UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE

FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY

Modelovanie finančných trhov a risku metódou Monte Carlo

2011

Lukáš Kunert

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE

FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY

b0843710-8e78-48c3-9d3f-c27cd6fb1358

Modelovanie finančných trhov a risku metódou Monte Carlo

Bakalárska práca

Študijný program: Ekonomická a finančná matematika

Študijný odbor: 9.1.9. Aplikovaná matematika

Školiace pracovisko: Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky

Školiteľ: doc. RNDr. Július Vanko, PhD.

BRATISLAVA 2011

Lukáš Kunert

Univerzita Komenského v Bratislave
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

ZADANIE ZÁVEREČNEJ PRÁCE

Meno a priezvisko študenta:	Lukáš Kunert
Študijný program:	ekonomická a finančná matematika (Jednoodborové štúdium, bakalársky I. st., denná forma)
Študijný odbor:	9.1.9. aplikovaná matematika
Typ záverečnej práce:	bakalárska
Jazyk záverečnej práce:	slovenský

Názov : Modelovanie finančných trhov a risku metódou Monte Carlo

Cieľ : Výsledky Monte Carlo simulácií porovnať s reálnymi dátami a oceniť efektívnosť použitia MC metódy.

Vedúci : doc. RNDr. Július Vanko, PhD.

Dátum zadania: 28.10.2010

Dátum schválenia: 08.11.2010

doc. RNDr. Margaréta Halická, CSc.
garant študijného programu

študent

vedúci práce

Dátum potvrdenia finálnej verzie práce, súhlas s jej odovzdaním (vrátane spôsobu sprístupnenia)

vedúci práce

Čestné prehlásenie

Prehlasujem, že som túto bakalársku prácu vypracoval samostatne, s pomocou uvedenej literatúry a konzultácii s vedúcim bakalárskej práce vedomostí nadobudnutých počas štúdia.

....

Lukáš Kunert

V Bratislave, 30.5.2011

Poďakovanie

Touto cestou by som chcel vyjadriť vďaku doc. RNDr. Július Vankovi, PhD. za všestrannú odbornú pomoc, za poskytnutie veľkého množstva literatúry a študijných materiálov a za cenné rady a pomoc pri spracovaní témy tejto práce.

ABSTRAKT

KUNERT, Lukáš: *Modelovanie finačných trhov a risku metódou Monte Carlo.* [Bakalárska práca]. Univerzita Komenského v Bratislave. Fakulta matematiky, fyziky a informatiky; Katedra aplikovanej matematiky štatistiky. Vedúci práce: doc. RNDr. Július Vanko, PhD. Stupeň odbornej kvalifikácie: Bakalár v študijnom programe Ekonomická a finančná matematika. Bratislava 2011, 43 s.

Cieľom tejto bakalárskej práce je predstaviť metódu Monte Carlo, ktorá vznikla v prvej polovici dvadsiateho storočia a ktorá je založená na generovení veľkého množstva náhodných čísel a ich následnom štatistickom spracovaní a interpretovaní výsledkov a ukázať jej možnosti využitia pri modelovaní správania sa finančných trhov a ich subjektov. Jadro mojej práce tvoria simulácie možných investičných stratégií investorov pri konkrétnych hypotetických situáciách.

Kľúčové slová: očakávaný výnos, investor, investičná stratégia, investícia.

ABSTRACT

KUNERT, Lukáš: *Financial market and risk modelling with Monte Carlo method.* [Bachelor's thesis]. Comenius University in Bratislava. Faculty of Mathematics, Physics and Informatics; Department of Applied Mathematics and Statistics . Tutor: doc. RNDr. Július Vanko, PhD. Degree of qualification: Bachelor in study programme Economic and financial Math. Bratislava 2011, 43 p.

The aim of this bachelor's thesis is to present Monte Carlo method, which arose in first half of twentieth century and which is based on generate a lots of random numbers and it's consecutive statistical elaboration and explanation of results and show it's opportunities to employ in modelling financial market behavior and it's subjects. A substantial part of my thesis construct simulation of possible investment strategy of investors in concrete hypotetical situations.

Key words: expected earnings, investor, investment strategy, investment.

Obsah

Kapitola 1

1 Charakterizácia metódy Monte Carlo

1.1 Úvod

Metóda Monte Carlo je stochastická metóda používaná na analýzu javov a procesov pomocou počítačových algoritmov, presnejšie povedané, pomocou generovania náhodných čísel. Metóda bola jedným z prvých využití vtedy vynájdených digitálnych počítačov. Dalo by sa povedať, že sa narodila a vyvíjala spolu s počítačmi. Metóda je používaná najmä tam, kde analytické riešenie je veľmi náročné napr. výpočet zložitých viacrozmerných integrálov a podobne. Pre niektoré typy úloh, riešené v minulosti MC metódou, boli síce medzičasom vyvinuté účinnejšie postupy, avšak v mnohých oblastiach je nenahraditeľná (*štatistická fyzika, astronómia, meteorológia a v neposlednom rade finančná matematika a modelovanie risku*) a s rastúcou výkonnosťou počítačov nachádza čoraz širšie uplatnenie a v súčasnosti je rozšírenejšia ako kedykoľvek predtým. [1]

Cieľom mojej práce je ukázať široké možnosti využitia MC metódy v modelovaní správania sa investorov a trhu. Prácu som rozdelil na 3 kapitoly. V prvej kapitole sa pokúsim na jednoduchých príkladoch predstaviť metódu MC. V druhej kapitole sa budem snažiť modelovať správanie sa investorov a ich možnosti investovania podľa ich miery averznosti k riziku. V tretej záverečnej kapitole ukážem riešenie Monty Hall problému s využitím MC metódy v ktorom je treba správne odhadnúť mieru rizika a tak maximalizovať svoje šance na výhru.

1.2 Vznik metódy MC

Veľmi známy problém, ktorý je spájaný s metódou MC riešil už v 18. storočí Francúzsky prírodovedec Comte de Buffon (1707 - 1788). Ten bol nazvaný "Buffonova ihla": Uvažujme ihlu dĺžky L a rovinu, v ktorej ležia rovnobežky, vždy vo vzájomnej vzdialenosti d, $d > L$. Túto ihlu budeme náhodne na túto rovinu hádzať a úlohou je zistiť pravdepodobnosť s akou ihla pretne jednu z čiar. Pomocou Téorie pravdepodobnosti možno odvodiť vzťah :

$$P = \frac{2L}{\pi d} \tag{1}$$

Táto úloha môže byť použitá pri odhade čísla π . Predstavme si, že tento pokus zopakujeme veľa krát (*nasimulujeme ho pomocou počítača*), potom relatívna početnosť javu, že ihla pretne jednu z čiar sa bude podľa zákona veľkých čísel blížiť k skutočnej pravdepodobnosti a potom môžme podľa vzťahu (1) odhadnúť hodnotu π . [1]

Prvý krát bolo pomenovanie Monte Carlo, ako názov našej metódy použité v 40. rokoch minulého storočia vedcami, ktorí pracovali na vývoji nukleárnych zbraní v Los Alamos, názov zrejme poukazuje na stochastický charakter tejto metódy (*V Monte Carlo je jedno z najznámejších kasín na svete*).S rozvojom metódy sú spájané nasledovné mená : Von Neumann, Fermi, Ulam a Metropolis. [2][3]

1.3 Aplikácia metódy na konkrétne jednoduché problémy

Riešenie úlohy metódou MC možno rozdeliť do troch krokov:

1. *Rozbor úlohy a vytvorenie modelu:*

   Z hľadiska riešenia úlohy ide o najdôležitejší krok. Aj keď je metóda MC použiteľná takmer vo všetkých úlohách a jej formulácia sa nezdá byť obtiažnou, treba tomuto kroku venovať náležitú pozornosť, lebo nesprávne postavený model nemôže vhodne aproximovať našu úlohu.

2. *Generovanie náhodných veličín a ich transformácia na veličiny s požadovaným štatistickým rozdelením:*

   Tento krok býva opakovaný dovtedy, kým nedosiahneme nami požadovanú presnosť. Rýchlosť konvergencie chyby výsledku metódy MC k nule sa približne rovná prevrátenej hodnote odmocniny z čísla n, kde n je počet vykonaných pokusov.

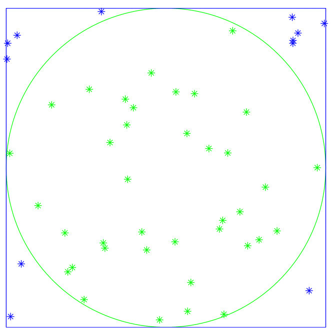
3. *Štatistické spracovanie výsledkov:*

   Hľadaný odhad získaný pomocou metódy MC je daný niektorým z momentov štatistických veličín, najčastejšie strednou hodnotou. [4][5][6]

1.3.1 Odhad čísla π metódou MC

Uvažujme štvorec dĺžky 2, do ktorého je vpísaná kružnica o polomere 1 ako na obrázku (1).Ak by sme náhodne zvolili n bodov vo vnútri štvorca, pričom každý bod s rovnakou pravdepodobnosťou (*body by pochádzali z dvojrozmerného rovnomerného rozdelenia*) a počet bodov v kruhu by sme označili m, potom pre odhad čísla π možno podľa zákona o veľkých číslach písať :

$$\pi = \lim_{n\to\infty} \frac{4m}{n} \tag{2}$$



Obr. 1: n = 50 bodov ; $\hat{\pi}$ = 3,36

Tabuľka odhadnutých hodnôt $\hat{\pi}$ v závislosti od počtu simulácii:

n	100	10 000	1 000 000
π	3,1416	3,1416	3,1416
$\hat{\pi}$	3,4	3,12	3,1431
$\lvert\frac{\hat{\pi}-\pi}{\pi}\rvert$	0,0823	0,0069	0,0004
$\lvert\hat{\pi}-\pi\rvert$	0,2584	0,0216	0,0015

Tabuľka 1: Výsledky simulácii

n $\rightarrow$ počet vygenerovaných bodov

$\hat{\pi}$ $\rightarrow$ odhad získaný metódou MC

$|\frac{\hat{\pi}-\pi}{\pi}|$ $\rightarrow$ relatívna chyba odhadu

$|\hat{\pi}-\pi|$ $\rightarrow$ absolútna chyba odhadu

π $\rightarrow$ hodnota čísla π s presnosťou na 4 desatinné miesta

Zdrojový kód pre funkciu "picounter",ktorá odhadne číslo π na základe n simulácií a vypočíta relatívnu chybu odhadu môže vyzerať v Matlabe nasledovne:

```
    function picounter(n)
in=0;
for i=1:n
    x(i)=2*rand-1;
    y(i)=2*rand-1;
    if sqrt((x(i))^2+(y(i))^2)<=1
        in=in+1;
    end
end
pivalue=(4*in)/n
chyba=abs((pivalue-pi)/pi)
```

Treba mať ovšem na pamäti, že nakoľko odhad metódou MC je založený na náhodných simuláciach tak 2 odhady pre hoci rovnaké "n"sa nemusia rovnať(*nerovnajú sa s vysokou pravdepodobnosťou*).Rýchlosť konvergencie, ako môžme vyčítať z tabuľky splnila naše teoretické očakávania.

1.3.2 Odhad jednorozmerného určitého integrálu

Ak chceme urobiť odhad $\hat{I}$ metódou Monte Carlo pre :

$$I = \int_a^b f(x)dx \tag{3}$$

Potom stačí postupovať podobne ako v predchádzajúcej úlohe. Namiesto štvorca teraz uzavrieme integrovanú funkciu do obdĺžnika, ktorý dostaneme nasledovným spôsobom :

- ohraničíme integrovanú funkciu zhora aj zdola na intervale $\langle a, b\rangle$ číslami d pre dolné ohraničenie a h pre horné ohraničenie
- teraz všetky funkčné hodnoty funkcie $f(x)$ budú ležať v obdĺžniku vymedzenom priamkami:
  - $x = a$
  - $x = b$
  - $y = c$
  - $y = d$

Budeme generovať čísla z 2-rozmerného rovnomerného rozdelenia na tomto obdĺžniku. Matlab nám ponúka rovnomerné rozdelenie na intervale $\langle 0, 1\rangle$, teda interval $\langle a, b\rangle$ dostaneme ako $a + (b - a)\langle 0, 1\rangle$.Rovnomerné rozdelenie na $\langle d, h\rangle$ dostaneme obdobným spôsobom.Potom pre odhad $\hat{I}$ jednorozmerného určitého integrálu bude platiť nasledovné :

$$\hat{I} = \frac{(b-a)(h-d)M}{n} \tag{4}$$

n $\rightarrow$ počet vygenerovaných bodov

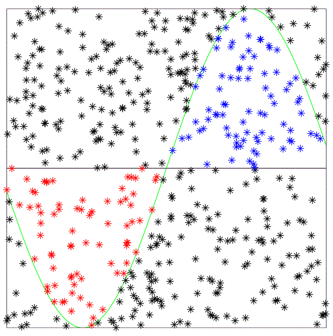
$\hat{I}$ $\rightarrow$ odhad určitého integrálu

M $\rightarrow$ $M = M_h - M_d$

M_h $\rightarrow$ počet vygenerovaných bodov takých, že ležia pod grafom $f(x)$ a nad priamkou $y = 0$

M_d $\rightarrow$ počet vygenerovaných bodov takých, že ležia nad grafom $f(x)$ a pod priamkou $y = 0$

Na obrázku (2) môžme vidieť konkrétny príklad, body ležiace pod grafom funkcie a nad priamkou $y = 0$ sú znázornené modrou a body ležiace nad grafom funkcie a pod priamkou $y = 0$ sú znázornené červenou farbou.



Obr. 2: n = 500 bodov ; $I = \int_{-1}^{1} \sin(3x)dx = 0$; $\hat{I} = 0,056$

Zelenou je znázornená funkcia $f(x) = \sin(3x)$. Hlavnou myšlienkou je, že podľa zákona o veľkých číslach sa pre veľký počet vygnerovaných bodov musí rovnať pomeru rozdielu počtu modrých a červených bodov a počtu všetkých bodov (*čiernych,modrých a červených dohromady*).

n	10	1000	100000
$I = \int_{-1}^{1} sin(3x)dx$	0	0	0
$\hat{I}$	$0,4$	$-0,0280$	$0,0014$

Tabuľka 2: Odhady

Zdrojový kód k našemu príkladu v Matlabe :

```
inh=0;
ind=0;
for i=1:100000
    x(i)=2*rand-1;
    y(i)=2*rand-1;
    if y(i)<=sin(3*x(i)) & y(i)>=0;
        inh=inh+1;
    elseif y(i)>=sin(3*x(i)) & y(i)<=0;
            ind=ind+1;
    else ((y(i)<=sin(3*x(i))) & (y(i)<=0))|((y(i)>=sin(3*x(i))) & (y(i)>=0));
    end
end
I=((inh-ind)*2*2)/100000
```

Kapitola 2

2 Investičné stratégie

2.1 Základné pojmy

Aktívum $\longrightarrow$ Investičný nástroj, ktorý možno predávať a kupovať

X_0 $\longrightarrow$ Hodnota aktíva na začiatku periódy

X_1 $\longrightarrow$ Hodnota aktíva na konci periódy (*alebo aj výplata aktíva*) $\Longrightarrow$ je to zvyčajne náhodná premenná

Totálny výnos aktíva $\longrightarrow$ podiel hodnoty aktíva na konci periódy a hodnoty aktíva na začiatku periódy ... $R = \frac{X_1}{X_0}$

Výnos aktíva $\longrightarrow r = \frac{X_1 - X_0}{X_0} = R - 1$

Investor $\longrightarrow$ ten, kto obchoduje aktíva

Finančný trh $\longrightarrow$ miesto obchodovania aktív

risk $\longrightarrow$ mierou risku je pravdepodobnosť záporných výnosov z aktív, ktorá vyplýva z obchodovania aktív

2.1.1 Rozdelenie investorov

Každý investor sa znaží čo najlepšie zhodnotiť svoje peniaze, teda chce mať, čo možno najvyšší výnos zo svojho aktíva. Otázkou ale zostáva, aké riziko je ochotný pritom podstúpiť. Podľa postoja investorov k riziku ich možno rozdeliť na :

- rizikovo averzných
- rizikovo neutrálnych
- riziko obľubujúcich

Zmysel týchto skupín možno pekne ilustrovať na nasledujúcom príklade.[7] Predpokladajme, že máme možnosť si zakúpiť aktívum, ktoré s pravdepodobnosťou $\frac{1}{2}$ vypláca \$100 a s pravdepodobnoťou $\frac{1}{2}$ vypláca \$0.

Rizikovo neutrálny investor je ochotný zaplatiť za toto aktívum najviac $E(X_1) = \frac{1}{2}.\$100 + \frac{1}{2}.\$0 = \$50$, čo je stredná hodnota výplaty nášho aktíva. Dá sa povedať, že si nevšíma riziko, nakoľko je ochotný vymeniť istých \$50 za strednú hodnotu výplaty \$50. Takýto investor by z dlhodobého hľadiska nemal ani stratiť, ale ani získať. Jeho očakávaný výnos z dlhodobého hľadiska je $\overline{r}_n = \frac{E(X_1)-X_0}{X_0} = \frac{\$50)-\$50}{\$50}\$0$.

Riziko obľubujúci investor by bol ochotný zaplatiť za toto aktívum aj sumu prevyšujúcu strednú hodnotu výplaty, pretože stále existuje možnosť, že jeho výplata bude \$100. Je ochotný vymeniť svojich istých viac ako \$50 za strednú hodnotu výplaty iba \$50.Takýto investor riziko doslova ignoruje. K tomuto typu investorov by sme mohli zaradiť hazardných hráčov.Tento typ investora z dlhodobého hľadiska stráca, má záporné výnosy.

Jeho očakávaný výnos ... $\overline{r}_o = \frac{E(X_1)-X_0}{X_0}$ (pričom predpokladáme $X_0 > E(X_1)$,keďže zaplatil sumu X_0 viac ako \$50) a teda aj :

$$\overline{r}_o < 0$$

Väčšina investorov je z pochopiteľných dôvodov rizikovo averzných. Tí nie sú ochotní zaplatiť ani strednú hodnotu výplaty a teda zaplatili by menej ako

\$50. Uprednostnia síce menšiu sumu peňazí ako je stredná hodnota výplaty, ale istú. Z dlhodobého hľadiska je takýto investor ziskový pretože má kladné výnosy. Jeho očakávaný výnos ... $\overline{r}_a = \frac{E(X_1)-X_0}{X_0}$. Keďže u rizikovo averzného investora sme predpokladali, že je ochotný zaplatiť za aktívum sumu X_0 menej ako je $E(X_1)$, potom je logicky $\overline{r}_a$ kladné.

2.2 Očakávaný výnos z dlhodobého hľadiska

Uvažujme aktíva podobného druhu, ako v predchádzajúcom príklade, to znamená, že na začiatku periódy zaplatíme za aktívum jeho hodnotu $\ldots X_0$ a na konci periódy obdržíme jeho hodnotu na konci periódy $\ldots X_1$, ktorá je náhodnou premennou. Výplatnou funkciou budeme rozumieť :

$$X_1(p_i) = X_{1i},$$

kde X_{1i} je výplata resp. hodnota aktíva na konci periódy za predpokladu, že sa realizovala udalosť i s pravdepodobnosťou p_i ; $i = 1, \ldots, n$.

Potom aj výnos z aktíva definovaný ako :

$$r = \frac{X_1 - X_0}{X_0} \tag{5}$$

je náhodnou premennou.

Strednou hodnotou výnosu z aktíva možno potom definovať **očakávaný výnos z aktíva z dlhodobého hľadiska** :

$$E(r) = \overline{r} = \frac{E(X_1) - X_0}{X_0} \tag{6}$$

Tvrdenie : Nech $\overline{r}_a$, $\overline{r}_n$, $\overline{r}_o$ sú v poradí očakávané výnosy z dlhodobého hľadiska u rizikovo averzného, rizikovo neutrálneho a riziko obľubujúceho investora. Potom platí :

$$\overline{r}_a > 0$$

$$\overline{r}_n = 0$$

$$\overline{r}_o < 0$$

Dôkaz : Dôkaz vyplýva priamo z definícií rizikovo averzných, neutrálnych respektíve riziko obľubujúcich investorov a definície očakávaného výnosu z dlhodobého hľadiska.

Ak je rizikovo averzný investor ochotný zaplatiť za aktívum :

$$X_0 < E(X_1) \;\Rightarrow\; \overline{r}_a = \frac{E(X_1) - X_0}{X_0} > 0$$

.

Ak je rizikovo neutrálny investor ochotný zaplatiť za aktívum :

$$X_0 = E(X_1) \;\Rightarrow\; \overline{r}_n = \frac{E(X_1) - X_0}{X_0} = 0$$

.

Ak je riziko obľubujúci investor ochotný zaplatiť za aktívum :

$$X_0 > E(X_1) \;\Rightarrow\; \overline{r}_o = \frac{E(X_1) - X_0}{X_0} < 0$$

Očakávaný výnos z aktíva z dlhodobého hľadiska by sa teda dal chápať aj ako miera rizikového správania sa investorov. Ak by sme poznali výplatné funkcie všetkých obchodovaných aktív uvažovaného druhu (*poznali by sme pravdepodobnosti, s akými sa realizujú jednotlivé výplaty každého aktíva*), potom by bolo možné určiť strednú hodnotu výplaty ... $E(X_1)$ a teda aj $\overline{r}$ každého aktíva. Po priradení hodnoty $\overline{r}$ ku každému aktívu, podľa toho, či je investor ochotný dané aktívum kupovať, možno ho charakterizovať ako rizikovo averzného, neutrálneho resp. obľubujúceho. Čím viac naľavo/napravo od nuly sa nachádza $\overline{r}$ daného aktíva resp. investora, tým rizikovajšie/menej rizikové je dané aktívum resp. investor.

2.3 Stratégie investovania riziko obľubujúceho investora

V predošlých častiach bolo ukázané, že pre riziko obľubujúceho investora a teda aj pre aktíva, ktoré je ochotný nakupovať platí :

$$\overline{r}_o < 0$$

Pokúsim sa modelovať, či by takýto investor mohol vhodnou stratégiou nakupovania daného typu aktív ovplyvniť z krátkodobého hľadiska svoj očakávaný výnos. Uvažujme aktívum,ktoré s pravdepodobnosťou $p_A = \frac{18}{37}$ vypláca 2 - násobok pôvodnej hodnoty X_0 a s pravdepodobnosťou $p_B = \frac{19}{37}$ vypláca 0. Očakávaný výnos z dlhodobého hľadiska pre uvažované aktívum je :

$$\overline{r} = \frac{E(X_1) - X_0}{X_0} = \frac{p_A * 2X_0 + p_B * 0 - X_0}{X_0} \doteq -0,027$$

Jedná sa teda o rizikové aktívum, lebo jeho očakávaný výnos z dlhodobého hľadiska je záporný a nakupovať ho je ochotný len riziko obľubujúci investor. Predstavme si, že takýto investor zvolí špeciálnu stratégiu nakupovania takéhoto aktíva napr. na začiatku kúpi jedno aktívum tohto druhu (*pre jednoduchosť uvažujme cenu aktíva rovnú 1*) ak na konci periódy 1 nastane udalosť A, ktorá sa realizovala s pravdepodobnosťou p_A tak je investor v zisku. Jeho výnos z aktíva je rovný $\ldots \frac{X_1 - X_0}{X_0} = \frac{2-1}{1} = 1$. Ak by nastala udalosť B, tak investor by kúpil na konci prvej resp. na začiatku druhej periódy už 2 jednotky aktíva. V prípade že na konci 2. periódy nastane udalosť A, tak celkovo má investor čistý zisk 1 a jeho výnos je $\frac{1}{3}$, ak by nastala znova udalosť B, tak investor by znovu zdvojnásobil počet nakúpených aktív. Keby mal riziko obľubujúci investor neobmedzené množstvo kapitálu tak by takouto postupnosťou nákupov aktív si mohol zabezpečiť istý zisk 1, lebo pravdepodobnosť nastatia n po sebe idúcich udalostí B sa so zväčšujúcim n blíži k nule. Navyše ak by počty nakúpených aktív nie zdvojnásoboval ale napr. ztrojnásoboval,tak čistý zisk po n periódach (*v poslednej dôjde k priaznivej udalosti A*) by nebol konštantný ale s rastúcim n by rástol. Prirodzene žiaden investor nemá k dispozícii neobmedzené množstvo kapitálu, z čoho vyplýva pre investora, používajúceho zmienenú stratégiu riziko, že nastane taká dlhá séria nepriaznivých udalostí B, že po n-tej udalosti B nebude schponý zo svojich zdrojov nakúpiť dvoj resp. troj-násobné množstvo aktív.Dĺžkou série nazvem číslo tej periódy v ktorej nastala prvý krát udalosť A. V nasledujúcich tabuľkách uvediem závislosť čistého zisku, výnosu z aktíva od dĺžky série, podľa toho, či investor zdvoj resp. ztrojnásoboval počet nakúpených aktív, ako aj pravdepodobnosť dĺžky takejto série.

d	p	z	r
1	0,4865	1	$\frac{1}{1}$
2	0,2498	1	$\frac{1}{3}$
3	0,1283	1	$\frac{1}{7}$
4	0,0659	1	$\frac{1}{15}$
5	0,0338	1	$\frac{1}{31}$
6	0,0174	1	$\frac{1}{63}$

Tabuľka 3: Zdvojnásobovanie počtu aktív

d	p	z	r
1	0,4865	1	$\frac{1}{1} = 1,0000$
2	0,2498	2	$\frac{2}{4} = 0,5000$
3	0,1283	5	$\frac{5}{13} = 0,3846$
4	0,0659	14	$\frac{14}{40} = 0,3500$
5	0,0338	41	$\frac{41}{121} = 0,3389$
6	0,0174	122	$\frac{122}{364} = 0,3352$

Tabuľka 4: Ztrojnásobovanie počtu aktív

d $\rightarrow$ dĺžka série

p $\rightarrow$ pravdepodobnosť s akou táto dĺžka série nastane

z $\rightarrow$ čistý zisk na konci série

r $\rightarrow$ výnos z aktíva

Z tabuľky (3) možno vidieť, že v prípade zdvojnásobobania počtu nakúpených aktív čistý zisk nezávisí od dĺžky série, kým výnos z aktíva s rastúcou dĺžkou série klesá. Naopak v tabuľke (4) môžme vidieť rýchly rast (podiel dvoch nasledujúcich ziskov sa zväčšuje) čistého zisku s narastajúcou dĺžkou série a len pozvoľný pokles výnosu z aktíva. Pravdepodobnosť dĺžky série d je v oboch prípadoch daná :

$$P(X = d) = p_A(1 - p_A)^{d-1}$$

Naprogramujem v Matlabe funkciu investor1, ktorá má na vstupe nasledovné parametre :

n $\rightarrow$ počet periód, v ktorých je ochotný investor investovať

$kapital$ $\rightarrow$ počiatočný kapitál investora, ktorý je ochotný obetovať na investíciu (*znáša riziko, že tento môže celý stratiť*)

$nasobok$ $\rightarrow$ vyjadruje stratégiu investora pri nakupovaní aktív (*či nakupuje stále rovnaký počet aktív, alebo v prípade nastatia udalosti B tento počet znásobuje*)

Touto funkciou budem modelovať priebeh investícii rizikovo averzného investora, ktorý nakupuje aktíva vyššie popísaného druhu, pričom si na začiatku sám zvolí veľkosť svojho počiatočného kapitálu (*maximálnu sumu, ktorú je ochotný riskovať*) ako aj počet periód v ktorých bude nakupovať aktíva, keďze sa snažím modelovať výnos z aktíva z krátkodobého hľadiska. Taktiež volí aj svoju stratégiu, teda či bude znásobovať počty nakúpených aktív v závislosti od svojich výplat.

Táto funkcia môže v Matlabe vyzerať nasledovne :

```
function [r] = investor1(n,kapital,nasobok)
k=kapital;    % počiatocný kapitál investora
v=1;      % pocet kúpených aktív v prvej perióde
perioda=0;
vklad(1)=1;
for i=1:n
    if k==0
        break
    end
    if k<=v
        v=k;
    end
    f=rand;
    if f<=18/37
        a=1;
    else
        a=0;
    end
    if a==1
        k=k+v;
        v=1;
    else k=k-v;
        v=nasobok*v; % znásobíme počet nakúpených aktív
    end
    perioda=perioda+1;
    acko(perioda)=a;
    vklad(perioda+1)=v;
end
k;
vklad(perioda+1)=[];
perioda;
[r]=((k-kapital)/sum(vklad)); % čistý zisk lomeno suma vkladu
vklad;  % vektor vkladov
acko;   % vektor udalostí
```

Pre jednoduchosť uvažujem, že investor na začiatku celej investície kúpi iba jedno aktívum, ktorého cena je jednotková taktiež ak znásobuje počet nakúpených aktív tak po prípadnej priaznivej udalosti A (*V tejto perióde mu bude vyplatená nenulová výplata*) sa vráti na začiatok série, to znamená k jednotkovému množstvu aktíva. V prípade, že príde o celý počiatočný kapitál prestáva investovať. Taktiež prestane investovať ak uplynie počet períod, ktoré si na začiatku stanovil bezohľadu na to v akej fáze investovania sa nachádza (*bezohľadu na svoju poslednú výplatu, teda či nastala udalosť A alebo B v poslednej preriόde*).

Pomocou funkcie opakovac :

```
clear rko;
for j=1:100
    for p=1:4
        rko(j,p)=investor1(10,200,p);
    end
end
rko
```

zavolám sto krát funkciu **investor1** pre konkrétnu kombináciu parametrov a získané nasimulované výnosy z aktív investora budem analyzovať v štatistickom softwari EViews.

2.3.1 Analýza výsledkov simulácií

Na obrázku (3) môžme vidieť histogramy početností výnosov z aktív, ktoré pochádzajú zo sto simulácií investovania investora, ktorý si zvolil nasledovnú investičnú stratégiu :

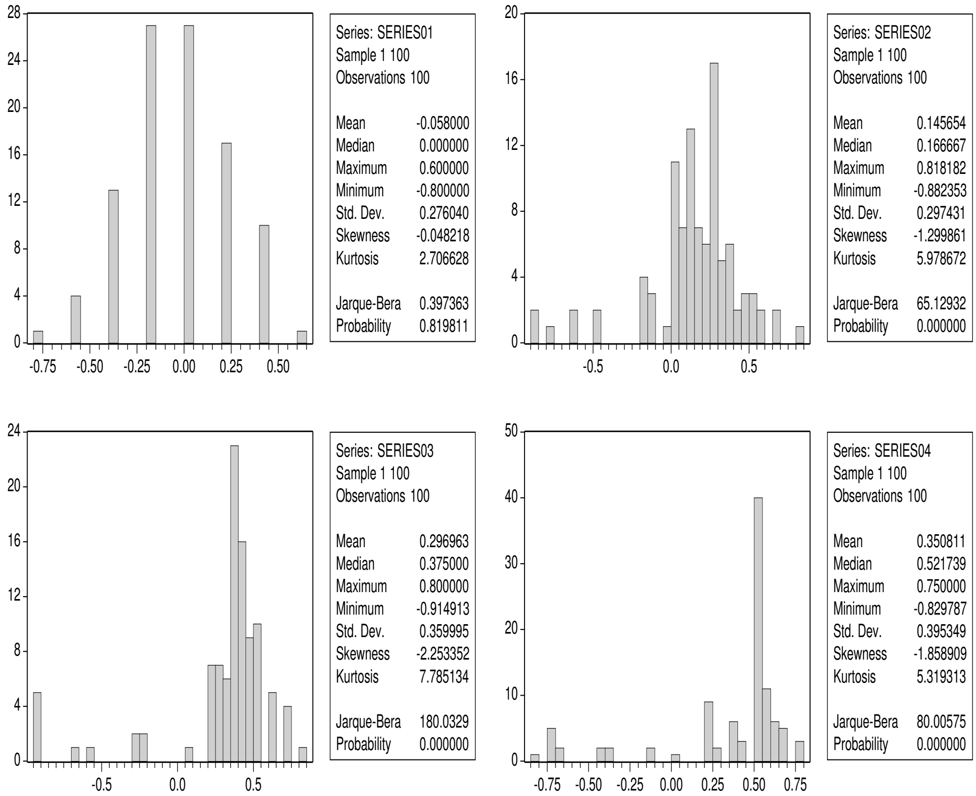
n=10 → investor bude nakupovať aktíva počas desiatich periód

kapital=200 → investor má počiatočný kapitál s ktorým by bol schopný naraz kúpiť 200 aktív

nasobok → parameter násobok budem meniť a v závislosti od zmien tohto parametra analyzovať krátkodobý dopad konkrétnej stratégie na výšku výnosu z aktíva

Na výstupe z programu EViews - obrázok(3) sú histogramy reprezentujúce výnosy z aktív štyroch riziko obľubujúcich investorov, ktorí ale používajú rôzne stratégie nakupovania aktív. Prvý až štvrtý obrázok v poradí *(ak ideme zľava* *doprava po riadkoch)* zodpovedá v poradí investorovi, ktorý nemení množstvo nakúpených aktív, zdvojnásobuje, ztronásobuje a zoštvornásobuje počet nakúpených aktív v prípade udalosti B. Veľmi zaujímavým údajom z výstupu EViews je hodnota Jarque-Berra testovacej štatistiky, ktorá sa vypočíta ako :

$$JB = \frac{n}{6}\left(\hat{S}^2 + \frac{(k-3)^2}{4}\right)$$



Obr. 3: Histogramy výnosov z aktív,100 simulácií

kde $\hat{S}$ je výberový koeficient šikmosti (*skewness*) a k je výberový koeficient špicatosti (*kurtosis*) a ktorá má za platnosti nulovej hypotézy rozdelenie :

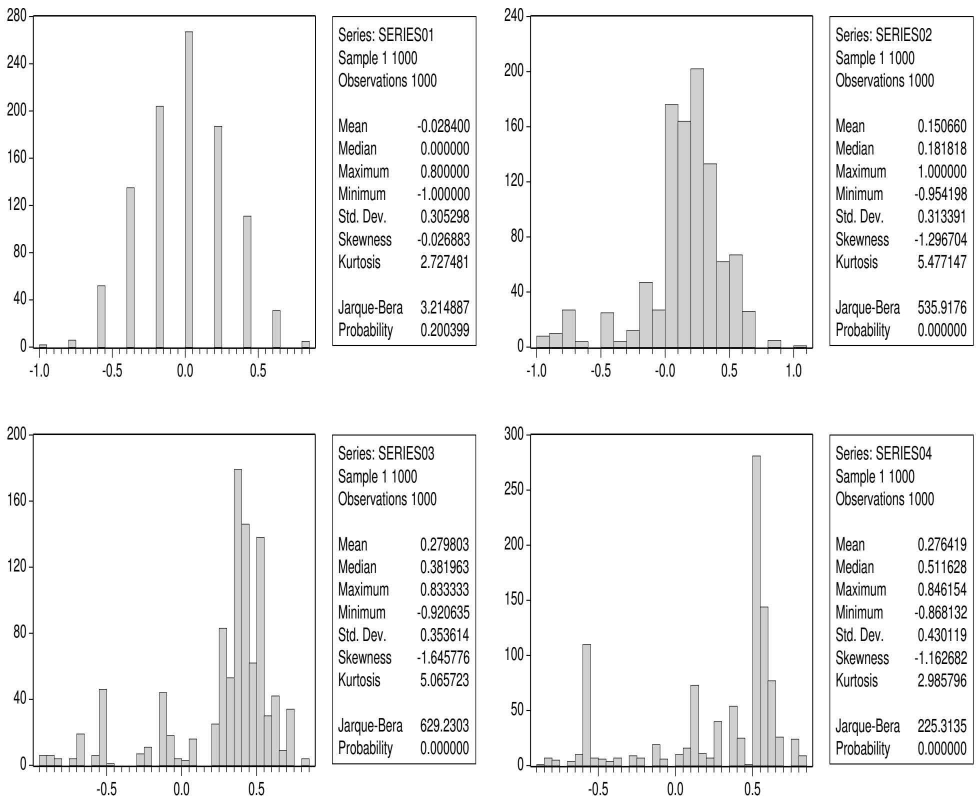
$$JB \sim \chi^2_{(2)}$$

Pomocou tejto štatistiky sa dá robiť Jarque-Berra test normality, ktorý je založený na porovnávaní výberového koeficientu špicatosti so špicatosťou normálneho rozdelenia a výberovým koeficientom šikmosti a šikmosťou normálneho rozdelenia. Hypotézy majú nasledovný tvar :

$$H_0 : \text{normalita dát} \qquad \text{vs} \qquad H_1 : \text{dáta nie sú z normálneho rozdelenia}$$

Hypotézu H_0 zamietame na hladine významnosti 5%, ak hodnota testovacej štatistiky JB je väčšia ako 5% - ná kritická hodnota chí-kvadrát rozdelenia s dvomi stupňami voľnosti, alebo ak príslušná p-hodnota (*v EViews probability*) je menšia ako 5%. Normalitu výnosov z aktív na základe Jarque-Berra testu nezamietam len v prípade investora, ktorý neznásobuje počty nakúpených aktív, teda toho, ktorého reprezentuje prvý histogram.

Z histogramov by sa na prvý pohľad dalo usudzovať, že čím väčšie znásobovanie počtu nakúpených aktív investor používa, tým väčší výnos z aktíva dosahuje (*hodnota mean vo výstupe*, $r_1 = -0,058$, $r_2 = 0,1457$, $r_3 = 0,297$, $r_4 = 0,3508$). Rozdielne hodnoty oproti obrázkom sú spôsobené zaokrúhlením na 4 desatinné miesta. Ďalej by sme si mohli všimnúť, že výberový medián je vo všetkých štyroch prípadoch väčší ako aritmetický priemer, ktorý je odhadom strednej hodnoty a teda v našom prípade aj výnosu z aktíva. Skutočnosť, že medián je väčší ako priemer by sa dala interpretovať tak, že viac než polovica nasimulovaných výnosov z aktív je väčšia ako priemer. Taktiež veľkosť štandardnej odchýlky má vzostupný charakter, čo by sa dalo vysvetliť tým, že čím väčším číslom znásobuje investor počty nakúpených aktív v prípade udalosti B tým viac sú hodnoty jednotlivých výnosov z aktív rozptýlené okolo priemeru. Hodnota priemerného výnosu z aktíva zo sto simulácii je rovná približne číslu $-0,058$ čo je relatívne blízko teoretickej hodnoty $-0,027$. Podozrivými sú mi ale hodnoty priemerného výnosu z aktíva pre investora používajúceho zdvoj,ztroj respektíve zštvornásobovaciu stratégiu. Tieto hodnoty sa mi zdajú až príliš veľké. Preto urobím väčší počet simulácii, tým napodobním dlhodobejší horizont a hodnoty priemerných výnosov by mali klesnúť bližšie smerom k očakávanému výnosu z dlhodobého hľadiska, teda k hodnote $0,027$. Na obrázku (4) môžme vidieť histogrami výnosov z aktív investorov používajúcich rovnakú stratégiu ako na obrázku (3) s tým že som zvýšil počet simulácií desať-násobne na tisíc.



Obr. 4: Histogramy výnosov z aktív,1000 simulácií

Ak porovnáme výstupy z EViews na obrázkoch (3) a (4) tak možno povedať, že priemerná hodnota výnosu z aktíva $(-0,0284)$ u investora nepoužívajúceho znásobovanie počtu nakúpených aktív sa so zvýšením počtu simulácií výrazne priblížila teoretickej hodnote $(-0,027)$, kým ostatné priemerné hodnoty sa priblížili iba málo, či sa dokonca vzdialili teoretickej hodnote. Nezrovnalosť je spôsobená povahou stratégie znásobovania počtu nakúpených aktív a to tak , že

jednotlivé výnosy z aktív sa nerealizujú pri rovnako veľkých vkladoch a teda nie je správne ich jednoduchým spôsobom priemerovať.
Pokúsim sa modelovať málo modifikovanú stratégiu investovania riziko obľubujúceho investora. Na rozdiel od predchádzajúcej časti si investor nebude dopredu vedieť zvoliť počet periód v ktorých bude investovať. Budem modelovať, že je ochotný investovať jednu sériu to znamená, že bude nakupovať aktíva dovtedy, kým nenastane prvý krát udalosť A, teda kým nebude mať prvú nenulovú výplatu. Počet periód v ktorých bude investovať bude teda podmienený na jednej strane vektorom udalostí (*teoretickou dĺžkou série*)a na druhej strane jeho počiatočným kapitálom, ktorý je ochotný celý počas investovania riskovať (*Ak by aj bola dĺžka série povedzme desať periód , ale investor nie je schopný túto prefinancovať, tak prirodzene počet periód v ktorých bude investovať nemôže byť desať*).
Ako príklad môžem uviesť investora s počiatočným kapitálom 15 , ktorý zdvojnásobuje počet nakúpených aktív, teda on je schopný prefinancovať dĺžku série najviac 4 periódy. Jeho vektor vkladov v prípade dĺzky série 4, čomu zodpovedá vektor udalostí $\overrightarrow{a}$ by bol:

$$\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix} \quad \text{zodpovedajúci vektor udalostí je :} \quad \overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ak by bola dĺžka série čo i len o 1 periódu dlhšia investor by nemal ako kúpiť ani len jedno aktívum v piatej perióde. V prípade, že nastane situácia, že investor síce nemá ako znásobiť počet nakúpených aktív, ale stále má možnosť kúpiť aspoň menšie množstvo aktív , tak ho kúpi. Toto si môžme ilustrovať na nasledujúcom príklade : investor ztrojnásobuje nakúpené množstvo, začal s kapitálom rovným 10 a séria bude mať dĺžku 3. Tomu zodpovedajú nasledovné vektory :

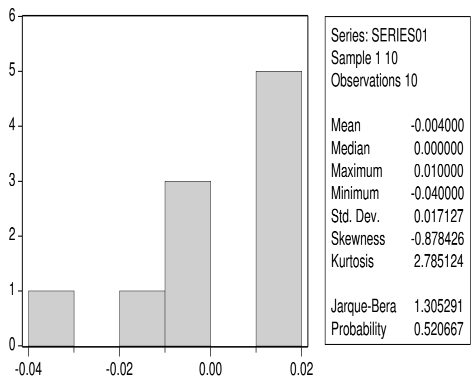
$$\overrightarrow{v}_t = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

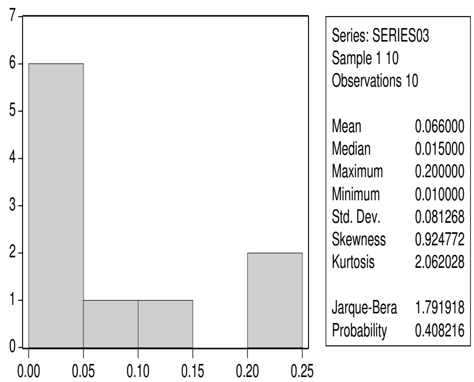
kde$\overrightarrow{v}_t$ je teoretický vektor vkladov, $\overrightarrow{v}$ je skutočný vektor vkladov, vzhľadom na to, že má k dispozícii počiatočný kapitál $10 = 1 + 3 + 6$ a $\overrightarrow{a}$ je vektor udalostí. V tretej perióde investor už nemohol ztrojnásobovať, preto vložil zvyšok svojich prostriedkov.
Uvedenú stratégiu investovania možno modelovať veľmi podobnou funkciou ako v predošlom type stratégie. Ja som konkrétne v Matlabe naprogramoval funkciu **investor2**, ktorej zdrojový kód vyzerá naledovne:

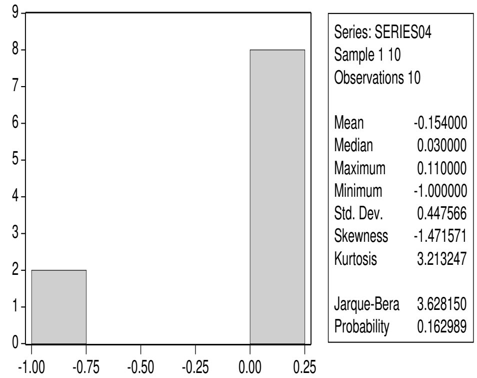
```
function [r] = investor2(n,kapital,nasobok)
k=kapital;                  % počiatočný kapitál investora
v=1;                        % pocet kúpených aktív v prvej perióde
perioda=0;
for i=1:n
a=0;
if k==0
        break
end
while a==0
    f=rand;
    if f<=18/37
        a=1;
    else
        a=0;
    end
    if a==1
        k=k+v;
        v=1;
    else k=k-v;
        v=nasobok*v;          % znásobíme počet nakúpených aktív
    end
    if k<=v
        v=k;
    end
    perioda=perioda+1;
    vklad(1)=1;
    vklad(perioda+1)=v;
    acko(perioda)=a;
```

```
        if k==0
            break
        end
    end
    end
    k;
    vklad(perioda+1)=[];
    perioda;                              % počet realizovaných periód
    [r]=((k-kapital)/kapital);            % čistý zisk/riskovaný kapitál
    vklad;                                % vektor vkladov v jednotlivých periódach
    acko;                                 % vektor vyplatenia/nevyplatenia aktiva
```

Rozdiel oproti funkcii **investor1** spočíva na jednej strane v mierne pozmenenom toku programu a na druhej strane vo význame parametra n a v spôsobe výpočtu výnosu r. Kým parameter n vo funkcii **investor1** znamemenal počet periód v ktorých bude investor investovať, vo funkcii **investor2** parameter n hovorí, koľko sérii sa chystá investor investovať. Ja budem modelovať takú stratégiu, že investor bude nakupovať iba počas jednej série, teda parameter n bude rovný 1. Výnos z celej investície (*série*) bude rovný rozdielu kapitálu investora na konci série a na začiatku série, predeleného kapitálom na začiatku série. Zavolám funkciu investor2 pomocou funkcie opakovac desaťkrát (*modelujem krátkodobé hľadisko*) a výsledky simulácii budem analyzovať v EViews. Počiatočný kapitál investora bude 31 a bude investovať jednu sériu t.j $n = 1$.







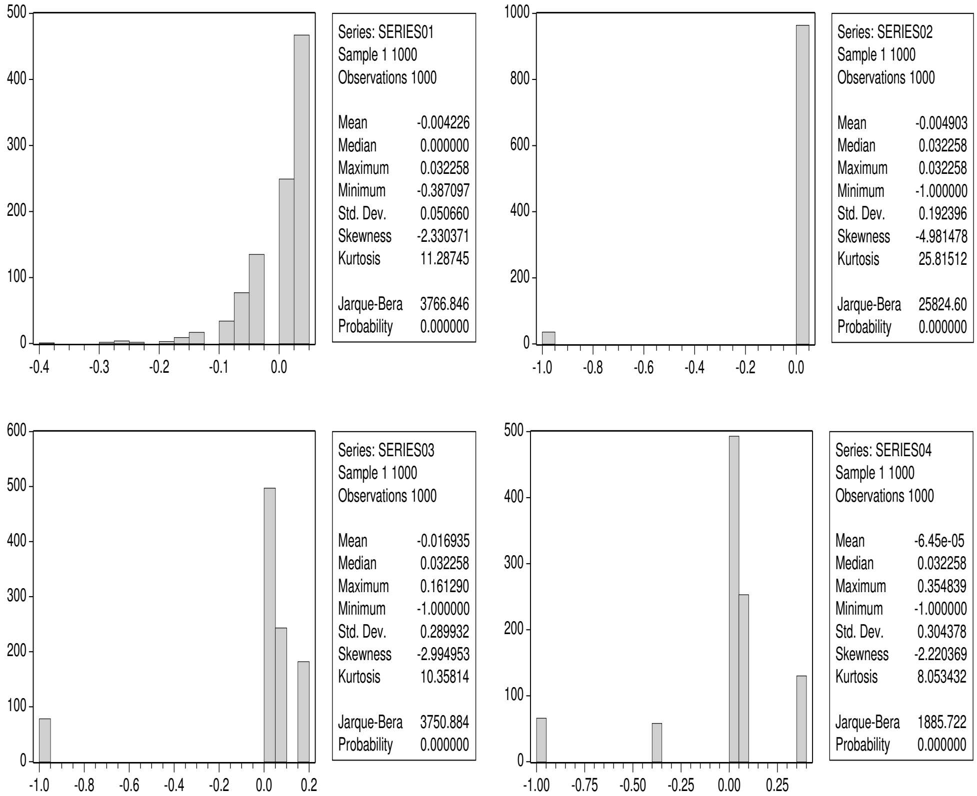
Obr. 5: Histogramy výnosov z investícií,10 simulácií

Histogramy reprezentujú výnosy z investície troch riziko obľubujúcich investorov v poradí investora neznásobujúceho, ztrojnásobujúceho a zštvornásobujúceho počty nakúpených aktív. Ako môžme vidieť Jarque-Berra test normality nezamietol normalitu dát ani v jednom z troch prípadov.

V prípade prvého investora môžme vidieť veľmi nízku štandardnú odchýlku a priemerný výnos z investície je záporný, čo je v súlade s tým, že sa jedná o riziko obľubujúceho investora.

V prípade druhého investora sa oproti prvému investorovi štandardná odchýlka zvýšila a podarilo sa mu dosiahnuť kladný priemerný výnos z investície teda dokázal pozitívnym spôsobom ovplyvniť svoj zisk. V nasimulovanej vzorke sa dokonca ani raz nerealizoval záporný výnos z investície.

U tretieho investora, používajúceho zštvornásobovaciu stratégiu, ako je možné vidieť na výstupe došlo k oproti predchádzajúcim investorom k značnému nárastu štandardnej odchýlky. Priemerný výnos z investície sa dostal hlboko pod úroveň $0,027$, lebo došlo k sérii, ktorú investor nemal ako prefinancovať a investor prišiel o celý svoj počiatočný kapitál. Medián zostal kladný, to znamená, že viac ako polovica realizovaných výnosov zostala kladných. Aby som sa na výnosy mohol pozrieť aj z dlhodobejšieho hľadiska, tak sa pozriem aj na histogramy pre tisíc simulácií:



Obr. 6: Histogramy výnosov z investícii,1000 simulácií

Ako je možné vidieť na výstupe, z dlhodobého hľadiska výnos u riziko obľubujúceho investora klesne pri akejkoľvek stratégii pod nulu. Rozdiel je iba v tom, že čím väčšie násobky investor používa tým je väčšia štandardná odchýlka výnosov. Taktiež platí, že so znásobovaním je vyššia pravdepodobnosť kladných výnosov, ale aj pravdepodobnosť väčšej straty. Z dlhodobého hľadiska je úplne jedno akú stratégiu riziko obľubujúci investor použije, pretože jeho výnos bude približne rovný očakávanému výnosu z dlhodobého hľadiska. Čím väčší kapitál na začiatku je ochotný investor riskovať tým dlhšie je schopný vhodnou voľbou stratégie ovplyvniť svoje zisky (*v tom zmysle, že zvýši pravdepodobnosť klad-*

ných výnosov, ale na úkor rizika, väčšej straty) Túto stratégiu by mohol využiť napríklad investor, ktorý dostane finančné prostriedky, ale len pod podmienkou, že ich bude určitú dobu investovať do rizikových aktív.

2.4 Stratégie investovania rizikovo averzného investora

Bolo ukázané, že pre rizikovo averzného investora a teda aj pre aktíva, ktoré kupuje platí

$$\overline{r}_a > 0$$

Kedže očakávaný výnos z dlhodobého hľadiska rizikovo averzného investora je kladný, nebude mať záujem si ho zvyšovať z krátkodobého hľadiska za cenu väčšieho rizika strát, inak by nebol rizikovo averzný. Takýto investor vie, že z dlhodobého hľadiska by mal dosiahnuť kladný výnos. Lenže čo ak má možnosť nakupovať takéto aktíva iba krátkodobo? A akú stratégiu nakupovania by mal zvoliť? Odpoveďou na túto otázku je **diverzifikácia rizika**. Investor, ktorý má možnosť nakúpiť krátkodobo aktíva, ktoré majú kladný očakávaný výnos z dlhodobého hľadiska by mal svoje investície rozdeliť do pokiaľ možno čo najviac navzájom nezávislých aktív. Takouto stratégiou minimalizuje riziko straty, ktoré plynie z krátkodobého charakteru investície a maximalizuje šance na dosiahnutie výnosu blízkemu očakávanemu výnosu z dlhodobého hľadiska.

Budem simulovať výnosy rizikovo averzného investora, ktorý diverzifikuje svoje riziko a taktiež budem simulovať výnosy z aktív rizikovo averzného investora, ktorý nebude diverzifikovať svoje riziko a porovnám ich. Na tieto účely naprogramujem funkciu **averzny**, ktorá má v Matlabe nasledovný tvar:

```
function [r]=averzny(n,kapital)
ka=kapital;     % hodnota za ktorú hodlá investor investovať
for i=1:n
    k(i)=ka/n;
    f(i)=rand;
    if f(i)<=19/37
        a(i)=1;
    else a(i)=0;
    end
    if a(i)==1
```

```
            k(i)=2*k(i);
        else
            k(i)=0;
        end
    end
    ka=sum(k)
    [r]=(ka-kapital)/kapital;   % výnos z investície v jednej perióde
```

kde parametre majú nasledovný význam:

n $\rightarrow$ počet nezávislých (*kovariancia medzi nimi je* 0) aktív medzi ktoré investor rozloží riziko

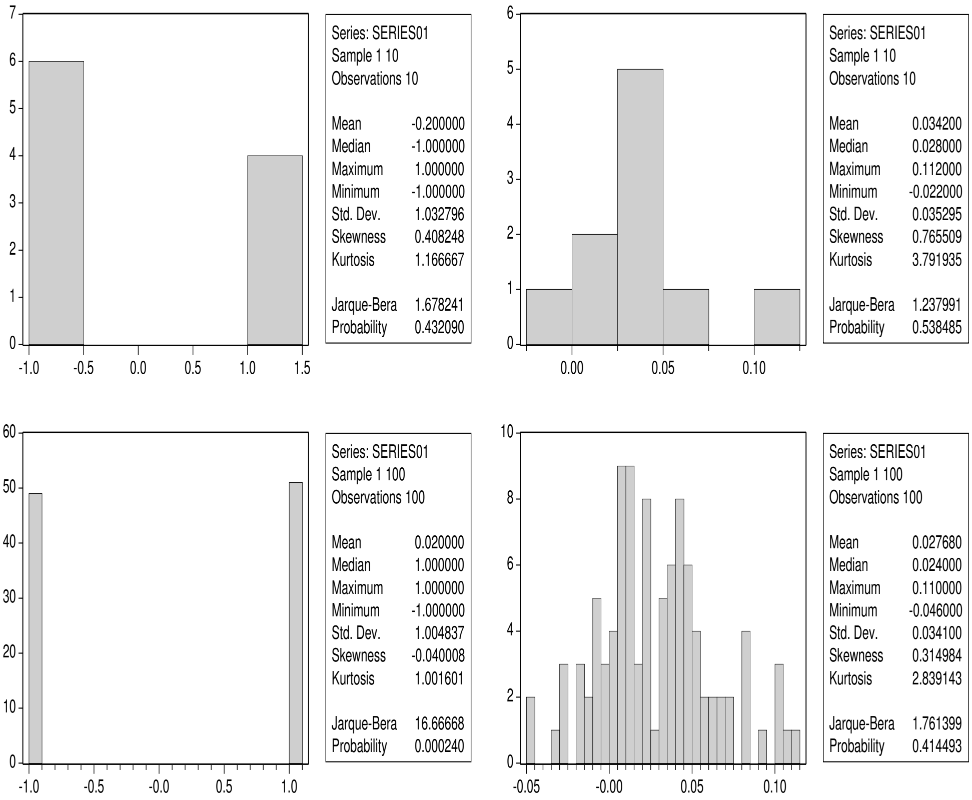
kapital $\rightarrow$ hodnota, ktorú hodlá investovať

r $\rightarrow$ jeho výnos na konci periódy - na konci splatnosti aktív

Touto funkciou modelujem výnosy len v jednej perióde, pričom uvažujem podobné aktívum ako u riziko obľubujúceho investora.
Uvažujme aktívum,ktoré s pravdepodobnosťou $p_A = \frac{19}{37}$ vypláca 2 - násobok pôvodnej hodnoty X_0 a s pravdepodobnosťou $p_B = \frac{18}{37}$ vypláca 0. Očakávaný výnos z dlhodobého hľadiska pre uvažované aktívum je :

$$\overline{r} = \frac{E(X_1) - X_0}{X_0} = \frac{p_A * 2X_0 + p_B * 0 - X_0}{X_0} \doteq 0,027$$

Ide teda o nerizikové aktívum, pretože jeho očakávaný výnos z dlhodobého hľadiska je kladný a nakupuje ho rizikovo averzný investor. Zavolám funkciu **averzny** najprv len desaťkrát - skúmanie krátkodobého hľadiska pre $n = 1$ a $n = 1000$ a potom 100 krát - posúdenie z dlhodobejšieho hľadiska pre $n = 1$ a $n = 1000$. Na obrázku (7) si môžme porovnať histogramy početností pre tieto výnosy. Ľavý horný obrázok predstavuje histogram početnosti výnosov z desiatich simulácií a investora, ktorý nediverzifikuje riziko. Pravý horný je tiež z desiatich simulácií, ale investor diverzifikuje riziko až medzi tisíc navzájom nezávislých aktív s rovnakými očakávanými výnosmi. Dolné obrázky sú simulácie pre tie isté parametre, ale počet simulácií je sto.



Obr. 7: Histogramy výnosov rizikovo averzného investora

Zaujímavým faktom je, že napriek tomu, že investor nediverzifikujúci svoje riziko nakupuje aktíva s kladným očakávaným výnosom, tak z krátkodobého hľadiska dosiahol záporný priemerný výnos (*ľavý horný obrázok*). Naproti tomu investor, ktorý diverzifikoval svoje riziko dosiahol hodnotu blízku hodnote očakávaného výnosu už z krátkodobého hľadiska. Ak zvýšime počet simulácií na sto, tak už aj nediverzifikujúci riziko sa priblíži očakávanému výnosu, ale avšak diverzifikujúci sa priblíži podstane bližšie a s oveľa menšou štandardnou odchýlkou, čo robí investíciu oveľa bezpečnejšou. Prišiel som teda k záveru, že diverzifikáciou rizika môže rizikovo averzný investor "napodobniť"dlhodobé hľadisko.

V praxi sa často rieši tzv. Markowitzov problém :

$$\min \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} w_i w_j \sigma_{ij}$$

$$\sum_{i=1}^{n} w_i \overline{r}_i = \overline{r}_p$$

$$\sum_{i=1}^{n} w_i = 1$$

ktorý hľadá optimum medzi minimalizáciou rizika a maximalizáciou výnosu a ktorý je podrobne sformulovaný a vyriešený v [7].

2.5 Stratégie investovania rizikovo neutrálneho investora

Pre rizikovo neutrálneho investora platí, že nakupuje aktíva ktorých očakávaný výnos z dlhodobého hľadiska je rovný:

$$\overline{r}_n = 0$$

Ak by nakupoval rizikovo neutrálny investor aktíva s nulovým očakávaným výnosom, potom ak by si chcel zabezpečiť výnosy blízke tejto hodnote aj z krátkodobého hľadiska tak by mohol podobne ako rizikovo averzný investor diverzifikovať riziko. Ak by chcel mať z krátkodobého hľadiska vyššie kladné výnosy, tak by mohol použiť napr. stratégiu znásobovania, čím by ale zároveň aj išiel do rizika väčších strát. Obe metódy som už simuloval pri ostatných dvoch typoch investorov a nebudem ich znovu rozvádzať pri rizikovo neutrálnom investorovi.

Kapitola 3

3 Modelovanie risku

3.1 Monty Hall problém

V roku 1963 vznikla veľmi populárna americká televízna súťaž s názvom **Let's make a deal**,vďaka ktorej uzrel svetlo sveta jeden známy paradox pravdepodobnosti nazvaný Monty Hall problém, názov je po moderátorovi súťaže. V záverečnej fáze súťaže Let's make a deal dá moderátor súťažiacemu vybrať jedny z troch dverí. Za dvoma dverami nič nie je a za tretími sa nachádza hlavná cena - automobil. Potom ako si súťažiaci vyberie jedny dvere, moderátor, ktorý vie, za ktorými dverami sa nachádza automobil otvorí jedny dvere, za ktorými vie, že sa nenachádza automobil.Potom si súťažiaci môže vybrať či bude trvať na svojej voľbe, alebo zmení rozhodnutie a vyberie si dvere, ktoré zostali. Riešením úlohy je, že výhodnejšie je pre súťažiaceho zmeniť rozhodnutie a vtedy je pravdepodobnosť výhry $\frac{2}{3}$ oproti pravdepodobnosti výhry $\frac{1}{3}$ ak bude trvať na svojom pôvodnom rozhodnutí. Veľa matematikov bolo však presvedčených, že na rozhodnutí súťažiaceho nezáleží a že pravdepodobnosť výhry je nezávisle na rozhodnutí súťažiaceho rovná $\frac{1}{2}$. Ja som bol tiež presvedčený o správnosti tej druhej nesprávnej alternatívy. Ja sa pokúsim podať riešenie tohto problému metódou Monte Carlo a pomocou štatistiky.

3.2 Riešenie Monty Hall problému metódou MC

Naprogramujem funkciu **dvere**, ktorá bude náhodne generovať umiestnenie auta za dverami, ako aj tipy súťažiaceho, ktorý bude zakaždým po otvorení dverí meniť svoje rozhodnutie. Táto funkcia bude počítať pravdepodobnosť jeho úspechu. Nechám ju simulovať hru stotisíc krát a z toho odhadnem pravdepodobnosť s akou súťažiaci ktorý mení svoje rozhodnutia vyhrá automobil. Túto potom budem testovať. Funkcia v Matlabe môže vyzerať nasledovne:

```
uspech=0;
perioda=0;
for z=1:100000
f=rand;
if f<=1/3
    a(1)=1;
    a(2)=0;
    a(3)=0;
elseif (f>1/3)&(f<=2/3)
    a(1)=0;
    a(2)=1;
    a(3)=0;
else
    a(1)=0;
    a(2)=0;
    a(3)=1;
end             % nahodne vygenerovanie pokladu
typ=rand;
if typ<=1/3
    typ(1)=1;
    typ(2)=0;
    typ(3)=0;
elseif (typ>1/3)&(typ<=2/3)
    typ(1)=0;
    typ(2)=1;
    typ(3)=0;
else
    typ(1)=0;
    typ(2)=0;
    typ(3)=1;   %typ hraca
end
    if typ==a
   for i=1:3
       if a(i)==0
           a(i)=10;
           break
       end
   end
```

```
        else
            for j=1:3
                if a(j)==typ(j)
                    a(j)=10;
                end
            end
        end
            for p=1:3
                if (typ(p)==0)&(a(p)<10)
                    typ(p)=2;
                end
            end
            for q=1:3
                if typ(q)==1
                    typ(q)=0;
                end
            end
            for r=1:3
                if typ(r)==2
                    typ(r)=1;
                end
            end
            for s=1:3
                if a(s)==10
                    a(s)=0;
                end
            end
            perioda=perioda+1;
            if a==typ
                uspech=uspech+1;
            end
    end
        pravdepodobnost=uspech/perioda       % sanca v pripade zmeny rozhodnutia
```

Keď som spustil algoritmus 100000 krát tak som dostal odhad pre pravdepodobnosť:

$$\hat{p} \doteq 0,6676$$

Nakoľko "konkurenčná strana"hovorí, že pravdepodobnosť úspechu je $\frac{1}{2}$, budem testovať hypotézy:

$$H_0 : \quad p \leq \frac{1}{2} \qquad vs \qquad H_1 : \quad p > \frac{1}{2}$$

testovacia štatistika za platnosti nulovej hypotézy:

$$V = \frac{\hat{p} - 0,5}{\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}} \sim N(0,1)$$

hodnota testovacej štatistiky je:

$$V = 112.5085 > V^c_{0,5\%} = 2,576 \Rightarrow H_0 \quad \text{zamietam}$$

na hladine významnosti $99,5\%$, teda na $99,5\%$ je skutočná pravdepodobnosť väčšia ako $\frac{1}{2}$. Nakoniec ešte spravím obojstranný test s hypotézami

$$H_0: \quad p = \frac{2}{3} \qquad vs \qquad H_1: \quad p \neq \frac{2}{3}$$

Testovacia štatistika za platnosti nulovej hypotézy má tvar:

$$V = \frac{\hat{p} - \frac{2}{3}}{\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}} \sim N(0,1)$$

Ak by sme teraz túto štatistiku chceli porovnávať s kritickými hodnotami normovaného normálneho rozdelenia, tak musíme byť opatrný, lebo ak by sme chceli testovať na hladine významnostu α %, tak musíme porovnávať na jednu aj druhú stranu s $\frac{\alpha}{2}\%$ - nými kritickými hodnotami. Alternatívne sa dá použiť pri obojstrannom teste $p - value = 2(1 - pnorm(V))$, kde pnorm je distribučná funkcia normovaného normálneho rozdelenia. Ak je

$$p - value < \alpha\%$$

tak H_0 zamietam na hladine $\alpha\%$. V našom prípade $V = 0,6265$ a $p - value = 0,530987$ teda H_0 nezamietam a pripúšťam rovnosť skutočnej hodnoty pravdepodobnosti $\frac{2}{3}$. Monte Carlo simulácie teda s vysokou pravdepodobnosťou potvrdzujú, že účastník hry Let's make a deal ako aj účastník akejkoľvek inej hry či investície, ak sa dostane do podobnej situácie, tak by mal predsa len prehodnotiť svoje rozhodnutie, aby tak maximalizoval svoju šancu na zisk a minimalizoval svoje prípadné straty.

Záver

Metóda Monte Carlo je stochastická metóda, ktorá má veľmi široké uplatnenie v najrozličnejších oblastiach života. Jej význam vždy stúpal a bude stúpať s rastúcou výkonnosťou počítačov. Využíva sa hlavne pri problémoch ktorých analytické riešenie je veľmi komplikované.

Cieľom mojej práce bolo hlavne poukázať na možnosti využitia Monte Carlo metódy vo financiách a modelovaní risku. Ja som sa v práci sústredil predovšetkým na konkrétne hypotetické problémy investorov a snažil som sa ich simulovať metódou Monte Carlo. Práca má tri kapitoly:
V prvej kapitole som uviedol aj niečo z histórie a vzniku MC metódy ako aj podmienkach jej vývoja. Ďalej som podrobne rozobral dva jednoduché príklady na ktorých som demonštroval princíp Monte Carlo metódy. Zámerne som pritom zvolil celkom neutrálne príklady, aby bolo jasné ako metóda funguje.
V druhej kapitole som sa snažil o simulovanie investovania investorov v závislosti od ich averzie k riziku a podrobnejšie analyzovanie údajov získaných zo simulácií. V poslednej kapitole som sa pokúsil o riešenie metódou MC známeho Monty Hall problému, ktorý vznikol vďaka televíznej súťaži v USA a v ktorom ide o optimalizáciu šancí súťažiaceho na výhru.

Za hlavné výsledky práce považujem:

- v prvej časti úvod do problematiky Monte Carlo metódy, jej stručný opis vzniku, podmienok vývoja ako aj jej vyhliadky do budúcnosti a vysvetlenie princípu jej fungovania

- v druhej časti stručný úvod do terminológie finančnej matematiky a investovania. Ďalej MC simuláciami som poukázal na to, že riziko obľubujúci investori si môzu vhodnou stratégiou investovania zvýšiť pravdepodobnosť kladných výnosov aj keď za cenu zvýšeného rizika vyšších strát. MC simulácie potvrdili výhodnosť diverzifikácie rizika rizikovo averzných investorov hlavne z krátkodobého hľadiska, vďaka čomu minimalizujú svoje riziko záporných výnosov. Hlavne z krátkodobého hľadiska preto, lebo už z definície rizikovo averzného investora vyplýva, že za aktíva platí menej ako je stredná hodnota aktíva v čase splatnosti a teda dlhodobo by mal byť ziskový.

- v tretej časti som podal vlastné riešenie Monty Hall problému metódou MC,ktoré je v dobrej zhode s jeho matematickým riešením. Riešenie spočíva v simulovaní problému a následnom štatistickom testovaní získaných dát.

V práci som kládol dôraz na konkrétne príklady Monte Carlo simulácii, ktoré som aj sám implementoval v matematickom sowtware Matlab, ktoré sa prevažne týkali investovania a modelovania risku s výnimkou dvoch úvodných príkladov, ktoré boli skôr matematického charakteru z dôvodu dôkladného ozrejmenia podstaty Monte Carlo metódy. MC metóda má veľmi široké pole pôsobnosti (*spomeniem napríklad štatistická fyzika, astronómia, meteorológia...*), avšak obmedzenie vzhľadom na rozsah a cieľ práce mi nedovolili bližšie sa zaoberať týmito aplikáciami metódy. Snažil som sa naznačiť a poukázať na užitočnosť MC simulácii, ktoré vedia veľmi dobre aproximovať skutočnosť.

Literatúra

[1] Ronald W. Shonkwiler Franklin Mendivil : Explorations in Monte Carlo Methods

[2] Malvin H.Kalos, Paula A, Whitlock : Monte Carlo Methods

[3] Peter Jäckel : Monte Carlo Methods in finance

[4] Tesař, J- Bartoš, P. : Metoda Monte Carlo a programovací jazyk matlab při přípravě učitelů na pedagogických fakultách

[5] Dieter W.Heermann : Computer Simulation Methods in Theoretical Physics

[6] David P. Landau Kurt Binder : Guide to Monte Carlo Simulations in Statistical Physics

[7] Igor Melicherčík, Ladislava Olšarová,Vladimír Úradníček : Kapitoly z finančnej matematiky

[8] Stanislav Katina : Vybrané kapitoly z počítačovej štatistiky 1

[9] Dr. Zuzana Siebertová : Prednášky z predmetu ekonometria