UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE

Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

ZAISTENÉ A POISTENÉ STRATÉGIE

2011 Veronika Kleinová

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE

Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

Zaistené a poistené stratégie

Bakalárska práca

Evidenčné číslo: f1d2df9f-828f-438d-94f7-c754737a2f8b

Študijný program: Ekonomická a finančná matematika

Študijný odbor: 9.1.9 Aplikovaná matematika

Školiace pracovisko: Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky

Vedúci bakalárskej práce: Mgr. Igor Melicherčík, PhD.

Bratislava 2011 **Veronika Kleinová**

Univerzita Komenského v Bratislave
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

ZADANIE ZÁVEREČNEJ PRÁCE

Meno a priezvisko študenta:	Veronika Kleinová
Študijný program:	ekonomická a finančná matematika (Jednoodborové štúdium, bakalársky I. st., denná forma)
Študijný odbor:	9.1.9. aplikovaná matematika
Typ záverečnej práce:	bakalárska
Jazyk záverečnej práce:	slovenský

Názov : Zaistené a poistené stratégie

Cieľ : Porovnanie stratégií s rôznou formou riadenia rizika.

Literatúra : [1] Vladimír Mlynarovič: Some Portfolio Insurance Strategies. Proceedings of the conference Mathematical methods in Economics, Liberec, September 17-19 2008.

Anotácia : Zaistené stratégie sú momentálne moderným trendom v investovaní. Pri garancii určitej čiastky na horizonte sa sľubuje pokiaľ možno čo najvyšší zisk. Práca má takéto stratégie porovnať so stratégiou, kde je riziko kontrolované veľkosťou poistenia dosiahnutia určitej hranice.

Vedúci : doc. Mgr. Igor Melicherčík, PhD.

Dátum zadania: 08.11.2010

Dátum schválenia: 08.11.2010

....
doc. RNDr. Margaréta Halická, CSc.
garant študijného programu

Kleinová
....
študent

....
vedúci práce

Dátum potvrdenia finálnej verzie práce, súhlas s jej odovzdaním (vrátane spôsobu sprístupnenia)

3/5/2011

....
vedúci práce

Prehlásenie

Čestne prehlasujem, že túto prácu som vypracovala samostatne s použitím uvedenej literatúry a ďalších informačných zdrojov.

V Bratislave, 2. júna 2011 ....

podpis autora práce

Poďakovanie

Týmto sa chcem poďakovať vedúcemu práce Mgr. Igorovi Melicherčíkovi, PhD., za cenné rady, pripomienky a pomoc pri realizácii bakalárskej práce. Ďalej chcem poďakovať Michalovi Tomleinovi za pomoc pri práci s LaTeX-om a v neposlednom rade Štefanovi Mitríkovi za grafickú úpravu použitých obrázkov.

Abstrakt

Kleinová, Veronika: Zaistené a poistené stratégie [Bakalárska práca], Univerzita Komenského v Bratislave, Fakulta matematiky, fyziky a informatiky, Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky; školiteľ: Mgr. Igor Melicherčík, PhD.

Spoločným znakom zaistených a poistených stratégií je kontrola rizika. Zaistené stratégie sa snažia o čo najvyšší zisk pri garantovaní čiastky, ktorá sa stanoví ako určité percento z počiatočnej investície. Pri poistených stratégiách je riziko kontrolované výškou poistenia dosiahnutia určitej hodnoty. Táto bakalárska práca sa zaoberá optimálnym prerozdelením aktív investora podľa štyroch rôznych metód a to zo zaistených stratégií metódou CPPI (Constant Proportion Portfolio Insurance) a metódou OBPI (Obtion Based Portfolio Insurance), z poistených stratégií metódou OBPI bez zrealizovania poistenia a stratégiou VAR (Value at Risk). Vysvetlíme podstatu jednotlivých metód a na záver vykonáme ich porovnania.

Kľúčové slová: CPPI (Constant Proportion Portfolio Insurance), OBPI (Obtion Based Portfolio Insurance), VAR (Value at Risk), riziko, poistenie.

Abstract

Kleinová, Veronika: The portfolio insurance strategies and hedging strategies [Bachelor thesis], Comenius University Bratislava, Faculty of Mathematics, Physics, and Informatics, Department of Applied Mathematics and Statistics; Thesis Consultant: Mgr. Igor Melicherčík, PhD.

A common feature of hedging strategies and insured strategies is a control of risk. The hedging strategies seek to maximize profit while the particular amount of the initial investment is guaranteed. The insured strategies control a risk by the cost of the insurance to achieve a certain value. This thesis deals with the optimal reallocation of investor assets by the four different methods. From the area of the hedging strategies we concentrate on the CPPI (Constant Proportion Portfolio Insurance) and the OBPI strategy (Obtion Based Portfolio Insurance) and from the domain of the insured strategies the OBPI strategy without realization of the insurance and the strategy VAR (Value at Risk). We describe the essence of these methods and finally we make a comparison.

Key words: CPPI (Constant Proportion Portfolio Insurance), OBPI (Obtion Based Portfolio Insurance), VAR (Value at Risk), risk, insurance.

Obsah

Zoznam obrázkov

Zoznam tabuliek

Úvod

Je všeobnecne známe, že ak pri investovaní chceme dosiahnuť vyšší zisk, musíme rátať so zvýšeným rizikom. Ako však obmedziť riziko a napriek tomu dosiahnuť väčšie zhodnotenie v porovnaní napríklad s investíciou do bezrizikového aktíva? Jednou z odpovedí na túto otázku sú zaistené a poistené stratégie, ktoré nám ponúkajú možnosť čiastočne sa podielať na zisku akcií v prípade rastúceho trhu a zároveň obmedzujú riziko. Zaistené stratégie nám garantujú, že hodnota portfólia neklesne pod nami vopred stanovenú hranicu, poistenými stratégiami kontrolujeme riziko výškou poistenia dosiahnutia určitej hranice. Ďalším spôsobom kontroly rizika je stanoviť si, akú najväčšiu stratu sme ochotní akceptovať s určitou pravdepodobnosťou. Cieľom tejto bakalárskej práce je porovnať spomenuté metódy, vďaka ktorým môžeme obmedziť riziko.

Bakalárska práca je rozdelená do troch kapitol. V prvej kapitole sa zameriame na opcie, ktoré sú nevyhnutným finančným nástrojom pre niektoré zo zaistených a poistených stratégií, konkrétne pre metódu OBPI (Obtion Based Portfolio Insurance) a metódu OBPI bez zrealizovania poistenia. Je veľmi dôležité porozumieť im, aby sme si uvedomili, ako je riziko obmedzované práve pri týchto dvoch spomenutých stratégiách. Uvedieme základnú charakteristiku opcií, odvodenie výpočtu ich súčasnej hodnoty a predajno-kúpnu paritu, ktorá určuje vzťah medzi dvoma druhmi opcií. Druhá kapitola je venovaná práve dvom najrozšírenejším metódam zaistených stratégií, metóde CPPI a metóde OBPI. Okrem matematického modelu a popisu, ako je pri jednotlivých metódach zaručená garantovaná hranica, pod ktorú v čase splatnosti neklesne hodnota portfólia, ponúkneme aj porovnanie týchto metód. V poslednej časti budeme analyzovať štyri metódy ako rozdeliť kapitál medzi rizikové a bezrizikové aktívum, aby sme určitým spôsobom obmedzili riziko a na druhej strane mohli dosiahnuť čo najvyšší zisk. Porovnáme tieto metódy na základe popisných štatistík aj konkrétnej funkcie užitočnosti a vyhodnotíme, ktorá je vhodná pre rizikovo averzného investora, resp. ktorá je vhodná pre investora, ktorého postoj k riziku je neutrálny alebo kladný.

1 Opcie

V nasledujúcej časti si vysvetlíme základnú charakteristiku opcií, vypočítame ich súčasnú hodnotu a odvodíme Black-Scholesov vzorec, pričom budeme vychádzať z [1].

Finančné deriváty sú finančné nástroje, ktoré sú odvodené od hodnoty podkladových aktív (akcie, dlhopisy), menových kurzov, úrokových mier, burzových indexov, resp. od iných nástrojov. Základnými typmi finančných derivátov sú opčné deriváty, forwardy, futurity a swapy. Opcie, ktoré sa zaraďujú medzi opčné deriváty, predstavujú právo (nie povinnosť) kúpiť alebo predať podkladové aktívum za vopred dohodnutú cenu (realizačnú cenu) vo vopred dohodnutý deň splatnosti (maturita). Vypisovateľ opcie od kupujúceho získava opčnú prémiu (trhová cena, za ktorú sa opcia predáva) a zároveň mu dáva právo požadovať od neho, aby podkladové aktívum kúpil alebo predal v závislosti od typu opcie.

Ak držiteľ opcie získava právo na kúpu daného cenného papiera v danom čase za dohodnutú cenu ide o kúpnu opciu (call option). Predajná opcia (put option) predstavuje právo predať podkladové aktívum.

Opcie môžu byť európskeho alebo amerického typu v závislosti od toho, kedy má vlastník opcie právo zrealizovať opčný kontrakt (kúpiť alebo predať podkladové aktívum). Ak až v deň maturity, vtedy ide o opcie európskeho typu alebo ho môže zrealizovať kedykoľvek do tohto dňa, vtedy je opcia amerického typu.

Hodnota opcie je vyjadrená ako jej vnútorná hodnota, od ktorej je odpočítaná opčná prémia. Vnútorná hodnota je suma, ktorá by bola vyplatená držiteľovi opcie, ak by ju uplatnil. V prípade predajnej opcie je to

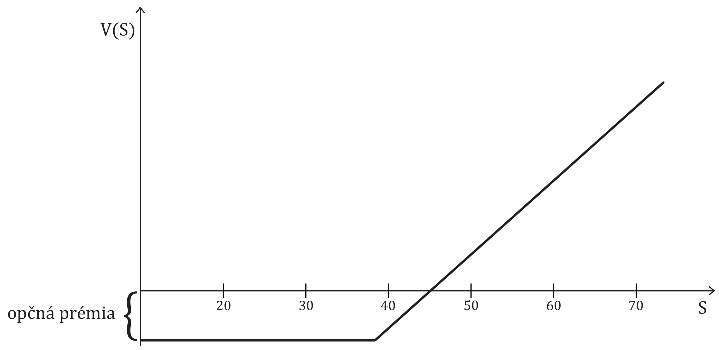
$$max[(K - S_t), 0] = (K - S_t)^+,$$

pre kúpnu opciu

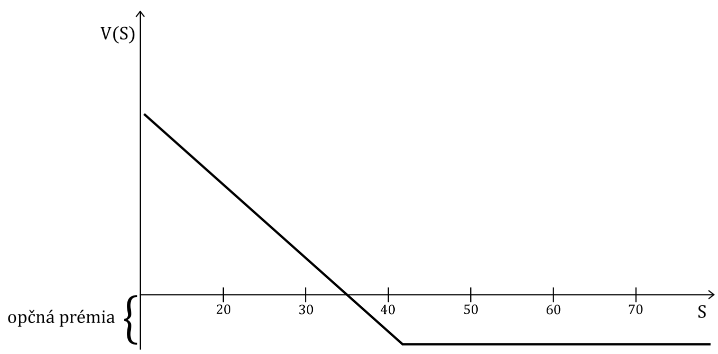
$$max[(S_t - K), 0] = (S_t - K)^+,$$

kde K je realizačná cena opcie a S_t je cena podkladového aktíva v čase t.

Na Obr. 1 je znázornená hodnota kúpnej opcie (resp. hodnota predajnej opcie Obr. 2) V v závislosti od ceny podkladového aktíva S.



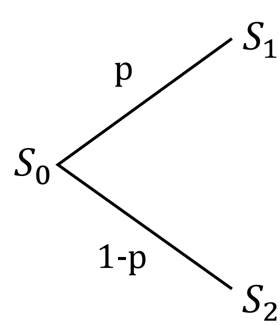
Obr. 1: Hodnota kúpnej opcie.



Obr. 2: Hodnota predajnej opcie.

1.1 Súčasná hodnota opcií

Povedzme, že cena akcie je S_0 a za čas T stúpne jej hodnota na S_1 s pravdepodobnosťou p a s pravdepodobnosťou $(1-p)$ klesne na S_2. Táto modelová situácia je znázornená jednokrokovým binárnym stromovým modelom na Obr. 3. Za predpokladu spojitého úročenia a bezrizikovej úrokovej miery r vypočítame, aká je súčasná hodnota opcie f_0 odvodenej od tejto akcie, ktorej realizačná cena je K.



Obr. 3: Jednokrokový binárny stromový model.

Ak by akcia nadobudla hodnotu S_1, hodnota opcie v čase T by bola f_1, v druhom prípade f_2 . Vytvoríme si portfólio tak, že si kúpime jednu opciu a predáme k kusov akcie. V čase 0 je hodnota portfólia rovná $f_0 - k.S_0$. Potrebujeme eliminovať riziko, čiže určiť počet kusov akcií tak, aby hodnota portfólia v čase T bola v oboch prípadoch rovnaká, čiže

$$f_1 - k.S_1 = f_2 - k.S_2,$$

odtiaľ

$$k = \frac{f_1 - f_2}{S_1 - S_2}.$$

Čiže v každom prípade bude v čase T hodnota nášho portfólia $f_2 - k.S_2$, takže už stačí túto hodnotu len diskontovať do súčasnosti a získame, že

$$f_0 - k.S_0 = e^{-rT}(f_2 - k.S_2).$$

Po vyjadrení f_0 a dosadení za k

$$\begin{aligned} f_0 &= \frac{f_1 - f_2}{S_1 - S_2} S_0 + e^{-rT}(f_2 - \frac{f_1 - f_2}{S_1 - S_2} S_2) \\ &= e^{-rT}\left(\frac{f_1 S_0 e^{rT} - f_2 S_0 e^{rT} + f_2 S_1 - f_1 S_2}{S_1 - S_2}\right) \\ &= e^{-rT}\left(\frac{(S_1 - S_0 e^{rT}) f_2 + (S_0 e^{rT} - S_2) f_1}{S_1 - S_2}\right) \\ &= e^{-rT}((1-q) f_2 + q f_1), \end{aligned}$$

kde

$$q = \frac{S_0 e^{rT} - S_2}{S_1 - S_2}$$

sa nazýva rizikovo neutrálna pravdepodobnosť. Všeobecne

$$q = \frac{S_{now} e^{r\delta t} - S_{down}}{S_{up} - S_{down}}, \tag{1}$$

kde S_{now} je hodnota akcie na začiatku kroku, S_{up} hodnota akcie pri zvýšení jej ceny za čas δt, S_{down} hodnota akcie pri poklese jej ceny za čas δt.

Dá sa ukázať, že $q \in \langle 0, 1 \rangle$, inak by nastala arbitráž. Môžeme teda povedať, že súčasná hodnota opcie je strednou hodnotou pri rizikovo neutrálnych pravdepodobnostiach. Pri viackrokovom binárnom strome by sme postupovali odzadu a postupne riešili jednotlivé časti ako v jednokrokovom binárnom stromovom modeli. Súčasnú hodnotu opcie môžeme teda zapísať v tvare

$$f_0 = E_Q(e^{-rT}X), \tag{2}$$

kde E_Q je stredná hodnota pri rizikovo neutrálnej pravdepodobnosti Q a X je náhodná premenná, ktorá vyjadruje hodnotu opcie v čase maturity T, napríklad pre kúpnu opciu $X = (S_T - K)^+$.

1.2 Black - Scholesove vzorce

Na modelovanie ceny euróskej kúpnej opcie na akciu je dôležitý vývoj ceny akcie. Budeme predpokladať, že totálny výnos akcie je náhodný výber z lognormálneho rozdelenia. Čiže $\frac{S_t}{S_{t-1}}$ pre $t = 1, 2, \ldots, T$ sú nezávislé rovnako rozdelené náhodné premenné, ktoré majú lognormálne rozdelenie s parametrami μ a σ^2. Náhodná premenná $Y_t = \ln \frac{St}{S_{t-1}}$ má potom normálne rozdelenie s tými istými parametrami. Využijeme poznatok, že ak každé $Y_t \sim N(\mu, \sigma^2)$ a sú nezávislé pre všetky $t = 1, 2, \ldots, T$, tak vektor $(Y_1, Y_2, \ldots, Y_T)^T$ má T - rozmerné normálne rozdelenie $N_T\left(\begin{pmatrix}\mu\\ \mu\\ \vdots\\ \mu\end{pmatrix}, \sigma^2 I\right)$, kde $\begin{pmatrix}\mu\\ \mu\\ \vdots\\ \mu\end{pmatrix}$ je $T \times 1$ rozmerný vektor a I je jednotková matica rozmeru $T \times T$. Náhodná premenná $\sum_{t=1}^T Y_t = \begin{pmatrix}1, 1, \cdots, 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}Y_1\\ Y_2\\ \vdots\\ Y_T\end{pmatrix}$ má normálne rozdelenie so strednou hodnotou $\begin{pmatrix}1, 1, \cdots, 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mu\\ \mu\\ \vdots\\ \mu\end{pmatrix} = \mu T$ a disperziou $\begin{pmatrix}1, 1, \cdots, 1\end{pmatrix}\sigma^2 I\begin{pmatrix}1\\ 1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix} = \sigma^2 T.$

Teda

$$P = \sum_{t=1}^{T} Y_t = \sum_{t=1}^{T} \ln \frac{St}{S_{t-1}} = \ln \prod_{t=1}^{T} \frac{St}{S_{t-1}} = \ln \frac{S_T}{S_0}$$

má normálne rozdelenie so strednou hodnotou μT a disperziou $\sigma^2 T$. Odtiaľ

$$S_T = S_0 e^P.$$

Keďže $P \sim N(\mu T, \sigma^2 T)$, P môžeme napísať v tvare $\mu T + \sigma\sqrt{T}V$, kde $V \sim N(0,1)$, teda

$$S_T = S_0 e^{\mu T + \sigma\sqrt{T}V}, \tag{3}$$

pričom

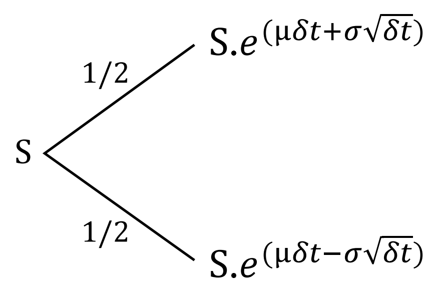
S_0 - cena akcie v čase 0,

μ - stredná hodnota,

σ - volatilita akcie,

V - náhodná premenná, ktorá má normálne rozdelenie so strednou hodnotou 0 a disperziou 1.

Teraz si vytvoríme binárny stromový model, ktorý bude zodpovedať vývoju akcie opísanej predchádzajúcou rovnicou. Časový interval $\langle 0, T\rangle$ rozdelíme na n rovnakých dielov $\delta t = \frac{T}{n}$. Za každý časový okamih δt sa cena akcie vyvinie nasledovne: s pravdepodobnosťou $\frac{1}{2}$ jej hodnota stúpne na $S.e^{\mu\delta t + \sigma\sqrt{\delta t}}$ a s pravdepodobnosťou $\frac{1}{2}$ klesne na $S.e^{\mu\delta t - \sigma\sqrt{\delta t}}$. Jeden krok popísanej situácie je znázornený na Obr.4.



Obr. 4: Jeden krok v binárnom modeli pre odvodenie ceny akcie.

Na vyjadrenie hodnoty S_T využijeme náhodnú premennú X_n, ktorá má binomické rozdelenie s parametrami n a $p = \frac{1}{2}$. Môžeme ju zapísať v tvare

$$X_n = \sum_{i=1}^{T} U_i,$$

kde Y_i sú náhodné nezávislé premenné s alternatívnym rozdelením s parametrom $p = \frac{1}{2}$. Čiže každé U_i nám generuje hodnotu 0 alebo 1, obe s pravdepodobnosťou $\frac{1}{2}$. My však potrebujeme hodnoty 1 alebo -1 a to docielime tak, že vytvoríme premennú $\widetilde{U}_i = 2U_i - 1$, teda $\widetilde{X}_n = \sum_{i=1}^{T} \widetilde{U}_i = \sum_{i=1}^{T}(2U_i - 1) = 2X_n - n$ vygeneruje n-krát hodnotu 1 alebo -1 vždy s pravdepodobnosťou $\frac{1}{2}$ a sčíta tieto hodnoty. Hodnotu akcie v čase T môžeme teraz vyjadriť nasledovne:

$$\begin{aligned} S_T &= S_0.e^{\mu n\delta t + (2X_n - n)\sigma\sqrt{\delta t}} \\ &= S_0.e^{\mu T + \frac{2X_n - n}{\sqrt{n}}\sigma\sqrt{T}} = S_0.e^{\mu T + Z\sigma\sqrt{T}}. \end{aligned} \tag{4}$$

Aby sme dokázali, že rovnica (4) je ekvivalentná vzťahu (3), musíme ukázať, že náhodná premenná $Z = \frac{2X_n - n}{\sqrt{n}}$ má rozdelenie $N(0,1)$. Keďže $X_n \sim Bin(n, \frac{1}{2})$

$$E(2X_n) = 2E(X_n) = 2np = 2n\frac{1}{2} = n,$$

$$D(2X_n) = 4D(X_n) = 4np(1-p) = 4n\frac{1}{2}(1-\frac{1}{2}) = n.$$

Podľa Moivreovej-Laplaceovej centrálnej limitnej vety, ak má náhodná premenná X binomické rozdelenie, normovaná náhodná veličina $\frac{X - E(X)}{\sqrt{D(X)}}$ má pre veľké n približne rozdelenie $N(0,1)$. Túto vetu aplikujeme na našu premennú $2X_n$, teda $Z = \frac{2X_n - E(2X_n)}{\sqrt{D(2X_n)}} = \frac{2Xn - n}{\sqrt{n}}$ má aproximatívne normované normálne rozdelenie, čiže sme dokázali, že nami zostrojený binárny stromový model zodpovedá vývoju hodnoty akcie zo vzťahu (3).

Na určenie súčasnej hodnoty opcie potrebujeme okrem modelu vývoja hodnoty akcie vypočítať aj rizikovo neutrálnu pravdepodobnosť q. Dosadením do vzťahu (1) na strane 6

$$q = \frac{Se^{r\delta t} - Se^{\mu\delta t - \sigma\sqrt{\delta t}}}{Se^{\mu\delta t + \sigma\sqrt{\delta t}} - Se^{\mu\delta t - \sigma\sqrt{\delta t}}}.$$

Po substitúcii $\delta t = x^2$:

$$q = \frac{e^{rx^2} - e^{\mu x^2 - \sigma x}}{e^{\mu x^2 + \sigma x} - e^{\mu x^2 - \sigma x}}. \tag{5}$$

Pomocou Taylorovej vety rozvinieme funkciu e^x v okolí bodu 0:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + O(x^{n+1}),$$

kde v $O(x^{n+1})$ sú zahrnuté len členy stupňa $n+1$ a vyššieho. Po dosadení rozvoja do vzťahu (5) a zanedbaní členov stupňa vyššieho ako 2

$$\begin{aligned} q &= \frac{(1 + rx^2) - (1 + (\mu x^2 - \sigma x) + \frac{\sigma^2 x^2}{2!}) + O(x^3)}{(1 + (\mu x^2 + \sigma x) + \frac{\sigma^2 x^2}{2!}) - (1 + (\mu x^2 - \sigma x) + \frac{\sigma^2 x^2}{2!}) + O(x^3)} \\ &= \frac{\frac{rx - \mu x + \sigma - \frac{\sigma^2 x}{2!}}{2\sigma} + O(x^2)}{1 + O(x^2)}. \end{aligned}$$

Po spätnej substitúcii $x^2 = \delta t = \frac{T}{n}$

$$q = \frac{\frac{1}{2}\left(1 - \sqrt{\frac{T}{n}}\frac{\mu + \frac{\sigma^2}{2} - r}{\sigma}\right) + O\left(\frac{T}{n}\right)}{1 + O\left(\frac{T}{n}\right)}.$$

V pravdepodobnostnej miere Q si náhodnú premennú $Z = \frac{2X_n - n}{\sqrt{n}}$ označíme Z_Q a vypočítame jej strednú hodnotu a disperziu, aby sme mohli v tejto pravdepodobnostnej miere vyjadriť hodnotu akcie v čase T.

$$\begin{aligned} E(Z_Q) = E\left(\frac{2X_n - n}{\sqrt{n}}\right) &= \frac{2nq - n}{\sqrt{n}} \\ &= \frac{n - \sqrt{T}n\frac{\mu + \frac{\sigma^2}{2} - r}{\sigma} + 2O(T) - n - O(T)}{\sqrt{n}\left(1 + O\left(\frac{T}{n}\right)\right)} \\ &= \frac{-\sqrt{T}\frac{\mu + \frac{\sigma^2}{2} - r}{\sigma} + O\left(\frac{T}{\sqrt{n}}\right)}{1 + O\left(\frac{T}{n}\right)}. \end{aligned}$$

Pre veľké n potom platí

$$E(Z_Q) \doteq -\sqrt{T}\frac{\mu + \frac{\sigma^2}{2} - r}{\sigma}.$$

Ľahko sa dá ukázať, že disperzia Z_Q je 1:

$$\begin{aligned} D(Z_Q) = D\left(\frac{2X_n - n}{\sqrt{n}}\right) &= \frac{4}{n}D(X_n) = \frac{4}{n}nq(1-q) \\ &= 4\frac{\frac{1}{2}\left(1 - \sqrt{\frac{T}{n}}\frac{\mu + \frac{\sigma^2}{2} - r}{\sigma}\right) + O\left(\frac{T}{n}\right)}{1 + O\left(\frac{T}{n}\right)}\left(1 - \frac{\frac{1}{2}\left(1 - \sqrt{\frac{T}{n}}\frac{\mu + \frac{\sigma^2}{2} - r}{\sigma}\right) + O\left(\frac{T}{n}\right)}{1 + O\left(\frac{T}{n}\right)}\right). \end{aligned}$$

Pre veľké n

$$D(Z_Q) \doteq 4\left(\frac{\frac{1}{2}(1-0) + 0}{1 + 0}\right)\left(1 - \frac{\frac{1}{2}(1-0) + 0}{1}\right) = 1.$$

Teraz už môžeme napísať hodnotu akcie v čase T nasledovne

$$S_T = S_0 e^{\mu T + Z_Q \sigma \sqrt{T}},$$

kde $Z_Q \sim N(-\sqrt{T}\frac{\mu + \frac{\sigma^2}{2} - r}{\sigma}, 1)$. Teda ekvivalentne pre hodnotu akcie v pravdepodobnostnej miere Q platí

$$\begin{aligned} S_T &= S_0 e^{\mu T - \sqrt{T}\frac{\mu + \frac{\sigma^2}{2} - r}{\sigma}\sigma\sqrt{T} + \sigma\sqrt{T}Z} \\ &= S_0 e^{\sigma\sqrt{T}Z + T\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)}, \end{aligned}$$

kde $Z \sim N(0,1)$. Podľa vzťahu (2) zo strany 7 vypočítame súčasnú hodnotu európskej kúpnej opcie $Call_0$

$$\begin{aligned} Call_0 = E_Q(e^{-rT}X) &= E_Q(e^{-rT}(S_T - K)^+) \\ &= E_Q(e^{-rT}(S_0 e^{\sigma\sqrt{T}Z + T\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)} - K)^+) \\ &= E_Q((S_0 e^{\sigma\sqrt{T}Z - T\frac{\sigma^2}{2}} - Ke^{-rT})^+). \end{aligned}$$

Ak X je náhodná premenná, tak strednú hodnotu $E(g(x))$ vypočítame ako $\int_{-\infty}^{\infty} g(x)f(x)dx$, kde $g(x)$ je funkcia premennej x a $f(x)$ je jej hustota. V našom prípade počítame strednú hodnotu výrazu $E_Q((S_0e^{\sigma\sqrt{T}Z-T\frac{\sigma^2}{2}} - Ke^{-rT})^+)$, kde Z je náhodná premenná, čiže $g(z) = (S_0e^{\sigma\sqrt{T}Z-T\frac{\sigma^2}{2}} - Ke^{-rT})^+$ a hustota $f(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\Pi}}e^{-\frac{z^2}{2}}$, pretože $Z \sim N(0,1)$. Pre súčasnú hodnotu európskej kúpnej opcie $Call_0$ teda platí

$$Call_0 = \int_{-\infty}^{\infty} (S_0e^{\sigma\sqrt{T}z-T\frac{\sigma^2}{2}} - Ke^{-rT})^+ \frac{1}{\sqrt{2\Pi}}e^{-\frac{z^2}{2}}dz.$$

Po zavedení substitúcie $\sigma\sqrt{T}z - T\frac{\sigma^2}{2} = y$

$$Call_0 = \frac{1}{\sqrt{2\Pi\sigma^2T}} \int_{-\infty}^{\infty} (S_0e^y - Ke^{-rT})^+ e^{-\frac{(y+\frac{1}{2}\sigma^2T)^2}{2\sigma^2T}} dy.$$

Funkcia $(S_0e^y - Ke^{-rT})^+$ bude nenulová, iba ak

$$S_0e^y > e^{-rT}Ke^{-rT}$$
$$y > \ln\frac{K}{S_0} - rT.$$

Ak $\ln\frac{K}{S_0} - rT$ označíme M, potom

$$\begin{aligned}
Call_0 &= \frac{S_0}{\sqrt{2\Pi\sigma^2T}} \int_M^{\infty} e^{y-\frac{(y+\frac{1}{2}\sigma^2T)^2}{2\sigma^2T}} dy - \frac{1}{\sqrt{2\Pi\sigma^2T}} Ke^{-rT} \int_M^{\infty} e^{-\frac{(y+\frac{1}{2}\sigma^2T)^2}{2\sigma^2T}} dy \\
&= \frac{S_0}{\sqrt{2\Pi\sigma^2T}} \int_M^{\infty} e^{-\frac{(y-\frac{1}{2}\sigma^2T)^2}{2\sigma^2T}} dy - \frac{1}{\sqrt{2\Pi\sigma^2T}} Ke^{-rT} \int_M^{\infty} e^{-\frac{(y+\frac{1}{2}\sigma^2T)^2}{2\sigma^2T}} dy \\
&= S_0P(Y_1 \geq M) - Ke^{-rT}P(Y_2 \geq M),
\end{aligned}$$

kde $Y_1 \sim N(\frac{1}{2}\sigma^2T, \sigma^2T)$ a $Y_2 \sim N(-\frac{1}{2}\sigma^2T, \sigma^2T)$. Po znormovaní dostávame

$$Call_0 = S_0P\left(\frac{Y_1 - \frac{1}{2}\sigma^2T}{\sigma\sqrt{T}} \geq \frac{M - \frac{1}{2}\sigma^2T}{\sigma\sqrt{T}}\right) - Ke^{-rT}P\left(\frac{Y_2 + \frac{1}{2}\sigma^2T}{\sigma\sqrt{T}} \geq \frac{M + \frac{1}{2}\sigma^2T}{\sigma\sqrt{T}}\right).$$

Ak $X \sim N(0,1)$ platí, že $P(X \geq a) = 1 - P(X \leq a) = 1 - \phi(a)$, kde $\phi(a)$ je distribučná funkcia normovaného normálneho rozdelenia v bode a. V dôsledku toho, že funkcia hustoty normovaného normálneho rozdelenia je párna, platí, že $1 - \phi(a) = \phi(-a)$, dostávame

$$Call_0 = S_0\phi\left(\frac{-M + \frac{1}{2}\sigma^2T}{\sigma\sqrt{T}}\right) - Ke^{-rT}\phi\left(\frac{-M - \frac{1}{2}\sigma^2T}{\sigma\sqrt{T}}\right).$$

Dosadením za $M = \ln\frac{K}{S_0} - rT$ vyjadríme hodnotu európskej kúpnej opcie v čase maturity T nasledovne:

$$Call_0 = S_0\phi\left(\frac{\ln\frac{S_0}{K} + rT + \frac{1}{2}\sigma^2T}{\sigma\sqrt{T}}\right) - Ke^{-rT}\phi\left(\frac{\ln\frac{S_0}{K} + rT - \frac{1}{2}\sigma^2T}{\sigma\sqrt{T}}\right).$$

Pre ľubovoľný čas $t \in \langle 0, T\rangle$ potom platí:

$$\begin{aligned} Call_t = S_t\phi &\left(\frac{\ln\frac{S_t}{K} + r(T-t) + \frac{1}{2}\sigma^2(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right) \\ &- Ke^{-r(T-t)}\phi\left(\frac{\ln\frac{S_t}{K} + r(T-t) - \frac{1}{2}\sigma^2(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right) \end{aligned} \tag{6}$$

a tento vzťah sa nazýva Black-Scholesov vzorec pre hodnotu európskej kúpnej opcie v čase t na akciu, ktorej hodnota v čase t je S_t, pričom realizačná cena je K a maturita T.

1.3 Predajno-kúpna parita

Predajno-kúpna parita je vzťah, ktorý platí medzi hodnotou európskej kúpnej a európskej predajnej opcie, ktoré majú rovnaký čas splatnosti T, majú rovnakú realizačnú cenu K a ktorých podkladovým aktívom je tá istá akcia. Vzťah v čase T má tvar:

$$S_T + Put_T - Call_T = K.$$

O platnosti tohto vzťahu sa presvedčíme tak, že sa pozrieme na 3 situácie, ktoré môžu nastať:

1. $K > S_T$
   $S_T + Put_T - Call_T = S_T + (K - S_T)^+ - (S_T - K)^+ = S_T + (K - S_T) - 0 = K,$
2. $K < S_T$
   $S_T + Put_T - Call_T = S_T + (K - S_T)^+ - (S_T - K)^+ = S_T + 0 - (S_T - K) = K,$
3. $K = S_T$
   $S_T + Put_T - Call_T = S_T + (K - S_T)^+ - (S_T - K)^+ = S_T = K.$

Vo všeobecnosti pre čas $t \in \langle 0, T\rangle$ platí:

$$S_t + Put_t - Call_t = Ke^{-r(T-t)}.$$

Využitím predajno-kúpnej parity a Black-Scholesovho vzorca pre hodnotu európskej kúpnej opcie získavame vzorec pre výpočet hodnoty európskej predajnej opcie

$$\begin{aligned} Put_t &= Ke^{-r(T-t)} - S_t + Call_t \\ &= S_t \left(\phi \left(\frac{\ln \frac{S_t}{K} + r(T-t) + \frac{1}{2}\sigma^2(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \right) - 1 \right) \\ &\quad + Ke^{-r(T-t)} \left(1 - \phi \left(\frac{\ln \frac{S_t}{K} + r(T-t) - \frac{1}{2}\sigma^2(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \right) \right). \end{aligned} \tag{7}$$

2 Zaistené stratégie

Odjakživa je túžbou človeka zbohatnúť a zhodnotiť svoj majetok. Jednou z možností naplnenia tohto cieľa je investovanie voľných finančných prostriedkov do cenných papierov. Investícia na akciových trhoch je veľmi lákavou ponukou z dôvodu možnosti veľkého zárobku, ale prináša so sebou aj riziko, že v prípade nepriaznivého vývoja na trhu, nemusí priniesť žiadny zisk, dokonca môžeme o časť alebo aj celú počiatočnú investíciu prísť. Naopak, investícia do dlhopisov, ktorú využívajú najmä rizikovo averzní investori, so sebou nenesie takmer žiadne riziko, ale aj zisk je tomu úmerný - minimálny. Je tu však aj iné riešenie, ktorým sú zaistené investície. Na rozdiel od akcií, nám zaistené investície nikdy neprinesú na konci obchodovateľného obdobia stratu a v porovnaní s dlhopismi môžeme vďaka nim dosiahnuť vyšší zisk. Ponúkajú nám možnosť participovať na rastúcich trhoch a zároveň nám garantujú čiastku, pod ktorú hodnota našej investície neklesne, čiže nás chránia pred stratami spôsobenými klesaním cien akcií. Zaistenie však určite nie je zadarmo. Cenou pre investora je to, že sa musí vzdať časti svojho potenciálneho zisku, ktorý by mu plynul z investície do akciového trhu v prípade pozitívneho vývoja na trhu.

Zaistené investície sú veľmi obľúbenou formou investovania v Európe, v menšej miere v Amerike a v niektorých krajinách Ázie a existuje ich už viacero druhov. Medzi najrozšírenejšie patria CPPI (Constant Proportion Portfolio Insurance) a OBPI (Option Based Portfolio Insurance).

2.1 CPPI

V nasledujúcej časti sa bližšie pozrieme na metódu CPPI (Constant Proportion Portfolio Insurance), jej podstatu a taktiež matematický popis, pričom budeme vychádzať z [6]. CPPI je metóda investovania, pri ktorej má investor zaručené, že hodnota jeho portfólia bude vždy nad stanovenou hranicou (dnom). Hranicu si určí ako určité percento jeho pôvodného kapitálu, o ktoré nechce na konci investičného obdobia za žiadnu cenu prísť. V čase sa dno bude vyvíjať podľa vzťahu:

$$dP_t = P_t r dt,$$

čiže

$$P_t = P_0 e^{rt},$$

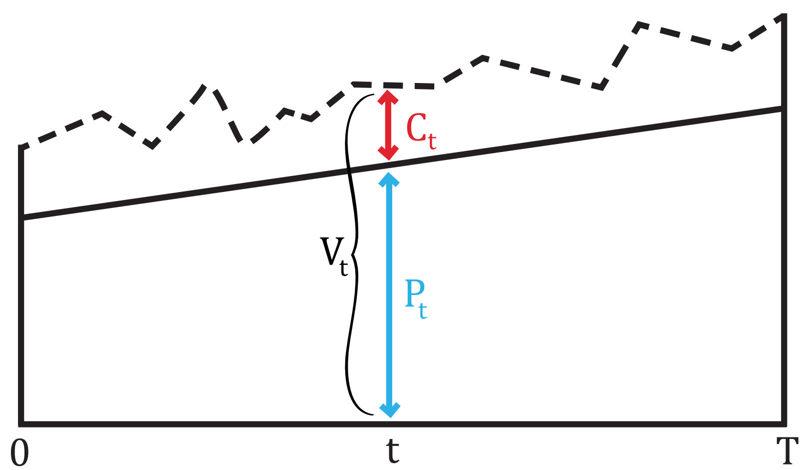
kde P_t je hodnota dna v čase t, P_0 hodnota dna v čase 0, r je bezriziková úroková miera. Rozdiel medzi hodnotou portfólia a dnom sa nazýva vankúš, graficky znázornený na Obr. 5. Platí:

$$C_t = V_t - P_t, \tag{8}$$

C_t - hodnota vankúša v čase t,

V_t - hodnota portfólia v čase t,

P_t - hodnota dna v čase t.



Obr. 5: Vankúš a dno v CPPI metóde.

Investor rozdelí kapitál do akcií (riziková časť) a dlhopisov (bezriziková časť). Hodnota investovaná do akcií (E_t), nazývaná tiež vystavenie, je rovná konštantnému násobku vankúša a platí

$$E_t = mC_t.$$

Multiplikátor $m > 1$, ale v prípade, že $m = 1$, ide o stratégiu "Buy & Hold", pri ktorej portfólio nemusíme rebalancovať (meniť hodnotu investovanú v akciách a dlhopisoch), ale vystavenie sa nastaví len na začiatku a potom sa už s portfóliom do maturity nemanipuluje. Určí sa v závislosti od miery averzie ku riziku. Čím je multiplikátor väčší, tým viac môže portfólio participovať na raste cien akcií, na druhej strane, v prípade poklesu cien akcií sa vystavenie rýchlejšie zmenšuje a ťažšie zachytí prípadný obrat vo vývoji cien. Zvyšok, čiže $(V_t - E_t)$ je investovaný do dlhopisov.

Podľa vzťahu (8) vyjadríme hodnotu portfólia:

$$\begin{aligned} V_t &= C_t + P_t \\ &= C_t + P_0 e^{rt} \end{aligned}$$

Pre hodnotu vankúša C platí:

$$dC_t = d(V_t - P_t) = \frac{dB_t}{B_t}(V_t - E_t) + \frac{dS_t}{S_t}E_t - dP_t,$$

kde $V_t - E_t$ je hodnota investovaná v bezrizikovom aktíve B (dlhopisoch), ktorého hodnota je opísaná vzťahom

$$dB_t = B_t r dt$$

a E_t je vystavenie do rizikového aktíva S (akcií), ktoré sa vyvíja podľa rovnice

$$dS_t = S_t(\mu + \sigma dW_t), \tag{9}$$

pričom W_t je štandardný Brownov pohyb, μ a σ sú kladné konštanty. Čiže platí:

$$\begin{aligned} dC_t &= \frac{dB_t}{B_t}(C_t + P_t - mC_t) + \frac{dS_t}{S_t}mC_t - dP_t \\ &= r.dt(C_t + P_t - mC_t) + (\mu + \sigma dW_t)mC_t - r.P_t dt \\ &= C_t[(r(1-m) + m\mu)dt + m\sigma dW_t] \\ &= C_t[(m(\mu - r) + r)dt + m\sigma dW_t] \end{aligned}$$

a teda

$$C_t = C_0 e^{(m(\mu-r)+r-\frac{m^2\sigma^2}{2})t+m\sigma W_t}. \tag{10}$$

Zo vzťahu (9) vyjadríme hodnotu akcie v čase t:

$$S_t = S_0 e^{(\mu-\frac{1}{2}\sigma^2)t+\sigma W_t}, \tag{11}$$

potom

$$ln\frac{S_t}{S_0} = (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma W_t$$

a odtiaľ

$$W_t = \frac{1}{\sigma}\left[ln\frac{S_t}{S_0} - \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t\right].$$

Ak dosadíme tento výraz do vzťahu (10), dostávame

$$\begin{aligned} C_t &= C_0 e^{(m(\mu-r)+r-\frac{m^2\sigma^2}{2})t+m\sigma\frac{1}{\sigma}\left[ln\frac{S_t}{S_0}-\left(\mu-\frac{1}{2}\sigma^2\right)t\right]} \\ &= C_0 e^{\left(r-m\left(r-\frac{1}{2}\sigma^2\right)-\frac{m^2\sigma^2}{2}\right)t}\left(\frac{S_t}{S_0}\right)^m = \alpha_t S_t^m, \end{aligned}$$

kde

$$\alpha_t = \frac{C_0}{S_0^m} e^\beta t, \qquad \beta = r - m\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right) - \frac{m^2\sigma^2}{2}.$$

Takže hodnotu portfólia môžeme zapísať ako

$$V_t = \alpha_t S_t^m + P_0 e^{rt}. \tag{12}$$

Všimnime si, že hodnota portfólia nezávisí od počtu akcií v portfóliu.

2.2 OBPI

Odvolávajúc sa na [4] metóda OBPI (Option Based Portfolio Insurance) je založená na zaistení portfólia vďaka opciám. Stratégia spočíva v investovaní do rizikového aktíva a put opcie vypísanej na toto aktívum. Hodnota portfólia tak bude v každom prípade nad realizačnou cenou put opcie. Ak cena rizikového aktíva bude v čase maturity pod realizačnou cenou put opcie, investor si uplatní túto opciu a predá akciu. V opačnom prípade opciu nebude realizovať. Čiže hodnotu portfólia v čase T vyjadríme nasledovne:

$$\begin{aligned} V_T &= S_T + Put_T \\ &= S_T + max\{K - S_T, 0\}, \end{aligned}$$

kde S_T je hodnota akcie v čase T, Put_T je hodnota put opcie v čase T na akciu S s maturitou T , K je realizačná cena opcie. Ak využijeme predajno-kúpnu paritu, predchádzajúci vzťah bude mať tvar:

$$\begin{aligned} V_T &= K + Call_T \\ &= K + max\{S_T - K, 0\}. \end{aligned} \tag{13}$$

Takže

$$V_T \begin{cases} K & S_T \leq K \\ S_T & S_T > K. \end{cases}$$

Vidíme, že garantovaná suma, o ktorú na konci investovania investor určite nepríde, je K. Pre hodnotu portfólia v každom čase t platí:

$$V_t = S_t + Put_t = Ke^{-r(T-t)} + Call_t,$$

kde Put_t a $Call_t$ sú hodnoty opcií s podkladovým aktívom S, realizačnou cenou K, maturitou T počítané Black-Scholesovými vzorcami.

2.3 Porovnanie CPPI a OBPI

Hodnotu portfólia v čase t pre metódu CPPI označíme V_t^{CPPI} a pre metódu OBPI V_t^{OBPI}. Predpokladajme, že investujeme podľa obidvoch metód na rovnaký čas T, podkladovým aktívom je tá istá akcia S a na začiatku máme rovnaký kapitál, teda

$$V_0^{CPPI} = V_0^{OBPI}.$$

Vychádzajúc z [3] platí, že ani jedna z týchto stratégií nie je výhodnejšia ako tá druhá pre všetky koncové hodnoty rizikového aktíva, pretože ich výplatné funkcie sa navzájom pretínajú. Pomocou vzťahu (12) vyjadreného v čase T (pre CPPI) a vzťahu (13) (pre OBPI) vypočítame hodnotu portfólia pre rôzne hodnoty akcie v čase maturity. Situácia je znázornená na Obr. 6 pre nasledujúce hodnoty:

$V_0 = 100, K = 100, S_0 = 100, T = 2, r = 0,05, sigma = 0,2.$

Z grafu vidíme, že konečná hodnota portfólia (V_T) je pri malom zvýšení hodnoty akcie najvyššia pri metóde OBPI, pri väčších výkyvoch hodnoty akcie je výnosnejšia metóda CPPI.

Podľa [3] si ukážeme, že metóda OBPI je zovšeobecnenou metódou CPPI. V prípade metódy CPPI je v čase T garantovanou hodnotou P_T a pri metóde OBPI určite neklesne hodnota portfólia pod hladinu K. Z toho vyplýva, že platí:

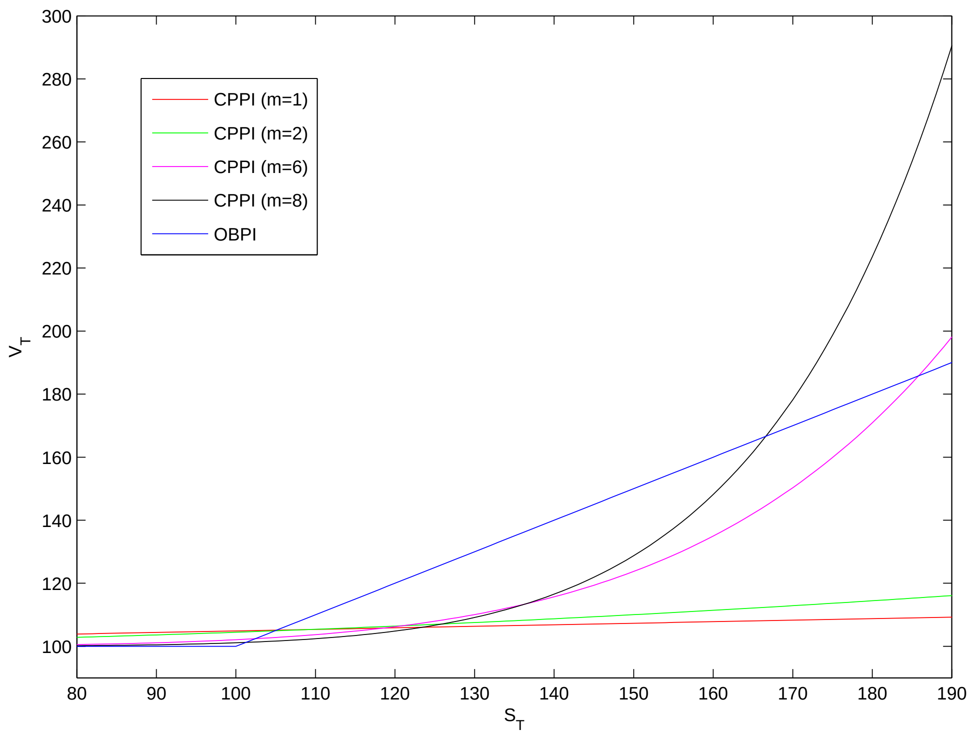
$$P_T = K,$$

v čase t nastáva rovnosť:

$$P_t = Ke^{-r(T-t)}.$$

Pripomeňme si, že hodnota portfólia pre metódu OBPI vyzerá nasledovne:

$$V_t^{OBPI} = Ke^{-r(T-t)} + Call_t.$$



Obr. 6: Porovnanie OBPI a CPPI metódy.

Ako sme si ukázali, $Ke^{-r(T-t)}$ môžeme nazvať dnom a zvyšok, teda $Call_t$ potom zodpovedá hodnote vankúša z metódy CPPI. Preto vo vzťahu pre multiplikátor metódy CPPI, pre ktorý platí $m_t = \frac{E_t}{C_t}$ môžeme vankúš C_t nahradiť kúpnou opciou (E_t je vystavenie do rizikového aktíva). Dostávame:

$$m_t^{OBPI} = \frac{S_t N_t}{Call_t},$$

kde S_t je hodnota akcie v čase t, N_t je počet týchto akcií nakúpených v čase t ($S_t N_t = E_t$), $Call_t$ je hodnota európskej kúpnej opcie, ktorej podkladovým aktívom je S a realizačnou cenou je K. Metóda OBPI je teda ekvivalentná metóde CPPI s multiplikátorom m_t^{OBPI}. Všimnime si však, že zatiaľ čo pri metóde CPPI bol multiplikátor konštantný po celý čas investovania, pri metóde OBPI sa jeho hodnota v čase mení.

3 Stratégie založené na metóde OBPI, CPPI, VAR

V tejto časti sa pozrieme na 4 rôzne prístupy ako rozdeliť kapitál medzi rizikové a bezrizikové aktívum s ohraničením rizika. Nech

V_t – hodnota portfólia v čase t,

T – dĺžka investovania (maturita),

g – garantovaná hranica,

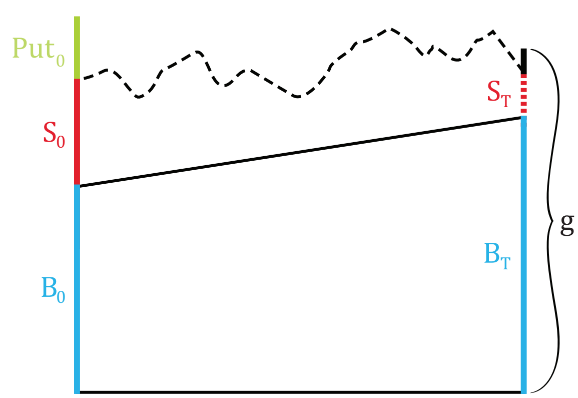
S – hodnota v rizikovom aktíve,

B – hodnota v bezrizikovom aktíve,

r – bezrizikový úrok.

3.1 Metóda OBPI

V prvom prípade zabezpečíme garanciu predajnou opciou, ktorej podkladovým aktívom bude rizikové aktívum z nášho portfólia. Opciou si vlastne poistíme pád hodnoty portfólia pod garantovanú hranicu. Táto stratégia je ekvivalentná už spomínanej metóde OBPI. Portfólio bude obsahovať okrem investície do rizikovej (S) a bezrizikovej časti (B) aj poistenie portfólia. Cena poistenia, ktorá nechceme aby presiahla nami stanovenú časť počiatočného kapitálu, bude vlastne hodnota tejto predajnej opcie (Put). Situácia je graficky znázornená na Obr. (7). Zhodnotenie časti v bezrizikovom aktíve vieme určiť už na začiatku, pretože poznáme bezrizikový úrok. Ak na začiatku investovania je táto hodnota B_0, na konci sa zúročí na B_0e^{rT}. Vývoj rizikovej časti už však vôbec nie je istý, preto nie je na obrázku znázornený plnou čiarou.



Obr. 7: 1. metóda - OBPI.

Ak celková hodnota, ktorá je investovaná v akciách a dlhopisoch bude v čase maturity nižšia ako garantovaná hranica (čo je aj prípad na obrázku), uplatní sa predajná opcia. Realizačná cena tejto opcie (K), čiže cena, za ktorú sa akcia predá, musí byť rovná rozdielu medzi garantovanou hranicou a hodnotou v bezrizikovom aktíve v čase maturity. Matematicky

$$K = g - B_T = g - B_0 e^{rT}, \tag{14}$$

kde K je realizačná cena opcie. Tak sa dosiahne, že pod garantovanú hranicu sa hodnota portfólia určite nedostane. Ak hodnota v rizikovej časti a bezrizikovej časti bude v súčte vyššia ako je garantovaná hranica, opcia sa neuplatní. Platí:

$$V_T \begin{cases} g & S_T + B_T \leq g \\ S_T + B_T & S_T + B_T > g. \end{cases}$$

Všimnime si, že využitím predajno-kúpnej parity pre počiatočnú hodnotu portfólia platí:

$$V_0 = B_0 + S_0 + Put_0 = B_0 + Ke^{-rT} + Call_0.$$

Keďže hodnota Ke^{-rT} sa v čase správa rovnako ako hodnota, ktorá je investovaná do dlhopisu, môžeme napísať:

$$V_0 = B_0^{'} + Call_0,$$

kde $B_0^{'} = B_0 + Ke^{-rT}$.

Úloha ako prerozdeliť počiatočný kapitál, ak za poistenie sme ochotní zaplatiť sumu εV_0, spočíva v maximalizácii hodnoty investovanej v rizikovej časti, pretože pri tej istej cene poistenia máme dolnú hranicu konečnej hodnoty portfólia takú istú (v prípade priaznivého aj nepriaznivého vývoja ceny akcie na trhu), ale v prípade priaznivého vývoja ceny rizikového aktíva dosiahneme vyšší výnos, ak do akcií investujeme vyššiu sumu. Našou úlohou je teda

$$max S_0$$

za podmienky $\qquad$ cena poistenia $\leq \varepsilon V_0$.

Ako už bolo spomenuté, poistenie je rovné hodnote európskej predajnej opcie, z toho vyplýva:

$$\text{cena poistenia} \leq \varepsilon V_0 \Leftrightarrow Put_0 \leq \varepsilon V_0,$$

kde Put_0 je hodnota európskej predajnej opcie vyjadrená Black-Scholesovým vzorcom. Čím bude cena poistenia vyššia, tým vyššia hodnota môže byť investovaná v rizikovom aktíve, preto riešenie úlohy bude spĺňať rovnosť $Put_0 = \varepsilon V_0$. Následne vyjadríme realizačnú cenu opcie zo vzťahu (14):

$$K = g - (V_0 - \varepsilon V_0 - S_0)e^{rT}. \tag{15}$$

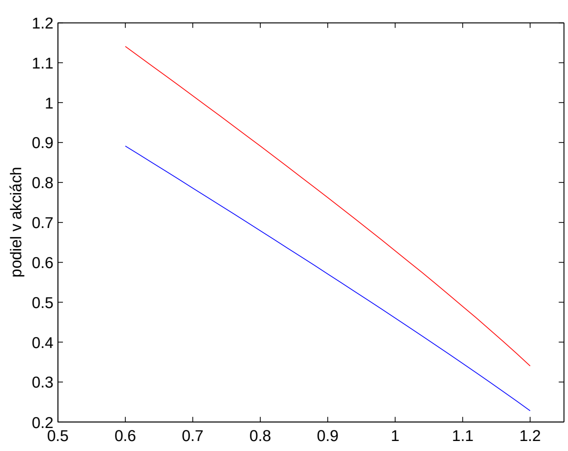
Využitím vzťahu (7) pre hodnotu európskej kúpnej opcie riešime úlohu

$$max S_0$$

za podmienky

$$S_0 \left(\phi \left(\frac{\ln \frac{S_0}{K} + rT + \frac{1}{2}\sigma^2 T}{\sigma\sqrt{T}} \right) - 1 \right) + Ke^{-rT} \left(1 - \phi \left(\frac{\ln \frac{S_0}{K} + rT - \frac{1}{2}\sigma^2 T}{\sigma\sqrt{T}} \right) \right) \leq \varepsilon V_0,$$

kde K je dané vzťahom (15). Na Obr. 8 je znázornené, aká časť portfólia (p) môže byť investovaná v rizikovom aktíve v závislosti od pomeru garantovanej hodnoty k celkovej hodnote počiatočného kapitálu . Červenou farbou je táto závislosť vyjadrená pri podmienke, že sme za poistenie ochotní zaplatiť 5% vstupného kapitálu a modrou farbou je znázornená závislosť pri maximálnej výške poistenia 1% kapitálu.



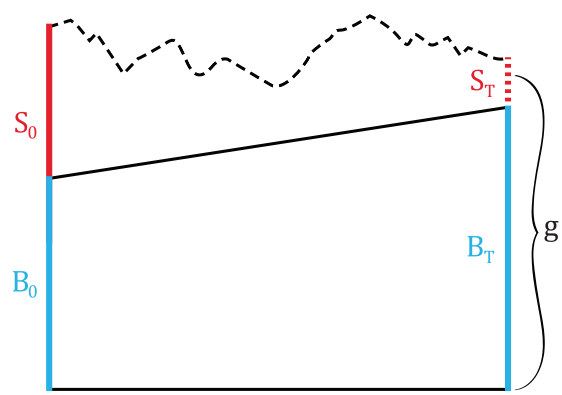
Obr. 8: Závislosť podielu v akciách od garancie.

3.2 Metóda OBPI bez kúpy opcie

Nasledujúca metóda je veľmi podobná predošlej, avšak prerozdelenie kapitálu medzi rizikové a bezrizikové aktívum určíme tak, aby prípadná cena poistenia portfólia proti pádu jeho hodnoty pod garantovanú hranicu nepresiahla nami stanovenú časť počiatočného kapitálu. Ako sme ukázali pri predošlej metóde, cena poistenia je rovná hodnote európskej predajnej opcie na akciu v portfóliu s realizačnou cenou K, ktorá je rovná rozdielu medzi garantovanou hranicou a hodnotou investovanou v bezrizikovom aktíve v čase maturity. Na rozdiel od predchádzajúcej metódy si predajnú opciu v tomto prípade nekúpime, čiže portfólio nebude poistené. Výhodou je, že máme k dispozícii viac prostriedkov na investíciu do akcií a dlhopisov a tým aj potenciálne vyšší výnos, ale garantovanú hranicu nemáme zaručenú. Takže rozdelíme počiatočný kapitál tak, že jeho poistenie by nebolo drahšie ako εV_0. Hodnota investície v čase maturity bude

$$V_T = S_T + B_T$$

v každom prípade, čiže aj vtedy, keď $S_T + B_T \leq g$. Na nasledujúcom obrázku je znázornená možná situácia investovania a vývoj portfólia.



Obr. 9: 2. metóda - OBPI bez kúpy opcie.

Výpočet na určenie prerozdelenia kapitálu bude spočívať vo vyriešení rovnakej maximalizačnej úlohy ako pri predošlej metóde OBPI:

$$maxS_0$$

za podmienky

$$S_0\left(\phi\left(\frac{\ln\frac{S_0}{K}+rT+\frac{1}{2}\sigma^2T}{\sigma\sqrt{T}}\right)-1\right)+Ke^{-rT}\left(1-\phi\left(\frac{\ln\frac{S_0}{K}+rT-\frac{1}{2}\sigma^2T}{\sigma\sqrt{T}}\right)\right)\leq\varepsilon V_0,$$

ale realizačná cena

$$K=g-B_T=g-B_0e^{rT}=g-(V_0-S_0)e^{rT}.$$

3.3 Metóda CPPI

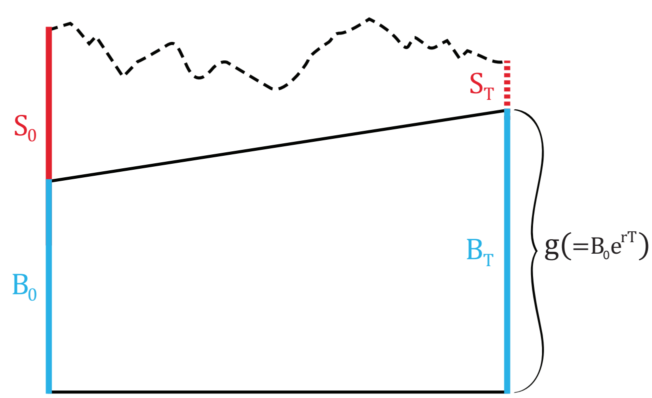
Ďalšou z možností ako určiť hodnotu investovanú do rizikového aktíva a do bezrizikového aktíva tak, aby sme dosiahli garantovanú hranicu je metóda CPPI, ktorej multiplikátor nastavíme na hodnotu 1. Takže počiatočná investícia v dlhopisoch musí byť rovná diskontovanej garantovanej hodnote, matematicky

$$B_0=ge^{-rT},$$

aby na konci investovania bola hodnota v dlhopisoch rovná práve garantovanej hodnote a zvyšok investovaný v akciách môže priniesť zisk navyše, avšak aj v najhoršom prípade, ak by hodnota akcií klesla na 0, hodnota portfólia neklesne pod garantovanú hodnotu. Vieme, že garantovaná hodnota sa stanoví ako určité percento (p) počiatočného kapitálu a teda v akciách je hodnota

$$S_0=B_0-V_0=ge^{-rT}-V_0=V_0(pe^{-rT}-1).$$

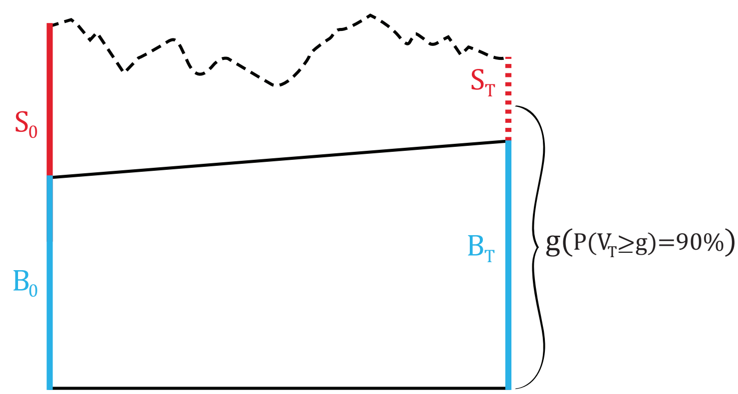
Rozdelenie portfólia pre túto metódu vidíme graficky na Obr. 10.



Obr. 10: 3. metóda - CPPI (s multiplikátorom 1).

3.4 Metóda VAR

Posledná stratégia, ktorú opíšeme je totožná s predchádzajúcou metódou CPPI s multiplikátorom 1, teraz však garantovanú hodnotu nemusíme dosiahnuť s určitosťou, ale požadujeme iba $100(1-\alpha)\%$-nú pravdepodobnosť dosiahnutia tejto hranice. Je samozrejmé, že v rizikovom aktíve bude vyššia hodnota ako v predošlej metóde, tým aj možnosť lepšieho zhodnotenia, ale na druhej strane, nie vždy dosiahneme garantovanú hodnotu, teda je tu možnosť väčšej straty. Táto stratégia sa nazýva VAR (Value at risk), čiže je pri nej stanovená možná najhoršia strata, ktorá nebude prekročená s určitou pravdepodobnosťou ([5]). Rozloženie portfólia vidíme na Obr. 11.



Obr. 11: 4. metóda - VAR (Value at risk).

Aby sme prišli na to, akú hodnotu môžeme investovať do rizikového aktíva, musíme vyriešiť nasledovnú úlohu:

$$P(V_T \geq g) = 1 - \alpha.$$

Vieme, že $V_T = S_T + B_T$ a teda

$$P(S_0 e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)T + \sigma W_T} + (V_0 - S_0)e^{rT} \geq g) = 1 - \alpha.$$

Po úprave sa dostaneme k vyriešeniu úlohy

$$P\left(\frac{W_T}{\sqrt{T}} \geq \frac{ln(\frac{g - V_0 + S_0 e^{rT}}{S_0}) - (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}}\right) = 1 - \alpha,$$

kde $\frac{W_T}{\sqrt{T}} \sim N(0,1)$, pretože $W_T \sim N(0,T)$. Musí platiť

$$\frac{ln(\frac{g - V_0 + S_0 e^{rT}}{S_0}) - (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}} = c_\alpha,$$

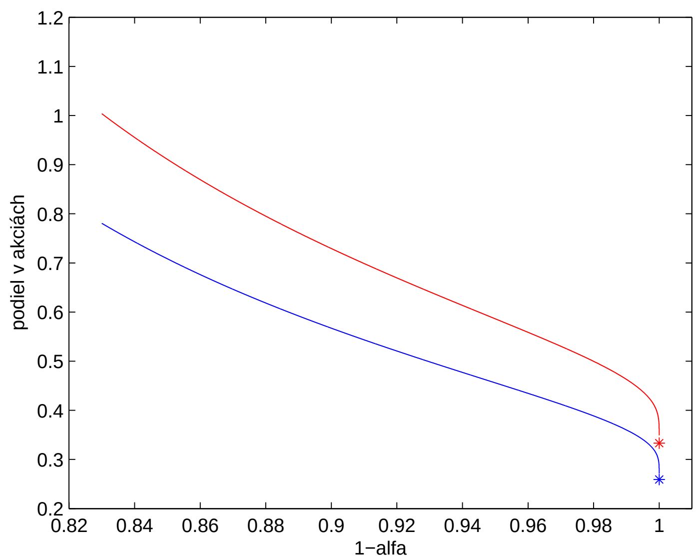
kde c_α je 100α-percentná kritická hodnota normovaného normálneho rozdelenia. Po vyjadrení S_0, čo je vlastne hodnota v rizikovom aktíve a určení garantovanej hodnoty ako určitej časti počiatočného kapitálu dostávame

$$S_0 = \frac{pV_0 - V_0 e^{rT}}{e^{c_\alpha \sigma \sqrt{T} + (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)T} - e^{rT}}.$$

Ak by sme chceli zabezpečiť 100%-nú garanciu ($c_\alpha \to \infty$)

$$S_0 = V_0(pe^{-rT} - 1),$$

čo je presne hodnota, ktorú sme dostali pri predchádzajúcej metóde CPPI s multiplikátorom 1.



Obr. 12: Závislosť podielu v akciách od pravdepodobnosti dosiahnutia garant. hranice.

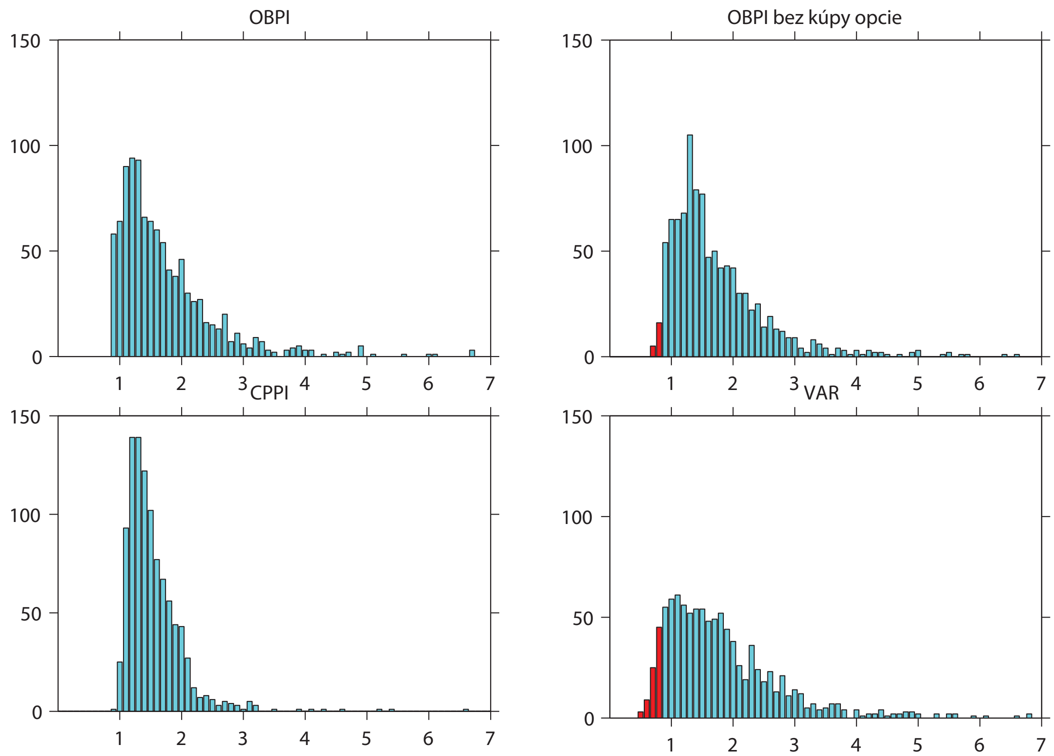
Na Obr. 12 je znázornená závislosť podielu z celkového počiatočného kapitálu v akciách od pravdepodobnosti s akou chceme dosiahnuť garantovanú hodnotu. Modrou farbou je táto závislosť vyjadrená pre garantovanú hranicu rovnú výške počiatočného kapitálu ($p = 1$) a červenou pre garantovanú hodnotu, ktorá tvorí 90% počiatočného kapitálu ($p = 0.9$). Znak $*$ vyjadruje podiel v akciách ak garantovaná hodnota sa rovná počiatočnému kapitálu a chceme ju dosiahnuť so 100%-nou pravdepodobnosťou a znakom $*$ je vyjadrený tento podiel pre 100%-nú garanciu návratu 90% zo vstupného kapitálu.

3.5 Porovnania

V nasledujúcej časti sa pozrieme na porovnanie všetkých 4 spomenutých stratégií investovania do rizikového a bezrizikového aktíva. Prvú spomenutú metódu nazveme „OBPI“, druhú „OBPI bez kúpy opcie“, s treťou budeme pracovať ako s metódou „CPPI“ a pre štvrtú zavedieme názov „VAR“. V každej z metód sme vyjadrili počiatočnú investíciu v rizikovom aktíve a aj pomocou vzťahu (11) vypočítame očakávanú hodnotu portfólia v momente splatnosti. Na určenie konečnej celkovej hodnoty portfólia je potrebné určiť hodnotu v akciovej časti, ktorá záleží od náhodnej premennej $W_T \sim N(0,T)$. Budeme generovať náhodné čísla z tohto rozdelenia a tak získame rôzne hodnoty portfólia v čase maturity a na základe nich znázorníme histogramy, kvantily a iné popisné štatistiky. Pre modelovú situáciu si vstupné parametre, ktoré môžu zodpovedať reálnym hodnotám na finančnom trhu zvolíme nasledovne:
bezrizikový úrok $r = 0.03$,
stredná hodnota $\mu = 0.07$,
volatilita ceny akcie $\sigma = 0.2$,
splatnosť $T = 10$ rokov,
cena poistenia $\epsilon = 1\%$ vstupného kapitálu,
garantovaná hodnota $p = 90\%$ vstupného kapitálu,
pravdepodobnosť dosiahnutia garantovanej hodnoty (pri metóde VAR) $= 90\% (\alpha = 0.1)$.

Na Obr. 13 sú znázornené histogramy pre všetky 4 stratégie. Na x-ovej osi je totálny výnos portfólia $\left(\frac{V_T}{V_0}\right)$, na y-ovej osi koľkokrát bol daný totálny výnos portfólia dosiahnutý z 1000 náhodných simulácií. Červenou farbou sú znázornené tie stĺpce histogramu, ktoré vyjadrujú počet portfólií, ktoré nedosiahli garantovanú hodnotu. Pre dôkladnejšiu analýzu sa v Tab. 1 nachádzajú početnosti totálneho výnosu portfólia pre jednotlivé metódy v daných rozpätiach. Bolo už spomenuté, že obe metódy CPPI a OBPI garantujú, že hodnota celkového portfólia neklesne pod garantovanú hranicu, čo je takisto vidieť z histogramov a stĺpcov tabuľky prislúchajúcim týmto dvom metódam. V prípade OBPI bez kúpy opcie hodnota portfólia klesla pod hodotu 90% vstupného kapitál (garantovaná hodnota pri OBPI a CPPI) v $2,7\%$ prípadov a metódou

VAR sme danú hodnotu nedosiahli v $7,3\%$ prípadov. Z tabuľky ďalej vidíme, že početnosť totálnych výnosov je pri metóde VAR rovnomernejšie rozdelená ako pri zvyšných, takže je tu vyššia pravdepodobnosť dosiahnutia veľkých výnosov ale i strát. Naopak pri metóde CPPI, sú simulované dáta viac koncentrované, dokonca hodnoty $\langle 1.2, 1.5)$ sú dosiahnuté s pravdepodobnosťou až $41,6\%$.



Obr. 13: Histogramy pre jednotlivé stratégie investovania.

Ako je na prvý pohľad zrejmé, pri metóde CPPI nie je rozptyl dát taký veľký ako pri zvyšných metódach. Pri metóde OBPI sa javí byť tento ukazovateľ o čosi väčší a najväčší rozptyl dát môžeme pozorovať pri investovaní metódou VAR. Tento predpoklad sme overili spočítaním príslušných variancií σ^2 (viď Tab. 2). Na základe tohto ukazovateľa môžeme povedať, že najmenej riziková je CPPI a najrizikovejšou je metóda VAR. Je však všeobecne známe, že pri riskantnejších stratégiách je s väčšou pravdepodobnosťou možné dosiahnuť vyšší zisk. Môžeme to dokázať výpočtom strednej hodnoty očakávaného totálneho výnosu ($\overline{R}$) (viď Tab.2). Najvyšší očakávaný výnos poskytuje metóda s najväčšou varianciou, teda metóda VAR a naopak najnižší metóda CPPI, ktorej variancia je najmenšia zo všetkých skúmaných stratégií.

Tabuľka 1: Hodnoty zodpovedajúce histogramom na Obr. 13.

Rozpätie R	**Početnosť hodnôt v danom rozpätí (v %)**			
	OBPI	**OBPI bez kúpy opcie**	**CPPI**	**VAR**
$\langle$ 0, 0.9)	0,0	2,7	0,0	7,3
$\langle$0.9, 1.2)	21,2	17,9	10,4	19,5
$\langle$1.2, 1.5)	25,3	22,9	41,6	16,5
$\langle$1.5, 1.8)	17,8	18,2	23,8	15,0
$\langle$1.8, 2.1)	12,5	12,5	12,6	10,9
$\langle$2.1, 2.4)	8,3	7,2	5,8	9,3
$\langle$2.4, 2.7)	4,4	6,2	2,4	6,1
$\langle$2.7, 3.0)	3,8	4,5	1,3	4,3
$\langle$3.0, 3.3)	1,9	2,2	0,8	2,8
$\langle$3.3, 3.6)	1,2	1,7	0,5	2,0
$\langle$3.6, 3.9)	0,7	0,7	0,4	1,6
$\langle$3.9, 4.2)	1,1	0,8	0,1	0,9
$\langle$4.2, 4.5)	0,1	0,9	0,2	0,5
$\langle$4.5, 4.8)	0,5	0,6	0,0	0,4
$\geq$4.8	1,2	1,0	0,1	5,0

Ďalšou porovnávacou štatistikou, ktorú môžeme sledovať sú kvantily. Pre jednotlivé metódy sme vypočítali príslušné 5%, 10%, 20%, 40%, 60%, 80%-né kvantily. α%-ný kvantil nám udáva totálny výnos, ktorý je vyšší ako α% totálnych výnosov, ktoré sme náhodne vygenerovali pre konkrétnu stratégiu. Môžeme ho chápať taktiež ako hodnotu, pod ktorú neklesne totálny výnos s pravdepodobnosťou α alebo hodnotu, nad ktorú sa môže dostať s pravdepodobnosťou $1 - \alpha$. Vidíme, že pri metóde OBPI bez kúpy opcie môže totálny výnos klesnúť pod hodnotu $0,88$ s pravdepodobnosťou 5%, pri metóde VAR až pod hodnotu $0,78$. Ak sa pozrieme bližšie na metódu VAR, vidíme, že s rovnakou pravdepodobnosťou môžeme klesnúť vždy pod nižšiu hodnotu v porovnaní so zvyšnými metódami až po pravdepodobnosť 40%. Avšak naopak s tou istou pravdepodobnosťou 40% dosiahneme už vyšší výnos ako v ostatných stratégiách a rozdiel vo výnosoch sa stále zväčšuje, čím je menšia pravdepodobnosť prekročenia určitej hodnoty. Vidíme, že je spnená podmienka, ktorú sme požadovali od tejto metódy a to, že garantovanú hranicu stačí dosiahnuť s pravdepodobnosťou 90%, pretože 10%-ný kvantil má hodnotu $0,8966 \doteq 0,9$. Taktiež si môžeme všimnúť, že CPPI je najkonzervatívnejšia spomedzi ostatných a vyšší totálny výnos ako $1,81$ dosiahneme len s 20%-nou pravdepodobnosťou, zatiaľ čo pri druhej najkonzervatívnejšej metóde (OBPI) s touto pravdepodobnosťou dosiahneme totálny výnos vyšší ako $2,15$.

Tabuľka 2: Porovnanie popisných ukazovateľov jednotlivých metód

	OBPI	**OBPI bez kúpy opcie**	**CPPI**	**VAR**
σ^2	0,4782	0,7770	0,2485	1,0412
$\overline{R}$	1,6610	1,7873	1,5857	1,8510
kvantil (5%)	0,9000	0,8836	1,1009	0,7762
kvantil (10%)	0,9789	0,9780	1,1508	0,8996
kvantil (20%)	1,1110	1,1273	1,2356	1,0399
kvantil (40%)	1,3817	1,3872	1,3630	1,3554
kvantil (60%)	1,6784	1,7525	1,5587	1,8445
kvantil (80%)	2,1515	2,2329	1,8149	2,3625

Porovnania budeme realizovať aj na základe funkcie užitočnosti, ktorej tvar je nasledovný:

$$U(x) = \frac{x^{1-\alpha} - 1}{1 - \alpha},$$

kde α reprezentuje investorovu mieru averzie k riziku, čiže čím vyššie α, tým je jeho averzia vyššia. Investor si volí svoje portfólio tak, aby maximalizoval strednú hodnotu funkcie užitočnosti, teda

$$maxE(U(x)).$$

V Tab. 3 sa nachádzajú stredné hodnoty funkcie užitočnosti v závislosti od averzie k riziku (α) pre jednotlivé metódy. Vždy červenou farbou sú znázornené najvyššie hodnoty v príslušnom stĺpci. V prvom stĺpci sú zaznamenané hodnoty pre investora, ktorému riziko do veľkej miery neprekáža a aby maximalizoval svoju užitočnosť zvolí si metódu VAR. Vidíme, že v poslednom stĺpci, v ktorom sú hodnoty pre investora, ktorý je veľmi averzný voči riziku, sa najvyššia hodnota nachádza pri investovaní podľa stratégie CPPI a najnižšia pri VAR, takže sme si overili, že metódu CPPI môžeme považovať za najkonzervatívnejšiu a metódu VAR naopak za najriskantnejšiu, menej vhodnú pre riziko averzného investora.

Tabuľka 3: Hodnoty funkcie užitočnosti vzhľadom na averziu k riziku.

Metóda	$\alpha = 2$	$\alpha = 4$	$\alpha = 6$	$\alpha = 8$	$\alpha = 10$
OBPI	0.3159	0.1890	0.1293	0.0952	0.0730
OBPI bez kúpy opcie	0.3201	0.1867	0.1220	0.0820	0.0515
CPPI	0.3102	**0.2119**	**0.1556**	**0.1216**	**0.0992**
VAR	**0.3304**	0.1677	0.0784	-0.0080	-0.1503

Samozrejme, pri inom nastavení vstupných parametrov by situácia mohla dopadnúť inak. Ak by sme si napríklad pri metóde CPPI stanovili nižšiu garantovanú hranicu, stratégia by mohla dosahovať vysoké hodnoty s väčšou pravdepodobnosťou ako pri metóde VAR, avšak strácal by sa význam garancie iba nízkeho pádu hodnoty portfólia. Naopak, pri stratégii VAR, čím by sme požadovali vyššiu pravdepodobnosť dosiahnutia určitej hranice, tým viac by sa táta metóda podobala metóde CPPI (pri pravdepodobnosti 100% sú tieto metódy totožné). Ak v stratégii OBPI bez kúpy opcie obmedzíme výšku poistenia na $2,93\%$ hodnoty vstupného kapitálu ($\epsilon = 0,0293$), dosiahneme, že do rizikového aktíva vložíme takú časť kapitálu, ktorú sme doň vložili pri metóde VAR s požiadavkou, že garantovanú hranicu, tvoriacu 90% kapitálu, dosiahneme s pravdepodobnosťou 90%. Takže v každej situácii by sa dali nastaviť vstupné parametre tak, aby VAR a OBPI bez kúpy opcie boli ekvivalentné.

Záver

Cieľom tejto bakalárskej práce bolo porovnať zaistené stratégie, ktoré pri garancii určitej čiastky na horizonte sľubujú pokiaľ možno čo najvyšší zisk so stratégiou, kde je riziko kontrolované veľkosťou poistenia dosiahnutia určitej hranice.

V prvej časti bakalárskej práce sme sa zamerali na opcie a vďaka poznatkom z tejto časti sme mali možnosť porozumieť, na akom princípe je založená metóda OBPI (Option Based Portfolio Insurance), ktorá patrí spolu s metódou CPPI (Constant Proportion Portfolio Insurance) medzi zaistené stratégie. Tieto dve metódy sme podrobnejšie analyzovali a zároveň sme ich navzájom porovnali. Metóda CPPI spočíva v prerozdelení kapitálu medzi rizikové a bezrizikové aktívum, zatiaľ čo pri metóde OBPI sa investuje do rizikového aktíva a naň naviazanej predajnej opcie. Ukázali sme, že ani jedna z týchto stratégií nedominuje nad druhou pre všetky konečné hodnoty rizikového aktíva a vysvetlili sme vzťah medzi týmito metódami.

Nosnou časťou tejto práce bolo porovnanie štyroch rôznych metód prerozdelenia počiatočného kapitálu medzi rizikové a bezrizikové aktívum, pričom v každej z metód bolo riziko ohraničené iným spôsobom. Prvou metódou bola už spomenutá metóda CPPI. Jej podstata spočívala v investovaní do bezrizikového aktíva takej čiastky, aby na konci investičného obdobia zabezpečila určenú garantovanú hodnotu a rizikové aktívum tak mohlo priniesť už len zisk navyše. Pri hlbšej analýze CPPI sme sa zamysleli nad otázkou, ako by vyzeralo prerozdelenie kapitálu, ak by sme nepožadovali, aby garantovaná hodnota bola dosiahnutá so 100%-nou pravdepodobnosťou, ale menšou. Táto stratégia sa nazýva VAR (Value at risk) a takisto bola jednou s porovnávaných metód. Na stratégiu OBPI sme sa pozreli ako na stratégiu, pri ktorej sa poistíme proti pádu pod garantovanú hranicu a zároveň žiadame, aby poistenie nebolo drahšie ako určitá časť vstupného kapitálu. Ak by sa toto poistenie nekúpilo, k dispozícii zostane viac prostriedkov na investovanie a riziko je aj v tomto prípade ohraničené. Nevýhodou však je, že garantovaná hranica nebude vždy dosiahnutá, ale aj táto stratégia je zaujímavou príležitosťou ako investovať, a tak sme ju zahrnuli do porovnania. Pre rôzne postoje ku riziku sme stanovili vždy najvýhodnejšiu stratégiu. Výhodnosť však závisí od nastavení vstupných údajov ako napríklad výšky garantovanej hranice, ceny poistenia alebo pravdepodobnosti, s ktorou má byť garantovaná hranica dosiahnutá. Je tak na samotnom investorovi ako si určí vstupné parametre a pre ktorú zo spomínaných metód sa rozhodne.

Literatúra

[1] MELICHERČÍK, I. - OLŠAROVÁ, L. - ÚRADNÍČEK, V. 2005 *Kapitoly z finančnej matematiky*. Bratislava: EPOS, 2005. ISBN 80-8057-651-3

[2] PEROLD, A.F. - SHARPE, W.F. 1988. Dynamic strategies for asset allocation. In *Financial Analysts Journal*. ISSN: 0015-198X, 1988, vol.44, no.1, p. 16-27.

[3] BERTRAND, P. - PRIGENT , J. 2001 *Portfolio Insurance Strategies: Obpi Versus Cppi*. University of CERGY: Working Paper No. 2001-30; GREQAM Working Paper, 2001. Dostupné na internete: `http://ssrn.com/abstract=299688ordoi:10.2139/ssrn.299688`

[4] BOUYÉ, E. 2009 *Portfolio Insurance: A Short Introduction*. Warwick Business School, 2009. Dostupné na internete: `http://papers.ssrn.com/sol3/papers.cfm?abstract_id=1416790`

[5] JORION, P. 1996: *Risk*^{2}: Measuring the Risk in Value at Risk. In *Financial Analysts Journal*. ISSN: 0015-198X, 1996, vol.52, no.6, p. 47-56.

[6] BALDER, S. - BRANDL, M. - MAHAYNI, A. 2009: Effectiveness of CPPI Strategies under Discrete–Time Trading. In *The Journal of Economic Dynamics and Control*. ISSN: 0165-1889, 2009, vol. 33, no. 1, p. 204-220.

[7] BOULIER, J-F. - KANNIGANTI, A. 2005: *Expected performance and risks of various portfolio insurance strategies*. Paris: 5^{th} AFIR International Colloquium, 2005. Dostupné na internete: `http://www.actuaries.org/AFIR/colloquia/Brussels/Boulier_Kanniganti.pdf`