UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE

FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY

Ekonomika a financie ako motivačný činiteľ rozvoja matematiky

BRATISLAVA 2011

MAREK KABÁT

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE

FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY

Evidenčné číslo:

d2607393–50e9–4e97–8e43–83f735680013

Ekonomika a financie ako motivačný činiteľ rozvoja matematiky

BAKALÁRSKA PRÁCA

Marek Kabát

Študijný program:	Ekonomická a finančná matematika
Študijný odbor:	9.1.9. Aplikovaná matematika
Študijné pracovisko:	Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky
Vedúci bakalárskej práce:	Mgr. Martin Kollár, PhD.

Bratislava 2011

Univerzita Komenského v Bratislave
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

ZADANIE ZÁVEREČNEJ PRÁCE

Meno a priezvisko študenta:	Marek Kabát
Študijný program:	ekonomická a finančná matematika (Jednoodborové štúdium, bakalársky I. st., denná forma)
Študijný odbor:	9.1.9. aplikovaná matematika
Typ záverečnej práce:	bakalárska
Jazyk záverečnej práce:	slovenský
Sekundárny jazyk:	anglický

Názov : Ekonomika a financie ako motivačný činiteľ rozvoja matematiky

Cieľ : Na konkrétnych príkladoch z histórie matematiky zrozumiteľnou formou uviesť ukážky problémov a postupov v ekonomickej a finančnej oblasti, ktoré posunuli vývoj matematiky vpred.

Literatúra : [1] Sojka J., Walter J. a kol. - Matematické modelovanie ekonomických procesov, ALFA, Bratislava, 1985.

Vedúci : Mgr. Martin Kollár, PhD.

Dátum zadania: 26.10.2010

Dátum schválenia: 08.11.2010

....
doc. RNDr. Margaréta Halická, CSc.
garant študijného programu

Kabát
....
študent

Martin Kollár
....
vedúci práce

Dátum potvrdenia finálnej verzie práce, súhlas s jej odovzdaním (vrátane spôsobu sprístupnenia)

Martin Kollár
....
vedúci práce

Čestné prehlásenie

Prehlasujem, že táto bakalárska práca je mojím pôvodným autorským dielom, ktoré som vypracoval samostatne s využitím teoretických vedomostí a s použitím uvedenej literatúry. Všetky zdroje a literatúru v práci správne citujem s uvedením odkazu na príslušný zdroj.

Bratislava, 27. mája 2011 ....

Marek Kabát

Poďakovanie

Úprimné poďakovanie patrí môjmu vedúcemu bakalárskej práce Mgr. Martinovi Kollárovi, PhD. za námet záverečnej práce, množstvo cenných rád a hlavne za pozitívny prístup počas celej doby tvorenia práce.

Abstrakt

KABÁT, Marek: *Ekonomika a financie ako motivačný činiteľ rozvoja matematiky.* [Bakalárska práca] – Univerzita Komenského v Bratislave. Fakulta matematiky, fyziky a informatiky. Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky. – Vedúci bakalárskej práce: Mgr. Martin Kollár, PhD. – Bratislava: FMFI UK, 2011, 38 s.

Práca sa zaoberá konkrétnymi príkladmi a problémami z oblasti ekonomiky a financií, ktoré sa stali motivačnými činiteľmi rozvoja matematiky. Z historických príkladov sú v práci spracované ukážky problémov, ktoré viedli k formovaniu teórie pravdepodobnosti a objasneniu významu Eulerovho čísla v súvislosti s teóriou úročenia. Ďalej sa práca venuje problémom, ktoré posunuli vývoj matematiky vpred v oblasti lineárneho programovania, teórie hier a teórie grafov. Okrem motivačných problémov z histórie sa práca zaoberá aj modernými ekonomickými a finančnými modelmi, ktoré i v súčasnosti ponúkajú ďalšie možnosti pre rozvoj matematiky.

Kľúčové slová: motivácia • problém • model • riešenie.

Abstract

KABÁT, Marek: *Economy and Finance as a Motivational Factor of the Development of Mathematics.* [Thesis] – Comenius University in Bratislava. Faculty of Mathematics, Physics and Informatics. Department of Applied Mathematics and Statistics. – Supervisor: Mgr. Martin Kollár, PhD. – Bratislava: FMFI UK, 2011, 38 p.

This work deals with specific examples and problems of economics and finance, which have become motivating factors of the development of mathematics. From the historical examples, in this work are processed samples of problems that led to the formation of probability theory and explaining the significance of Euler´s number in connection with the theory of compounding. This work also deals with problems, which moved the development of mathematics further in the field of linear programming, game theory and graph theory. In addition to motivational problems from the history, this work deals also with modern economic and financial models, which still offers opportunities for the development of mathematics.

Keywords: motivation • problem • model • solution.

Obsah

Zoznam použitých symbolov a skratiek

$\mathbb{N}$	množina všetkých prirodzených čísel
$\mathbb{R}$	množina všetkých reálnych čísel
$\mathbb{R}^n$	priestor rozmeru n
$\mathbb{R}^n_+$	nezáporný ortant
x^T	transpozícia vektora x
$I_{n\times n}$	jednotková (štvorcová) matica rozmeru n
A^{-1}	inverzná matica k matici A; $AA^{-1} = I$
$f(.)$	funkcia
$\dfrac{\partial f}{\partial x}$	parciálna derivácia funkcie f podľa premennej x
$E(.)$	stredná hodnota
$Var(.)$	variancia; disperzia
$\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$	normálne rozdelenie so strednou hodnotou μ a varianciou σ^2
č. v. r.	členy vyššieho rádu
$O(x^n)$	členy rádu aspoň n

Úvod

There is no branch of mathematics, however abstract, which may not some day be applied to phenomena of the real world.

Nikolaj Ivanovič Lobačevskij

Matematika je v súčasnosti okrem iného hlavným nástrojom riadenia ekonomických a finančných procesov. Počas uplynulých storočí sa práve ekonomika a financie stali významnými činiteľmi rozvoja matematiky. Práca sa zaoberá ukážkami problémov z ekonomickej a finančnej oblasti. Zároveň sleduje matematikov, ktorých snaha riešiť tieto problémy iniciovala vznik nových postupov a teórií. Tie následne viedli k rozvoju a formovaniu nových disciplín, ktoré sú dnes dôležitou a významnou súčasťou matematiky.

Cieľom práce je zrozumiteľnou formou uviesť ukážky problémov a postupov v ekonomickej a finančnej oblasti, ktoré posunuli vývoj matematiky vpred. Účelom práce je motivovať študentov stredných škôl k štúdiu ekonomickej a finančnej matematiky.

Práca pozostáva z piatich kapitol. Prvá kapitola opisuje okolnosti vzniku základov teórie pravdepodobnosti a v súvislosti s teóriou spojitého úročenia vysvetľuje podstatu Eulerovho čísla. Obsah druhej kapitoly tvoria úkážky problémov, ktoré prispeli k rozvoju lineárneho programovania. Tretia kapitola sa zaoberá problémami súvisiacimi s výberom racionálnej stratégie, ktoré viedli k rozvoju teórie hier a teórie grafov. Štvrtá kapitola sa venuje matematickým modelom ekonomických procesov, z ktorých je v práci obsiahnutý model produkcie a model čerpania obmedzených zdrojov. Oceňovanie finančných derivátov je témou piatej kapitoly, v rámci ktorej je spracovaný úvod do teórie stochastických procesov a Black-Scholesov model oceňovania opcií.

HAZARD A FINANCIE

Hazardné hry a výška úrokovej miery oddávna pútali pozornosť ľudí v súvislosti s reálnou možnosťou znásobenia svojich úspor. V nasledovných odsekoch opisujeme matematické princípy, na základe ktorých je možné odhadnúť mieru rizika v hazardej hre, resp. mieru znásobenia úspor.

1.1 Problém rozdelenia stávky

V polovici 17. storočia sa preslávený hazardný hráč Antoin Gombaud obrátil na matematika Blaisa Pascala s radom otázok ohľadne hazardu a stávok. Pascal viedol v roku 1654 na túto tému rozsiahlu korešpondenciu s ďalším veľkým francúzskym matematikom svojej doby Pierrom de Fermatom. Cieľom ich vzájomnej spolupráce bolo odhaliť matematické pravidlá popisujúce zákony, ktorými sa riadi náhoda. [6]

Motivácia

Uvažujme hru s dvomi hráčmi, ktorá spočíva len v hádzaní nevychýlenej kocky. Na začiatku hry vloží každý hráč stávku 24 mincí. Prvý hráč si zvolí číslo 3, druhý hráč číslo 6. Vždy, keď na kocke padne jedno zo zvolených čísel, získa hráč, ktorý si dané číslo vybral, jeden bod. Hráči sa pri hode kockou po každom kole striedajú. Víťazom sa stane ten hráč, ktorý ako prvý dosiahne 3 body. Predpokladajme však, že po nejakej dobe hrania sa číslo 3 objaví na kocke dvakrát (tzn. hráč, ktorý si zvolil číslo 3, má 2 body), zatiaľ čo číslo 6 padne na kocke len raz (tzn. súper má len jeden bod). Ak by sa z nejakého dôvodu musela hra v tej chvíli ukončiť, ako by sa malo 48 mincí spravodlivo rozdeliť medzi oboch hráčov?

Keby sa hráči rozišli a ďalší hod by sa neuskutočnil, mohol by prvý hráč konštatovať: *"Mám zaručených 24 mincí aj keby som ďalšie kolo prehral. Zvyšných 24 mincí by získal jeden z nás; šance sú rovnaké. Preto si rozdeľme zvyšných 24 mincí na polovicu."* Inými slovami, prvý hráč by mal dostať 36 mincí a druhý 12 mincí. Pascal a Fermat však našli matematicky logickú odpoveď, ktorá zaručí spravodlivé rozdelenie stávky. Ak by hráč s dvoma bodmi vyhral ďalšie kolo, získal by všetkých 48 mincí. Ak by ďalšie kolo vyhral druhý hráč, tak by obaja mali po dva body a každý z nich by dostal 24 mincí. [6]

Riešenie

Pre Pascala a Fermata bolo zrejmé, že hráč s vedením 7-5 v hre do 10 bodov má rovnakú šancu na celkové víťazstvo, ako hráč s vedením 17-15 v hre do 20 bodov. Obaja matematici preto predpokladali, že prerušenie hry v jednom z týchto dvoch prípadov by malo viesť k rovnakému rozdeleniu stávky. Inými slovami, nie je dôležitý počet víťazných kôl každého hráča v momente prerušenia hry, ale počet víťazných kôl, ktoré chýbajú každému hráčovi k celkovému víťazstvu v hre. Fermat preto odvodil a odôvodnil nasledovné:

- Ak v momente prerušenia hry prvý hráč potrebuje ešte r víťazných kôl k celkovému víťazstvu v hre a druhý hráč ich potrebuje ešte s, potom hru určite vyhrá niektorý z hráčov po $r + s - 1$ ďalších kolách.
- Ak by hráči hrali ďalších $r + s - 1$ kôl, mohli by v nich dosiahnuť celkovo 2^{r+s-1} rôznych možných výsledkov.
- Ak by hráči pokračovali v hre aj po jej rozhodnutí, t.j. hrali by naďalej, aj keby niektorý z hráčov vyhral hru, každý z 2^{r+s-1} možných výsledkov je rovnako pravdepodobný.

Fermat tak bol schopný vypočítať šancu celkovej výhry v hre pre každého hráča tým, že zostrojil tabuľku všetkých 2^{r+s-1} možných pokračovaní a vypočítal, koľko z nich by viedlo k celkovej výhre každého hráča. Výsledok predstavoval spravodlivé rozdelenie stávky v pomere k šanciam oboch hráčov. [15]

Fermatove riešenie vylepšil Pascal niekoľkými spôsobmi. Po prvé, Pascal podal viac rozpracovaný argument, prečo výsledné rozdelenie považovať za spravodlivé. Po druhé, ukázal, ako vypočítať spravodlivé rozdelenie efektívnejšie než Fermatovou tabuľkovou metódou, ktorá sa v tej dobe stala nepraktickou, ak $r + s - 1 > 10$. Pascal vymyslel princíp menších krokov:

- Predpokladajme, že hráči boli schopní hrať ešte jedno kolo predtým, ako bola hra prerušená, a že bolo rozhodnuté, ako spravodlivo rozdeliť stávku po poslednom kole; zrejme preto, lebo posledné kolo rozhodlo o výhre niektorého hráča.
- Ďalšie (imaginárne) kolo by mohlo viesť k jednému z dvoch možných výsledkov s rôznymi spravodlivými rozdeleniami. Ale nakoľko obaja hráči majú rovnakú šancu vyhrať ďalšie kolo, mali by rozdeliť rozdiel medzi týmito dvoma výsledkami rovnomerne.

Pascal nakoniec ukázal, že spravodlivé rozdelenie stávky v hre, v ktorej prvý hráč potrebuje r bodov k celkovému víťazstvu v hre a druhý hráč ich potrebuje s, je v pomere

$$\sum_{k=0}^{r-1} \binom{r+s-1}{k} : \sum_{k=r}^{r+s-1} \binom{r+s-1}{k}. \tag{1.1}$$

Navrhol tak spravodlivejší princíp rozdelenia stávky. Priame použitie jeho metódy "krok za krokom" sa stalo výrazne rýchlejším ako Fermatova tabuľková metóda možných výsledkov. Aj keď je Pascalov výsledok (1.1) pôvodne nezávislý od Fermatovej tabuľkovej metódy, je zrejmé, že presne opisuje všetky možné výsledky $r + s - 1$ ďalších kôl, ktoré tvoria podstatu Fermatovho postupu. [15]

Vzájomná spolupráca dvoch významných matematikov tak položila základy novej vednej disciplíny – teórie pravdepodobnosti.

1.2 Problém zloženého úročenia

Zložené úročenie je metóda úročenia založená na princípe, že nová výška úrokov sa počíta z predchádzajúcej sumy navýšenej o úroky, teda sumy zvýšenej o výšku úrokov z predchádzajúceho obdobia. Tento systém úročenia, v ktorom sa úrok reinvestuje, zohľadňuje faktor času a reálnu hodnotu peňazí. Dnes sa používa najmä pri sporení, úveroch, posudzovaní investičných projektov, arbitrážach a pod. [17]

Motivácia

Uvažujme obdobie jedného roka, účet s počiatočným vkladom $P = 1$ a ročnú nominálnu úrokovú mieru $r = 100\%$. Sumu na účte na konci roku označme A. Ak sa suma na účte úročí ročne, potom $A = P + Pr = P(1 + r) = 2$. V prípade, ak sa suma na účte úročí polročne, potom $A = P + P\frac{r}{2} + (P + P\frac{r}{2})\frac{r}{2} = P(1 + \frac{r}{2})^2 = 2,25$. Pri štvrťročnom úročení $A = P(1 + \frac{r}{4})^4 \doteq 2,44$. Ak by sa suma na účte úročila n-krát za rok, potom

$$A = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Aká suma bude na účte na konci roka, ak by sa suma na účte úročila z hodiny na hodinu, z minúty na minútu, zo sekundy na sekundu?

Riešenie

V 17. storočí sa o uvedený problém zaujímal Jacob Bernoulli, jeden z členov matematickej dynastie Bernoulliovcov. Pri skúmaní postupnosti

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \quad n \in \mathbb{N} \tag{1.2}$$

zistil nasledovné:

- ak sa n zväčšuje, potom x_n rastie,
- ak sa n zväčšuje, potom prírastok $\triangle x = x_{n+1} - x_n$ klesá.

Bernoulliho zistenie je možné sformulovať do nasledujúceho tvrdenia:

Veta 1.1 (Podľa [4])**.** *Postupnosť* $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ *je rastúca a zhora ohraničená.*
Dôkaz:

$$\begin{aligned}
\frac{x_{n+1}}{x_n} &= \frac{\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right) \frac{\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}} = \\
&= \left(1 + \frac{1}{n}\right) \left[\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}\right]^{n+1} = \left(1 + \frac{1}{n}\right) \left[1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right]^{n+1} \\
\frac{x_{n+1}}{x_n} &= \left(1 + \frac{1}{n}\right) \left[1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right]^{n+1}
\end{aligned}$$

Použitím Bernoulliho nerovnosti

$$\forall n \in \mathbb{N}, n > 1, \forall x \in \mathbb{R}, x > -1, x \neq 0 : (1+x)^n > 1 + nx$$

odvodíme:

$$\begin{aligned}
\left[1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right]^{n+1} &> 1 + (n+1)\left[-\frac{1}{(n+1)^2}\right] = 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1} \\
\left[1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right]^{n+1} &> \frac{n}{n+1}
\end{aligned}$$

Vynásobením oboch strán nerovnice výrazom $\left(1 + \frac{1}{n}\right)$ dostávame:

$$\begin{aligned}
\left(1 + \frac{1}{n}\right)\left[1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right]^{n+1} &> \left(1 + \frac{1}{n}\right)\frac{n}{n+1} \\
\frac{x_{n+1}}{x_n} &> \frac{n}{n+1} + \frac{1}{n+1} = 1 \\
x_{n+1} &> x_n
\end{aligned}$$

Tým sme dokázali, že postupnosť x_n je rastúca.

$$
\begin{aligned}
\binom{n}{k}\frac{1}{n^k} &= \frac{n(n-1)(n-2)...(n-k+1)}{n.n.n...n}\frac{1}{k!} = \\
&= 1\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)...\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\frac{1}{k!} \leq \frac{1}{k!}
\end{aligned}
$$

Použitím nerovnosti $\forall k \in \mathbb{N} : \frac{1}{2^{k-1}} \geq \frac{1}{k!}$ dostávame:

$$
\binom{n}{k}\frac{1}{n^k} \leq \frac{1}{2^{k-1}} \tag{1.3}
$$

Použitím binomickej vety a nerovnosti (1.3) odvodíme:

$$
\begin{aligned}
x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n &= 1 + \binom{n}{1}\frac{1}{n} + \binom{n}{2}\frac{1}{n^2} + ... + \binom{n}{n-1}\frac{1}{n^{n-1}} + \binom{n}{n}\frac{1}{n^n} \leq \\
&\leq 1 + \frac{1}{2^0} + \frac{1}{2^1} + ... + \frac{1}{2^{n-2}} + \frac{1}{2^{n-1}} = \\
&= 1 + \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}} < 1 + \frac{1}{\frac{1}{2}} = 3 \\
x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n &< 3
\end{aligned}
$$

Tým sme dokázali, že postupnosť x_n je zhora ohraničená. $\square$

Bernoulli tak dospel k záveru, že postupnosť (1.2) konverguje ku kladnému číslu $c < 3$. Prvú presnú podobu tejto konštanty podal až v roku 1748 švajčiarsky matematik Leonhard Euler. Konštantu označil symbolom e (Eulerovo číslo), vyčíslil ju na 18 desatinných miest a ako prvý dokázal jej iracionalitu. Približná hodnota čísla je

$$
e = 2,71828\ 18284\ 59045\ 23536\ldots\ [2]
$$

Číslo e sa tak stalo riešením Bernoulliho problému zloženého úročenia. Túto skutočnosť čiastočne interpretuje Tabuľka 1.1. V matematickom kontexte to znamená, že

$$
\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e. \tag{1.4}
$$

Označme P počiatočný vklad a r ročnú nominálnu úrokovú mieru. Potom suma na účte v čase t pri spojitom úročení je daná výrazom

$$
\lim_{n\to\infty} P\left(1+\frac{r}{n}\right)^{nt}. \tag{1.5}
$$

Výraz (1.5) je možné upraviť pomocou vzťahu (1.4) na jednoduchší tvar:

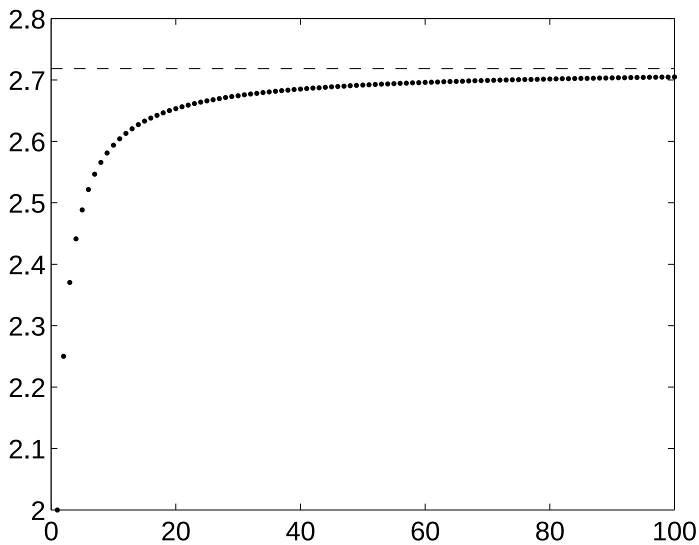
$$\lim_{n\to\infty} P\left(1+\frac{r}{n}\right)^{nt} = \lim_{n\to\infty} P\left[\left(1+\frac{r}{n}\right)^{\frac{n}{r}}\right]^{\frac{r}{n}nt} = Pe^{rt}.$$

Spojité úročenie je príkladom využitia čísla e v praxi.

Po čísle π sa číslo e stalo ďalšou významnou a dôležitou konštantou matematickej analýzy. V súvislosti s teóriou logaritmovania je e základom prirodzeného logaritmu. Zvyčajne sa vyskytuje pri vyjadrení rastu populácie, peňazí a pod.

n	x_n	**Spôsob úročenia**
1	2	ročne
2	2,25	polročne
4	2,4414063	štvrťročne
12	2,6130353	mesačne
52	2,6925970	týždenne
365	2,7145675	denne
8760	2,7181267	každú hodinu
525600	2,7182792	každú minútu
31536000	2,7182818	každú sekundu

Tabuľka 1.1: Vybrané členy postupnosti $x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ interpretujú sumu na účte na konci roka pri jednotlivých spôsoboch úročenia. Pri spojitom úročení s počiatočným vkladom 1 a ročnou nominálnou úrokovou mierou 100% bude suma na účte na konci roka rovná hodnote e.



Obr. 1.1: Graf postupnosti $x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ a grafické znázornenie limity $\lim_{n\to\infty} x_n$.

PROBLÉMY V TVARE ÚLOHY LINEÁRNEHO PROGRAMOVANIA

V tejto kapitole definujeme úlohu lineárneho programovania, uvedieme niektoré motivačné príklady z ekonomickej oblasti a opíšeme algoritmus riešenia úloh lineárneho programovania s cieľom poukázať na rozvoj tohto odvetvia aplikovanej matematiky.

2.1 Úloha lineárneho programovania

Lineárne programovanie rieši problém optimalizácie lineárnej funkcie n premenných na množine popísanej sústavou lineárnych nerovníc, resp. ohraničení. Priama úloha lineárneho programovania má tvar

$$\begin{aligned} c^T x &\rightarrow \max \\ Ax &\leq b \\ x &\geq 0\,, \end{aligned} \tag{2.1}$$

kde $c = (c_1, \ldots, c_n)^T$ je vektor koeficientov účelovej funkcie, $x = (x_1, \ldots, x_n)^T$ je vektor premenných, A je matica rozmeru $m \times n$ a $b = (b_1, \ldots, b_m)^T$ je vektor ohraničujúcich podmienok. [10]

Je zrejmé, že minimalizačnú úlohu $\min\,(f(x))$ je možné vždy riešiť ako maximalizačnú úlohu $\max\,(-f(x))$. Túto skutočnosť využíva aj nasledujúce tvrdenie, ktoré hovorí o formulácii úlohy lineárneho programovania [1].

Veta 2.1 (Podľa [8]). *Každú úlohu lineárneho programovania je možné previesť na ľubovoľný z nasledujúcich troch tvarov:*

$$\boxed{\begin{aligned} c^T x &\rightarrow \max \\ Ax &\leq b \end{aligned}} \qquad \boxed{\begin{aligned} c^T x &\rightarrow \max \\ Ax &\leq b \\ x &\geq 0 \end{aligned}} \qquad \boxed{\begin{aligned} c^T x &\rightarrow \max \\ Ax &= b \\ x &\geq 0 \end{aligned}}$$

[1] Dôkaz tvrdenia (Veta 2.1) nájdeme v literatúre [8, s. 14].

2.2 Motivačné príklady

2.2.1 Dopravný problém

Dopravný problém prvýkrat sformuloval americký matematik Frank Lauren Hitchcock v roku 1941. Podstatou problému je optimalizácia rozvozu homogénneho tovaru zo zdrojov (od dodávateľov) do cieľových miest (k odberateľom). Cieľom je minimalizovať celkové náklady spojené s rozvozom tovaru, pričom požiadavky odberateľov musia byť zachované. Úlohou je tak za určitých podmienok stanoviť, koľko merných jednotiek určitého homogénneho tovaru dodá každý dodávateľ každému odberateľovi. [13]

Uvažujme m výrobcov $p_1, \dots, p_m$ toho istého produktu, ktorí ho vyrobili v množstvách $a_1, \dots, a_m$. Tento produkt treba dopraviť k n odberateľom $v_1, \dots, v_n$, ktorých požiadavky sú $b_1, \dots, b_n$. Symbolom c_{ij} označme náklady na prepravu jednotkového množstva od výrobcu p_i k odberateľovi v_j. Predpokladajme, že dopravné náklady závisia od množstva lineárne. Od jedného výrobcu je možné rozviesť produkt k viacerým odberateľom a jeden odberateľ môže dostať produkt od viacerých výrobcov. Nakoniec predpokladajme tzv. vybilancovanosť

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j. \tag{2.2}$$

Inými slovami, spolu sa vyrobilo práve toľko ako je sumárna požiadavka. Ako najefektívnejšie zostaviť taký plán na rozvoz tovaru, aby celkové dopravné náklady boli minimálne a požiadavky všetkých odberateľov boli zachované? [8]

Matematický model

Údaje dopravného problému je možné zapísať v Tabuľke 2.1.

c_{11}	$\dots$	c_{1n}	a_1
$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
c_{m1}	$\dots$	c_{mn}	a_m
b_1	$\dots$	b_n	

Tabuľka 2.1: Údaje dopravného problému. [8]

Ak neznáma x_{ij} vyjadruje množstvo tovaru prepraveného od dodávateľa p_i k odberateľovi v_j, potom je možné dopravnú úlohu interpretovať v podobe matematického modelu nasledovne:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} &\rightarrow \min && (2.3)\\ \sum_{j=1}^{n} x_{ij} &= a_i, \quad \forall i && (2.4)\\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} &= b_j, \quad \forall j && (2.5)\\ x_{ij} &\geq 0, \quad \forall i,j \end{aligned}$$

Inými slovami, úlohou je minimalizovať lineárnu funkciu (2.3) na množine nezáporných riešení sústavy lineárnych rovníc (2.2), (2.4) a (2.5). Takýto matematický model zodpovedá úlohe lineárneho programovania (2.1). [8]

Dopravná úloha je najstaršou a dodnes i najčastejšie riešenou úlohou lineárneho programovania.

2.2.2 Výrobný problém

Majme k dispozícii m zdrojov $S_1, \ldots, S_m$ o kapacite $b_1, \ldots, b_m$. Pomocou týchto zdrojov je možné vyrábať produkty P_j so ziskom c_j za jednotkové množstvo pre $j = 1, 2, \ldots, n$. Nech na výrobu jednotkového množstva produktu P_j spotrebujeme zo zdroja S_i a_{ij} jednotiek. Aké množstvá jednotlivých produktov musíme vyrobiť, aby sme maximalizovali celkový zisk? [8]

Matematický model

Vstupné údaje výrobného problému spolu s neznámymi je možné zapísať do Tabuľky 2.2.

	P_1	P_2	$\ldots$	P_n	kapacita
S_1	a_{11}	a_{12}	$\ldots$	a_{1n}	b_1
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
S_m	a_{m1}	a_{m2}	$\ldots$	a_{mn}	b_m
zisk	c_1	c_2	$\ldots$	c_n	
množstvo	x_1	x_2	$\ldots$	x_n	

Tabuľka 2.2: Údaje výrobného problému. [8]

Nech x_j označuje neznáme množstvo produktu P_j. Potom matematický model výrobného problému vyzerá nasledovne:

$$c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \rightarrow \max \tag{2.6}$$

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &\leq b_1 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &\leq b_m \end{aligned} \tag{2.7}$$

$$x_1, x_2, \ldots, x_n \geq 0 \tag{2.8}$$

Cieľom je maximalizovať lineárnu funkciu (2.6) na množine určenej sústavou lineárnych nerovníc (2.7) a (2.8). Takýto model je ekvivalentný s úlohou lineárneho programovania (2.1). [8]

2.2.3 Priraďovací problém

Uvažujme n pracovníkov, pričom každý z nich má vykonávať jednu z n daných odlišných činností. Ich kvalifikácia pre výkon jednotlivých činností bola otestovaná a ohodnotená ukazovateľmi p_{ij}, $1 \leq i, j \leq n$. Ukazovateľ p_{ij} oceňuje prínos toho, že i-ty praconík vykonáva j-tu činnosť. Úlohou je nájsť také priradenie pracovníka, aby každú činnosť vykonával práve jeden pracovník a aby úhrnná hodnota výsledkov všetkých činností pri tomto priradení bola maximálne možná. [9]

Matematický model

Nech $x_{ij} = 1$ ak i-ty pracovník vykonáva j-tu činnosť a $x_{ij} = 0$ v prípade, že j-ty pracovník nevykonáva i-tu činnosť. Potom matematický model priraďovacieho problému má nasledujúci tvar:

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} p_{ij}x_{ij} \rightarrow \max \tag{2.9}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, \quad 1 \leq i \leq n \tag{2.10}$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1, \quad 1 \leq j \leq n \tag{2.11}$$

$$x_{ij} \geq 0, \quad 1 \leq i, j \leq n \tag{2.12}$$

Úlohou je maximalizovať lineárnu funkciu (2.9) pri lineárnych ohraničeniach (2.10), (2.11) a (2.12). Takto formulovaný matematický model zodpovedá úlohe lineárneho programovania (2.1). [9]

2.3 Riešenie úloh lineárneho programovania

Úlohy lineárneho programovania s dvomi premennými je možné riešiť graficky, avšak pri väčšom počte premenných je tento spôsob riešenia nepoužiteľný. Navyše, pri úlohách s dvomi premennými a veľkom počte ohraničení, grafická metóda nemusí predstavovať efektívny spôsob riešenia. Uvedené problémy motivovali matematikov k nájdeniu všeobecného a efektívneho algoritmu riešenia rôznych druhov úloh lineárneho programovania. Základnou metódou riešenia úloh sa stala simplexová metóda, ktorú v roku 1947 rozpracoval americký matematik George Dantzig. Jej princíp spočíva v eliminácií vybraných premenných usporiadaných v simplexovej tabuľke. Simplexová metóda sa stala najvýznamnejším a dodnes i najúspešnejším algoritmom.

		x_1	$\dots$	x_n	y_1	$\dots$	y_m
z	h	$-c_1$	$\dots$	$-c_n$	0	$\dots$	0
y_1	b_1						
$\vdots$	$\vdots$		$A_{m\times n}$			$I_{m\times m}$	
y_m	b_m						

Tabuľka 2.3: Simplexová tabuľka úlohy (2.1). Účelovú funkciu $z = c^T x$ zapíšeme v tvare $z - c^T x = 0$. Sústavu ohraničení $Ax \leq b$ prepíšeme pomocou m nových nezáporných premenných $y_1, \dots, y_m$ do tvaru rovníc. Číslo h vyjadruje hodnotu účelovej funkcie $c^T x$ v danej iterácii. Úlohou je eliminovať bázické premenné $y_1, \dots, y_m$ podľa určitých pravidiel tak, aby všetky čísla v druhom riadku tabuľky, okrem hodnoty h, boli nezáporné. Priebeh eliminácie v simplexovej tabuľke je ekvivalentný s Gaussovým eliminačným procesom.

Okrem simplexovej metódy sú známe aj niektoré polynomiálne algoritmy. V roku 1979 predložil arménsky matematik Leonid Chačijan tzv. elipsoidnú metódu. Hoci sa v praxi stala neúspešnou, stala sa motiváciou pre indického matematika Narendra Karmarkara, ktorý v roku 1984 prezentoval tzv. metódy vnútorného bodu. Tie sa stali významnými pri úlohách, ktoré simplexová metóda nedokáže vyriešiť. [8]

VÝBER RACIONÁLNEJ STRATÉGIE

Pri rozhodovaniach týkajúcich sa svojho úžitku sa človek vždy snaží rozhodovať racionálne. V ekonomickom kontexte tým zvyčajne rozumieme také rozhodnutie, ktoré vedie k maximálnemu zisku. V nasledovných častiach opisujeme matematické postupy, ktoré dnes výrazne pomáhajú ľuďom pri výbere racionálnej stratégie v rôznych oblastiach.

3.1 Hra Cournotovho duopolu

Cournotov model je ekonomický model, ktorý sa v súčasnosti používa na popis štruktúry priemyslu. Jeho autorom je francúzsky matematik Antoine Augustin Cournot.

Uvažujme na trhu firmy F_1 a F_2, ktoré vyrábajú homogénny produkt. Firmy medzi sebou nespolupracujú a neexistuje medzi nimi žiadna dohoda. Rozhodnutie každej firmy ovplyvňuje cenu produktu. Obe firmy konajú strategicky a snažia sa maximalizovať svoj zisk. Súťaž firiem spočíva v simultánnej voľbe množstva produkcie vzhľadom na rozhodnutie svojho konkurenta. [12]

Pre firmu F_i $(i = 1, 2)$ označme objem produkcie q_i, nákladovú funkciu $C_i(q_i)$ a funkciu zisku $\Pi_i(q_1, q_2)$. Spoločný agregovaný produkt firiem označme $Q = q_1 + q_2$. Symbolom p označme cenu výrobku, resp. inverznú funkciu dopytu p_D. Zisk firmy F_i $(i = 1, 2)$ definujme ako rozdiel príjmov pq_i a nákladov $C_i(q_i)$, teda $\Pi_i(q_1, q_2) = pq_i - C_i(q_i)$.

Motivačný príklad

Uvažujme hru Cournotovho duopolu s inverznou funkciou dopytu $p_D = a - bQ$, $b > 0$. Nech nákladová funkcia firmy F_i $(i = 1, 2)$ je $C_i(q_i) = c_i q_i$ $(a > c_1 > c_2)$. Koľko jednotiek produktu bude vyrábať každá firma v Cournotovej rovnováhe?

Riešenie

Cournotova rovnováha vziká, ak obidve firmy maximalizujú svoj zisk za predpokladu, že aj ich konkurenčná firma sa správa racionálne. [1] Firma F_i $(i = 1, 2)$ rieši úlohu $\max \Pi_i(q_1, q_2)$ pri pevnom objeme výroby svojho konkurenta.

$$\begin{aligned}\Pi_1(q_1,q_2) &= pq_1 - C_1(q_1) = \\ &= (a-bQ)q_1 - c_1q_1 = \\ &= (a-bq_1-bq_2)q_1 - c_1q_1 = \\ &= aq_1 - bq_1^2 - bq_1q_2 - c_1q_1\end{aligned} \qquad \begin{aligned}\Pi_2(q_1,q_2) &= pq_2 - C_2(q_2) = \\ &= (a-bQ)q_2 - c_2q_2 = \\ &= (a-bq_1-bq_2)q_2 - c_2q_2 = \\ &= aq_2 - bq_2^2 - bq_1q_2 - c_2q_2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left.\frac{\partial\Pi_1(q_1,q_2)}{\partial q_1}\right|_{q_1=\widetilde{q}_1} &= 0 \\ a - 2b\widetilde{q}_1 - bq_2 - c_1 &= 0 \\ \widetilde{q}_1 &= \frac{a-c_1}{2b} - \frac{q_2}{2}\end{aligned} \qquad \begin{aligned}\left.\frac{\partial\Pi_1(q_1,q_2)}{\partial q_2}\right|_{q_2=\widetilde{q}_2} &= 0 \\ a - 2b\widetilde{q}_2 - bq_1 - c_2 &= 0 \\ \widetilde{q}_2 &= \frac{a-c_2}{2b} - \frac{q_1}{2}\end{aligned}$$

Ak uvážime nezápornosť výstupov $\widetilde{q}_1$ a $\widetilde{q}_2$, potom je možné na základe týchto výsledkov odvodiť tzv. reakčnú funkciu firmy.

$$B_1(q_2) = \begin{cases} \frac{a-c_1}{2b} - \frac{q_2}{2} & q_2 \leq \frac{a-c_1}{b} \\ 0 & \text{inak} \end{cases} \qquad B_2(q_1) = \begin{cases} \frac{a-c_2}{2b} - \frac{q_1}{2} & q_1 \leq \frac{a-c_2}{b} \\ 0 & \text{inak} \end{cases}$$

Inými slovami, ak firma F_2 zvolí objem výroby q_2, potom najlepšou reakciou firmy F_1 je voľba objemu produkcie $B_1(q_2)$. Analogicky vyplýva, že ak firma F_1 stanoví objem produkcie q_1, potom najefektívnejšou reakciou firmy F_2 je voľba objemu výroby $B_2(q_1)$. Rovnováha nastáva v priesečníku reakčných funkcií B_1 a B_2, t.j. práve vtedy, keď $B_1(\widetilde{q}_2) = B_2(\widetilde{q}_1)$.

$$\begin{aligned}B_1(\widetilde{q}_2) &= B_2(\widetilde{q}_1) \\ \frac{a-c_1}{2b} - \frac{\widetilde{q}_2}{2} &= \frac{a-c_2}{2b} - \frac{\widetilde{q}_1}{2}\end{aligned}$$

Po dosadení výstupov $\widetilde{q}_1 = \frac{a-c_1}{2b} - \frac{q_2}{2}$ a $\widetilde{q}_2 = \frac{a-c_2}{2b} - \frac{q_1}{2}$ dostávame:

$$\begin{aligned}\frac{a-c_1}{2b} - \frac{1}{2}\left(\frac{a-c_2}{2b} - \frac{q_1}{2}\right) &= \frac{a-c_2}{2b} - \frac{q_1}{2} \\ q_1 &= \frac{a-2c_1+c_2}{3b}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{a-c_1}{2b} - \frac{q_2}{2} &= \frac{a-c_2}{2b} - \frac{1}{2}\left(\frac{a-c_1}{2b} - \frac{q_2}{2}\right) \\ q_2 &= \frac{a-2c_2+c_1}{3b}\end{aligned}$$

Ukážeme, že priesečník $\left(\frac{a-2c_1+c_2}{3b}, \frac{a-2c_2+c_1}{3b}\right)$ reakčných funkcií B_1 a B_2 je zároveň riešením motivačného príkladu.

Obe firmy sa rozhodujú v čase. Označme $q_i(t)$ objem produkcie firmy F_i v čase t pre $i = 1, 2$. Ak uvažujeme diskrétny čas, potom súťaž firiem vieme na základe ich reakčných funkcií modelovať pomocou systému diferenčných rovníc $q(t+1) = Aq(t) + d$.

$$q(t) = \begin{pmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \qquad d = \begin{pmatrix} \frac{a-c_1}{2b} \\ \frac{a-c_2}{2b} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} q_1(t+1) \\ q_2(t+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{a-c_1}{2b} \\ \frac{a-c_2}{2b} \end{pmatrix} \tag{3.1}$$

$$q_1(t+1) = \frac{a-c_1}{2b} - \frac{q_2(t)}{2} \qquad q_2(t+1) = \frac{a-c_1}{2b} - \frac{q_1(t)}{2}$$

Riešením motivačného príkladu je úroveň $q^* = (q_1^*, q_2^*)^T$, na ktorej sa dlhodobo ustáli objem produkcie oboch firiem. Pod pojmom dlhodobý stav rozumieme $\lim_{t\to\infty} q(t)$, kde $q(t)$ je riešenie systému (3.1). Z toho vyplýva, že $q^* = \lim_{t\to\infty} q(t)$.

Nech λ_i sú vlastné hodnoty matice A a $v_i \in \mathbb{R}^2$ príslušné vlastné vektory pre $i = 1, 2$. Potom riešenie lineárneho dynamického systému (3.1) má tvar

$$q(t) = \widehat{q} + \sum_{i=1}^{2} k_i v_i \lambda_i^t\,, \tag{3.2}$$

kde $\widehat{q}$ je pevný bod [1] systému a k_i $(i = 1, 2)$ sú konštanty vyhovujúce danej počiatočnej podmienke $q(0) \in \mathbb{R}^2$.

Pevný bod systému (3.1) dostaneme riešením sústavy $\widehat{q} = A\widehat{q} + d$. Po správnom vyjadrení dostávame $\widehat{q} = (I - A)^{-1}d$.

$$\widehat{q} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \frac{a-c_1}{2b} \\ \frac{a-c_2}{2b} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{4}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{a-c_1}{2b} \\ \frac{a-c_2}{2b} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{a-2c_1+c_2}{3b} \\ \frac{a-2c_2+c_1}{3b} \end{pmatrix}$$

Vlastné hodnoty matice A a príslušné nenulové vlastné vektory dostaneme riešením rovnice $Av_i = \lambda_i v_i$ $(i = 1, 2)$.

$$\lambda_1 = \frac{1}{2} \quad v_1 = \begin{pmatrix} -\alpha \\ \alpha \end{pmatrix} \quad \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \qquad \lambda_2 = -\frac{1}{2} \quad v_2 = \begin{pmatrix} \beta \\ \beta \end{pmatrix} \quad \beta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

[1] Pevným bodom dynamického systému $x(t+1) = Ax(t) + b$ je bod $\widehat{x} \in \mathbb{R}^n : \widehat{x} = A\widehat{x} + b$.

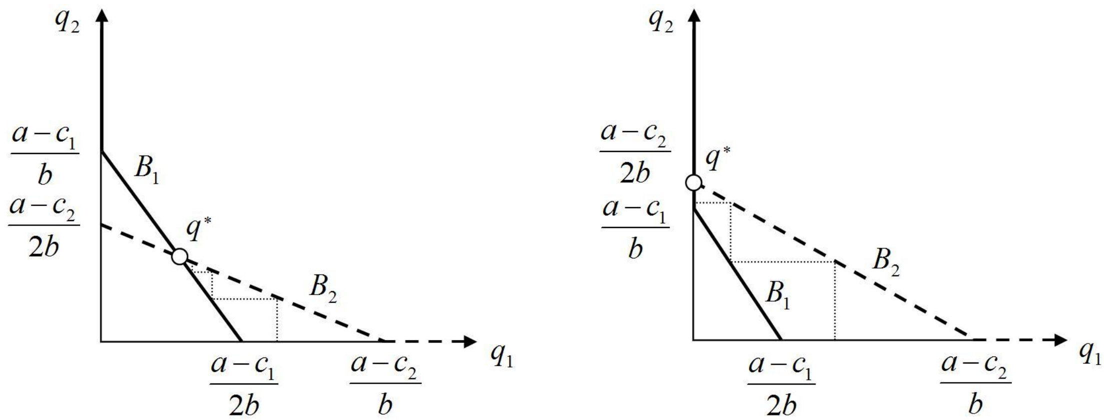
Po dosadení do vzťahu (3.2) dostávame vyjadrenie objemu výroby každej firmy v čase t.

$$\begin{aligned}
q(t) = \begin{pmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{a-2c_1+c_2}{3b} \\ \frac{a-2c_2+c_1}{3b} \end{pmatrix} + k_1 \begin{pmatrix} -\alpha \\ \alpha \end{pmatrix} \left(\frac{1}{2}\right)^t + k_2 \begin{pmatrix} \beta \\ \beta \end{pmatrix} \left(-\frac{1}{2}\right)^t \\
q_1(t) &= \frac{a-2c_1+c_2}{3b} - k_1\alpha \left(\frac{1}{2}\right)^t + k_2\beta \left(-\frac{1}{2}\right)^t \\
q_2(t) &= \frac{a-2c_2+c_1}{3b} + k_1\alpha \left(\frac{1}{2}\right)^t + k_2\beta \left(-\frac{1}{2}\right)^t
\end{aligned}$$

Ako sme už uviedli, riešením príkladu je dlhodobá úroveň objemu výroby $q^* = \lim_{t\to t} q(t)$. Z tvrdenia $\forall x \in \mathbb{R}, |x| < 1 : \lim_{n\to\infty} x^n = 0$ vyplýva, že bez ohľadu na konštanty k_1 a k_2 platí $\lim_{t\to\infty} q(t) = \widehat{q}$, a preto $q^* = \widehat{q}$. Inými slovami, objem produkcie firiem sa dlhodobo ustáli na úrovni pevného bodu $\widehat{q}$.

$$q_1^* = \frac{a-2c_1+c_2}{3b} \qquad\qquad q_2^* = \frac{a-2c_2+c_1}{3b}$$

To znamená, že riešením príkladu je priesečník reakčných funkcií B_1 a B_2. Riešenie však nie je jednoznačné a závisí od vzťahu medzi hodnotami $\frac{a-c_1}{b}$ a $\frac{a-c_2}{2b}$. Na Obr. 3.1 sú prehľadne znázornené jednotlivé situácie, ktoré môžu nastať.



Obr. 3.1: Ukážka konvergencie k riešeniu $q^* = \left(\frac{a-2c_1+c_2}{3b}, \frac{a-2c_2+c_1}{3b}\right)$, ak $\frac{a-c_1}{b} > \frac{a-c_2}{2b}$ (vľavo) alebo k riešeniu $q^* = (0, \frac{a-c_2}{2b})$, ak $\frac{a-c_1}{b} \leq \frac{a-c_2}{2b}$ (vpravo). V oboch prípadoch trajektórie konvergujú k priesečníku grafov reakčných funkcií B_1 a B_2.

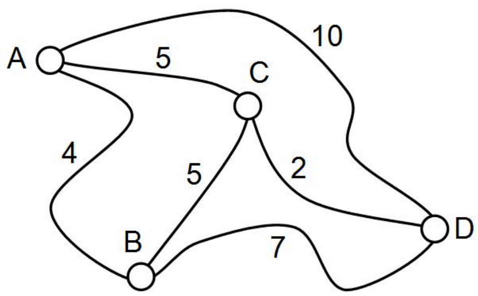
V súvislosti s rozvojom teórie hier sa Cournotovmu modelu kladie veľký význam. Cournotova rovnováha je tzv. Nashovým ekvilibriom v hre, ktorej účastníci sú firmy s vyrábanými množstvami ako stratégiami a ziskom ako výplatou. V súčasnosti je teória hier významným odvetvím aplikovanej matematiky. Jej dôležité aplikácie dnes nájdeme nielen v ekonómii, ale aj v medzinárodných vzťahoch, vojenskej stratégii, biológii a politológii.

3.2 Problém obchodného cestujúceho

Problém obchodného cestujúceho sa datuje od 19. storočia a predstavuje úlohu kombinatorickej optimalizácie. Ekonomická podstata problému spočíva v minimalizácii určitých nákladov. Kvôli množstvu praktických aplikácií je dnes problém obchodného cestujúceho jedna z najznámejších optimalizačných úloh. [14]

Podstata problému

Uvažujme n daných miest. Predpokladajme, že je možné dostať sa z každého mesta do všetkých ostatných, buď priamo, alebo cez niektoré iné mesto. Cieľom obchodného cestujúceho je vybrať sa z mesta, v ktorom sa práve nachádza, navštíviť každé mesto práve raz a vrátiť sa do počiatočného mesta. Zároveň sa snaží túto cestu absolvovať tak, aby minimalizoval svoje náklady. [14]



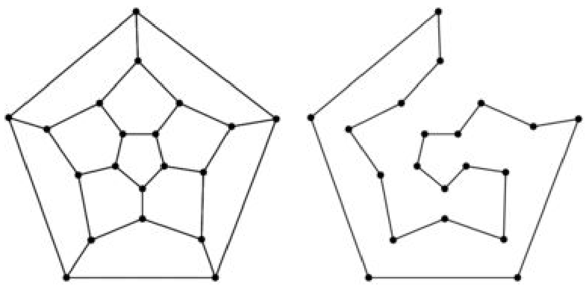
Obr. 3.2: Ukážka problému obchodného cestujúceho. Body A, B, C, D predstavujú jednotlivé mestá a číslo pri každom spojení vyjadruje dopravné náklady. Ak sa rozhodneme cestovať z bodu A, potom riešením problému je trasa ABDCA, resp. ACDBA. Pri absolvovaní tejto cesty sú dopravné náklady vo výške 18 minimálne.

Riešenie

Riešenie problému úzko súvisí s riešením matematického hlavolamu, ktorý v roku 1857 sformuloval írsky matematik William Rowan Hamilton. Podstatou hlavolamu bolo nájsť takú uzavretú trasu po hranách pravidelného dvanásťstena, ktorá by obsahovala každý vrchol práve raz. [5]

Definícia 3.1 (Podľa [5])**.** *Uzavretý ťah je taký ťah, v ktorom je prvý vrchol zhodný s posledným. Kružnica je uzavretý ťah, v ktorom sú všetky dvojice vrcholov, s výnimkou prvého a posledného, navzájom rôzne.*

Definícia 3.2 (Podľa [5])**.** *Hamiltonovská kružnica je taká kružnica, ktorá obsahuje všetky vrcholy grafu. Hamiltonovská cesta je cesta, obsahujúca všetky vrcholy grafu.*



Obr. 3.3: Graf a jeho Hamiltonovská kružnica. [16]

V terminológii teórie grafov jednotlivé mestá predstavujú vrcholy a prepojenia medzi mestami sú hrany. Ak v takomto hranovo ohodnotenom grafe existujú Hamiltonovské kružnice, cieľom je nájsť takú, ktorá má minimálny súčet ohodnotení hrán.

Okrem plánovania dopravy nájdeme problému obchodného cestujúceho aj v iných oblastiach. Zaujímavým príkladom je dierovanie otvorov do určitých predmetov. Otvory, ktoré je potrebné do predmetu vyvŕtať predstavujú mestá a čas potrebný k posunu vŕtacej hlavy od jednej diery k nasledujúcej predstavuje cestovné náklady. [14]

Dnes je teória grafov dôležitým odvetvím diskrétnej matematiky. Problém obchodného cestujúceho obohatil túto vednú disciplínu o nové pojmy a postupy. Napriek pomerne dlhej histórii problému dodnes stále neexistuje efektívny algoritmus riešenia.

MATEMATICKÉ MODELOVANIE EKONOMICKÝCH PROCESOV

Správne fungovanie ekonomiky spočíva v udržaní optimálneho stavu medzi obmedzenými zdrojmi a neobmedzenými potrebami človeka. Ekonomiku môžeme chápať ako systém na seba nadväzujúcich ekonomických procesov. Použitím matematických metód vieme ekonomické procesy vyjadriť pomocou matematických modelov. Práve takýmto modelom sa budeme venovať v nasledovných častiach, v rámci ktorých opíšeme model produkcie a model čerpania obmedzených zdrojov. Cieľom tejto kapitoly je poukázať na význam ekonomiky v súvislosti s formovaním nových matematických postupov, na základne ktorých je možné modelovať ekonomické procesy.

4.1 Model produkcie

V tejto časti definujeme základný koncept teórie firmy (produkčnú funkciu) a vysvetlíme proces optimalizácie výroby.

Motivačný príklad

Uvažujme určitú technológiu firmy, ktorá využíva n výrobných faktorov $x_1, \dots, x_n$ tak, že na jednotku výstupu sa spotrebúva c_i jednotiek faktora x_i pre $i = 1, 2, \dots, n$. Zároveň predpokladajme racionálne správanie firmy. Akú úroveň produkcie stanoví firma, aby dosiahla optimálny plán výroby? [1]

Označme $x = (x_1, \dots, x_n)^T$ vektor faktorov, pričom ekonomický zmysel majú iba vektory spĺňajúce $x_i \geq 0$ pre $i = 1, 2, \dots, n$. Symbolom y označme objem výroby za určitú časovú jednotku.

4.1.1 Produkčná funkcia

Cieľom tejto časti je odvodiť príslušnú produkčnú funkciu, ktorá jednoznačne popisuje vstupno-výstupné transformácie v procese výroby.

Definícia 4.1 (Podľa [1])**.** *Vektor* $(x_1, \dots, x_n, y)^T \in \mathbb{R}_+^{n+1}$ *nazývame technológiou firmy. Množinu možných technológií* $Y \subset \mathbb{R}_+^{n+1}$ *nazývame technologickou množinou.*

Jednotlivé body technologickej množiny $(x_1, \dots, x_n, y)^T \in Y$ interpretujú množstvo produktu y, ktoré môže firma za určitú časovú jednotku vyrobiť pri spotrebe faktorov $(x_1, \dots, x_n)^T$.

Definícia 4.2 (Podľa [1])**.** *Nech* Y *je technologická množina. Funkcia* $f : \mathbb{R}_+^n \to \mathbb{R}$ *daná predpisom* $f(x) = \sup \{y : (x, y)^T \in Y\}$ *sa nazýva produkčná funkcia technologickej množiny* Y.

Inými slovami, ak pri objeme vstupu x je firma schopná vyrobiť produkt v objeme y, potom pri objeme vstupu x firma vždy vyprodukuje výstup v objeme y a nikdy nie menej.

Vráťme sa k úvodnému problému a pre zjednodušenie, bez ujmy na všeobecnosti, uvažujme prípad $n = 2$. Ak technológia firmy spotrebuje na jednotku produktu c_1 jednotiek faktora x_1 a c_2 jednotiek faktora x_2, potom je zrejmé, že firma vyrobí najviac $\frac{x_1}{c_1}$ alebo $\frac{x_2}{c_2}$ jednotiek výstupu. Inými slovami, technológia nepripúšťa substitúciu faktorov. Výroba je možná iba pri pevne stanovenom pomere vstupov. Označme $a_i = \frac{1}{c_i}$ pre $i = 1, 2$. Potom platí, že $y \leq a_1x_1$ alebo $y \leq a_2x_2$. Z definície produkčnej funkcie technologickej množiny vyplýva, že platí práve jedna z rovníc $y = a_1x_1,\ y = a_2x_2$. V prípade, že $a_1x_1 = a_2x_2$, firma vyrobí práve a_1x_1, resp. a_2x_2 jednotiek produktu. Ak $a_1x_1 < a_2x_2$, potom $y = a_1x_1 < a_2x_2$, a teda firma vyrobí a_1x_1 jednotiek produktu. V opačnom prípade, ak $a_1x_1 > a_2x_2$, firma vyprodukuje a_2x_2 jednotiek výstupu. Produkčná funkcia technológie firmy je tak definovaná predpisom

$$f(x_1, x_2) = \min \{a_1x_1, a_2x_2\} = \begin{cases} a_1x_1, & a_1x_1 \leq a_2x_2 \\ a_2x_2, & a_1x_1 \geq a_2x_2 \end{cases}.$$

Funkcia $y = f(x_1, x_2)$ jednoznačne určuje efektívny objem produkcie y pri danom objeme výrobných faktorov $(x_1, x_2)^T$.

Príklady produkčných funkcií

Literatúra [1, s. 5] uvádza nasledujúce príklady produkčných funkcií $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$:

1. Cobb-Douglassova produkčná funkcia: $f(x) = c\prod_{i=1}^{n} x_i^{a_i},\ a > 0,\ \sum_{i=1}^{n} a_i \leq 1.$
2. Funkcia s konštantnou elasticitou: $f(x) = \left(\sum_{i=1}^{n} c_i x_i^p\right)^{\frac{1}{p}}.$

3. Produkčná funkcia dokonale zameniteľných faktorov: $f(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i$.
4. Leontieffova produkčná funkcia: $f(x) = \min\{a_1x_1, \ldots, a_nx_n\},\ a_i > 0,\ i = 1, 2, \ldots, n.$

4.1.2 Optimalizácia výroby

Firma sa podľa predpokladu správa racionálne, preto sa vždy snaží maximalizovať svoj zisk. Nech $w_i \geq 0$ označuje cenu jednotkového množstva faktora x_i pre $i = 1, 2, \ldots, n$. Potom náklady firmy definujeme výrazom $\sum_{i=1}^{n} w_i x_i$ $(= \langle w, x\rangle)$.

Firma môže úlohu maximalizácie svojho zisku rozdeliť nasledovne:

Úloha 1: minimalizovať svoje náklady pri pevne danom objeme výroby y;

Úloha 2: určiť objem produkcie y, pri ktorom je zisk najväčší.

Úloha 1

Minimalizácia nákladov $\langle w, x\rangle$ pri pevne stanovenom objeme výroby y za podmienky nezápornosti výrobných faktorov je úlohou na viazaný extrém:

$$\begin{aligned} \langle w, x\rangle &\to \min \\ f(x) &= y \\ x_1, \ldots, x_n &\geq 0 \end{aligned}$$

V prípade motivačného problému má úloha tvar

$$\begin{aligned} w_1x_1 + w_2x_2 &\to \min \\ \min\{a_1x_1, a_2x_2\} &= y \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Metóda Lagrangeových multiplikátorov pri riešení úlohy zlyhá. Preto uvažujme najprv prípad $a_1x_1 \leq a_2x_2$. Potom hľadáme riešenie úlohy

$$\begin{aligned} w_1x_1 + w_2x_2 &\to \min \\ a_1x_1 &= y \\ a_1x_1 &\leq a_2x_2 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Pre zaujímavosť poznamenajme, že takto upravená úloha je úlohou lineárneho programovania, ktorou sme zaoberali v druhej kapitole. Z podmienok $a_1x_1 = y$ a $a_1x_1 \leq a_2x_2$ vyplýva, že $x_1 = \frac{y}{a_1}$ a $y \leq a_2x_2$. Následne môžeme úlohu zjednodušiť do tvaru

$$\begin{aligned} w_1\frac{y}{a_1} + w_2x_2 &\rightarrow \min \\ x_2 &\geq \frac{y}{a_2} \\ x_1 &\geq 0 \end{aligned}$$

Keďže $w_2 \geq 0$, úlohou je minimalizovať neklesajúcu lineárnu funkciu premennej x_2, ktorá dosahuje svoje minimum v ľavom krajnom bode svojho definičného oboru. Ten je jednoznačne určený ohraničením $x_2 \geq \frac{y}{a_2}$. Riešením úlohy je tak bod

$$\widehat{x} = \left(\frac{y}{a_1}, \frac{y}{a_2}\right)^T.$$

Analogicky sa dá ukázať, že v prípade $a_1x_1 \geq a_2x_2$ je riešenie úlohy rovnaké.

Úloha 2

Definícia 4.3 (Podľa [1])**.** *Nech* $\widehat{x} = (\widehat{x}_1, \ldots, \widehat{x}_n)^T$ *je riešením úlohy minimalizácie nákladov pri danom objeme výroby* y*. Potom nákladová funkcia firmy je definovaná predpisom* $C(y, w) = \sum_{i=1}^{n} w_i\widehat{x}_i$*.*

Cenu za jednotku produktu y označme symbolom p. Potom zisk firmy pri technológii $(x_1, \ldots, x_n, y)^T$ definujeme ako rozdiel príjmov py a nákladov $\langle w, x\rangle$, t.j. $py - \langle w, x\rangle$. Ak firma hľadá objem výroby y, pri ktorom maximalizuje svoj zisk, snaží sa maximalizovať funkciu $\Pi(x) = pf(x) - C(y, w)$, kde $y = f(x)$ je produkčná funkcia technológie firmy. Inými slovami, firma maximalizuje rozdiel medzi príjmom a nákladmi. Jej cieľom je stanoviť taký optimálny objem vstupu $\widetilde{x} \in \mathbb{R}^n_+$, že $\forall x \in \mathbb{R}^n_+ : \Pi(\widetilde{x}) \geq \Pi(x)$. Nutnou podmienkou, aby $\widehat{y}$ riešilo úlohu $p\widehat{y} - C(w, \widehat{y}) = \max\{py - C(w, y)\}$, je

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \widehat{y}}(p\widehat{y} - C(w, \widehat{y})) &= 0\,, \\ \frac{\partial C(w, \widehat{y})}{\partial \widehat{y}} &= p. \end{aligned} \tag{4.1}$$

Definujme hraničné náklady firmy MC vzťahom $MC(w, y) = \frac{\partial C(w,y)}{\partial y}$. Potom podmienku (4.1) je možné zapísať v tvare $MC(\widehat{y}) = p$. Inými slovami, nutnou podmienkou maximalizácie zisku firmy je rovnosť hraničných nákladov a ceny produktu.

4.2 Model čerpania obmedzených zdrojov

Vyčerpateľný zdroj definujeme ako zásobu určitého materiálu, ktorého máme k dispozícií len v obmedzenom množstve. Nech S označuje veľkosť zásob daného zdroja. Predpokladajme, že ťažbu zdroja začneme v čase $T = 0$ a skončíme v čase $T > 0$. Označme $g(t)$ ťažbu zdroja v čase t. Potom platí nerovnosť

$$\int_0^T g(t)\,dt \leq S. \tag{4.2}$$

Uvažujme plné využitie vyčerpateľného zdroja. Potom nerovnosť (4.2) prejde do rovnosti

$$\int_0^T g(t)\,dt = S.$$

Riešenie takéhoto modelu spočíva v stanovení optimálneho režimu ťažby. [10]

4.2.1 Optimalizácia ťažby

Definujme rentu ako ocenenie, ktoré vyjadruje efektívnosť ťažby. Veľkosť renty na začiatku ťažby označme symbolom v. Vzhľadom k obmedzenosti zdroja bude behom ťažby daného zdroja ubúdať, čo vedie k rastu renty v čase. Predpokladajme konštantné tempo rastu renty v čase. Potom renta jednotky vyťaženého zdroja v čase t je daná vzťahom

$$v(t) = v(1 + r)^t,$$

kde $v(t)$ vyjadruje veľkosť renty v čase t a r je diskontný koeficient, ktorý môže vyjadrovať veľkosť úrokovej miery. Diskontovanie renty pre spojitý čas budeme chápať ako limitný prípad nespojitého času:

$$v(t) = \lim_{n\to\infty} v\left(1 + \frac{1}{\frac{n}{r}}\right)^{\frac{n}{r}rt} = ve^{rt}.$$

Ak symbolom C označíme náklady na vyťaženie jednotky zdroja, potom rovnica

$$p(t) = ve^{rt} + C$$

vyjadruje ocenenie ponuky zdroja v čase t. [10]

4.2.2 Predpoklady modelu

Dôležitou súčasťou modelu je dopytová funkcia zdroja. Predpokladajme, že je hladká a nerastúca na intervale $(0, \infty)$. Symbolom p označme cenu zdroja a symbolom q požadované množstvo. Potom dopytová funkcia má tvar $q = f(p)$. Ďalej predpokladajme, že existuje cena $\widetilde{p}$, pri ktorej je dopyt $\widetilde{q} = f(\widetilde{p})$ po danom zdroji nulový. Keďže funkcia f je podľa predpokladu spojitá, množina cien s nulovým dopytom je uzavretá. Symbolom $\bar{p}$ označme minimálnu cenu, pri ktorej je dopyt po zdroji nulový (tzv. kritická cena). Dopytová funkcia f je tak definovaná na intervale $(0, \infty)$ nasledovne:

$$
\begin{aligned}
f(p) > 0 \quad &\text{pre} \quad p \in (0, \bar{p}) \\
f(p) = 0 \quad &\text{pre} \quad p \in \langle\, \bar{p}, \infty)
\end{aligned}
$$

Uvažujme klesajúcu funkciu f na intervale $(0, \bar{p})$. Predpokladajme, že je známy priebeh dopytovej funkcie aj hodnoty paramterov r, C a S. Pre existenciu riešenia modelu je podstatný predpoklad, aby pre ľubovoľnú veľkosť zdroja S a každé obdobie T existovala cena platná pre počiatočný okamih ťažby $p(0)$ tak, že

$$
\begin{aligned}
\int_0^T f([p(0) - C]e^{rt} + C)\, dt &= S, \qquad (4.3) \\
[p(0) - C]e^{rT} + C &= \bar{p}. \qquad (4.4)
\end{aligned}
$$

Výraz $p(0)-C$ vyjadruje veľkosť renty na začiatku ťažby. Výraz $[p(0)-C]e^{rt}$ vyjadruje rentu za jednotku zdroja v čase t a výraz $[p(0) - C]e^{rt} + C$ označuje cenu ponuky v čase t. Výraz

$$f([p(0) - C]e^{rt} + C)$$

vyjadruje množstvo zdroja vyťaženého a predaného za cenu ponuky v čase t. Rovnice (4.3) a (4.4) vyjadrujú podmienku, že pre každú veľkosť zdroja a ľubovoľnú dĺžku trvania ťažby existuje počiatočná cena pokrývajúca náklady ťažby tak, že zdroj je naplno vyčerpaný (rovnica (4.3)) a efektívny dopyt naplno uspokojený (rovnica (4.4)). [10]

4.2.3 Podmienky rovnováhy

Uvažujme zobrazenie (krivku vývoja ocenenia ponuky), ktoré každému časovému okamihu priradí ocenenie ponuky, t.j. minimálnu cenu, pri ktorej je efektívne ťažiť daný zdroj. Podmienkou pre zahájenie ťažby je, aby existovala taká cena $p(0)$, že $p(0) \geq C$. Táto podmienka je však splnená podľa predpokladov z predchádzajúcej časti.

Predpokladajme, že ponuka je pružná. Inými slovami, v každom časovom okamihu sa bude predávať za cenu ponuky (resp. cenu optimálneho plánu)

$$p(t) = ve^{rt} + C\,, \qquad t \in \langle 0, T \rangle.$$

Z predpokladov modelu vyplýva, že $p(0) < \bar{p}$, inak by integrand zo vzťahu (4.3) nadobúdal nulové hodnoty. Avšak potom by bol i integrál na ľavej strane rovnice (4.3) nulový a pre $S > 0$ by nemohol byť splnený vzťah (4.3). Teda ak v čase $T = 0$ platí

$$p(0) = v + C < \bar{p}\,,$$

potom pre dostatočne malé t platí:

$$ve^{rt} + C \leq \bar{p}. \tag{4.5}$$

Vo vzťahu (4.5) je výraz na ľavej strane rastúci a spojitý v t, a preto existuje také T, že

$$C + ve^{rT} = \bar{p}. \tag{4.6}$$

Akonáhle $t > T$, v ťažbe sa nebude pokračovať, pretože pre minimálnu rentabilnú cenu $C + e^{rt}$ platí

$$C + ve^{rt} > C + e^{rT} = \bar{p}.$$

Znamená to, že cena je väčšia ako kritická cena, a teda dopyt, ktorý zodpovedá tejto cene, bude nulový. Pri takejto cene by produkt nebol realizovaný. Časový vývoj ocenenia ponuky je tak na intervale $\langle 0, T \rangle$ vyjadrený rovnicou

$$p(t) = C + ve^{rt}.$$

Ťažba bude zahájená v čase $T = 0$ a ukončená v okamihu, keď prestane byť rentabilná. To nastane vtedy, keď sa ocenenie ponuky rovná kritickej cene. Rovnica (4.6) určuje vzájomnú závislosť endogénnych premenných T a v. Jednoznačne budú tieto premenné určené ďalšou podmienkou rovnováhy, ktorá stanovuje úplné využitie zdroja:

$$\int_0^T f(C + ve^{rt})\, dt = S. \tag{4.7}$$

Rovnice (4.6) a (4.7) nazveme podmienkami rovnováhy systému. [10]

4.2.4 Ocenenie obmedzeného zdroja

Celkový efekt obmedzeného zdroja vyjadruje veličina, ktorú nazveme cena obmedzeného zdroja. Cena obmedzeného zdroja je daná súčtom ročných diskontovaných efektov príslušného zdroja. V nasledovných odsekoch označme cenu zdroja symbolom V a diskontný koeficient symbolom r.

Definujme cenu nereprodukovateľného zdroja pre diskrétny čas. Efekt realizovaný v čase t označme symbolom $\delta(t)$. Diskontovaný efekt zdroja, ktorého ťažba bola zahájená v čase $T = 0$, a ktorý je realizovaný v okamihu t, je daný výrazom $\frac{\delta(t)}{(1+r)^t}$. Potom cena zdroja je daná vzťahom

$$V = \frac{\delta(1)}{(1+r)} + \ldots + \frac{\delta(T)}{(1+r)^T} \, ,$$

kde $T > 0$ označuje dĺžku ťažby zdroja až do jeho úplného vyčerpania. Ak je doba čerpania neobmedzená, potom cena zdroja je daná súčtom nekonečného radu

$$V = \sum_{t=1}^{\infty} \frac{\delta(t)}{(1+r)^t}.$$

Ak je naviac efekt daného zdroja konštantný ($\delta(t) \equiv \delta$), potom pre cenu zdroja platí:

$$V = \sum_{t=1}^{\infty} \frac{\delta}{(1+r)^t} = \frac{\delta}{1+r} \frac{1}{1-\frac{1}{1+r}} = \frac{\delta}{r}.$$

V spojitom prípade je diskontovaná renta pre časový okamih t daná výrazom $\delta(t)e^{-rt}$. Pre cenu zdroja platí:

$$V = \int_0^T \delta(t)e^{-rt}dt.$$

Ak je doba T neobmedzená, bude cena zdroja daná nevlastným integrálom

$$V = \int_0^\infty \delta(t)e^{-rt}dt.$$

V prípade konštatného efektu zdroja ($\delta(t) \equiv \delta$) pre cenu zdroja platí:

$$V = \int_0^\infty \delta e^{-rt}dt = \delta \int_0^\infty e^{-rt}dt = \delta \left[\frac{e^{-rt}}{-r} \right]_0^\infty = \frac{\delta}{r}.$$

V diskrétnom aj spojitom prípade je cena zdroja pri konštantnej hodnote efektu zdroja rovnaká. [10]

Ako sme uvideli, matematické modelovanie ekonomických procesov je zvyčajne založené na niekoľkých dôležitých predpokladoch. V niektorých prípadoch sú tieto predpoklady prijateľné, inokedy sú splnené len v zriedkavých prípadoch. Napriek tomu sú však moderné matematické modely považované za dostatočne spoľahlivý nástroj pri analýze ekonomických procesov.

Model oceňovania finančných derivátov

Cenné papiere sú v súčasnosti bežne zaužívaným a čoraz viac preferovaným spôsobom investovania. Obchodovanie na finančných trhoch však prináša i riziká, ktoré vznikajú v dôsledku kolísavého vývoja cien obchodovateľných aktív. V tejto kapitole sa venujeme moderným matematickým metódam, na základe ktorých je možné analyzovať riziko ohrozujúce naše investície.

Finančné deriváty

Snahou každého racionálneho investora je minimalizovať možné straty plynúce z prudkého poklesu cien akcií. Jedným z účinných nástrojov na dosiahnutie tohto cieľa je použitie zaisťovacích nástrojov, akými sú rôzne druhy derivátov akcií. Finančné deriváty sú základným nástrojom zabezpečovania investora voči riziku. Ich hodnota je odvodená (derivovaná) z hodnoty iných aktív. Najznámejším príkladom je opcia, ktorá dáva vlastníkovi právo, nie však povinnosť kúpiť, resp. predať dané podkladové aktívum za vopred dohodnutú cenu vo vopred stanovenom expiračnom čase. [11]

Problém oceňovania opcií

Uvažujme kúpu opcie na nákup akcií k určitému dátumu za vopred dohodnutú cenu. Ak cena akcie vzrastie nad dohodnutú cenu pred vypršaním termínu, kúpime si ju za pôvodne dohodnutú cenu, obratom ju na trhu predáme, a tak realizujeme zisk. Ak cena akcie nepresiahne dohodnutú cenu, nemusíme ju kupovať, ale stratíme tak peniaze, za ktoré sme opciu kúpili. Problém investorov spočíva v optimálnom stanovení ceny opcie na podkladové aktívum. [3]

Praktické potreby investorov napokon podnietili vznik moderných finančných modelov. [11] Výsledkom bol Black-Scholesov model oceňovania finančných derivátov, ktorý v roku 1973 prezentovali americkí ekonómovia Fischer Black a Myron Scholes. Významnú úlohu na ceste k zostaveniu modelu zohral japonský matematik Kijoši Itó.

V nasledujúcich častiach definujeme základné pojmy z teórie stochastických procesov, opíšeme základné nástroje stochastickej analýzy a dokážeme kľúčové tvrdenie teórie náhodných procesov – Itóovu lemu. Cieľom tejto kapitoly je vysvetliť diferenciálnu Black-Scholesovu rovnicu oceňovania finančných derivátov a zároveň poukázať na vplyv financií na rozvoj matematiky.

Základné vlastnosti štatistických parametrov

V ďalších častiach tejto kapitoly je nevyhnutné ovládať operácie so základnými štatistickými parametrami spojitých náhodných premenných. Definujme preto základné vlastnosti strednej hodnoty $E(.)$ a variancie $Var(.)$.

Definícia 5.1. *Nech X je spojitá náhodná premenná z rozdelenia s hustotou $f(x)$. Potom $E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\,dx$ je stredná hodnota a $Var(X) = E([X - E(X)]^2)$ variancia náhodnej premennej X. Ak X a Y sú nezávislé náhodné premenné, potom $\forall c \in \mathbb{R}$ platí:*

$$
\begin{aligned}
&E(c) = c && Var(c) = 0 \\
&E(X+Y) = E(X) + E(Y) && Var(X+Y) = Var(X) + Var(Y) \\
&E(cX) = cE(X) && Var(cX) = c^2 Var(X) \\
&E(c+X) = c + E(X) && Var(c+X) = Var(X)
\end{aligned}
$$

Všetky vlastnosti okrem $Var(X+Y) = Var(X) + Var(Y)$ platia aj bez podmienky nezávislosti náhodných premenných X a Y.

5.1 Úvod do stochastických procesov

Časový vývoj obchodovateľných aktív je často nestály, vykazujúci väčšiu alebo menšiu vychýlenosť. Tieto zmeny poukazujú na stochastický charakter vývoja cien rôznych akcií a indexov na svetových burzách. [11]

Definícia 5.2 (Podľa [11])**.** *Stochastický proces je t-parametrický systém náhodných premenných $\{X(t), t \in I\}$, kde I je interval alebo diskrétna množina indexov.*

Definícia 5.3 (Podľa [11])**.** *Markovov proces je taký stochastický proces, pre ktorý platí, že ak je daná hodnota $X(s)$, tak budúce hodnoty $X(t)$ pre $t > s$ môžu závisieť iba od $X(s)$, nie však od predošlých hodnôt $X(u)$ pre $u < s$.*

Nakoľko jedine súčasné hodnoty cien akcií by mali slúžiť na vytváranie budúcich hodnôt, predpokladáme markovovský charakter stochastického vývoja cien akcií. [11]

Definícia 5.4 (Podľa [11]). *Brownov pohyb* $\{X(t), t \geq 0\}$ *je* t*-parametrický systém náhodných veličín, pričom*

i) všetky prírastky $X(t+\Delta) - X(t)$ *majú normálne rozdelenie so strednou hodnotou* $\mu\Delta$ *a disperziou* $\sigma^2\Delta$*,*

ii) pre každé delenie $t_0 = 0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n$ *sú prírastky* $X(t_1) - X(t_0)$, $X(t_2) - X(t_1), \ldots, X(t_n) - X(t_{n-1})$ *nezávislé náhodné premenné s paramterami podľa bodu* i),

iii) $X(0) = 0$.

Brownov pohyb s parametrami $\mu = 0$ *a* $\sigma^2 = 1$ *nazývame Wienerov proces.*

Wienerov proces budeme označovať ako $\{w(t), t \geq 0\}$. Jeho prírastky za krátky časový okamih dt označíme symbolom dw, t.j. $dw(t) = w(t+dt) - w(t)$. Pre štatistické parametre Wienerovho procesu platí: $E(dw(t)) = 0$, $Var(dw(t)) = dt$. Prírastky dw sa dajú vyjadriť v tvare $dw = \phi\sqrt{dt}$, kde $\phi \sim \mathcal{N}(0,1)$. Vyplýva to z transformácie náhodnej premennej. Ak $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, potom $\frac{X-\mu}{\sqrt{\sigma^2}} \sim \mathcal{N}(0,1)$.

Analyzujme Brownov pohyb $\{X(t), t \geq 0\}$ s parametrami μ a σ z hľadiska jeho prírastkov $dX(t) = X(t+dt) - X(t)$. Pre strednú hodnotu a disperziu platí:

$$\begin{aligned} E(dX(t)) &= E(X(t+dt) - X(t)) = \mu dt\,, \\ Var(dX(t)) &= Var(X(t+dt) - X(t)) = \sigma^2 dt = \sigma^2 Var(dw(t)). \end{aligned}$$

To znamená, že Brownov pohyb môžeme charakterizovať jeho deterministickou a fluktuačnou zložkou $dX(t) = c + af(t)$, pričom stredná hodnota $E(dX(t)) = \mu dt$ a variancia $Var(dX(t)) = \sigma^2 Var(dw(t))$ musia byť zachované. Využitím vlastností strednej hodnoty a variancie dostávame:

$$\begin{aligned} E(dX(t)) &= E(c + af(t)) = c + aE(f(t)) = \mu dt\,, \\ Var(dX(t)) &= Var(c + af(t)) = a^2 Var(f(t)) = \sigma^2 Var(dw(t)). \end{aligned} \tag{5.1}$$

Z podmienky (5.1) vyplýva, že $a = \sigma$, $f(t) = w(t)$, a preto $c = \mu dt$. Prírastky $dX(t)$ tak môžeme vyjadriť v tvare totálneho diferenciálu

$$dX(t) = \mu dt + \sigma dw(t). \tag{5.2}$$

Rovnicu (5.2) nazývame stochastická diferenciálna rovnica. [11]

5.2 Základné nástroje stochastickej analýzy

5.2.1 Itóova lema

Hlavnou úlohou v teórií oceňovania finančných derivátov je analýza funkcií, ktorých jedna premenná je náhodnou premennou spĺňajúcou určitú stochastickú diferenciálnu rovnicu. Dôležitou súčasťou tejto analýzy je Itóova lema, ktorá je základným tvrdením stochastického diferenciálneho kalkulu. Itóova lema poskytuje ideu, ako zostaviť stochastickú diferenciálnu rovnicu opisujúcu vývoj ľubovoľnej hladkej funkcie $f(x,t)$, pričom premenná x je riešením zadanej stochastickej diferenciálnej rovnice. [11]

Lema 5.1 (Podľa [11], Itóova lema)**.** *Nech $f(x,t)$ je hladká funkcia dvoch premenných, pričom premenná x je riešením stochastickej diferenciálnej rovnice*

$$dx = \mu(x,t)dt + \sigma(x,t)dw\ ,$$

kde w je Wienerov proces. Potom prvý diferenciál funkcie f je daný vzťahom

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2(x,t)\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)dt\ ,$$

dôsledkom čoho funkcia f vyhovuje stochastickej diferenciálnej rovnici

$$df = \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \mu(x,t)\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{2}\sigma^2(x,t)\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)dt + \sigma(x,t)\frac{\partial f}{\partial x}dw. \tag{5.3}$$

Dôkaz: Funkciu $f = f(x,t)$ rozvinieme do Taylorovho radu druhého stupňa:

$$df = \frac{\partial f}{\partial t}dt + \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(dx)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial t}dxdt + \frac{\partial^2 x}{\partial t^2}(dt)^2\right) + \text{č.v.r.}$$

Na základe vlastnosti $dw = \phi\sqrt{dt}$, kde $\phi \sim \mathcal{N}(0,1)$, dostávame:

$$(dx)^2 = \sigma^2(dw)^2 + 2\mu\sigma\ dw\ dt + \mu^2(dt)^2 \approx \sigma^2 dt + O((dt)^{3/2}) + O((dt)^2).$$

Podobne výraz $dx\ dt = O((dt)^{3/2}) + O((dt)^2)$, a tak rozvoj diferenciálu df podľa prírastkov dt a dx je možné napísať v tvare

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2(x,t)\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)dt.$$

Dosadením výrazu $dx = \mu(x,t)dt + \sigma(x,t)dw$ pre diferenciál dx dostávame vzťah (5.3). □

5.2.2 Itóov integrál a izometria

Ďalším dôležitým nástrojom v analýze stochastických procesov je tzv. Itóov integrál a izometria. Z definície Wienerovho procesu $\{w(t), t \geq 0\}$ vyplýva: $w(t) \sim \mathcal{N}(0,t)$. Túto skutočnosť môžeme zapísať ako

$$\int_0^t dw(\tau) = w(t) - w(0) = w(t) \sim \mathcal{N}(0,t).$$

To znamená, že pre konštantnú funkciu $f(\tau) \equiv \gamma$ platí:

$$\begin{aligned} \int_0^t f(\tau)dw(\tau) &= \gamma \int_0^t dw(\tau) = \gamma w(t) - \gamma w(0) = \\ &= \gamma w(t) \sim \mathcal{N}(0, \gamma^2 t) = \mathcal{N}(0, \int_0^t f^2(\tau)d\tau). \end{aligned}$$

Uvedená identita poskytuje návod, ako zaviesť tzv. Itóov integrál funkcie $f : (0,t) \to \mathbb{R}$ takej, že $\int_0^t f^2(\tau)d\tau < \infty$. [11]

Definícia 5.5 (Podľa [11], Itóov integrál)**.** *Integrál*

$$\int_0^t f(\tau)dw(\tau) := \lim_{\nu\to 0}\sum_{i=0}^{n-1} f(\tau_i)(w(\tau_{i+1}) - w(\tau_i)) ,$$

kde $\nu = \max\,(\tau_{i+1} - \tau_i)$ ***je norma delenia*** $0 = \tau_0 < \tau_1 < \ldots < \tau_n = t$ ***intervalu*** $(0,t)$ ***a*** *konvergenciu rozumieme podľa pravdepodobnosti, nazývame Itóov integrál.*

Z úvodných poznatkov o prírastkoch Wienerovho procesu vyplýva, že $w(\tau_{i+1}) - w(\tau_i) \sim \mathcal{N}(0, \tau_{i+1} - \tau_i)$. Nech funkcia f je konštantná na každom intervale $[\tau_i, \tau_{i+1}]$. Potom platí:

$$E\left(\sum_{i=0}^{n-1} f(\tau_i)(w(\tau_{i+1}) - w(\tau_i))\right) = \sum_{i=0}^{n-1} f(\tau_i)E(w(\tau_{i+1}) - w(\tau_i)) = 0.$$

Keďže prírastky $w(\tau_{i+1}) - w(\tau_i)$ sú nezávislé a $w(\tau_{i+1}) - w(\tau_i) = \phi_i\sqrt{\tau_{i+1} - \tau_i}$, $\phi_i \sim \mathcal{N}(0,1)$, tak pre varianciu platí:

$$\begin{aligned} Var\left(\sum_{i=0}^{n-1} f(\tau_i)(w(\tau_{i+1}) - w(\tau_i))\right) &= \sum_{i=0}^{n-1} Var\left(f(\tau_i)(w(\tau_{i+1}) - w(\tau_i))\right) = \\ = \sum_{i=0}^{n-1} Var\left(f(\tau_i)(\phi_i\sqrt{\tau_{i+1} - \tau_i})\right) &= \sum_{i=0}^{n-1} E\left([f(\tau_i)(\phi_i\sqrt{\tau_{i+1} - \tau_i})]^2\right) = \end{aligned}$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} f^2(\tau_i)E(\phi_i^2)(\tau_{i+1} - \tau_i) = \left| \begin{array}{c} Var(\phi_i) = E([\phi_i - E(\phi_i)]^2) \\ 1 = E(\phi_i^2) \end{array} \right| = \sum_{i=0}^{n-1} f^2(\tau_i)(\tau_{i+1} - \tau_i).$$

Po dodatočných úvahách [11, s. 31] dostávame jeden z podstatných výsledkov stochastického kalkulu pre Itóov integrál – Itóovu izometriu. [11]

Lema 5.2 (Podľa [11])**.** *Nech pre merateľnú funkciu* $f : (0,t) \to \mathbb{R}$ *platí* $\int_0^t f^2(\tau)d\tau < \infty$. *Potom existuje Itóov integrál* $\int_0^t f(\tau)dw(\tau)$, *ktorý predsatvuje náhodnú premennú s normálnym rozdelením* $\mathcal{N}(0, \sigma^2(t))$, *kde* $\sigma^2(t) = \int_0^t f(\tau)^2 d\tau$. *Z toho vyplýva, že platia identity:*

$$
\begin{aligned}
E\left(\int_0^t f(\tau)dw(\tau)\right) &= 0\,, \\
E\left(\left[\int_0^t f(\tau)dw(\tau)\right]^2\right) &= \int_0^t f(\tau)^2 d\tau.
\end{aligned}
$$

Posledná identita sa nazývya Itóova izometria.

5.3 Black-Scholesov model

Vysvetlenie Black-Scholesovej diferenciálnej rovnice budeme sledovať na príklade európskej kúpnej opcie. Európska kúpna opcia je kontrakt, v ktorom majiteľ opcie získava právo, ale nie povinnosť kúpiť akciu v presne určenom expiračnom čase za vopred dohodnutú cenu. Toto právo má istú hodnotu, a preto zaň treba v čase uzavretia kontraktu zaplatiť tzv. opčnú prémiu. Pre vypisovateľa opcie ako aj pre jej držiteľa je dôležité vedieť, ako stanoviť spravodlivú hodnotu prémie tak, aby ani jedna zo strán nebola zvýhodnená.

Zaveďme nasledovné označenia:

S – cena aktíva,
V – hodnota opcie na dané aktívum,
T – expiračná doba, resp. termín vypršania derivátu,
t – časová premenná; $t \in [0, T]$.

Úlohou je nájsť rovnicu, ktorá opisuje vzťah pre funkciu ceny opcie $V = V(S,t)$ ako funkcie aktuálnej ceny akcie S a času t. Samotné odvodenie rovnice pozostáva z dvoch častí.

V prvej časti určíme stochastickú rovnicu, podľa ktorej sa správa ľubovoľná hladká funkcia $V = V(S,t)$ od stochasticky meniacej sa ceny akcie S a času t.

V druhej časti je úlohou skombinovať portfólio pozostávajúce z akcií jedného druhu, opcií na tieto akcie a bezrizikových dlhopisov tak, aby sa neutralizovalo vystavenie portfólia riziku. Snaha o dosiahnutie bezrizikového portfólia je základným predpokladom pre odvodenie Black-Scholesovej rovnice. [11]

Ďalej sa bližšie budeme venovať prvej časti. Viac o vytvorení bezrizikového portfólia čitateľ nájde v literatúre [11, s. 34].

5.3.1 Stochastická rovnica pre derivát stochastickej ceny akcie

Definícia 5.6 (Podľa [11]). *Ak* $\{X(t), t \geq 0\}$ *je Brownov pohyb s parametrami* μ, σ *a* $y_0 \in \mathbb{R}^+$, *tak systém náhodných premenných* $\{Y(t) = y_0 e^{X(t)}, t \geq 0\}$ *nazývame geometrický Brownov pohyb.*

Náhodný vývoj ceny akcie ako funkcie času $S = S(t)$ budeme modelovať pomocou stochastickej diferenciálnej rovnice reprezentujúcu geometrický Brownov pohyb

$$dS = \mu S dt + \sigma S dw \,, \tag{5.4}$$

kde dS označuje zmenu ceny akcie za časový okamih dt, μ je očakávaný výnos alebo trend vývoja akcie, σ je volatilita časového vývoja akcie a dw je diferenciál Wienerovho procesu.

Nech funkcia $V = V(S,t)$ je nejaká hladká funkcia dvoch premenných, pričom premenná S je funkciou času $S = S(t)$. Zároveň S vyhovuje stochastickej diferenciálnej rovnici (5.4), a teda $\mu(S,t) = \mu S$, $\sigma(S,t) = \sigma S$. Potom podľa Itóovej lemy (Lema 5.1) cena derivátu akcie, resp. funkcia $V(S,t)$ náhodného procesu S, vyhovuje stochastickej diferenciálnej rovnici

$$dV = \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \mu S \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \right) + \sigma S \frac{\partial V}{\partial S} dw. \tag{5.5}$$

Rovnica (5.5) predstavuje stochastickú diferenciálnu rovnicu opisujúcu vývoj ľubovoľnej hladkej funkcie (derivátu) ceny akcie a času. [11]

5.3.2 Black-Scholesova rovnica

Použitím bezrizikového portfólia a za platnosti dodatočných predpokladov [7, s. 105] je možné odvodiť výslednú Black-Scholesovu rovnicu na oceňovanie opcií

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS\frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0 \,,$$

kde r je bezriziková úroková miera. [11]

Literatúra [7, s. 102] úvádza prehľadný postup, ako odvodiť Black-Scholesovu rovnicu na základe piatich vstupov. Ak označíme aktuálnu hodnotu kúpnej opcie C, cenu podkladového aktíva S, realizačnú cenu opcie K, čas vypršania opcie T, volatilitu podkladového aktíva σ, bezrizikovú úrokovú mieru r a distribučnú funkciu normálneho rozdelenia $\mathcal{N}(0,1)$ Φ, môžeme Black-Scholesovu rovnicu zapísať v tvare

$$C = S\Phi\left(\frac{\ln\frac{S}{K} + rT + \frac{1}{2}\sigma^2 T}{\sigma\sqrt{T}} \right) - Ke^{-rT}\Phi\left(\frac{\ln\frac{S}{K} + rT - \frac{1}{2}\sigma^2 T}{\sigma\sqrt{T}} \right).$$

Opísali sme finančné nástroje, ktoré síce riziko nikdy neodstránia, umožnia ho však analyzovať, zmerať a podľa toho stanoviť optimálnu cenu opcie na podkladové aktívum. Black-Scholesov model, ďalej rozpracovaný americkým ekonómom Robertom Mertonom, zohral dôležitú úlohu v rozvoji novodobého akciového trhu. Okrem toho pomohol investorom premeniť trh s derivátmi na lukratívny priemysel. [3]

Finančné deriváty a problém ich oceňovania podnietili vznik nových matematických konceptov (Itóov integrál) a tvrdení (Itóova lema). Tie sa stali základným kameňom pri vzniku novej teórie, ktorá je dnes známa ako Itóov kalkul, resp. teória stochastického diferenciálneho počtu.

Záver

V práci sme sa zaoberali ukážkami problémov z ekonomickej a finančnej oblasti, ktoré posunuli vývoj matematiky vpred. Cieľom práce bolo poukázať na význam ekonomiky a financií v súvislosti so vznikom nových matematických postupov, teórií a disciplín.

Z historických príkladov zo 17. storočia sme uviedli problémy z oblasti hazardu a financií. Vysvetlili sme Fermatov a Pascalov matematický princíp spravodlivého rozdelenia stávky v hazardej hre a na probléme zloženého úročenia sme objasnili význam čísla e.

V súvislosti s teóriou lineárneho programovania sme uviedli motivačné príklady z ekonomickej oblasti s cieľom poukázať na ich význam pri hľadaní všeobecného a efektívneho algoritmu riešenia úloh lineárneho programovania.

Na konkrétnom príklade sme opísali princíp hry Cournotovho duopolu, uviedli spôsob nájdenia ekvilibria a vysvetlili súvis Cournotovho modelu s rozvojom teórie hier. Spomenuli sme problém obchodného cestujúceho, vysvetlili jeho podstatu a poukázali na jeho prínos v oblasti teórie grafov.

Ďalej sme sa zaoberali matematickým modelovaním ekonomických procesov. Uvideli sme model produkcie a model čerpania obmedzených zdrojov, v rámci ktorých sme poukázali na potrebu konštrukcie matematického modelu za účelom podrobnej analýzy ekonomických procesov.

V závere práce sme sa zaoberali problémom oceňovania finančných derivátov. Definovali sme a opísali základné nástroje stochastickej analýzy, na základe ktorých sme odvodili a vysvetlili parciálnu diferenciálnu Black-Scholesovu rovnicu oceňovania derivátov. Uviedli sme nové matematické konspekty a postupy, ktoré viedli k vzniku teórie stochastického diferenciálneho počtu.

Môžeme sa domnievať, že praktické potreby ekonómov, finančníkov a investorov v ďalších rokoch podnietia matematikov k formovaniu nových matematických postupov a teórií. Tie možno vyplnia a vysvetlia dodnes chýbajúce a nevyjasnené miesta matematiky. Tu sa naskytuje otázka: *"Bola matematika v priebehu dejín objavená alebo vytvorená?"*

Literatúra

[1] BRUNOVSKÝ, P. *Mikroekonómia* [online]. [cit. 16. apríla 2011]. Text k prednáškam. Dostupné na internete: ⟨http://www.iam.fmph.uniba.sk/institute/brunovsky⟩.

[2] CRILLY, T. *Matematika*: 50 myšlienok, ktoré by ste mali poznať. Bratislava: SLOVART, 2011. ISBN 978-80-556-0294-3.

[3] DEVLIN, K. *Jazyk matematiky*: Jak zviditelnit neviditelné. Praha: Dokořán, 2003. ISBN 80-86569-09-8.

[4] KLUVÁNEK, I., MIŠÍK, L., ŠVEC, M. *Matematika I.* Druhé vydanie. Bratislava: SVTL, 1963.

[5] KNOR, M. *Kombinatorika a teória grafov I.* Bratislava: Vydavateľstvo UK, 2000. ISBN 80-223-1339-4.

[6] LIVIO, M. *Je Bůh matematik?*. Praha: Dokořán, 2010. ISBN 978-80-7363-282-3.

[7] MELICHERČÍK, I., OLŠAROVÁ, L., ÚRADNÍČEK, V. *Kapitoly z finančnej matematiky.* Bratislava: EPOS, 2005. ISBN 80-8057-651-3.

[8] PLESNÍK, J. *Lineárne programovanie.* 2010. Poznámky k prednáškam.

[9] PLESNÍK, J., DUPAČOVÁ, J., VLACH, M. *Lineárne programovanie.* Bratislava: ALFA, 1990. ISBN 80-05-00679-9.

[10] SOJKA, J., WALTER, J. a kol. *Matematické modelovanie ekonomických procesov.* Bratislava: ALFA, 1986

[11] ŠEVČOVIČ, D., STEHLÍKOVÁ, B., MIKULA, K. *Analytické a numerické metódy oceňovania finančných derivátov.* Bratislava: Nakladateľstvo STU, 2009. ISBN 978-80-227-3014-3.

[12] Wikipédia. *Cournot competition* [online]. [cit. 10. mája 2011]. Text v anglickom jazyku. Dostupné na internete ⟨http://en.wikipedia.org/wiki/Cournot_competition⟩.

[13] Wikipédia. *Dopravní problém* [online]. [cit. 26. marca 2011]. Text v českom jazyku. Dostupné na internete: ⟨http://cs.wikipedia.org/wiki/Dopravní_problém⟩.

[14] Wikipédia. *Problém obchodného cestujúceho* [online]. [cit. 27.apríla 2011]. Dostupné na internete: ⟨http://sk.wikipedia.org/wiki/Problém_obchodného_cestujúceho⟩.

[15] Wikipédia. *Problem of points* [online]. [cit. 26. marca 2011]. Text v anglickom jazyku. Dostupné na internete: ⟨http://en.wikipedia.org/wiki/Problem_of_points⟩.

[16] http://www.cs.sunysb.edu/~algorith/files/hamiltonian-cycle.shtml. [cit. 27. apríla 2011].

[17] http://www.financnik.sk/financie.php?did=47. [cit. 26. marca 2011].