UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY

Numerické simulácie nelineárneho modelu heterogénnych agentov

2011

Jakub Guliš

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY

Evidenčné číslo: 155f3063-41d9-4ae4-ae8d-2d1a80bd1a8a

Numerické simulácie nelineárneho modelu heterogénnych agentov

Bakalárska práca

Študijný program: Ekonomická a finančná matematika
Študijný odbor: 9.1.9 Aplikovaná matematika
Školiace pracovisko: Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky
Školiteľ: Prof. RNDr. Pavel Brunovský, DrSc.

Bratislava 2011

Jakub Guliš

Univerzita Komenského v Bratislave
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

ZADANIE ZÁVEREČNEJ PRÁCE

Meno a priezvisko študenta: Jakub Guliš
Študijný program: ekonomická a finančná matematika (Jednoodborové štúdium, bakalársky I. st., denná forma)
Študijný odbor: 9.1.9. aplikovaná matematika
Typ záverečnej práce: bakalárska
Jazyk záverečnej práce: slovenský

Názov : Numerické simulácie nelineárneho modelu heterogénnych agentov

Cieľ : Prispieť k simuláciám komplikovaných dynamických režimov v modeloch heterogénych agentov

Anotácia : Modely heterogénnych agentov sú nedocenenou možnosťou vysvetlenia oscilačných javov v ekonómii a poskytujú priestor na teoretické a numerické skúmanie nelineárnych systémov diferenčných rovníc.

Vedúci : prof. RNDr. Pavel Brunovský, DrSc.

Dátum zadania: 27.10.2010

Dátum schválenia: 08.11.2010

doc. RNDr. Margaréta Halická, CSc.
garant študijného programu

Guliš
študent

Pavol Brunovský
vedúci práce

Dátum potvrdenia finálnej verzie práce, súhlas s jej odovzdaním (vrátane spôsobu sprístupnenia) 31. 5. 2011

Pavol Brunovský
vedúci práce

Prehlasujem, že som bakalársku prácu vypracoval samostatne, iba s pomocou literatúry, uvedenej v zozname a konzultácií s vedúcim bakalárskej práce.

V Bratislave, 31. mája 2011

Jakub Guliš

Týmto sa chcem poďakovať Prof. RNDr. Pavlovi Brunovskému, DrSc. za odbornú pomoc, množstvo cenných pripomienok a rád, ako aj za ochotu, prejavnú pri vedení práce.

Abstrakt

V bakalárskej práci vychádzam z práce *Chiarella et al.* [2]. Zaoberám sa v nej uvedeným diskrétnym modelom akciového trhu pozostávajúceho z dvoch skupín obchodníkov: fundamentalistov a chartistov. Model vedie k dvojrozmernému systému diferenčných rovníc, ktorého správanie skúmam v závislosti od rôznych parametrov. Pri určitých hodnotách parametrov je systém vystavený bifurkáciám, čo je analyzované prostredníctvom numerických simulácií.

Kľúčové slová: heterogénni agenti, dynamický systém, bifurkácie

Abstrakt

This bachelor´s thesis is based on a paper *Chiarella et al.* [2]. I am engaged in this thesis in a discrete time model of a share market consisting of two groups of traders: fundamentalists and chartists. Model leads to a system of a two-dimensional map whose behaviour is analysed in dependence on various parameters. With certain parameter values this system is exposed to bifurcations, what is analysed by numerical simulations.

Keywords: heterogenous agents, dynamical system, bifurcations

Obsah

1 Úvod

Cieľom tejto práce je kvalitatívna analýza vybraného modelu heterogénnych agentov s diskrétnym a spojitým časom a numerické simulácie. Pôjde predovšetkým o stabilitné vlastnosti a bifurkácie.

V prvej kapitole bude podrobne odvodený model ako je uvedený v [2].

V kapitole 2 sa budeme venovať tomuto modelu ako dynamickému systému. Zaoberať sa budeme jeho rovnovážnymi stavmi a predovšetkým oblasťami stability. Tiež odvodíme jeho spojitú verziu.

Kapitola 3, ktorá je jadrom práce, začína všeobecnými definíciami nehyperbolického pevného bodu a bifurkácii, nasledujú numerické simulácie pre model s danými parametrami.

2 Model

Model heterogénnych agentov je model, ktorý rozoznáva rozdiely medzi agentmi. V nasledujúcom texte je použitý model Carla Chiarellu [2], ktorý pochádza z roku 1992 a v ktorom sa rozlišujú dva typy agentov. T.j. predpokladá sa, že akciový trh pozostáva z dvoch skupín obchodníkov, ktorými sú

- **fundamentalisti**, ktorí zakladajú svoje obchodné rozhodnutia na odhade fundamentálnej hodnoty aktíva a
- **chartisti**, ktorí sa spoliehajú na analýzu minulých trendov cien.

Fundamentalisti sa preto prikláňajú k tomu, že investujú do aktív, ktoré sú podhodnotené (vzhľadom na nimi predpokladanú fundamentálnu hodnotu) a predávajú tie, ktoré považujú za nadhodnotené. Naproti tomu chartisti sa snažia extrapolovať pozorované priebehy cien a využiť ich pri svojich investičných rozhodnutiach.

2.1 Odvodenie

Ako P_t sa označuje logaritmus ceny aktíva v čase t, index $i \in \{f, c\}$ označuje fundamentalistu alebo chartistu. Obe skupiny investujú ako do rizikových aktív, tak aj do alternatívnych bezrizikových. Ak sa ako $\Omega_{i,t}$ označí majetok agenta i a ako $Z_{i,t}$ podiel tohto majetku, ktorý sa rozhodne investovať do rizikového aktíva v čase t, možno jeho majetok v čase $t+1$ vyjadriť nasledovne:

$$\Omega_{i,t+1} = \Omega_{i,t} + \Omega_{i,t}(1 - Z_{i,t})g_t + \Omega_{i,t}Z_{i,t}(P_{t+1} - P_t),$$

kde g_t vyjadruje výnos z bezrizikového aktíva (napr. dlhopisu) a $(P_{t+1} - P_t)$ výnos z rizikového aktíva. Agent i počíta podmienenú strednú hodnotu a varianciu $\Omega_{i,t+1}$ (značené ako $E_{i,t}(\Omega_{i,t+1})$ a $V_{i,t}(\Omega_{i,t+1})$) za predpokladu, že $(P_{t+1} - P_t)$ má podmienené normálne rozdelenie; dostáva teda:

$$E_{i,t}(\Omega_{i,t+1}) = \Omega_{i,t} + \Omega_{i,t}(1 - Z_{i,t})g_t + \Omega_{i,t}Z_{i,t}E_{i,t}(P_{t+1} - P_t), \quad (1)$$

$$V_{i,t}(\Omega_{i,t+1}) = Z_{i,t}^2\Omega_{i,t}^2V_{i,t}(P_{t+1} - P_t). \quad (2)$$

Za predpokladu, že každá skupina agentov má exponenciálnu funkciu užitočnosti, každý agent hľadá $Z_{i,t}$ také, aby maximalizoval

$$E_{i,t}[-e^{-\alpha_i\Omega_{i,t+1}}], \quad (3)$$

kde α_i je koeficient averzie k riziku agenta i. Za predpokladu, že $\Omega_{i,t+1}$ má podmienené normálne rozdelenie, táto úloha je ekvivalentná úlohe

$$\max_{Z_{i,t}} \left\{ E_{i,t}(\Omega_{i,t+1}) - \frac{1}{2}\alpha_i V_{i,t}(\Omega_{i,t+1}) \right\}$$

resp.

$$\max_{Z_{i,t}} \{\Omega_{i,t} + \Omega_{i,t}(1 - Z_{i,t})g_t + \Omega_{i,t} Z_{i,t} E_{i,t}(P_{t+1} - P_t) -$$
$$- \frac{1}{2}\alpha_i Z_{i,t}^2 \Omega_{i,t}^2 V_{i,t}(P_{t+1} - P_t)\bigg\}. \qquad (4)$$

Keď sa maximalizovaná rovnica zderivuje podľa $Z_{i,t}$ a následne položí rovná nule, podmienka pre optimálne riešenie $\hat{Z}_{i,t}$ má nasledovný tvar:

$$-\Omega_{i,t} g_t + \Omega_{i,t} E_{i,t}(P_{t+1} - P_t) - \alpha_i \Omega_{i,t}^2 V_{i,t}(P_{t+1} - P_t)\hat{Z}_{i,t} = 0$$

Odtiaľ

$$\hat{Z}_{i,t} = \frac{E_{i,t}(P_{t+1} - P_t) - g_t}{\alpha_i \Omega_{i,t} V_{i,t}(P_{t+1} - P_t)}$$

Dopyt agenta i po rizikovom aktíve, ktorý je riešením danej optimalizačnej úlohy je teda

$$\hat{\zeta}_{i,t} \equiv \hat{Z}_{i,t}\Omega_{i,t} = \frac{E_{i,t}(P_{t+1} - P_t) - g_t}{\alpha_i V_{i,t}(P_{t+1} - P_t)}.$$

Skupiny agentov sa líšia v tom, ako stanovujú strednú hodnotu a varianciu.

U fundamentalistov sa predpokladá, že disponujú rozumným odhadom fundamentálnej hodnoty rizikového aktíva a veria, že táto hodnota predstavuje úroveň, ku ktorej v dlhodobom horizonte cena aktíva smeruje. Preto rátajú s tým, že očakávaný výnos je úmerný rozdielu medzi súčasnou cenou aktíva a fundamentálnou hodnotou, t.j.

$$E_{f,t}(P_{t+1} - P_t) - g_t = \eta(W_t - P_t),$$

kde η je citlivosť očakávaní vzhľadom na odchýlku od fundamentálnej hodnoty a W_t je logaritmus fundamentálnej hodnoty v čase t. O viariancii predpokladajú, že zostáva konštantná, t.j.

$$V_{f,t}(P_{t+1} - P_t) = \nu_f.$$

Dopyt fundamentalistov je teda daný ako

$$D_t^f = a(W_t - P_t), \tag{5}$$

kde a, ktoré sa rovná $\frac{\eta}{\alpha_f \nu_f}(> 0)$ je sila dopytu fundamentalistov. Ak cena P_t je pod (nad) očakávanou fundamentálnou cenou W_t, tak fundamentalisti aktíva kupujú (predávajú), pretože sa nazdávajú, že cena akcie je podhodnotená (nadhodnotená), a teda predpokladajú, že cena bude rásť (klesať).

U chartistov sa predpokladá, že svoje odhady strednej hodnoty a variancie zakladajú na informáciach o minulých výnosoch. (Alternatívne možno o chartistoch hovoriť ako o skupine, ktorá verí viac štatistickej analýze minulých cenových trendov ako snahám odhadnúť fundamentálnu hodnotu.) Ako $\psi_{t,t+1}$ sa označuje očakávaný výnos počas nasledujúceho obdobia, t.j.

$$\psi_{t,t+1} = E_t(P_{t+1} - P_t) = E_t(P_{t+1}) - P_t.$$

Strednú hodnotu $E_{c,t}(P_{t+1} - P_t)$ počítajú chartisti podľa nasledovenej schémy:

$$\psi_{t,t+1} = \psi_{t-1,t} + c(P_t - P_{t-1} - \psi_{t-1,t}), \tag{6}$$

kde c $(0 < c \leq 1)$ je citlivosť odhadu vzhľadom na najnovší vývoj cien. Dopyt chartistov je teda daný ako

$$\zeta_{c,t} = \frac{\psi_{t,t+1} - g_t}{\alpha_c \nu_c}.$$

Na rozdiel od fundamentalistov, chartisti menia svoj odhad variancie ν_c podľa veľkosti $|\psi_{t,t+1} - g_t|$. Ak sa tento rozdiel zväčší, očakávajú väčšiu volatilitu - zvýšia svoj odhad ν_c - a tým sa zmenší sklon ich dopytovej funkcie. Dopyt chartistov teda možno vo všeobecnosti charakterizovať nasledovne:

$$D_t^c = h(\psi_{t,t+1} - g_t), \tag{7}$$

kde funkcia $h(\cdot)$ má nasledovné vlastnosti:

1. $h'(x) > 0 \ (\forall x)$,
2. $h(0) = 0$,
3. $\exists x^* : h''(x) < 0 (> 0) \ \forall x > x^* (x < x^*)$,
4. $\lim_{x \to \mp\infty} h'(x) = 0$.

Tu sa používa funkcia $h(x) = \gamma \arctan x$.

Celkový dopyt v čase t (ak sa vezmú g_t a W_t konštantné, t.j. $g_t = g$ a $W_t = W$) je daný rovnicou

$$D_t = a(W - P_t) + h(\psi_{t,t+1} - g). \tag{8}$$

Prispôsobovací proces ceny akcií- predpokladá sa existencia tvorcu trhu, ktorého úlohou je nastaviť každý deň dopyt na nulu - vyzerá nasledovne:

1. Na začiatku dňa t tvorca trhu vyhlási cenu P_t pre tento deň.
2. Účastníci trhu následne formujú dopyt D_t podľa (7).
3. Tvorca trhu, pozorujúc dopyt, zaujme dlhú alebo krátku pozíciu M_t tak, aby vyčistil trh, t.j. $D_t + M_t = 0$.

4. Tvorca trhu potom oznámi na začiatku ďalšieho dňa novú cenu P_{t+1} vypočítanú nasledovne: $P_{t+1} = P_t + \beta_p D_t$ pre nejaké $\beta_p > 0$.

Na začiatku dňa $t+1$ to teda vyzerá takto:

$$\begin{cases} P_{t+1} = P_t + \beta_p[a(W - P_t) + h(\psi_{t,t+1} - g)], \\ \psi_{t+1,t+2} = (1-c)\psi_{t,t+1} + c\beta_p[a(W - P_p) + h(\psi_{t,t+1} - g)]. \end{cases} \tag{9}$$

V ďalšom sa bude $\psi_{t,t+1}$ označovať ako $\psi(t)$ a P_t ako $P(t)$.

3 Dynamický systém

V tejto kapitole sa na v predchádzajúcom odvodený model budeme pozerať ako na diskrétny dynamický systém, odvodíme z neho aj jeho spojitú verziu. Budeme vyšetrovať rovnovážne stavy a stabilitu oboch systémov.

Dvojrozmerný nelineárny systém diferenčných rovníc

$$\begin{aligned} \psi(t+1) &= (1-c)\psi(t) + c\beta_p[a(W - P(t)) + h(\psi(t) - g)] \\ P(t+1) &= P(t) + \beta_p[a(W - P(t)) + h(\psi(t) - g)], \end{aligned} \tag{10}$$

predstavuje rekurentným vzťahom definované zobrazenie $x \mapsto f(x)$.

3.1 Rovnovážne stavy

Definícia 1. *Bod $\hat{x} \in \mathbb{R}^2$ sa nazýva pevným bodom zobrazenia f, ak $f(\hat{x}) = \hat{x}$.*

Pevný bod sústavy (10) nájdeme ako riešenie sústavy

$$\begin{aligned} \hat{\psi} &= (1-c)\hat{\psi} + \beta_p c[a(W - \hat{P}) + h(\hat{\psi} - g)] \\ \hat{P} &= \hat{P} + \beta_p[a(W - \hat{P}) + h(\hat{\psi} - g)]. \end{aligned}$$

A tým je vektor $\begin{bmatrix}\hat{\psi}\\ \hat{P}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\ W+\frac{1}{a}h(-g)\end{bmatrix}$.

Ak zavedieme substitúciu $p = P - \hat{P}$, systém nadobudne nasledovný tvar:

$$\begin{aligned} \psi(t+1) &= (1-c)\psi(t) - c\beta_p[ap(t) - k(\psi(t))] \\ p(t+1) &= p(t) - \beta_p[ap(t) - k(\psi(t))], \end{aligned} \tag{11}$$

kde $k(\psi(t)) = h(\psi(t) - g) - h(-g)$.

Opäť hľadáme pevný bod riešením sústavy

$$\begin{aligned} \hat{\psi} &= (1-c)\hat{\psi} - \beta_p c[a\hat{p} - k(\hat{\psi})] \\ \hat{p} &= \hat{p} - \beta_p[a\hat{p} - k(\hat{\psi})]. \end{aligned}$$

Dostávame $\begin{bmatrix}\hat{\psi}\\ \hat{p}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}$. Kvôli istému zjednošeniu, ktoré predstavuje takáto forma pevného bodu, budeme ďalej uvažovať diskrétny systém vždy v tvare (11).

$\Delta t = 1$ znamená, že agenti sa rozhodujú všetci naraz. Ak $\Delta t < 1$, agenti sa rozhodujú "roztrúsenejšie". Systém, kde takéto Δt uvažujeme, má nasledovný tvar:

$$\begin{aligned} \psi(t+\Delta t) &= (1-c\Delta t)\psi(t) - c\beta_p\Delta t[ap(t) - k(\psi(t))] \\ p(t+\Delta t) &= p(t) - \Delta t\beta_p[ap(t) - k(\psi(t))]. \end{aligned} \tag{12}$$

Ak sa tento systém prepíše do tvaru

$$\begin{aligned} \tfrac{\psi(t+\Delta t)-\psi(t)}{\Delta t} &= -c\psi(t) - c\beta_p[ap(t) - k(\psi(t))] \\ \tfrac{p(t+\Delta t)-p(t)}{\Delta t} &= -\beta_p[ap(t) - k(\psi(t))] \end{aligned}$$

a $\Delta t \to 0$, vzniká systém diferenciálnych rovníc

$$\begin{aligned} \dot{\psi} &= -c\{\psi(t) + \beta_p[ap(t) - k(\psi(t))]\} \\ \dot{p} &= -\beta_p[ap(t) - k(\psi(t))]. \end{aligned}$$

Alebo ináč:

$$\begin{aligned} \dot{\psi} &= c[\dot{p} - \psi(t)] \\ \dot{p} &= \beta_p[k(\psi(t)) - ap(t)]. \end{aligned} \tag{13}$$

Jeho pevný dostaneme riešením sústavy rovníc

$$\begin{aligned} \dot{\psi} &= 0 \\ \dot{p} &= 0, \end{aligned}$$

resp.

$$\begin{aligned} c[0 - \hat{\psi}] &= 0 \\ \beta_p[k(\hat{\psi}) - a\hat{p}] &= 0. \end{aligned}$$

Vidno, že takýmto riešením je vektor $\begin{bmatrix} \hat{\psi} \\ \hat{p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

3.2 Stabilita

O stabilite pevného bodu v jeho okolí rozhoduje v nekritických prípadoch (vysvetlené ďalej) linearizácia zobrazenia v ňom. O tom, čo rozumieme pod týmto pojmom, hovorí nasledujúca definícia.

Definícia 2. *[3] Ak $\hat{x}$ je pevným bodom C^1 zobrazenia $x \mapsto f(x)$, potom lineárne zobrazenie*

$$x \mapsto Df(\hat{x})x, \tag{14}$$

kde $Df(\hat{x})$ je Jacobiho matica

$$Df(\hat{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\hat{x}) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\hat{x}) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\hat{x}) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\hat{x}) \end{pmatrix}$$

sa nazýva linearizácia zobrazenia f v pevnom bode $\hat{x}$.

V nasledujúcich dvoch častiach sa pokúsime určiť oblasti stability pre diskrétny a spojitý systém v závislosti od hodnôt parametrov.

3.2.1 Diskrétny prípad

O stabilite diskrétneho systému hovorí nasledujúca veta:

Tvrdenie 1. *[1] Nech $f \in C^1$ a nech $\hat{x}$ je pevným bodom zobrazenia f. Potom $\hat{x}$ je*

- *asymptoticky stabilným, ak sú absolútne hodnoty všetkých vlastných hodnôt operátora $Df(\hat{x})$ menšie ako 1*
- *nestabilným, ak má niektorá z vlastných hodnôt operátora $Df(\hat{x})$ absolútnu hodnotu väčšiu ako 1.*

O tom, čo sa deje, ak nejaká z vlastných hodnôt Jacobiho matice v pevnom bode má absolútnu hodnotu rovnú 1, sa vo vete nehovorí. Takýmto kritickým prípadom sa bude venovať kapitola 3.

Keďže $\hat{x}$ je $[0, 0]$, má lineárny operátor tvar

$$Df(\hat{x}) = \begin{bmatrix} 1 - c\Delta t + c\beta_p \Delta t k'(0) & -ac\beta_p \Delta t \\ \beta_p \Delta t k'(0) & 1 - a\beta_p \Delta t \end{bmatrix}.$$

Ako $h(x)$ sa uvažuje $\gamma \arctan x$, preto $k'(\psi) = \frac{\gamma}{1+(\psi-g)^2}$ resp. $k'(0) = \frac{\gamma}{1+g^2}$.

Pre určenie oblasti stability daného systému (12) možno použiť Juryho podmienky, o ktorých využití hovoria nasledujúce dve vety.

Tvrdenie 2. *[4] Nutnou a postačujúcou podmienkou pre asymptotickú stabilitu daného pevného bodu $\hat{x}$ sú Juryho podmienky:*

$$\begin{aligned} |Det(Df(\hat{x}))| &< 1 \\ 1 - Tr(Df(\hat{x})) + Det(Df(\hat{x})) &> 0 \\ 1 + Tr(Df(\hat{x})) + Det(Df(\hat{x})) &> 0. \end{aligned} \tag{15}$$

Tvrdenie 3. *[4] Platí:*

- *Ak* $Tr(Df(\hat{x})) = 1 + Det(Df(\hat{x}))$*, tak* $\lambda = 1$.
- *Ak* $1 + Tr(Df(\hat{x})) + Det(Df(\hat{x})) = 0$*, tak* $\lambda = -1$.
- *Ak* $|Tr(Df(\hat{x}))| < 1 + Det(Df(\hat{x}))$ *a* $Det(Df(\hat{x})) = 1$*, tak vlastné hodnoty sú dvomi komplexne združenými číslami na jednotkovej kružnici.*

To teda znamená, že systém (12) je stabilný, ak

$$\begin{aligned} |1 - a\beta_p\Delta t + a\beta_p c(\Delta t)^2 - c\Delta t + \beta_p c\Delta t k'(0)| &< 1 \\ a\beta_p c(\Delta t)^2 &> 0 \\ 4 - 2a\beta_p\Delta t + a\beta_p c(\Delta t)^2 - 2c\Delta t + 2\beta_p c\Delta t k'(0) &> 0 \end{aligned} \tag{16}$$

Druhá z týchto podmienok je však nadbytočná, všetky tri parametre, a, c aj β_p, sú totižto uvažované ako kladné. Oblasť stability je teda definovaná dvomi nerovnosťami:

$$\begin{aligned} |1 - a\beta_p\Delta t + a\beta_p c(\Delta t)^2 - c\Delta t + \beta_p c\Delta t k'(0)| &< 1 \\ 4 - 2a\beta_p\Delta t + a\beta_p c(\Delta t)^2 - 2c\Delta t + 2\beta_p c\Delta t k'(0) &> 0 \end{aligned}$$

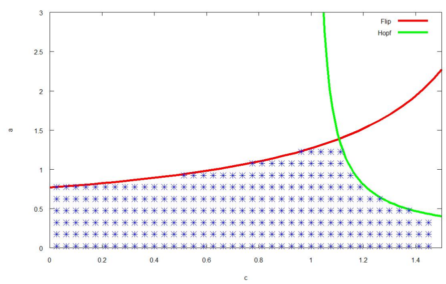
Hranice tejto oblasti, t.j. miesto, kde sa stráca stabilita (a kde niektorá z vlastných hodnôt operátora $Df(\hat{x})$ je rovná -1 (Flip) alebo 1 (Hopf)), predstavujú krivky

$$a = \frac{2}{\beta_p\Delta t} + \frac{2ck'(0)}{2 - c\Delta t} \quad (Flip) \tag{17}$$

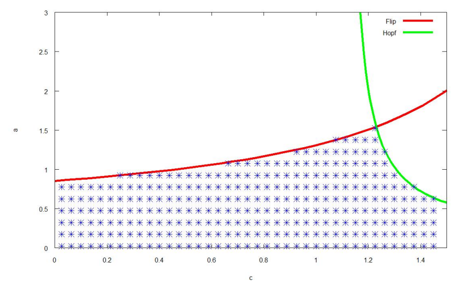
a

$$a = \frac{c(\beta_p k'(0) - 1)}{\beta_p(1 - c\Delta t)} \quad (Hopf). \tag{18}$$

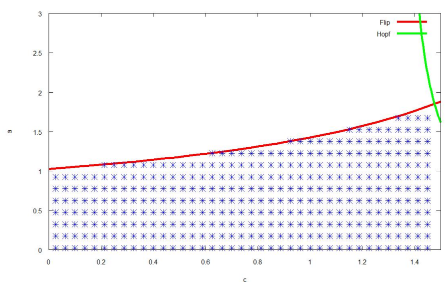
Na nasledujúcich obrázkoch sú znázornené takéto oblasti pre rôzne parametre. Modrá čiara predstavuje Flip-krivku, zelená Hopf-krivku. Modrými hviezdičkami vyplnená plocha je oblasťou stability.



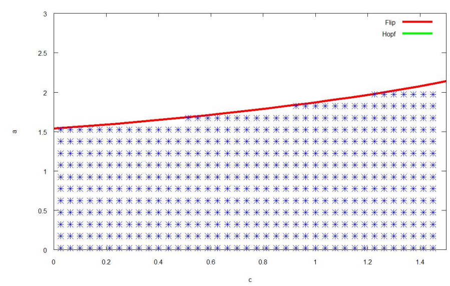
(a) $\Delta t = 1$



(b) $\Delta t = 0.9$



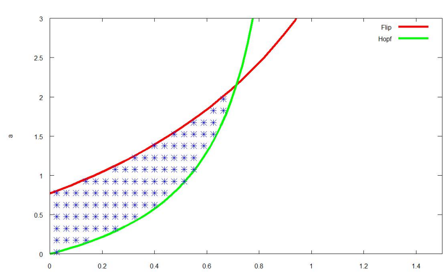
(c) $\Delta t = 0.75$



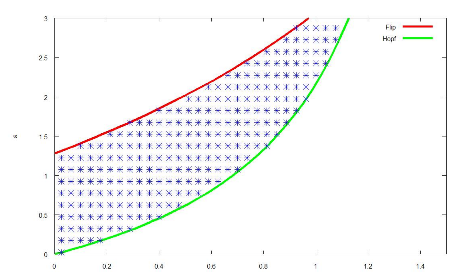
(d) $\Delta t = 0.5$

Obr. 1: $\beta_p = 2.6$, $\gamma = 0.5$, $g = 1$

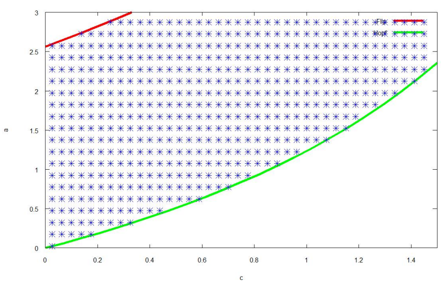
Na obrázku 1 vidno, že systém je stabilný pre všetky hodnoty c (citlivosť očakávaní chartistov) pokiaľ je a (sila dopytu fundamentalistov) dostatočne malé.



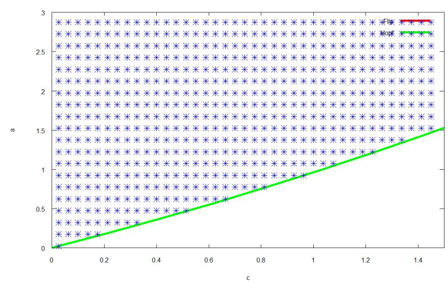
(a) $\Delta t = 1$



(b) $\Delta t = 0.6$



(c) $\Delta t = 0.3$

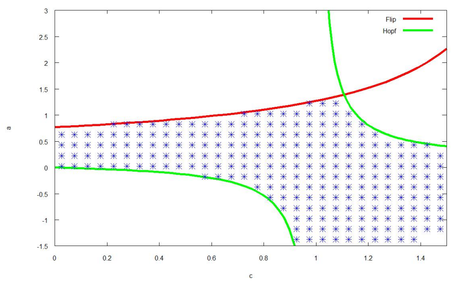


(d) $\Delta t = 0.1$

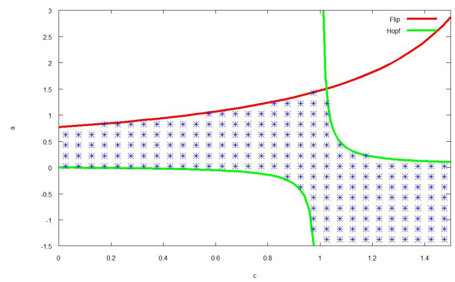
Obr. 2: $\beta_p = 2.6$, $\gamma = 2.5$, $g = 1$

Z obrázka 2a vidno, že na stabilitu je pre $\Delta t = 1$ potrebné, aby a, teda citlivosť dopytu fundamentalistov vzhľadom na odchýlky od fundamentálnej hodnoty, dostatočne prevyšovalo c, ktoré predstavuje citlivosť očakávaní chartistov vzhľadom na vývoj cien. Nemôže ho však prevyšovať príliš, dochádzalo by k veľkým výchylkám dopytu. Ako sa však Δt zmenšuje, t.j. agenti sa rozhodujú častejšie a tieto rozhodnutia robia na menší časový úsek, môže c byť väčšie bez toho, aby dochádzalo k veľmi výrazným zmenám dopytu.

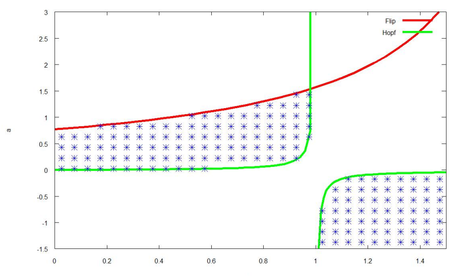
Pri porovnaní obrázkov 1 a 2 vidno rozdiel v tom, že zatiaľ čo na všetkých štyroch častiach obrázka 1 je systém stabilný aj keď sila dopytu fundamentalistov je nulová ($a = 0$), na častiach obrázku 2 to už neplatí. Súvisí to s hodnotou parametra γ, ktorá je na obrázku 1 malá (0.5), na druhom väčšia (2.5). Na nasledujúcich obrázkoch, na ktorých sú zobrazené aj oblasti pre záporné hodnoty parametra a a kde určujeme rôzne hodnoty parametra γ, vidno dôvod.



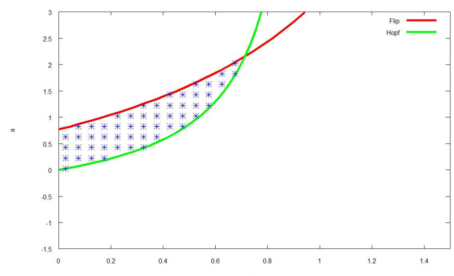
(a) $\gamma = 0.5$



(b) $\gamma = 0.7$



(c) $\gamma = 0.8$



(d) $\gamma = 2.5$

Obr. 3: $\beta_p = 2.6$, $g = 1$, $\Delta t = 1$

Systém teda nemôže byť stabilný pre nulové hodnoty sily dopytu fundamentalistov, ak pre Hopf-krivku platí

$$\frac{\partial a}{\partial c}\Big|_{c=0} > 0,$$

t.j. ak

$$\frac{\beta_p k'(0) - 1 - \Delta t}{\beta_p} > 0,$$

resp. (keďže všetky paramatre sú nezáporné)

$$\beta_p k'(0) - \Delta t > 1.$$

Analogicky k parametru a charakterizujúceho silu dopytu fundamentalistov, môžeme chápať parameter γ ako silu dopytu chartistov. Platí totiž

$$D_t^c = h(\psi(t) - g).$$

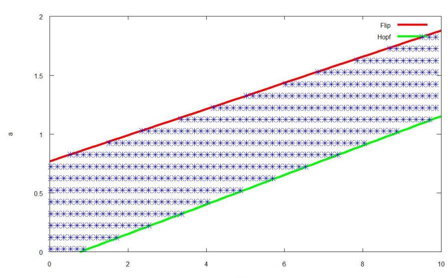
Sila tohto dopytu, tak ako a je silou dopytu fundamentalistov, je $h'(0)$, čiže $\frac{\gamma}{1+g^2}$. Stabilitu systému v závislosti od týchto dvoch parametrov budeme sledovať na nasledujúcej sérii obrázkov, kde na horizontálnej osi je merané γ a na vertikálnej a. Ostatné parametre majú fixované hodnoty.

Flip a Hopf krivky sú definované nasledovnými predpismi:

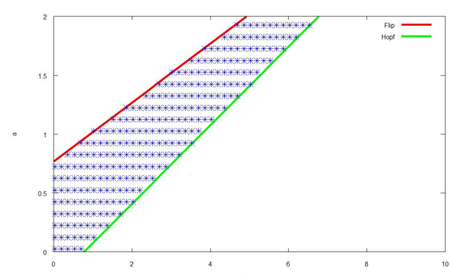
$$a = \frac{2c}{(2 - c\Delta t)(1 + g^2)}\gamma + \frac{2}{\beta_p \Delta t}$$

a

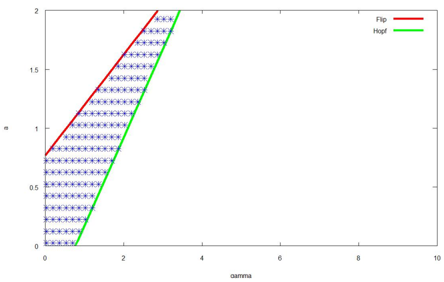
$$a = \frac{c\beta_p}{(1 - c\Delta t)(1 + g^2)}\gamma - \frac{c}{\beta_p(1 - c\Delta t)}.$$



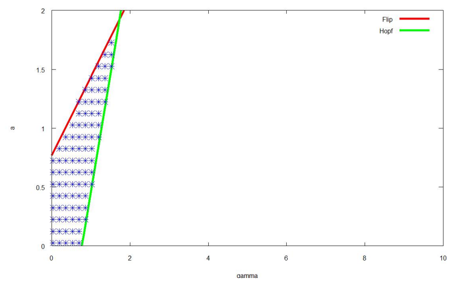
(a) $c = 0.2$



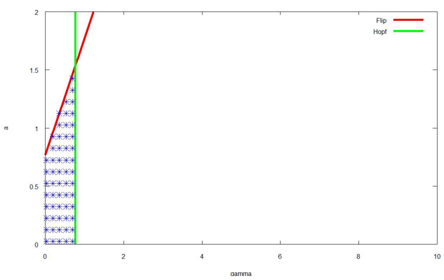
(b) $c = 0.4$



(c) $c = 0.6$



(d) $c = 0.8$



(e) $c \doteq 1$

Obr. 4: $\beta_p = 2.6$, $g = 1$, $\Delta t = 1$

Vidno, že pri nižšej citlivosti chartistického odhadu očakávaného výnosu vzhľadom na najnovší vývoj cien (c) je pri nižších hodnotách sily dopytu fundamentalistov (a) sila dopytu chartistov (γ) destabilizujúcim prvkom. Pri vysokých hodnotách sily dopytu fundamentalistov sú už potrebné aj vyššie hodnoty sily dopytu chartistov.

Pri absencii dopytu fundamentalistov ($a = 0$) je systém stabilný bez ohľadu na mieru citlivosti c pre hodnoty sily dopytu chartistov v rozmedzí $\langle 0, 0.77 \rangle$.

So zvyšovaním citlivosti chartistov dochádza k tomu, že hodnoty sily dopytu chartistov ako aj fundamentalistov, pri ktorých je systém stabilný, sa stávajú stále viac ohraničenými, až napokon pri $c \doteq 1$ sila dopytu fundamentalistov nemôže prekročiť hranicu 1.5 a sila dopytu chartistov hranicu prib. 0.77.

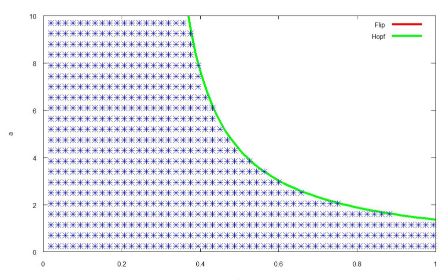
Na nasledujúcich obrázkoch budú znázornené oblasti stability systému v závislosti od paramatrov Δt a c. Hranice definujú krivky

$$c = \frac{2a\beta_p\Delta t - 4}{a\beta_p(\Delta t)^2 - 2\Delta t + 2\beta_p\Delta t k'(0)} \quad (Flip)$$

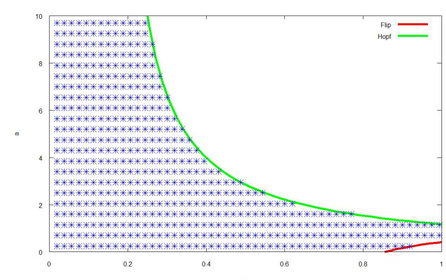
a

$$c = \frac{a\beta_p\Delta t}{a\beta_p(\Delta t)^2 - \Delta t + \beta_p\Delta t k'(0)} \quad (Hopf)$$

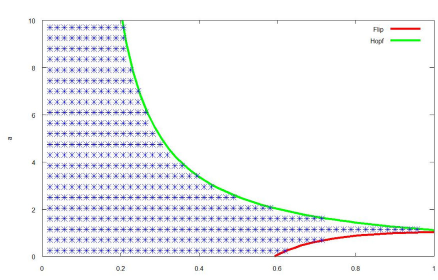
Na horizontálnej osi je merané Δt na intervale $(0, 1\rangle$, na vertikálnej c od 0 po 10.



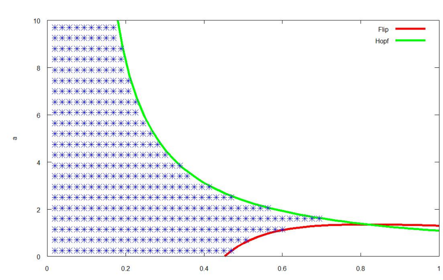
(a) $a = 0.5$



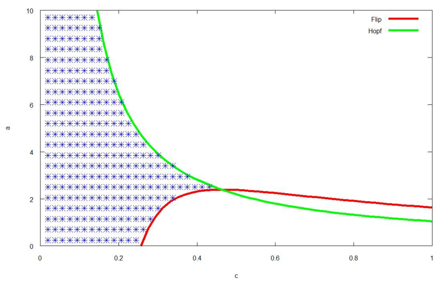
(b) $a = 0.7$



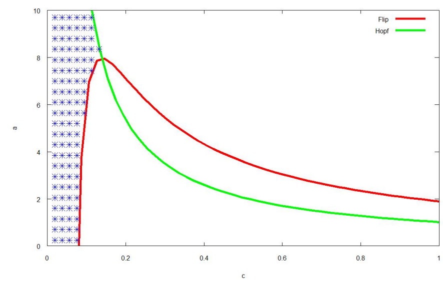
(c) $a = 0.9$



(d) $a = 1.1$



(e) $a = 1.3$



(f) $a = 1.5$

Obr. 5: $\beta_p = 2.6$, $\gamma = 0.5$, $g = 1$

3.2.2 Spojitý prípad

Pomocou nasledovnej vety nájdeme oblasť stability pre spojitý systém.

Tvrdenie 4. *[1] Nech $f \in C^1$, $f(\hat{x}) = 0$. Potom stabilné riešenie $x(t) \equiv \hat{x}$ diferenciálnej rovnice $\hat{x} = f(x)$ je*

- *asymptoticky stabilné, ak reálne časti všetkých vlastných hodnôt matice $Df(\hat{x})$ sú záporné*
- *nestabilné, ak reálna časť aspoň jednej vlastnej hodnoty $Df(\hat{x})$ je kladná.*

Pre systém

$$\begin{aligned}\dot{\psi} &= -c\{\psi(t) + \beta_p[ap(t) - k(\psi(t))]\}\\ \dot{p} &= -\beta_p[ap(t) - k(\psi(t))]\end{aligned}$$

vyzerá Jacobiho matica $Df(\hat{x})$ nasledovne:

$$\begin{bmatrix} -c + \beta_p c k'(0) & -a\beta_p c \\ \beta_p k'(0) & -a\beta_p \end{bmatrix}.$$

Vlastné hodnoty takejto matice predstavujú riešenie charakteristického polynómu

$$\lambda^2 - Tr\lambda + Det,$$

kde

$$\begin{aligned} Tr &= -c + \beta_p c k'(0) - a\beta_p \\ Det &= a\beta_p c. \end{aligned}$$

Aby reálne časti vlastných hodnôt boli záporné, musí platiť, že

$$\begin{aligned} Tr &< 0 \\ Det &> 0. \end{aligned}$$

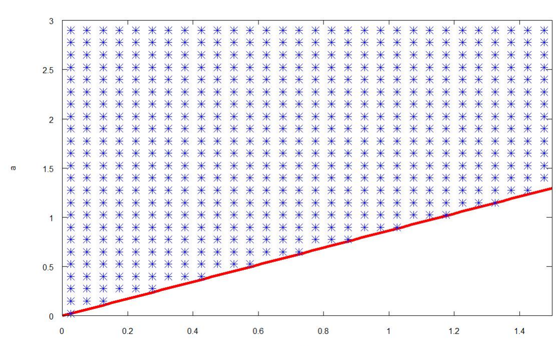
V tomto prípade

$$\begin{aligned} -c + \beta_p c k'(0) - a\beta_p &< 0 \\ a\beta_p c &> 0. \end{aligned} \tag{19}$$

Druhá z nerovností je splnená vždy, keďže sa uvažujú iba kladné parametre a preto oblasť stability spojitého systému definuje nerovnosť

$$a\beta_p > c(\beta_p k'(0) - 1) \tag{20}$$

Zo vzťahu (20) je taktiež vidno, že, ak $\beta_p k'(0) < 1$, nerovnosť je splnená vždy (všetky premenné sa uvažujú iba kladné). Pre $\beta_p = 2.6$, $\gamma = 2.5$ a $g = 1$ je oblasť stability znázornená na obrázku:



Obr. 6: $\Delta t \to 0$

Vidno, že systém je stabilný vtedy, keď pomer sily dopytu fundamentalistov a citlivosti očakávaní chartistov, $\frac{a}{c}$, prekročí prelomovú hodnotu $\frac{\beta_p k'(0)-1}{\beta_p}$.

Rovnaká podmienka stability platí aj pre diskrétny systém s Δt dostatočne malým. Zhrnuté vo forme tvrdenia a dôkazu to vyzerá nasledovne.

Tvrdenie 5. *Diskrétny systém je pre dostatočne malé Δt stabilný práve vtedy, keď jeho spojitá verzia.*

Dôkaz. Spojitý systém bol v úvode kapitoly odvedený z diskrétneho limitným prechodom pre $\Delta t \to 0$. Z toho sa bude vychádzať aj v tomto dôkaze. Oblasť stability bola pre systém s diskrétnym časom definovaná vzťahmi

$$
\begin{aligned}
&|1 - a\beta_p\Delta t + a\beta_p c(\Delta t)^2 - c\Delta t + \beta_p c\Delta t k'(0)| < 1 && (N1)\\
&4 - 2a\beta_p\Delta t + a\beta_p c(\Delta t)^2 - 2c\Delta t + 2\beta p c\Delta t k'(0) > 0. && (N2)
\end{aligned}
$$

Postupne budeme analyzovať obe nerovnosti, pričom prvú z nich ešte prepíšeme do tvaru

$$0 < a\beta_p\Delta t - a\beta_p c(\Delta t)^2 + c\Delta t - \beta_p c\Delta t k'(0) < 2. \quad (N1)$$

Ľavá časť nerovnosti (N1) Platí, že

$$
\begin{aligned}
a\beta_p\Delta t - a\beta_p c(\Delta t)^2 + c\Delta t - \beta_p c\Delta t k'(0) > 0 \;&\Leftrightarrow\\
a\beta_p - a\beta_p c\Delta t + c - \beta_p c k'(0) > 0 \;&\Leftrightarrow\\
a\beta_p c\Delta t < a\beta_p + c - \beta_p c k'(0)&
\end{aligned}
$$

Keďže ale a, β_p, c, $\Delta t > 0$, musí platiť, že

$$a\beta_p + c - \beta_p c k'(0) > 0,$$

t.j.

$$a\beta_p > c(\beta_p k'(0) - 1). \tag{21}$$

Ak toto platí, pre splnenie ľavej časti $(N1)$ je potrebné, aby

$$\Delta t < \frac{a\beta_p + c - \beta_p c k'(0)}{a\beta_p c}. \tag{22}$$

Takéto Δt možno nájsť, lebo $\frac{a\beta_p + c - \beta_p c k'(0)}{a\beta_p c}$ je za podmienky (21) kladný výraz. Bez (21) by bol výraz záporný a neexistovalo by žiadne $\Delta t > 0$, ktoré by mohlo splniť (21).

Pravá časť nerovnosti (N1) V nasledovnom sa využíva fakt, že $\Delta t < 1$ a z toho vzplývajúce $(\Delta t)^2 < \Delta t$.

$$\begin{aligned} a\beta_p\Delta t - a\beta_p c(\Delta t)^2 + c\Delta t - \beta_p c\Delta t k'(0) &< \\ |a\beta_p\Delta t| + |a\beta_p c(\Delta t)^2| + |c\Delta t| + |\beta_p c\Delta t k'(0)| &< \\ |a\beta_p\Delta t| + |a\beta_p c\Delta t| + |c\Delta t| + |\beta_p c\Delta t k'(0)| &= \\ (a\beta_p + a\beta_p c + c + \beta_p c|k'(0)|)\Delta t & \end{aligned}$$

Preto na splnenie pravej strany $(N1)$ stačí, aby platilo, že

$$\Delta t < \frac{2}{a\beta_p + a\beta_p c + c + \beta_p c k'(0)}. \tag{23}$$

Nerovnosť (N2) Opäť sa využije, že $(\Delta t)^2 < \Delta t$.

$$\begin{aligned} 2a\beta_p\Delta t - a\beta_p c(\Delta t)^2 + 2c\Delta t - 2\beta_p c\Delta t k'(0) &< \\ |2a\beta_p\Delta t| + |a\beta_p c(\Delta t)^2| + |2c\Delta t| + |2\beta_p c\Delta t k'(0)| &< \\ |2a\beta_p\Delta t| + |a\beta_p c\Delta t| + |2c\Delta t| + |2\beta_p c\Delta t k'(0)| &= \\ (2a\beta_p + a\beta_p c + 2c + 2\beta_p c|k'(0)|)\Delta t & \end{aligned}$$

Preto stačí, aby

$$\Delta t < \frac{4}{2a\beta_p + a\beta_p c + 2c + 2\beta_p c|k'(0)|}. \tag{24}$$

Ak teda platí, že

$$a\beta_p > c(\beta_p k'(0) - 1),$$

stačí zvoliť Δt tak, aby spĺňalo zároveň (22), (23) aj (24), t.j. ak

$$\Delta t < \min\left\{\frac{a\beta_p + c - \beta_p c k'(0)}{a\beta_p c}, \frac{2}{a\beta_p + a\beta_p c + c + \beta_p c k'(0)}, \frac{4}{2a\beta_p + a\beta_p c + 2c + 2\beta_p c|k'(0)|}\right\},$$

diskrétny systém (12) je stabilný za rovnakej podmienky ako spojitý systém (3.1). □

4 Bifurkácie

V tejto kapitole budeme skúmať, ako sa mení asymptotické správanie systému v závislosti od zmeny parametrov. Ešte pred tým zavedieme definície hyperbolického a nehyperbolického pevného bodu.

Definícia 3. *[3] Pevný bod $\hat{x}$ zobrazenia $x \mapsto f(x)$ sa nazýva hyperbolickým, ak lineárne zobrazenie (14) je hyperbolickým, t.j. ak Jacobiho matica $Df(\hat{x})$ v $\hat{x}$ nemá žiadne vlastné hodnoty s absolútnou hodnotou jedna.*

Ak pevný bod nelineárneho zobrazenia je nehyperbolický, t.j. ak $Df(\hat{x})$ má aspoň jednu vlastnú hodnotu s absolútnou hodnotou rovnou 1, nie je možné určiť typ stability pevného bodu z lineárnej aproximácie. Navyše, ak nelineárne zobrazenie závisí na parametroch, očakáva sa, že pevný bod bude vystavený bifurkáciám.

Bifurkácia, voľne povedané, znamená, že od pevného bodu sa môžu pri zmene parametra oddeliť ďalšie pevné alebo periodické body alebo môže dôjsť k zmene jeho stability. Poznáme tri typy základných bifurkácií:

- sedlo-uzol
- flip
- Hopf

K prvým dvom typom dochádza vtedy, keď vlastné hodnoty sú reálnymi číslami.

Ak jedna z vlastných hodnôt operátora $Df(\hat{x})$ je rovná 1 a ostatné sa nerovnajú ani 1 ani -1 a v absolútnej hodnote sú menšie ako 1, potom je systém typicky vystavebný sedlo-uzol bifurkácii. [3] Tento typ bifurkácie sa v neskôr uvažovanom systéme vyskytovať nebude.

K flip bifurkácii, nazývanej tiež period-doubling, dochádza, ak sa jedna z vlastných hodnôt rovná -1 a druhá je opäť odlišná od ± 1 a v absolútnej hodnote menšia ako 1. Po prechode do nestability sa stane bod $\hat{x}$ nestabilným, avšak iterácie zostávajú ohraničené - nastáva to, že nepárne iterácie konvergujú k, povedzme, x^* a párne k $f(x^*)$. Potom $f^2(x^*) = x^*$ a $f(x^*) \neq x^*$, čo znamená, že x^* je periodickým bodom periódy 2. [3] Takúto bifurkáciu budeme sledovať v časti (4.1).

V prípade, že vlastné hodnoty sú komplexné (a teda komplexne združené) a majú absolútnu hodnotu rovnú 1, dochádza k bifurkácii známej ako Hopf bifurkácia, alebo tiež Poincaré-Andronov-Hopf bifurkácia. Pri nej dochádza k tomu, že keď sa vlastné hodnoty pohnú z jednotkovej kružnice, objaví sa uzavretá invariantná krivka - všetky iterácie akéhokoľvek bodu z tejto krivky na krivke zostanú - obkľučujúca pevný bod. [3] Na tento typ bifurkácie sa zameriava časť (4.2).

V nasledujúcich dvoch odsekoch budeme uvažovať systém (12) s voľbou parametrov $\beta_p = 2.6$, $\gamma = 0.5$, $g = 1$, $\Delta t = 1$. V takomto systéme, t.j. v systéme

$$\begin{aligned} \psi(t+1) &= (1-c)\psi(t) - 2.6c[ap(t) - k(\psi(t))] \\ p(t+1) &= p(t) - 2.6[ap(t) - k(\psi(t))], \end{aligned} \tag{25}$$

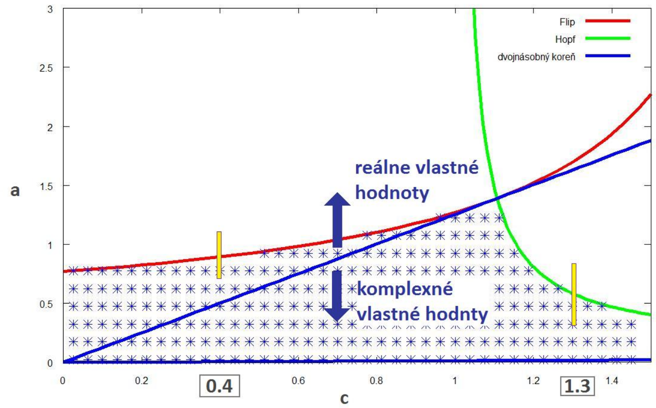
kde

$$k(\psi(t)) = \frac{1}{2}\left[\arctan\left(\psi(t) - 1\right) - \arctan\left(-1\right)\right],$$

budeme ešte fixovať parameter c: v časti 3.1 na hodnote 0.4, v časti 3.2 na hodnote 1.3.

Voľným parametrom zostáva a, s ktorým budeme hýbať v okolí nehyperbolického pevného bodu a sledovať správanie takto určeného systému. Toto je znázornené aj na obrázku 7, kde zvislé žlté čiary predstavujú oblasti, z ktorých budeme vyberať hodnoty parametrov a pre dané c. Tak ako v predchádzajúcej kapitole, zvýraznená oblasť je oblasťou stability systému (25). Navyše sú dve hrubé čiary, ktoré zachytávajú hranice medzi oblasťami, v ktorých má lineárny operátor $Df(\hat{x})$ reálne alebo komplexné vlastné hodnoty - t.j. predstavujú tie kombinácie parametrov c a a, pri ktorých má operátor $Df(\hat{x})$ dvojnásobnú vlastnú hodnotu. Týmito čiarami sú priamky s predpisom

$$a = \frac{2\beta_p + 2\beta_p^2 k'(0) \pm 4\sqrt{\beta_p^3 k'(0)}}{2\beta_p^2} c.$$



Obr. 7

4.1 Bifurkácie nehyperbolického pevného bodu s reálnymi vlastnými hodnotami

Skúmať budeme flip bifurkáciu, ku ktorej dôjde v systéme

$$\begin{aligned}\psi(t+1) &= 0.6\psi(t) - 1.04[ap(t) - k(\psi(t))] \\ p(t+1) &= p(t) - 2.6[ap(t) - k(\psi(t))],\end{aligned}$$

kde

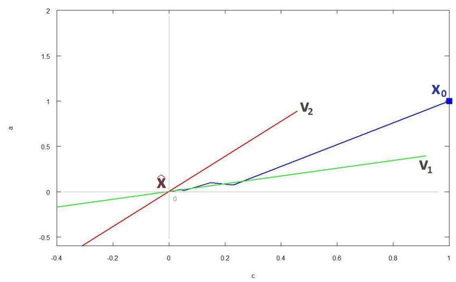
$$k(\psi(t)) = \frac{1}{2}\left[\arctan\left(\psi(t) - 1\right) - \arctan\left(-1\right)\right],$$

pri dosiahnutí istej bifurkačnej hodnoty (vlastná hodnota rovná -1), ktorá je definovaná nasledovnou formulou:

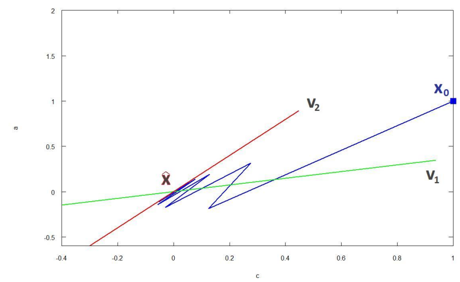
$$a = \frac{2}{\beta_p \Delta t} + \frac{2ck'(0)}{2 - c\Delta t}.$$

Touto hodnotou je 0.8942.

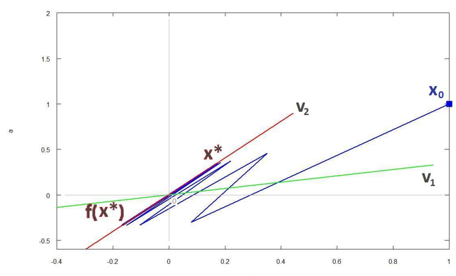
Nasledujúce obrázky predstavujú vývoj systému pre hodnoty parametra a ako je uvedené v popisku.



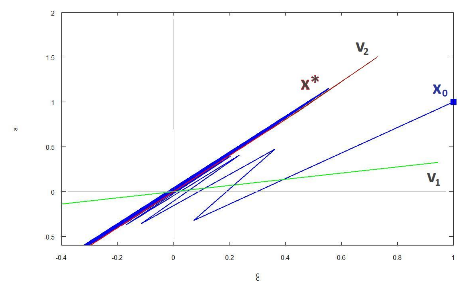
(a) $a = 0.75$



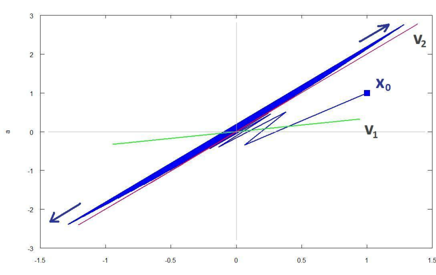
(b) $a = 0.85$



(c) $a = 0.8942$ - bifurkačná hodnota



(d) $a = 0.9$



(e) $a = 0,91$ (použitá iná mierka, iba prvých 150 iterácií)

Obr. 8

Na obrázku 8a vidno, že $\begin{bmatrix} \psi(t) \\ p(t) \end{bmatrix}$ konverguje k stavu $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$. Rovnako aj na obrázku 8b, avšak už s tým rozdielom, že $\begin{bmatrix} \psi(t) \\ p(t) \end{bmatrix}$ skáče okolo vlastného vektora v_1, ktorý zodpovedá vlastnej hodnote s absolútnou hodnotou menšou ako 1 a skáče tak trochu rovnobežne s vlastným vektorom v_2 zodpovedajúcim vlastnej hodnote rovnej -1, napokon dojde do $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$. Na obrázku 8c sa systém vyvíja obdobne ako na obrázku 8b, ale nekonverguje k počiatku. Namiesto toho sa ustáli na dvoch periodických bodoch x^* a $f(x^*)$ nachádzajúcich sa na vlastnom vektore v_2. S rastúcou hodnotou parametra a sa zväčšuje vzdialenosť bodov x^* a $f(x^*)$ od počiatku - obrázok 8d. A keď sa už s parametrom a vzdialime ďaleko do oblasti nestability, systém stráca aj tieto peridické body - obrázok 8e.

4.2 Bifurkácie nehyperbolického pevného bodu s komplexnými vlastnými hodnotami

Skúmať budeme Hopf bifurkáciu, ku ktorej dôjde v systéme

$$\begin{aligned} \psi(t+1) &= -0.3\psi(t) - 3.38[ap(t) - k(\psi(t))] \\ p(t+1) &= p(t) - 2.6[ap(t) - k(\psi(t))], \end{aligned}$$

kde

$$k(\psi(t)) = \frac{1}{2}\left[\arctan\left(\psi(t) - 1\right) - \arctan\left(-1\right)\right],$$

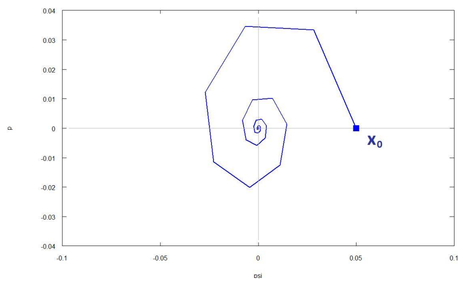
pri dosiahnutí istej bifurkačnej hodnoty (vlastná hodnota rovná 1), ktorá je definovaná nasledovnou formulou:

$$a = \frac{c(\beta_p k'(0) - 1)}{\beta_p(1 - c\Delta t)}$$

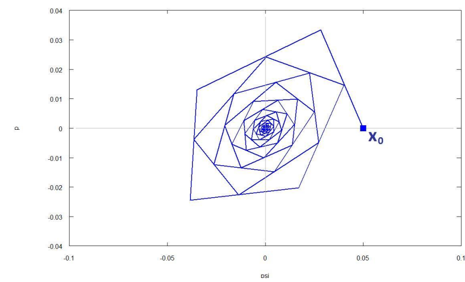
Touto hodnotou je 0.5833. [1]

Nasledujúce obrázky predstavujú vývoj systému pre hodnoty parametra a ako je uvedené v popisku.

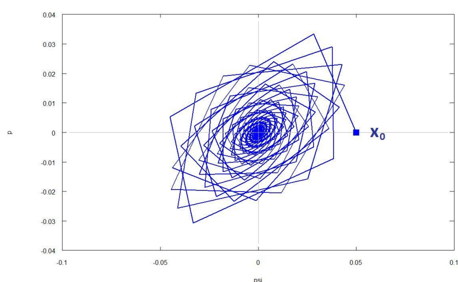
[1] Ako bude možno vidieť na obrázkoch, táto hodnota, získaná výpočtom, sa odlišuje od tej, ktorej hodnotu naznačujú numerické simulácie, t.j. medzi 0.54 a 0.55. Na analýzu tohto problému však už nezostal čas.



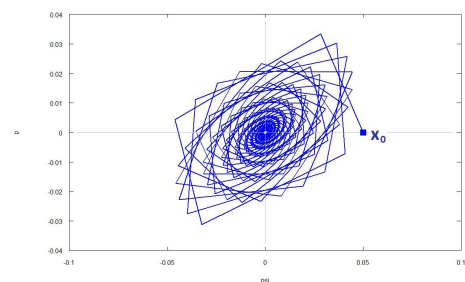
(a) $a = 0.2$



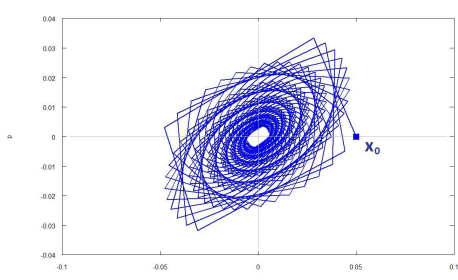
(b) $a = 0.45$



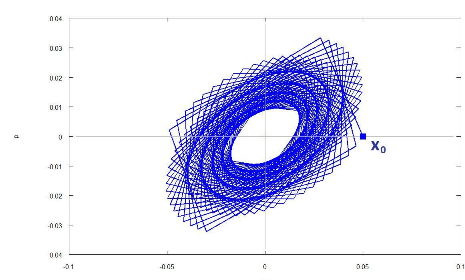
(c) $a = 0.54$



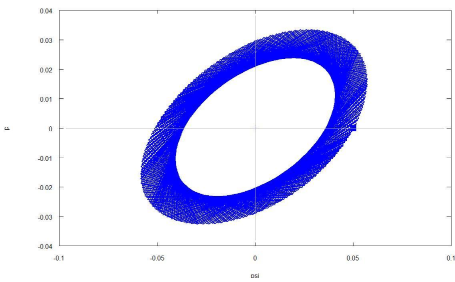
(d) $a = 0.55$



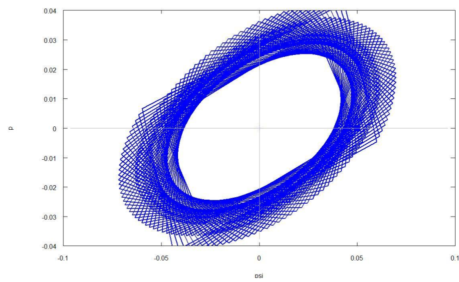
(e) $a = 0.565$



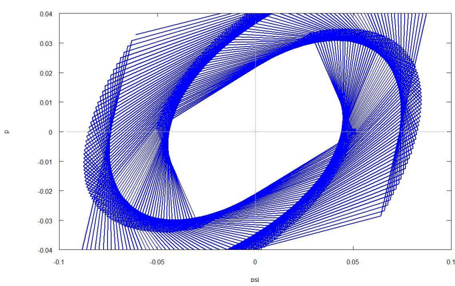
(f) $a = 0.575$



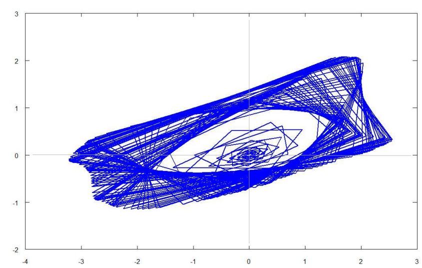
(g) $a = 0.5833$ - bifurkačná hodnota



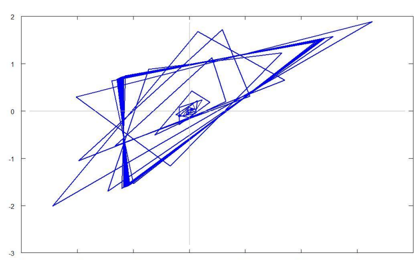
(h) $a = 0.5855$



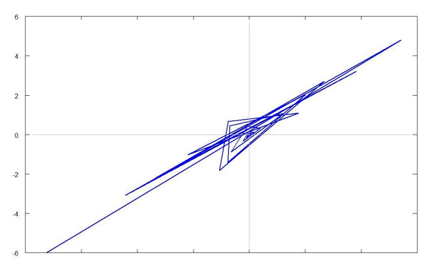
(i) $a = 0.589$



(j) $a = 0.7$ (použitá iná mierka)



(k) $a = 0.9$ (použitá iná mierka)



(l) $a = 1.1$ (použitá iná mierka, iba prvých 29 iterácií)

Obr. 9

Obrázky 9a a 9b zachytávajú stabilný systém, ktorého rovnovážnym stavom je $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$. Nasledujúce obrázky 9c a 9d zachytávajú vývoj systému tesne pred a tesne po tom, ako je vystavený Hopf bifurkácii. Na obrázku 9d vidno, že ako stabilný stav sa odčlenila od bodu $\left[\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right]$ kružnica, ktorá s narastajúcou hodnotou parametra a zväčšuje svoj polomer - obrázky 9e, 9f a 9g. Táto indiferentná krivka napokon stráca tvar kružnice - obrázky 9h, 9i, 9j a 9k - až napokon systém stráca aj takúto cyklickú stabilitu - obrázok 9l.

5 Záver

Na začiatku práce sme analyzovali stabilitu systému diferenčných rovníc. Tiež sme sledovali, ako sa táto stabilita, resp. oblasť stability systému, mení v závislosti od zmeny hodnôt rôznych parametrov a interpretovali sme hranice stability v termínoch síl dopytu fundamentalistov a chartistov. Odvodili sme tiež podmienky stability rovnovážneho riešenia pre spojitú verziu modelu a ukázali, že diskrétny systém je pre dostatočne malé Δt stabilný práve vtedy, keď aj jeho spojitá verzia.

V ďalšej časti sme sledovali správanie systému v okolí nehyperbolického pevného bodu. Konkrétne sa jednalo o teoretické a numerické skúmanie vývoja systému pri flip a Hopf bifurkáciách.

Literatúra

[1] P. Brunovský: *Diferenčné a diferenciálne rovnice*, Študijný materiál, FMFI UK, Bratislava, http://pc2.iam.fmph.uniba.sk/skripta/brunovsky

[2] C. Chiarella, R. Dieci, L. Gardini: *Speculative behaviour and complex asset price dynamics: a global analysis*, Journal of Economic Behaviour & Organization Vol. 49 (2002) 173-197

[3] J. Hale, H. Koçak: *Dynamics and Bifurcations*, Springer-Verlag, New York

[4] A. Vančová: *Dynamics of Selected Economic Models*, Diplomová práca, FMFI UK