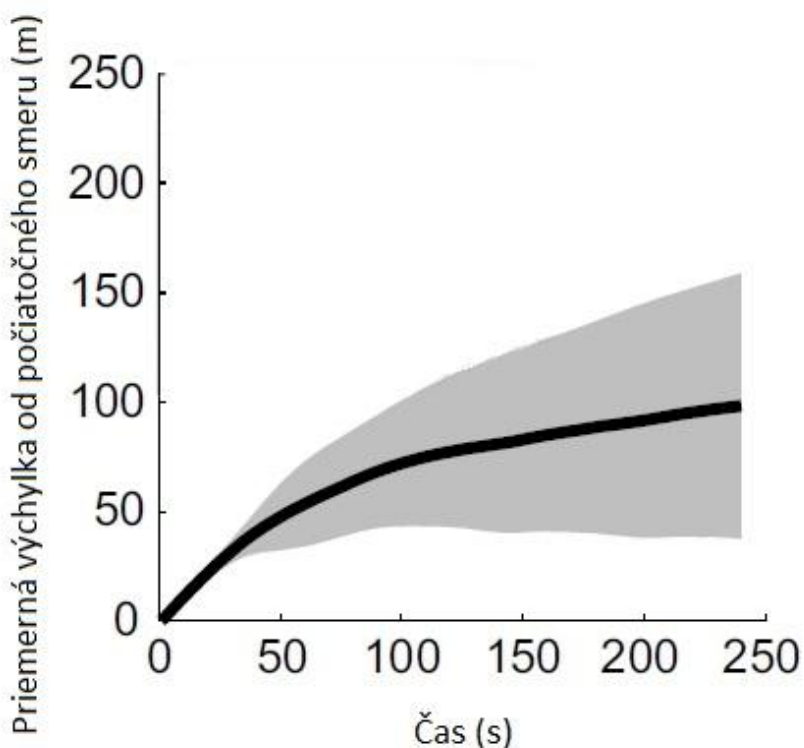
Z tabuľky 1 sme zistili, že pre 10-minútové prechádzky je stredná hodnota medikvartilového rozpätia väčšia, ako stredná hodnota pre 5-minútové prechádzky. Takisto aj pre štandardnú odchýlku nadobúdajú 10-minútové prechádzky väčšiu hodnotu. Z toho usúdime, že zvýšením času prechádzky so zviazanými očami, sa zvýši aj veľkosť rozptylu výchýliek a ich variancia. Jediný problém nastáva v počte dát, ktorý je v tomto príklade malý, preto si nemôžeme byť istý výpovednou hodnotou nášho testovania.

10-minútové prechádzky	MV	JS	PS	JH	SK	KB	\bar{X}	S^2			
Medikvartilove rozpätie	18	16,8	19,5	14	13,7	15,5	16,2	5,21			
5-minútové prechádzky	KS	CJ	MJ	MM	AY	PZ	RF	FW	SM	\bar{X}	S^2
Medikvartilove rozpätie	16,7	16,3	17,4	11,8	12,6	15,7	14,7	16,9	14,6	15,1	3,79

Tabuľka 1 zaznamenáva veľkosti medikvartilového rozpätia pre jednotlivé testované osoby z obrázku 6, a strednú hodnotu a variáciu pre obe skupiny

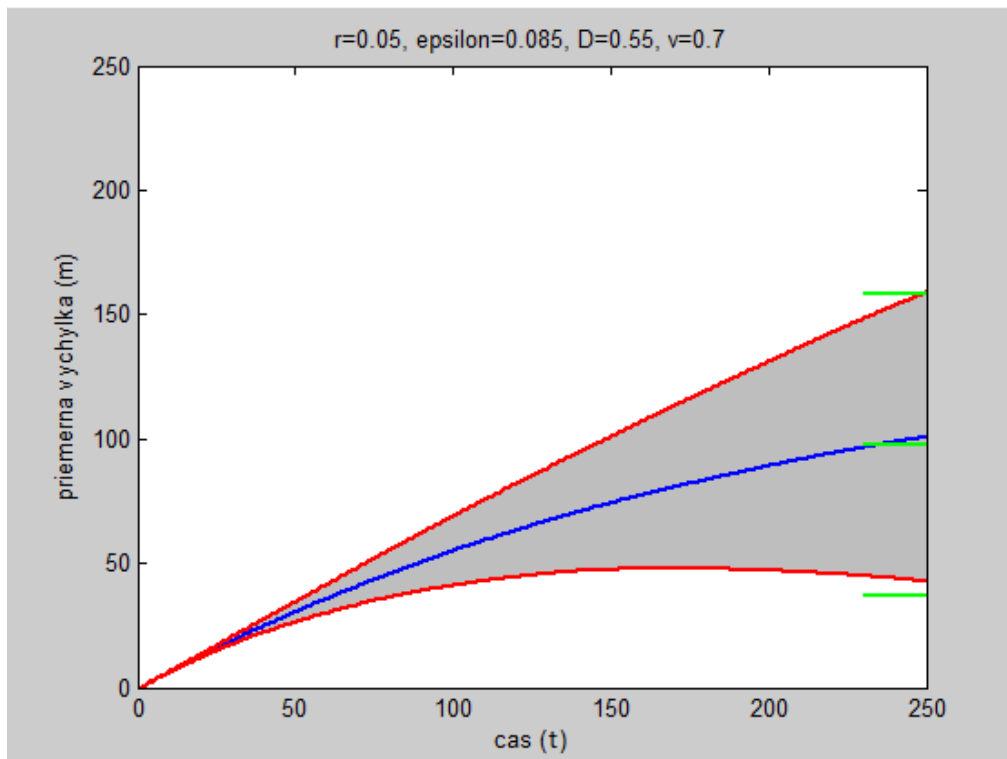
2.2 Kruhy v prechádzkach

V tejto časti sa budeme venovať kruhom (bod na trajektórii do ktorého sa prvýkrát vrátíme počas prechádzky) vytvoreným na trajektórii, a určíme vplyvy parametrov δ a ε na ich veľkosť. Pre tieto simulácie budeme používať model 2a. Na skúmanie trajektórií potrebujeme najprv odhadnúť parametre pre náš model tak, aby dobre opisoval správanie ľudskej chôdze. Na to sme použili obrázok (obrázok 7) z článku J.L Soumana [1], ktorý opisuje vzdialenosť prejdenú v počiatočnom smere za prvých 240 sekúnd prechádzky. Na obrázku je zaznačená stredná hodnota a štandardná odchýlka pre všetkých 12 trajektórií v čase s . Predpokladáme, že graf z obrázku 7 bude vykazovať rovnaké hodnoty pre strednú hodnotu a štandardnú odchýlku aj v limitných prípadoch (použili sme 500 trajektórií, pri ktorých sa už stredná hodnota a štandardná odchýlka ustálili na svojich priemerných hodnotách). Potom sme pomocou numerických simulácií zreprodukovali obrázok 7, pričom sme dosiahli viacero kombinácií pre parametre δ a ε .



Obrázok.7 opisuje prejdenú vzdialenosť počiatočným smerom za prvých 240 sekúnd chôdze. Dáta pochádzajú z článku J.L. Soumana [1] zo všetkých prechádzok uskutočnených v Bienwaldskom lese a na saharskej púšti. Hrubou čiarou je vyznačená stredná hodnota pre prejdenú vzdialenosť, a okraje grafu predstavujú hodnoty pre strednú hodnotu \pm štandardná odchýlka.

Jedným z výsledkov boli parametre $\delta = 0,15$ a $\varepsilon = 0,085$ z ktorých je zostavený obrázok 8, modrou je označená stredná hodnota trajektórií, červenou je označená stredná hodnota \pm štandardná odchýlka a zelenou sú označené koncové hodnoty z obrázku 7 (pre $t = 220$ až 250).



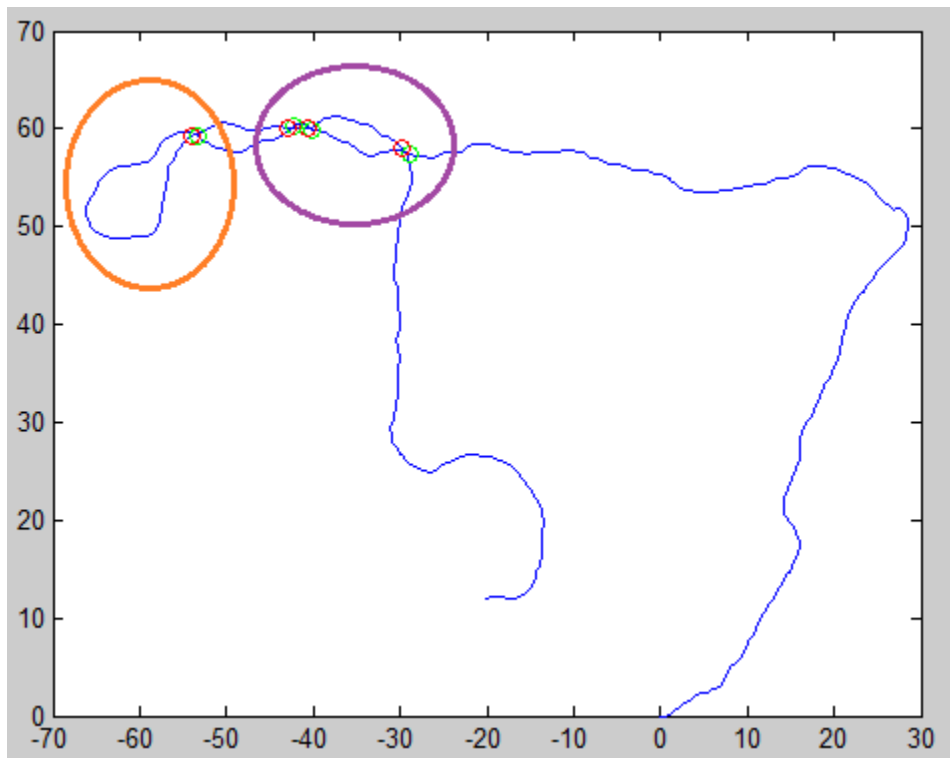
Obrázok 8 opisuje prejdenú vzdialenosť počiatčným smerom v čase t , za použitia modelu 2a s parametrami $\delta = 0,15$ a $\varepsilon = 0,085$, pri dĺžke kroku 0,55 metra a rýchlosti chôdze 0,7 m/s. Modrou je vyznačená stredná hodnota, červenou je vyznačená stredná hodnota \pm štandardná odchýlka pre 500 trajektórií. Zelenou čiarou sú odhadnuté okrajové hodnoty z obr.7.

Pre takto odhadnuté parametre budeme skúmať trajektórie, pričom nás bude zaujímať tvorba kruhov a ich veľkosť.

2.2.1 Hľadanie kruhov na trajektóriach

To vedie k osobitnému problému hľadania kruhov v trajektóriach. Potrebujeme nájsť také body na trajektórii, do ktorých sa prvý krát vrátíme potom ako sme z nich vyšli. Problém hľadania kruhov inklinuje k zložitejšiemu riešeniu (keďže o chôdzi nepremýšľame ako o spojitom pohybe, ale ako o diskretnom súbore krokov), ako len porovnávať súradnice každých dvoch rozdielných krokov. Preto na nájdenie kruhu na trajektórii, potrebujeme nájsť prieniky dvoch rozdielných krokov, ktoré sú určené počiatčným bodom a smerom kroku. Pre každý krok zostrojíme priamku, ktorá bude určená počiatčným bodom kroku a smerom kroku. Budeme sledovať prieniky každých dvoch takýchto priamok,

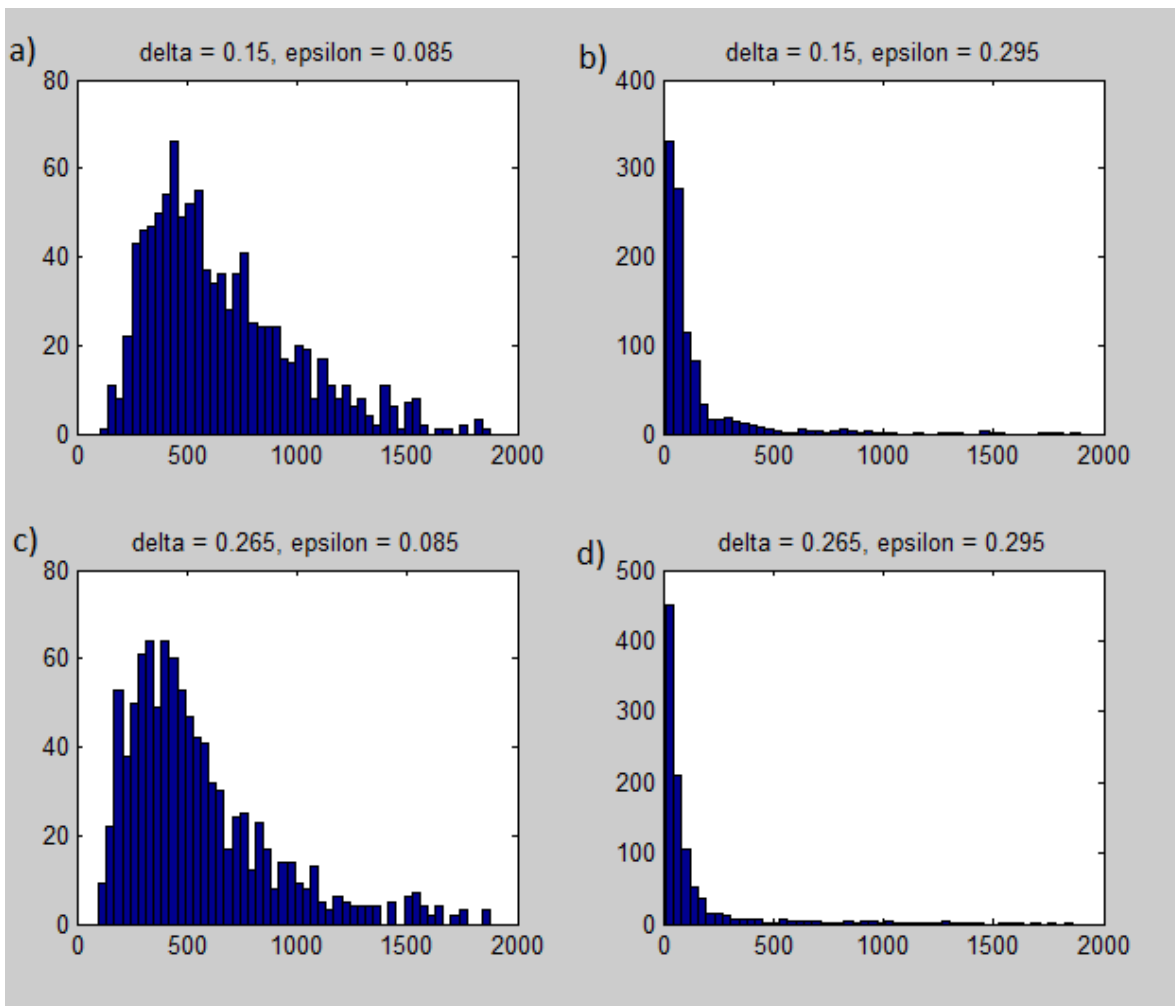
pokiaľ nenájdeme taký prienik, ktorého kroky prislúchajúce priamkam, majú počiatočné body krokov vzdialené od prieniku menej ako dĺžku jedného kroku. Teda ak pre obe priamky platí, že vzdialenosť ich počiatočných bodov od ich spoločného prieniku, je q -násobkom smeru kroku, pričom q je ľubovoľné číslo z intervalu $[0,1]$. Potrebujem rozlíšiť ktoré z prienikov patria kruhom, a ktoré z nich patria oblastiam s dvomi prienikmi, vid' obrázok 9.



Obrázok 9 opisuje zaznačenie prienikov na trajektóriách pre model 2a s parametrami $\delta = 0,15$ a $\varepsilon = 0,085$, dĺžkou kroku 0,55 metra a rýchlosťou chôdze 0,7 m/s, začiatok trajektórie je na súradniciach $[0,0]$. Počiatočný bod prieniku je označený zeleným krúžkom a konečný bod prieniku červeným krúžkom. Oranžovou je zaznačená oblasť ktorú budeme počítať ako kruh na trajektórií, a fialovou je zaznačená oblasť ktorú nebudeme považovať za kruhy.

Podľa obrázka môžeme vidieť, že počiatočné body prienikov majú menšie hodnoty ako počiatočný bod prieniku kruhu, a naopak koncové body prienikov majú väčšiu hodnotu ako koncový bod prieniku kruhu. Na základe tohto poznatku vieme podľa hodnôt prienikov presne určiť kedy nastáva kruh. Ak odpočítame koncový bod prieniku a počiatočný bod prieniku, dostaneme potrebný počet krokov na daný kruh v trajektórií, a po pre násobení dĺžkou kroku aj potrebnú vzdialenosť v metroch.

Nasledovne môžeme uskutočniť experiment, ktorým budeme sledovať veľkosť kruhov a ich tvorbu na trajektórii. Vytvoríme štyri histogramami (obrázok 10) pomocou modelu 2a a odhadnutých parametrov z kapitoly 2.2.

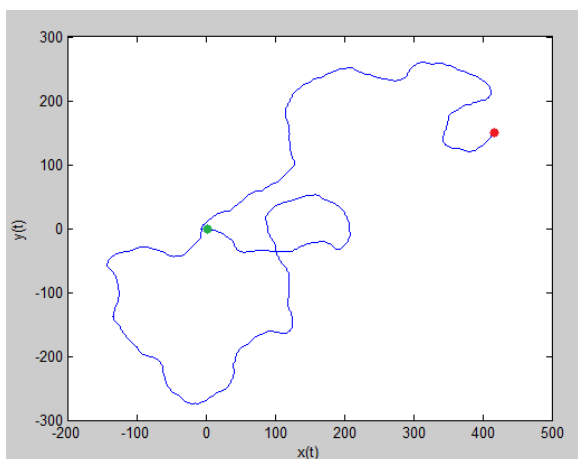


Obrázok 10 Na x-ovej osi je zaznamenaný potrebný počet krokov na jeden kruh a na y-ovej osi je zaznamenaná početnosť výskytu kruhov pre jeho veľkosť. Každý histogram bol vytvorený pomocou modelu 2a pre 1000 rozličných kruhov. **a)** histogram modelu s parametrami $\delta = 0,15$ a $\varepsilon = 0,085$. Stredná hodnota pre počet krokov na jeden kruh je $\bar{X} = 650,3$ štandardná odchýlka je $\text{Std.} = 327,3$. Pri dĺžke kroku 0,65 metra potom potrebujeme v priemere 422,7 metra na jeden kruh, alebo priemerný kruh ktorý vytvoríme má polomer 67,27 metra. **b)** histogram modelu s parametrami $\delta = 0,15$ a $\varepsilon = 0,295$. Stredná hodnota pre počet krokov na jeden kruh je $\bar{X} = 151,8$ štandardná odchýlka je $\text{Std.} = 248,8$ Pri dĺžke kroku 0,65 metra potom potrebujeme v priemere 98,7 metra na jeden kruh, alebo priemerný kruh ktorý vytvoríme má polomer 15,7 metra. **c)** histogram modelu s parametrami $\delta = 0,265$ a $\varepsilon = 0,085$. Stredná hodnota pre počet krokov na jeden kruh je $\bar{X} = 553,3$ štandardná odchýlka je $\text{Std.} = 332,8$ Pri dĺžke kroku 0,65 metra potom potrebujeme v priemere 359,6 metra na jeden kruh, alebo priemerný kruh ktorý vytvoríme má polomer 57,23 metra. **d)** histogram modelu s parametrami $\delta = 0,265$ a $\varepsilon = 0,295$. Stredná hodnota pre počet krokov na jeden kruh je $\bar{X} = 146,2$ štandardná odchýlka je $\text{Std.} = 270,4$. Pri dĺžke kroku 0,65 metra potom potrebujeme v priemere 95,03 metra na jeden kruh, alebo priemerný kruh ktorý vytvoríme má polomer 15,12 metra.

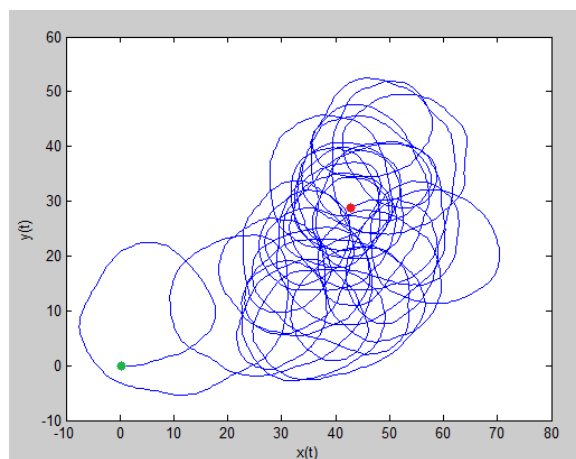
Môžeme si všimnúť, že pri narastajúcej hodnote ε sa znižuje priemerný počet krokov na jeden kruh, čo sa dalo očakávať, keďže ε ovplyvňuje náhodnosť, a čím viac nám povolí sa vychýliť od predchádzajúceho smeru, tým skor sa vrátíme na miesto ktorým sme už raz prešli, a teda vytvoríme kruh. Taktiež vidíme, že aj δ má podobný vplyv na priemerný počet krokov na jeden kruh, teda pri zväčšení hodnoty parametra δ , sa zmenší priemerná veľkosť kruhov, avšak nie tak výrazne ako pri zmene parametra ε .

2.3 Galéria obrázkov trajekórií pre jednotlivé modely

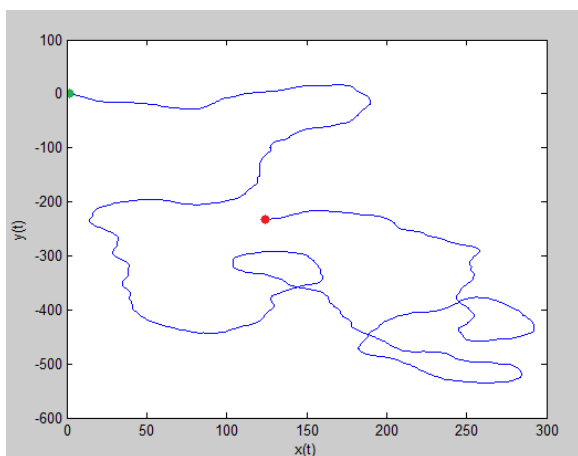
Každá trajektória opisuje vývoj počas prvých 3000 sekúnd trvania prechádzky, pri rýchlosti chôdze 0,7 m/s a dĺžke kroku 0,55 m, to je približne 3820 krokov pre každú trajektóriu. Počiatočný bod trajektórie je označený zelenou a koncový bod červenou.



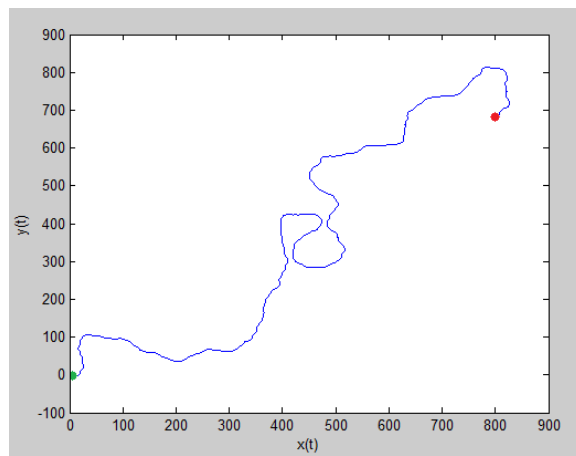
Obrázok 10 zobrazuje trajektóriu pre model 1a, s parametrami $\delta = 0$ a $\varepsilon = 0,085$. Môžeme vidieť, že aj pre najjednoduchší model sa vytvárajú kruhy na trajektóriách



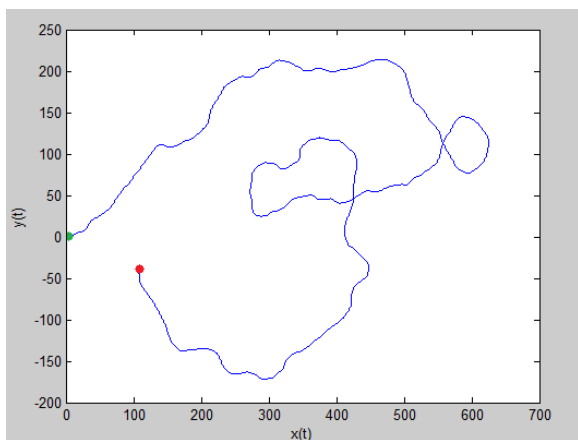
Obrázok 11 zobrazuje trajektóriu pre model 1b, s parametrami $\delta = 0,05$ a $\varepsilon = 0,085$, kde parameter δ vyjadruje konštantné vychýlenie o 3 stupne doľava.



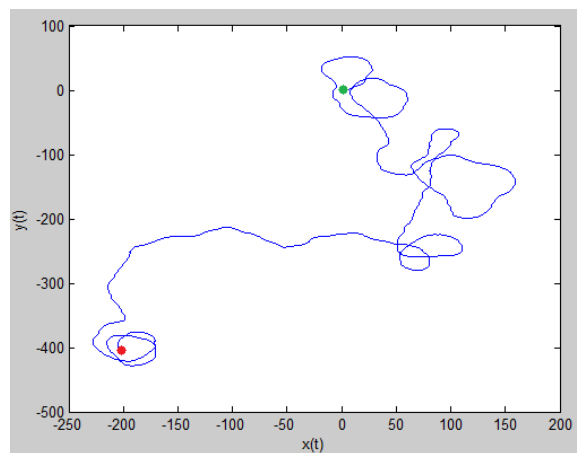
Obrázok 12 zobrazuje trajektóriu pre model 2a, s parametrami $\delta = 0,05$ a $\varepsilon = 0,085$. Môžeme vidieť kruhy so zatočením doprava ale aj doľava.



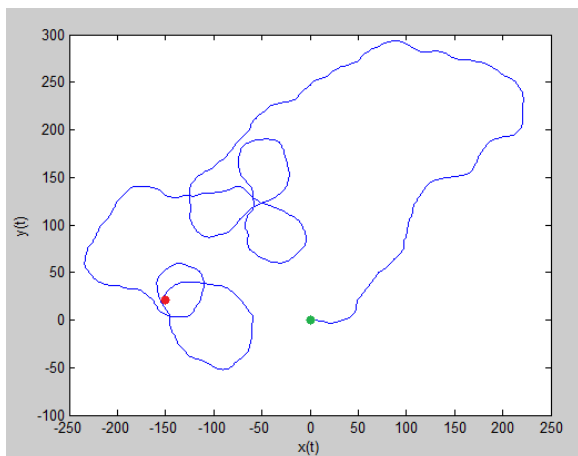
Obrázok 13 zobrazuje trajektóriu pre model 2a, s parametrami $\delta = 0,05$ a $\varepsilon = 0,085$, môžeme vidieť vytvárajúce sa meandry na trajektóriách.



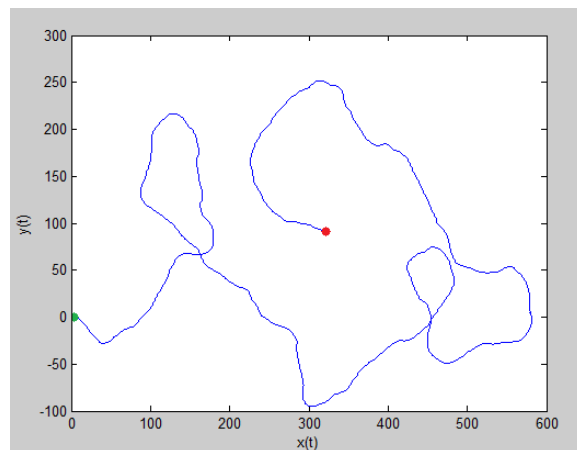
Obrázok 14 zobrazuje trajektóriu pre model 2b, s parametrami $\delta = -0,05$ a $\varepsilon = 0,085$. Môžeme vidieť kruhy na trajektóriách aj pri snahe chôdzu korigovať.



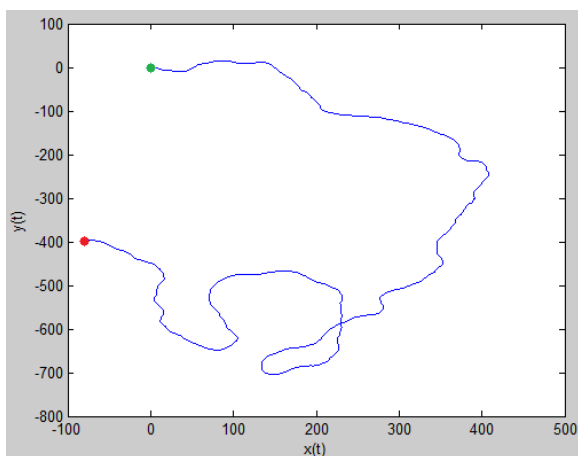
Obrázok 15. Zobrazuje trajektóriu pre model 3 (i), s parametrami $\delta = 0,05$, $\varepsilon = 0,085$ a $a = 0,087 \sim 5^\circ$.



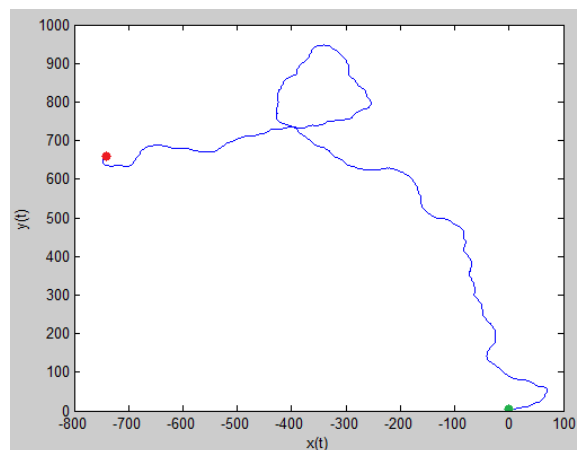
Obrázok 16 zobrazuje trajektóriu pre model 3 (ii), s parametrami $\delta = 0,05$, $\varepsilon = 0,085$, $a = 0,087 \sim 5^\circ$ a $\varepsilon = 0,085$ a $b = 0,523 \sim 30^\circ$.



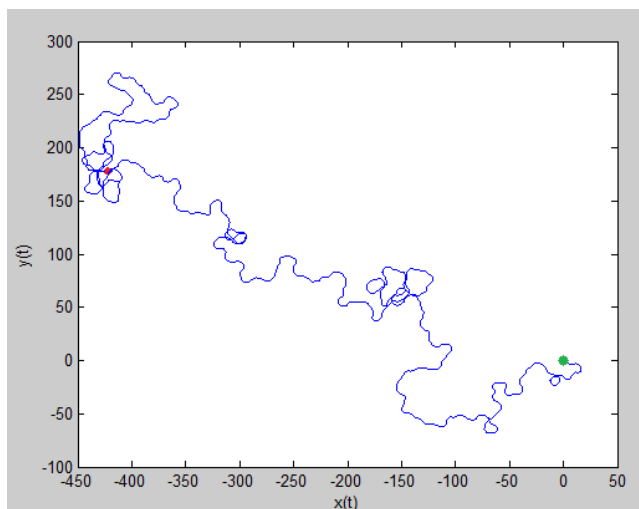
Obrázok 17 zobrazuje trajektória pre model 3 (iii), s parametrami $\delta = 1$, $\varepsilon = 0,085$, $a = 0,087 \sim 5^\circ$ a $\varepsilon = 0,085$ a $b = 0,523 \sim 30^\circ$.



Obrázok 18 zobrazuje trajektóriu modelu 4 (i) s parametrami $\delta = 0,05$, $\varepsilon = 0,085$ a $a = 0,087 \sim 5^\circ$.

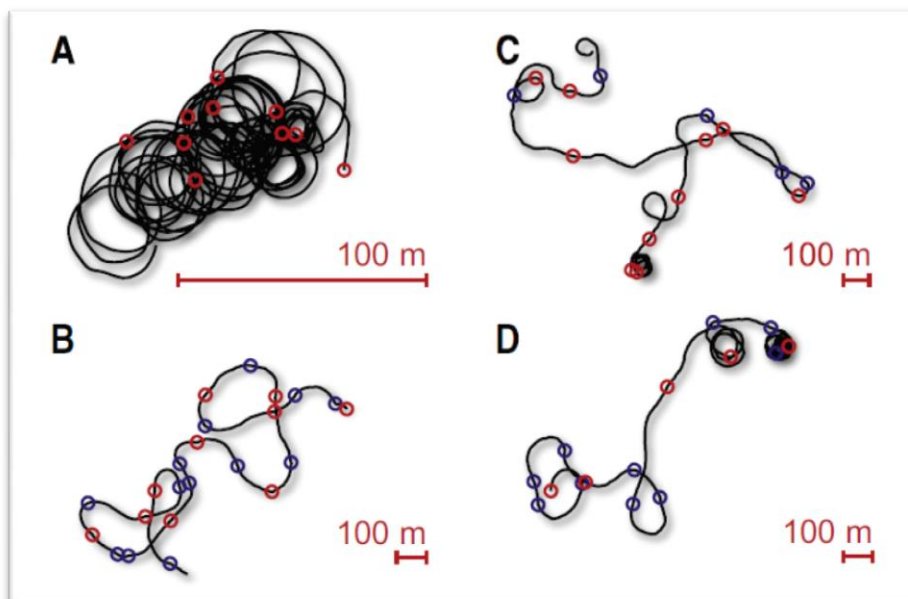


Obrázok 19 zobrazuje trajektóriu pre model 4 (ii) s parametrami $\delta = 0,05$, $\varepsilon = 0,085$, $a = 0,087 \sim 5^\circ$ a $\varepsilon = 0,085$ a $b = 0,523 \sim 30^\circ$.



Obrázok 20 zobrazuje trajekóriu pre model 4 (iii) s parametrami $\delta = 1$, $\varepsilon = 0,095$, $a = 0,087 \sim 5^\circ$ a $\varepsilon = 0,085$ a $b = 0,523 \sim 30^\circ$.

Ako si môžeme povšimnúť, pre väčšinu modelov sú postačujúce aj malé hodnoty parametrov ($\delta = 0,05$, $\varepsilon = 0,085$) na tvorenie kruhov na trajekóriach. Taktiež si môžeme všimnúť určitú podobnosť s trajektóriami z článku J.L Soumana [1] (obrázok 21), ktoré opisujú chôdzu so zviazanými očami.



Obrázok 21 A-D zobrazuje trajektórie z článku J.L. Soumana pre experiment, pri ktorom chodili ľudia so zviazanými očami, kapitola 2.1.

Trajektória z obrázku 21A sa podobá na trajekóriu z obrázku 11, trajektória z obrázku 21C sa podobá na trajekóriu z obrázku 20, trajektória z obrázku 21D sa podobá na trajekóriu obrázku 15.

Záver

Stanovili sme si predpoklady pre modelovanie ľudskej chôdze tak, aby čo najlepšie reprezentovali ľudskú chôdzu skúmanú v článku J.L Soumana [1]. Pomocou týchto predpokladov sme vytvorili štyri jednoduché modely, pre ktoré sme následne skúmali pre ich vývoj trajektórií a ich vlastností. Odhadli sme parametre pre matematické modely tak, aby sme dosiahli trajektórie ktoré by dobre opisovali ľudskú chôdzu. Sledovali sme tvorbu kruhov na trajektóriach pre odhadnuté parametre.

Zaujímavým výsledkom bola priemerná veľkosť kruhu pre odhadnuté parametre. So strednou hodnotou 650 krokov na jeden kruh, dostávame pri priemernej dĺžke kroku 0,65 metra vzdialenosť 422,5 metra. Pre takúto vzdialenosť dostávame kruhy o polomere 67,25 metra.

Ďalším zaujímavým výsledkom boli trajektórie tvorené jednotlivými modelmi. Predpoklady, ktoré sme si stanovili ubrali veľkú časť faktorov, ktoré ovplyvňujú orientáciu v priestore, a naše navigačné schopnosti. Prekvapujúce bolo, že navzdory svojej jednoduchosti vedeli dobre opísať trajektórie, ktoré sme mali k dispozícii z článku J.L Soumana [1].

Referencie:

- [1] Souman, J. L., (2009) *Walking straight into circles*. Current biology 19, 1538-1542, Cell Press
- [2] Wolbers T., Hegarty M., (2010) *What determines our navigational abilities?*, Trends in cognitive Science, Vol. 14, No. 3, Elsevier
- [3] Brunovský, P., *Diferenčné a diferenciálne rovnice*, študijný materiál, FMFI UK, Bratislava, <http://pc2.iam.fmph.uniba.sk/skripta/>
- [4] Berg, H. C., (1993) *Random walks in biology*, Princeton University Press
- [5] Bredin, J., (2005) *Path integration: is there a difference between athletes and non-athletes?*, Springer-Verlag
- [6] Smith, A. D., (2010) *Going the distance: spatial scale of athletic experience affects the accuracy of path integration*, Springer-Verlag
- [7] Spitzer, F., (2001) *Principles of Random Walk, Second Edition*, Springer-Verlag