UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

Bakalárska Práca

Bratislava 2011

Tomáš Malik

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

Evidenčné číslo: 8d70c1a9-925c-4830-9f40-a1dfcde68b44

Náhodné matice a ich aplikácie v ekonómii

Bakalárska práca

Študijný odbor: 9.1.9 Aplikovaná matematika

Študijný program: Ekonomická a finančná matematika

Vedúci bakalárskej práce: Mgr.Martin Niepel, PhD

Bratislava 2011

Tomáš Malik

Univerzita Komenského v Bratislave
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

ZADANIE ZÁVEREČNEJ PRÁCE

Meno a priezvisko študenta: Tomáš Malik
Študijný program: ekonomická a finančná matematika (Jednoodborové štúdium, bakalársky I. st., denná forma)
Študijný odbor: 9.1.9. aplikovaná matematika
Typ záverečnej práce: bakalárska
Jazyk záverečnej práce: slovenský

Názov : Náhodné matice a ich aplikácie v ekonómii

Cieľ : Oboznámenie sa s teóriou náhodných matíc a aplikáciami v ekonometrii.

Literatúra : [1] J.P. Bouchaud, M. Potters: Financial Applications of Random Matrix Theory: a short review, arXiv:0910.1205.

Anotácia : Táto práca bude prevažne teoretická, s možnosťou prípadných počítačových simulácií. Náhodné matice vykazujú zaujímavé vlastnosti, napríklad distribúcie vlastných hodnôt matíc (symetrických, unitárnych a pod.). Predmetom práce bude porozumieť pojmu nahodná matica - t.j. ako zaviesť vhodnú pravdepodobnostnú mieru na rôznych priestoroch matíc, oboznámiť sa so základnými výsledkami (Wignerov polkružnicový zákon a pod.) a skúmať rôzne priestory náhodných matíc, ktoré môžu byť zaujímavé z pohľadu ekonómie alebo finančnej matematiky (napr. Markovovské matice).

Vedúci : Mgr. Martin Niepel, PhD.

Dátum zadania: 08.11.2010

Dátum schválenia: 08.11.2010

doc. RNDr. Margaréta Halická, CSc.
garant študijného programu

študent

M. Niepel
vedúci práce

Dátum potvrdenia finálnej verzie práce, súhlas s jej odovzdaním (vrátane spôsobu sprístupnenia)

3.6.2011, M. Niepel
vedúci práce

Čestné prehlásenie

Prehlasujem, že som túto bakalársku prácu vypracoval samostatne s použitím uvedenej odbornej literatúry a ďalších zdrojov.

Bratislava 03.06.2011 ....

Tomáš Malik

Poďakovanie

Týmto by som chcel poďakovať Mgr. Martinovi Nieplovi, PhD. za odbornú pomoc, cenné rady, konzultácie a trpezlivosť pri vypracovávaní bakalárskej práce.

Abstrakt

MALIK,Tomáš:*Náhodné matice a ich aplikácie v ekonómii*[Bakalárska práca], Univerzita Komenského v Bratislave, Fakulta matematiky, fyziky a informatiky, Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky; školiteľ: Mgr.Martin Niepel,PhD., Bratislava, 2011, 31 s.

Bakalárska práca sa zaoberá náhodnými maticami a ich aplikáciami na finančnú oblasť – spravovanie akciových portfólií. Cieľom bakalárskej práce je vysvetliť základné teoretické poznatky o náhodných maticiach a vysvetliť ich využitie v ekonómii. Prvá časť práce sa venuje výskytu náhodných matíc v ekonomickej teórii a popisuje Markowitzov model z pohľadu algebry a náhodných matíc. V závere prvej kapitoly sa definujú rozdiely medzi empirickou a skutočnou korelačnou maticou a ich vplyvu na výsledné zloženie a volatilitu portfólia. Nasledujúca kapitola popisuje teoretické spôsoby zostrojenia náhodných matíc. Venuje sa taktiež aj popisu distribučných funkcií pre matice a ich vlastné čísla. Na konci druhej kapitoly sa uvádzajú idey dôkazov pre Wignerov polkružnicový zákon a Marčenko-Pasturovo rozdelenie. V tretej kapitole dochádza k popisu obmedzení teoretických poznatkov pri aplikáciách na reálne finančné dáta, odchýlkam teórie oproti nim a možným vylepšením teórie.

Kľúčové slová: Náhodné matice, Markowitzov model, Wignerov polkružnicový zákon, Marčenko-Pasturovo rozdelenie

Abstract

MALIK,Tomáš:*Random matrices: economic applications*[bachelor thesis], Comenius University in Bratislava, Faculty of mathematics, physics and informatics, Department of Applied Mathematics and Statistics; Supervisor: Mgr.Martin Niepel,PhD., Bratislava, 2011, 31 p.

Bachelor's thesis deals with random matrices and their applications to the financial sector - managing equity portfolios. The aim of this work is to explain basic random matrix theory and explain its applications in economics. The first chapter deals with the presence of random matrices in economic theory and describes the Markowitz model in terms of algebra and random matrices. At the end of the first chapter the difference between the real and empirical correlation matrix is described and its impact on the omptimal portfolio structure and volatility. The next chapter describes random matrix ensembles and statistical distribution of random matrices and their eigenvalues. At the end of the second chapter basic ideas of Wigner's semicircle law and Marchenko-Pastur's distribution proofs are stated. In the third chapter, the limits of application of random matrix theory to real financial data are described. The last part of the third chapter describes the diference between real financial data and results of Marčenko-Pastur distribution.

Key words: Random matrices, Markowitz model, Wigner semicircle law, Marčenko-Pastur distribution

Obsah

Úvod

Vývoj na finančných trhoch je veľmi náročné správne predikovať a doznievajúca finančná kríza tento fakt len umocňuje. Pre správnu analýzu a predikciu rastu akcií, indexov alebo iných finančných produktov je dôležité odlíšiť náhodnosť a odchýlky ich správania od trendu. Podstatou býva analýza historických údajov pre potreby predikcie.

Táto bakalárska práca je založená ná prácach Jean-Phillipa Bouchauda a Marca Pottersa, predovštkým na článku *Financial Applications of Random Matrix Theory: a short review*, ktorí vo svojich publikáciách sumarizujú doterajšie poznatky o náhodných maticiach a ich aplikáciach na finančné trhy.

Cieľom tejto práce je vysvetliť základné motívy a dôvody pre používanie náhodných matíc vo finančnej oblasti a poskytnúť základné interpretácie matematických konceptov z ekonomického pohľadu. Zároveň je cieľom popísať doterajšie teoretické poznatky o náhodných maticiach, predpoklady ich používania a v neposlednom rade ich aplikáciu na dáta z finančných trhov.

V prvej kapitole sú popísané oblasti vedných disciplín, kde sa náhodné matice využívajú. Ďalej sa podrobnejšie venuje využitiu náhodých matíc vo finančnej matematike, a to konkrétne pri hľadaní Markowitzovho optimálneho portfólia – optimálnych váh jednotlivých komponentov a volatility.

Druhá kapitola je zameraná na teoretické poznatky o náhodných maticiach. Na začiatku kapitoly sa popisujú rôzne konštrukcie náhodných matíc, rozdelenia prvkov týchto matíc a ich úpravy na rozdelenia vlastných čísel. V závere sú načrtnuté hlavné idey pre dôkazy Wignerovho polkružnicového zákona a distribučnej funkcie Marčenka-Pastura.

Posledná kapitola sa venuje obmedzeniam teórie pri práci s reálnymi dátami. Taktiež uvádza porovnanie teórie s výsledkami z finančných trhov.

1 Náhodné matice v reálnom svete

1.1 Využitie náhodných matíc

S rozvojom počítačov po druhej svetovej vojne prichádzal ruka v ruke rozvoj aj v ostatných oblastiach vedy. Možnosť pracovať a analyzovať väčšie množstvá dát zrýchlilo rozvoj väčšiny vedných disciplín, matematiku nevynímajúc. Počítače umožnili spracovať čoraz väčšie súbory dát, čo prispelo k rozvoju numerickej matematiky a informatiky. Jednou zo základných úloh bola práca s maticami. Počítače taktiež umožnili rozvoj generátorov pseudonáhodných čísel, čo napomohlo experimentovaniu s náhodnými maticami a viedlo k rozvoju teórie v tejto oblasti matematiky.

V súčasnosti používanie náhodných matíc ďaleko presiahlo akademickú oblasť matematiky. Analýzy náhodných procesov, pri ktorých sa poznatky o náhodných maticiach využívajú, sa vo veľkom využívajú v biológii pri analýze bunkových procesov, DNA a genetike, v chémii pri vyhodnocovaní odchýlok komplexných reakcií a vyrábaní rôznych zlúčenín. Vo fyzike sa objavujú náhodné matice pri popisovaní kvantovej mechaniky a iných chaotických systémov. V neposlednom rade sa na náhodné matice ako na vhodný nástroj začínajú pozerať akademici vo finančnej oblasti, kde množstvo prác z posledných rokov tento fakt iba potvrdzuje.

Zaujímavý príklad využitia náhodných matíc v oblasti finančnej matematiky dostaneme, keď sa pozrieme na Markowitzov model a korelačnú (kovariančnú) maticu, ktorá sa využíva pri postupe hľadania efektívneho portfólia, rizika a váh jednotlivých komponentov. V nasledujúcej časti v krátkosti opíšeme Markowitzov model a ukážeme ako sa v predpoklade náhodnosti vstupov vyskytnú náhodné matice.

Majme finančné údaje r_i^t o N spoločnostiach za časovú periódu T, v ktorých sú obsiahnuté informácie o predchádzajúcom vývoji akcií na finančných trhoch. Dolný index označuje spoločnosť a horný realizáciu v čase t. Ďalej predpokladáme, že hodnoty sú vycentrované a normované. Výstupom je matica X typu $T \times N$, kde X je definovaná ako $X_{ti} = r_i^t / \sqrt{T}$ (je normovaná). Najvhodnejším spôsobom ako definovať koreláciu medzi jednotlivými akciami je Pearsonov korelačný koeficient pre matice:

$$E_{ij} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T} r_i^t r_j^t \equiv \left(X^T X \right)_{ij} \tag{1}$$

Ak predpokladáme, že ceny akcií predstavujú náhodné premenné a údaje r_i^t zodpovedajú ich realizáciam, tak je dôležité uvedomiť si, čo matica E predstavuje. Matica E predstavuje empirickú korelačnú maticu z dát zozbieraných z finančných trhov. Pravú korelačnú maticu nemôžeme nikdy spoznať presne, ale môžeme jej hodnoty odhadnúť. Túto pravú (skutočnú) korealčnú maticu označíme C. Pri malom počte akcií a veľkom počte dát ($q = N/T$ je blízke nule) by sme sa vedeli priblížiť k skutočnej hodnote s dosť veľkou presnosťou. Avšak realita je spravidla opačná, cieľom je analyzovať celé akciové indexy, kde je počet akcií rádovo v desiatkách, stovkách či tisícoch, a historické údaje sú obmedzené, prípadne príliš staré údaje sú nepoužiteľné v dôsledku zmien na finančných trhoch. Pomer q teda nebýva veľmi vzdialený od 1, čo môže spôsobiť, že rozdiely medzi C a E budú nezanedbateľné. Cieľom aplikácie teoretických poznatkov o náhodných maticiach v ekonómii je práve popísať rozdiel medzi týmito maticami. Tieto rozdiely sa na prvý pohľad javia ako veľmí náhodné, ale pri bližšej analýze sa zistí, že bez ohľadu na vstupy, sa správajú podobne.

1.2 Náhodné matice a akcie

Korelačná matica nejakého portfólia akcií je typu $N \times N$, je symetrická a dá sa diagonalizovať. Pomocou PCA (Pricnipal Component Analysis - pomocou ortognálnych transformácii sa snažíme z korelovaných premenných dostať sadu nekorelovaných) sa budeme snažiť rozložiť parameter r_i^t na nekorelované zložky. V reči vlastných čísel a vektorov teda dostaneme:

$$r_i^t = \sum_{\alpha=1}^{N} \sqrt{\lambda_\alpha} V_{\alpha,i} \epsilon_\alpha^t \tag{2}$$

kde $V_{\alpha,i}$ je i-ta zložka vlastného vektora matice C, λ_α je vlastné číslo a ϵ_α^t predstavuje nekorelovanú (v rámci rôznych λ) náhodnú premennnú s jednotkovou disperziou. V prípade, že λ_{max} nadobúda výrazne väčšiu hodnotu ako ostatné vlastné čísla, vzťah (2) sa dá nasledovne aproximovať pomocou tohto vlastného čísla.

$$r_i^t \approx \sqrt{\lambda_1} V_{1,i} \epsilon_1^t \tag{3}$$

Našou snahou bude teraz interpretovať význam vlastných čísel a vektorov korelačnej matice z pohľadu finančnej analýzy, na čo nám poslúži Markowitzov model. Jednotlivé zložky $V_{\alpha,i}$ sa dajú chápať ako váhy a zloženie istého portfólia Π_λ, kde kladné znamienko zložky predstavuje dlhú pozíciu a záporné naopak krátku. Výsledné riziko R_α^2 portfólia Π_λ môžeme vyjadriť pomocou variancie jeho návratností a dostaneme teda :

$$R_\alpha^2 = \frac{1}{T}\sum_t \left(\sum_i V_{\alpha,i} r_i^t\right)^2 = \sum_{ij} V_{\alpha,i} V_{\alpha,j} E_{ij} \equiv \lambda_\alpha \tag{4}$$

Z výsledku vyplýva, že vlastné číslo λ_α predstavuje riziko investície prislúchajúcej portfóliu α. Veľké vlastné čísla predstavujú rizikovejšie aktíva. V článku [1] sa spomína, že naivným investovaním (investovaním približne rovnomerne do všetkých aktív) dosiahneme riziko zodpovedajúce približne tejto najväčšej vlastnej hodnote. Nakoľko toto portfólio predstavuje priemernú investíciu do trhu, korelácia portfólia s pohybmi na akciovom trhu bude veľmi vysoká, čo je aj dôvod veľkého rizika - portfólio nie je "poistené"proti neželaným pohybom trhu. Ďalšou vlatnosťou je, že návratnosti jednotlivých portfólií Π_λ sú nekorelované, keďže pochádzajú z navzájom kolmých vlastných vektorov V_α.

$$\frac{1}{T}\sum_t \left(\sum_i V_{\alpha,i} r_i^t\right)\left(\sum_i V_{\beta,j} r_j^t\right) = \sum_{ij} V_{\alpha,i} V_{\beta,j} E_{ij} \equiv \lambda_\alpha \delta_{\alpha,\beta} \tag{5}$$

PCA teda vytvorila z korelačnej matice sadu jednotkových portfólií s nekorelovanými návratnosťami.

1.2.1 Markowitzov model a portfólio

Majme portfólio s N akciami, kde každá akcia má v portfóliu váhu w_i a dennú volatilitu s_i. Za predpokladu, že poznáme skutočnú korelačnú maticu C by sme vedeli spočítať dennú volatilitu celého portfólia.

$$R^2 = \sum_{ij} w_i s_i C_{ij} s_j w_j \tag{6}$$

Pri očakávanom výnose (na základe historických údajov, CAPM alebo iných metód) by sme vedeli vypočítať aj očakávaný zisk celého portfólia, čo by bol vážený priemer očakávaných výnosov jednotlivých zložiek portfólia – $G = \sum w_i g_i$, kde g_i je očakávaný výnos i-tej zložky. Základným problémom je ale presnosť a spoľahlivosť určenia matice C, ktorá ma $N^2/2$ členov. Tieto koeficienty treba určiť z nie príliš obsiahleho súboru dát, kde máme N vektorov s T zložkami. Problémom je hlavne fakt, že väčšinou sa pomer týchto dát $Q = T/N$ pohybuje v intervale 1 až 10, teda máme v priemere N^2 až $10N^2$ vstupných dát, z ktorých odhadujeme $N^2/2$ členov korelačnej matice. Môže sa teda stať, že na odhadnutie jednej zložky empirickej korelačnej matice máme k dispozícii iba dve dáta.

V ďalšej časti budeme predpokladať, že volatilita s_i je nám známa (dá sa vypočítať na základe historických údajov celkom spoľahlivo, prípadne za pomoci Black-Scholesových vzorcov pre opcie). Pre ďalší postup označíme $w_i s_i$ ako w_i a g_i/s_i ako g_i. Toto nám umožní zjednodušiť zápis predchádzajúcej rovnosti pre empirickú korelačnú maticu E, ktorú získame z dát.

$$R_E^2 = \sum_{ij} w_i E_{ij} w_j \tag{7}$$

Podľa [1] nemá výsledný vzorec bias a má relatívne malú, zanedbateľnú chybu oproti (6). Pre výpočet optimálneho portfólia ale potrebujeme použiť skutočnú korelačnú maticu C. Z Markowitzovho modelu vieme riešením sústavy rovníc (napríklad za pomoci lagrangeových multiplikátorov) vyjadriť optimálne váhy w_i^* pre jednotlivé akcie portfólia - portfólia s váhami, ktoré budú ležať na efektívnej hranici. V maticovej forme dostaneme riešenie:

$$w_C^* = G\frac{C^{-1}g}{g^T C^{-1} g} \tag{8}$$

Problém nastáva kvôli prítomnosti C^{-1} vo vzťahu na výpočet optimálnych váh zložiek portfólia. Keďže maticu C nepoznáme, musíme použiť maticu E získanú z empirických dát, ktorá v sebe obsahuje chybu. Práve invertovaním matice E sa do modelu dostanú chyby, nakoľko tie sú obsiahnuté práve v malých vlastných číslach matice E [1].

1.2.2 Riziko

Na základe váh vypočítaných pomocou Markowitzovho modelu a rozlišovaním skutočnej korelačnej matice C alebo empirickej E vieme definovať tri typy rizík, z ktorých jedno skutočné riziko podhodnocuje a druhé nadhodnocuje. Poznanie tohoto faktu umožňuje presnejšiu prácu s finančným dátami a zamedzuje zbytočným odchýlkam vo výpočtoch - zároveň nám dáva poznatok o spoľahlivosti a presnosti našich odhadov o správaní sa finančných trhov.

Prvou možnosťou je kalkulácia volatility najbežnejším spôsobom, a to za pomoci známej, empirickej matice E. Toto riziko portólia je relevantné počas obdobia keď ho počítame - pred obdobím, ktoré nás zaujíma.

$$R_{in}^2 = w_E^{*T} E w_E^* = \left(G \frac{E^{-1}g}{g^T E^{-1} g} \right)^T E \left(G \frac{E^{-1}g}{g^T E^{-1} g} \right) = \frac{G^2}{g^T E^{-1} g} \tag{9}$$

Ďalšou možnosťou je výpočet rizika (aj keď veľmi hypotetický a teoretický)zo skutočnej korelačnej matice C a optimálnych váh, ktorú avšak nepoznáme.

$$R_{true}^2 = w_C^{*T} C w_C^* = \frac{G^2}{g^T C^{-1} g} \tag{10}$$

Posledným podstatným rizikom, s ktorým môžeme pracovať je riziko portfólia vypočítané z korelačnej matice E, ale v ďalšom časovom období, kde už máme informácie o vývoji portfólia (uvažujeme už skutočnú maticu C). Toto riziko počítame spätne.

$$R_{out}^2 = w_E^{*T} C w_E^* = \frac{G^2 g^T E^{-1} C E^{-1} g}{(g^T C^{-1} g)^2} \tag{11}$$

Keď predpokladáme, že matica E je nevychýleným odhadom skutočnej korelačnej matice C, pri invertovaní a za využitia konvexnosti [3] dostaneme nasledovný vzťah (ľavá strana nerovnice predstavuje strednú hodnotu súčinu):

$$\overline{g^T E^{-1} g} \leq g^T C^{-1} g \tag{12}$$

Využitím predchádzajúceho vzťahu a definícií jednotlivých rizík dostaneme medzi nimi vzťah:

$$R_{in}^2 \leq R_{true}^2 \tag{13}$$

$$R_{true}^2 \leq R_{out}^2 \tag{14}$$

Môžeme vidieť, že počítanie rizika z nám známej korelačnej matice E vedie k podhodnoteniu skutočného rizika. V článku [1] sa uvádza, že kalkulovanie na základe historických údajov vedie vždy k príliš optimistickým očakávaniam, nakoľko naša optimalizácia sa vždy prispôsobí šumu a výkyvom na finančných trhoch. Naopak, kalkulovanie rizika s optimálnymi váhami vypočítaných z E, ale s korelačnou maticou C (sme posunutí v čase dopredu) vedie k nadhodnocovaniu rizika.

Využitím výsledkov teórie náhodných matíc uvedených v nasledujúcich kapitolách sa ukáže, že pre ľubovoľnú skutočnú korelačnú maticu C, riziko dostatočne veľkých portfólií spĺňa rovnosti[1], kde $q = N/T = 1/Q$:

$$R_{in} = R_{true}\sqrt{1-q} = R_{out}(1-q) \tag{15}$$

Zároveň je ztohoto vzťahu vidieť, že dané riziká sa rovnajú iba v limite $q \to 0$, čo by znamenalo, že máme neobmedzene dlhú históriu dát, čo v realite nikdy nedosiahneme, alternatívne, muselo by platiť $C = E$.

2 Teoretické poznatky o náhodných maticiach

2.1 Rozdelenia a konštrukcie náhodných matíc

Pre simulácie vlastností náhodných matíc a numerické experimenty potrebujeme zostrojiť náhodné matice. Zložky matíc pochádzajú zväčša z normálneho rozdelenia, pre jednoduchosť $N(0,1)$. Jednotlivé zložky matíc sú väčšinou reálne alebo komplexné čísla, ale pre niektoré teoretické výsledky sa však uvažujú aj matice s kvaterniónmi, je to rozšírenie komplexných čísel, obdobne ako sú komplexné čísla zovšeobecnením reálnych. Náhodnosť matice je daná hustotou pravdepodobnostného rozdelenia na priestore matíc. Z nej potom dostávame konštrukčnú metódu náhodných matíc.

Najčastejšie používaným rozdelním je takzvaný *GOE* (Gaussian orthogonal ensemble) a *GUE* (Gaussian unitary ensemble). Začneme s maticou A typu $n \times n$, ktorej všetky prvky sú z normovaného normálneho rozdelenia. V prvom prípade získame náhodnú maticu ako $(A + A^T)/2$, respektíve $(A + A^H)/2$, kde H predstavuje hermitovské transponovanie komplexnej matice. V oboch prípadoch sú náhodné matice typu $n \times n$ a sú symetrické. Všetky prvky výsledných náhodných matíc sú $i.i.d$, $(A+A^T)/2$ má na diagonále prvky s rozdelením $N(0,1)$ a mimo nej s $N(0,1/2)$.

Ďalším rozšíreným spôsobom konštrukcie náhodnej kladne semidefinitnej symetrickej matice je $A^T A$, respektíve $A^H A$, kde A má rozmer $m \times n$ a teda výsledná symetrická matica má veľkosť $n \times n$. Táto matica má už iné vlastnosti ako matice skonštruované *GOE* a *GUE*, nakoľko je kladne semidefinitná a jej vlastné čísla sú nezáporné. Táto konštrukcia sa v literatúre vyskytuje pod menom *Wishart ensemble* a práve takéto matice zodpovedajú korelačným maticiam z kapitoly 1.

Významnú časť informácie o matici vieme získať z jej vlastných hodnôt, spektra, preto má zmysel skúmať rozdelenia vlastných čísel náhodných matíc pre jednotlivé rozdelenia. Pre niektoré pravdepodobnostné rozdelenia matíc sú známe explicitné vzorce a pravdepodobnostné rozdelenia pre distribúciu ich vlastných hodnôt. Základné informácie sú zhrnuté v nasledovnej tabuľke.

Konštrukcia	Názov a rozdelenie vl. čísel	Predpis
Hermitovská	polkružnicový zákon (Wigner 1958)	$e^{-x^2/2}$
Wishartová	Marčenko a Pastur (1967)	$x^a e^{-x}$

2.1.1 Rozdelenie zložiek náhodných matíc

Predtým ako začneme analyzovať vlastné hodnoty náhodnej matice, je potrebné poznať rozdelenie všetkých jej prvkov. Pri práci s *i.i.d.* prvkami, ktoré pochádzajú z normálneho rozdelenia $N(0,1)$ je táto analýza zvládnuteľná. Hustota pre jednotlivé zložky je daná ako:

$$h(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)} \tag{16}$$

Navyše, nakoľko pracujeme s normovaným normálnym rozdelením, ďalšie výpočty sa zjednodušia. Keďže v maticiach s ktorými pracujeme sú všetky prvky *i.i.d.*, zrdužená hustota je jendoducho iba súčin všetkých hustôt po zložkách. Pri konštrukcii symetrických matíc spôsobom GOE, máme na diagonále prvky s rozdelením $N(0,1)$ a všetky ostatné prvky s rozdelením $N(0,1/2)$. Hustota rozdelenia prvkov matice teda bude:

$$\frac{1}{2^{n/2}} \frac{1}{\pi^{n(n+1)/4}} e^{\left(-\|A\|_F^2/2\right)} \tag{17}$$

Po vynásobení n prvkov s rozdelním $N(0,1)$ a $n(n-1)/2$ (jedná sa o symetrickú maticu) prvkov s rozdelením $N(0,1/2)$ dostaneme nasledovnú združenú hustotu, kde $\|A\|_F$ predstavuje Frobéniovu normu matice A – $\sqrt{tr(A^TA)} = \sqrt{\sum_{ij} a_{ij}^2}$.

2.1.2 Rozdelenie vlastných čísel náhodných matíc

Naším cieľom je ale poznať podmienenú hustotu vlastných čísel, nie združenú hustotu prvkov celej náhodnej matice. V zásade sa pri počítaní týchto podmienených hustôt využívajú rôzne rozklady matíc - a nakoľko sa jedná o symetrickú maticu s plnou hodnosťou, existuje viacero možností ako tento rozklad vykonať - LDU, $Q\Lambda Q^T$, Choleskeho BB^T alebo Jordanov kanonický tvar. Keďže naším cieľom je vyjadrenie podmienenej hustoty pre vlastné čísla, logickou voľbou je spektrálny rozklad matice A na vlastné čísla a vektory – $A = Q\Lambda Q^T$. Samotný výpočet, t.j. integrovanie podmienenej hustoty cez priestor matíc je netriviálna vec, v literatúre sa bežne nevyskytuje [4], uvádza sa iba výsledok.

Pri iných konštrukciách, napríklad Wishartovom rozdelení, kde maticu W_β dostaneme ako A^TA (prvky A pochádzajú z $N(0,1)$), sa ukazuje [4], že vhodnejším rozkladom matice A je jej singulárny rozklad: $A = U\Sigma V^T$, kde Σ je diagonálna matica s prvkami $\sqrt{\lambda}\lambda$. Z hustoty singulárnych čísel ($\sqrt{\lambda}\lambda$) matice A sa dá následne odvodiť hustota vlastných čísel matice W_β.

Výsledné hustoty pre vlastné čísla týchto dvoch konštrukcií sú pomerne komplikované funkcie v porovnaní so združenou hustotou samotných matíc. Pre klasickú, Gaussovú, konštrukciu má hustota vlastných čísel nasledovný tvar:

$$f_\beta(\lambda) = c_H^\beta \prod_{i<j} |\lambda_i - \lambda_j|^\beta e^{-\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2/2} \tag{18}$$

kde $\beta = 1$ pre reálne zložky, $\beta = 2$ pre komplexné čísla a c_H^β sa rovná:

$$c_H^\beta = (2\pi)^{-n/2} \prod_{j=1}^{n} \frac{\Gamma(1+\frac{\beta}{2})}{\Gamma(1+\frac{\beta}{2}j)} \tag{19}$$

Pre Wishartov model výsledok neuvádzame, nakoľko je ešte komplikovanejší, ale výsledok sa dá nájsť v [4].

2.2 Wignerov polkružnicový zákon

Wignerov polkružnicový zákon (Wigner semicircle law) ukazuje, že pre malé matice (GOE a GUE) sa rozdelenie vlastných čísel stále podobá na normálne rozdelenie, z ktorého pochádzajú prvky týchto symetrické náhodných matíc, pre $n = 1$ sa dokonca jedná priamo o normálne rozdelenie. So zväčšujúcim sa rozmerom sledovaných symetrických matíc sa graf hustoty ich vlastných čísel ustaluje na polkružnici. Uvedieme niekoľko známych prístupov, ktorými sa dá dospieť k Wignerovmu polkružnicovému zákonu. V texte iba naznačíme metódy a myšlienky týchto dôkazov, podrobnosti nájde čitateľ v citovanej literatúre.

Prvým a najpriamejším spôsobom je dôkaz cez konvergenciu podľa pravdepodobnosti [5]. Ako prvé sa definuje miera na pravdepodobnostom priestore. Za jej pomoci sa definuje distribučná funkcia pre vlastné hodnoty:

$$\mu \frac{1}{\sqrt{n}} M_n := \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \delta_{\lambda_j}(M_n)/\sqrt{n} \tag{20}$$

kde $\frac{1}{\sqrt{n}} M_n$ je vynormovaná symetrická náhodná matica. Nasledujúcou úlohou je pomocou konvergencie podľa pravdepodobnosti dokázať limitný prechod keď $n \to \infty$.

Ďalšou metódou, ktorá sa dá využiť pri odvodení Wignerovho zákona je *Metóda momentov*. Táto metóda sa používa keď je známych viacero momentov nejakej premennej na určenie neznámych premenných. V našom prípade môžeme $k - ty$ moment pre maticu $\frac{1}{\sqrt{n}} M_n$ vyjadriť nasledovným spôsobom:

$$\int_R x^k d\mu_{\frac{1}{\sqrt{n}}M_n}(x) = \frac{1}{n} tr(\frac{1}{\sqrt{n}} M_n)^k \tag{21}$$

Následnou úpravou [5] dostaneme (**E** predstavuje očakávanú hodnotu náhodného procesu a využíva sa pri aplikácii konvergencie podľa očakávaní (convergence in expectation)):

$$\int_R x^k d\mathbf{E}\mu_{\frac{1}{\sqrt{n}}M_n}(x) = \mathbf{E}\frac{1}{n} tr(\frac{1}{\sqrt{n}} M_n)^k \tag{22}$$

Následný limitný prechod vedie taktiež k Wignerovmu výsledku.

Wignerov polkružnicový zákon sa dá taktiež odvodiť pomocou *Stieltjesovej transformácie*. Jedná sa o náročnejší postup, ale táto transformácia sa využíva aj pri iných dôkazoch distribučných funkcií pre náhodné matice skonštruované iným spôsobom ako je *GOE* a *GUE*.

Stieltjesova transformácia pochádza z komplexnej analýzy a je definovaná nasledovne (z je komplexné číslo):

$$s_n(z) = s_{\mu_{\frac{1}{\sqrt{n}}M_n}}(z) = \int_R \frac{1}{x-z} d\mu_{\frac{1}{\sqrt{n}}M_n}(x) = \frac{1}{n} tr(\frac{1}{\sqrt{n}} M_n - zI)^{-1} \tag{23}$$

Dokázať treba, že nasledovný tvar Stieltjesovej transformácie konverguje skoro všade k Stieltjesovej transofrmácii Wignerovej polkružnice. Podstatou limitného prechodu je rozklad matice A_n na jej minor A_{n-1}, vektory X a prvok a_{nn}.

$$A_n = \begin{pmatrix} A_{n-1} & X \\ X^T & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Tým sa dá získať rekurentný vzťah medzi $s_n(z)$ a $s_{n-1}(z)$, ktorý v limite $n \to \infty$ vedie k rovnici:

$$s(z) = -\frac{1}{z + s(z)} \tag{24}$$

A jej riešenie je nasledovné:

$$s(z) = \frac{-z + \sqrt{z^2 - 4}}{2} \tag{25}$$

Graf tejto funkcie môžeme vidieť na Obr. 1 ($n = \infty$)

Existuje aj ďalší dôkaz Wignerovho polkružnicového zákona, ktorý rovnako využíva Stieltjesovu transformáciu, ale postup sa značne líši. Namiesto rozkladu na podmatice a hľadania rekurentného vzťahu sa definujú ďalšie transformácie, ktorými sa postupne dá dopracovať od GOE matice k Wignerovmu polkružnicovému zákonu [1].

Na začiatok mierne pozmeníme značenie Stieltjesovej transformácie $G_H(z)$ matice H, kde z je komplexné číslo.

$$G_H(z) = \frac{1}{N} tr(zI - H)^{-1} \tag{26}$$

Ako pomocné transformácie definujeme inverznú transformáciu Stieltjesovej transformácie - $B(z)$ (platí teda $B(G(z)) = G(B(z)) = z$). Ďalšou pomocnou transformáciou je $R(z)$, ktorá je definovaná nasledovne:

$$R(z) = B(z) - z^{-1} \tag{27}$$

Táto transformácia spĺňa nasledovnú dôležitú rovnosť pre škálovanie :

$$R_{aH}(z) = aR_H(az). \tag{28}$$

Dôležitým konceptom, ktorý sa pri odvodení rozdelenia vlastných čísel využíva, je takzvaná *voľná pravdepodobnosť (free probability)*– v našom prípade (keďže pracujeme s maticami) sa jedná o *voľné matice (free matrices)*. Dve matice sú navzájom voľné keď vzťah medzi bázami ich vlastných vektorov je iba náhodná rotácia (inými slovami – vlastné vektory matice A sú skoro iste ortogonálne na vlastné vektory matice B). Z toho vyplýva, že keď matice A a B sú navzájom voľné, rotáciou pomocou ortogonálnej matice O (A a $O^T BO$) sa tento vzťah nezmení. Vzájomná voľnosť matíc nám následne dovoľuje povedať veľa o spektre ich súčtu. Táto definícia vedie k pozorovaniu, že pre dve navzájom voľné matice, za pomoci R-transformácie dostaneme:

$$R_{A+B}(z) = R_A(z) + R_B(z) \tag{29}$$

Zavedenie pojmov voľných matíc a R-transformácie je dôležité pre zjednodušenie matice pochádzajúcej z GOE – $(H_1 + H_2)/2$.

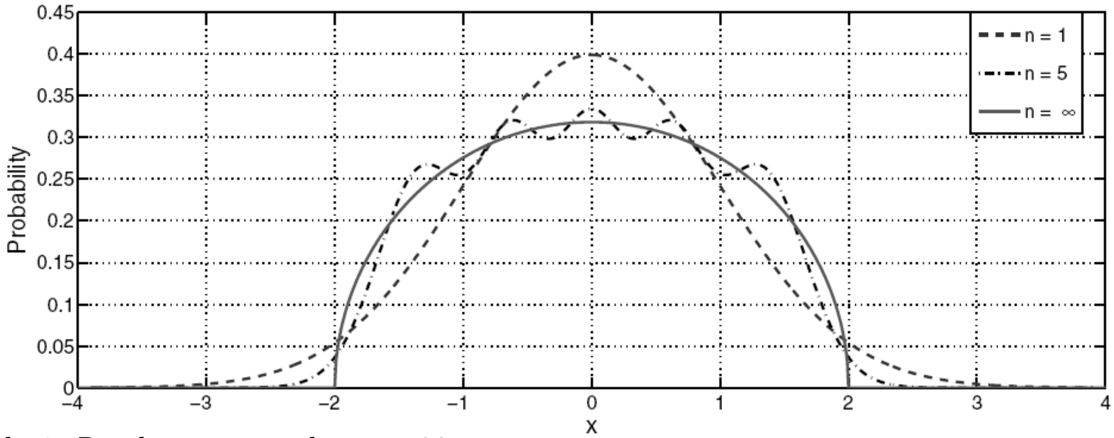
Z rovností (28) a (29) teda vieme zjednodušiť našu symetrickú maticu.

$$R_{\sqrt{2}H}(z) = R_{H_1+H_2}(z) = R_{H_1}(z) + R_{H_2}(z) = 2R_H(z) \tag{30}$$

$$2R_H(z) = \sqrt{2}R_H(\sqrt{2}z) \to R_H(z) = z \tag{31}$$

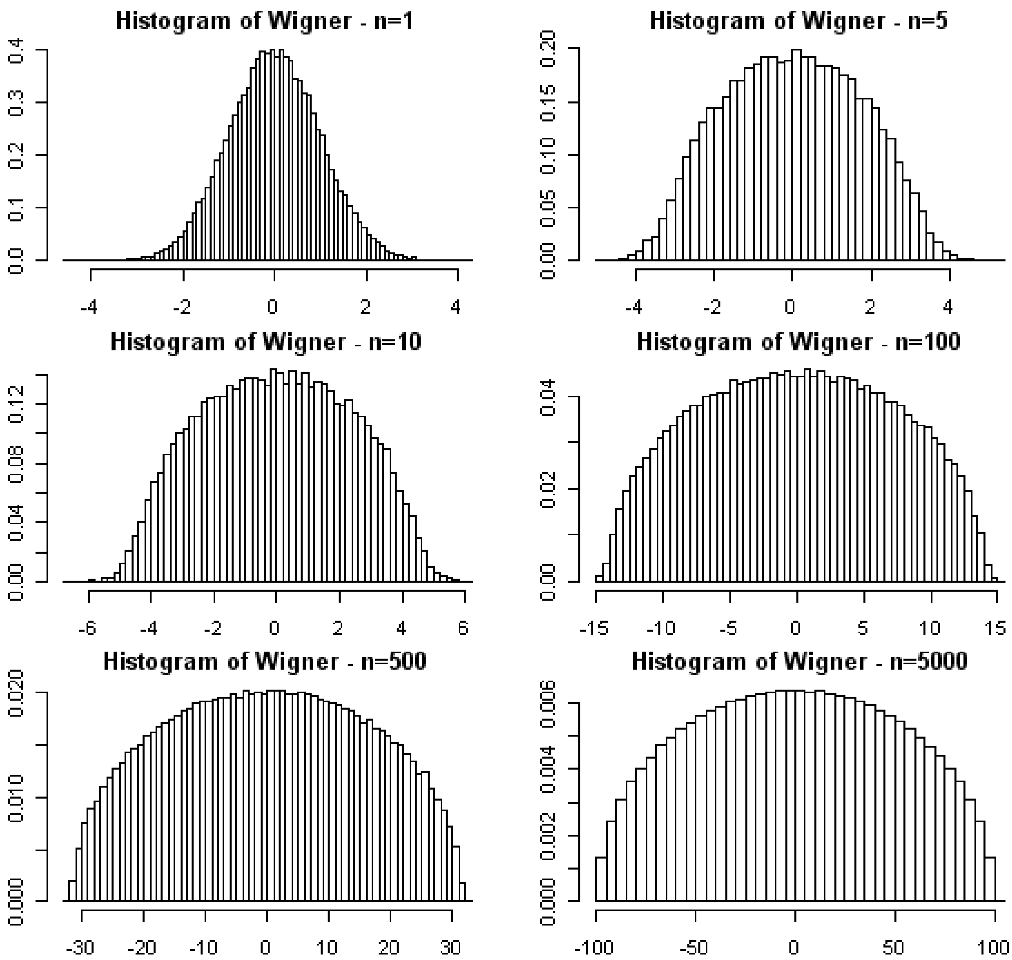
$R_H(z) = z$ predstavuje R-transformáciu Wignerovej polkružnice.

Obr. 1: Wignerov polkružnicový zákon



Zdroj: *Random matrix theory*, s.29

Obr. 2: Wignerov polkružnicový zákon



Zdroj: *Vlastné spracovanie*

Na Obr. 2 máme možnosť vidieť rozdelenie vlastných hodnôt pre rôzne veľké symetrické matice, ktorých zložky pochádzajú z normálneho rozdelenia N(0,1). Matice boli škonstruované nasledovným spôsobom v MATLABe:

```
A=randn(n,n);
X=(A'+A)/2;
```

Histogramy boli zostrojené vždy z 50 000 vlastných hodnôt - podľa veľkosti matice (a teda počtu vlastných čísel) bolo zostrojenie opakované pre maticu 1x1 50 000 krát, až po maticu o veľkosti 5000x5000, ktorá bola zostrojená 10 krát. Na y-ovej osi sa náchadzájú relatívne početnosti, s akými sa dané vlastné čísla vyskytujú v náhodných maticiach.

Môžeme pozorovať Wignerov polkružnicový zákon - so zväčšujúcou sa veľkosťou matice sa rozdelenie vlastných hodnôt prestáva podobať na normálne, ale ustaluje sa na polkružnici.

2.3 Marčenko-Pastur

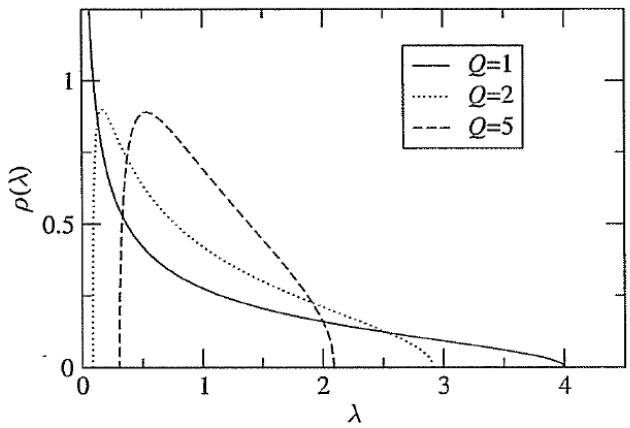
Výsledky Marčenka a Pastura sú obdobou Wignerovho polkružnicového zákona, ale pre inú konštrukciu náhodných symetrických matíc. Kým Wignerov zákon platí pre všeobecné náhodné symetrické matice (GOE a GUE), Marčenko a Pastur vyriešili problém rozdelenia vlastných hodnôt pre matice $M = A^T A$, kde A môže byť aj obdĺžnikového tvaru. takto zostrojená matica má prirodzene všetky vlastné čísla nezáporné a ako sa ukáže, vlastné čísla budú za splnenia niektorých predpokladov dokonca ostro odrazené od 0.

Stieltjesova transformácia sa dá využiť podobným spôsobom aj pri odvodzovaní distribúcie vlastných hodnôt pre Wishartovho rozdelenia. Pri tomto postupe sa obdobne využívajú poznatky z komplexnej analýzy a za pomoci Stieltjesovej transformácie sa definujú ďalšie transformácie, ktoré uľahčujú analýzu spektra náhodnej matice.

V ďalšom postupe sa analyzuje matica C, ktorú ale aproximujeme identitou I. Po sérii transformácii a invertovaní vypadne výsledodok Marčenka a Pastura pre matice zostrojené Wishartovým spôsobom [1].

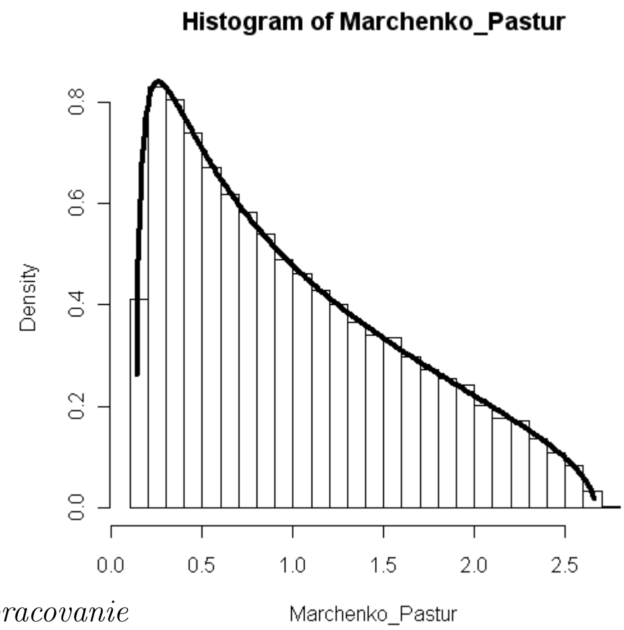
$$\rho_E(\lambda) = \frac{\sqrt{4\lambda q - (\lambda + q - 1)^2}}{2\pi\lambda q} \tag{32}$$

Obr. 3: Graf pre rôzne hodnoty Q



Zdroj: *Theory of Financial Risk and Derivative Pricing: From Statistical Physics to Risk Management*, s.164

Obr. 4: Histogram rozdelenia vlastných hodnôt pre Q=2,5



Zdroj: *Vlastné spracovanie*

Na Obr. 4 máme možnosť vidieť histogram vlastných hodnôt pre 100 matíc $A_{n \times m}$ kde $n = 200$ a $m = 500$. Zároveň je v histograme vyznačené hrubou čiarou aj Marčenko-Pasturové rozdelenie, kde $Q = 1/q = 2,5$.

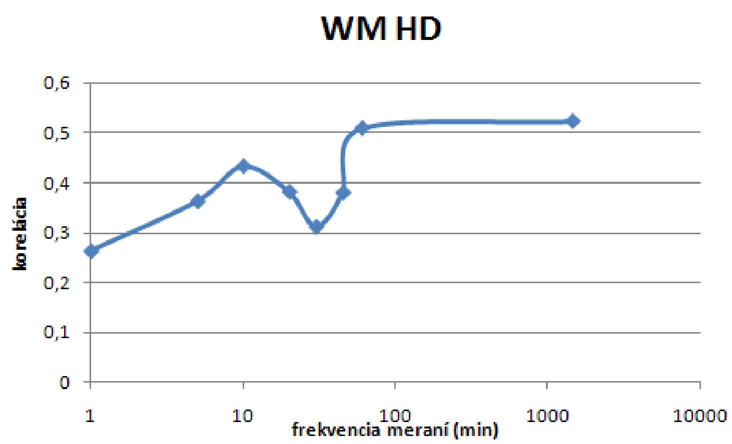
3 Aplikácie poznatkov pre reálne pozorované dáta

3.1 Aplikácia teórie

Základným problémom pri aplikácii teoretických poznatkov na reálne pozorovania je počet dát, ktoré sú k dispozícii. V teórii sa bežne pracuje s limitnými prechodmi do nekonečna, kým pri pracovaní s finančnými dátami je toto množstvo obmedzené. Pri mesačných dátach, ktoré sa bežne používajú, napríklad inflácii, raste HDP alebo iných, je pri 20-ročnej histórii k dispozícii iba 240 meraní, čo ma ďaleko od nekonečna (samozrejme, vždy záleží aj od rýchlosti konvergencie a toho, aká veľká hodnota "n" sa dá považovať za dostatočne blízke nekonečnu). Pri pracovaní s akciami je toto číslo väčšie, keďže sa zväčša pracuje s dennými zatváracími cenami akcií. Príkladom môže byť index S&P500 a 10-ročné údaje o zatváracích cenách jednotlivých akcií. Dostávame tým teda $N = 500$ a $T = 2500$ (v kalendárnom roku je približne 250 dní, počas ktorých sa na burze obchoduje), teda podiel $Q = T/N = 5$.

Prvotným nápadom môže byť "umelé" zväčšenie pozorovaní zvýšením frekvencie meraní - namiesto denných údajov by sa dali zobrať hodinové, prípadne frekvenciu ešte zvýšiť. Tu ale vstupujú do hry nové nežiadúce vplyvy, napríklad Eppsov efekt, ktoré v konečnom dôsledku situáciu viac komplikujú ako pomáhajú.

Obr. 5: Závislosť korelácie od merania frekvencie cien akcií - WM a HD



Zdroj: *Vlastné spracovanie*

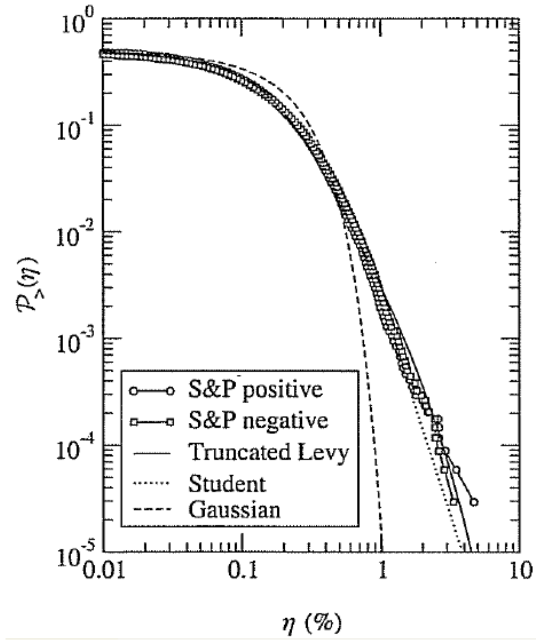
Obr. 4 ukazuje ako sa mení korelácia medzi spoločnosťami *Walmart a The Home Depot* v závislosti od frekvencie merania. Čím je frekvencia väčšia, pohyby akcií sú náhodnejšie, a teda korelácia medzi spoločnosťami klesá - jeden z prejavov Eppsovho efektu.

Takisto, v praxi pracujeme s konečným počtom akcií, čo je v kontraste napríklad s výsledkami Wignerovho polkružnicového zákona, ktorý opisuje limitné správanie pre rozdelenia matíc s $n \to \infty$, kde n je v našom prípade počet akcií.

3.1.1 Rozdelenie denných výnosov

Ďalším nemenej dôležitým pozorovaním je skutočnosť, že návratnosti a výnosnosť jednotlivých akcií nemá normálne rozdelenie. Pozorovania na finančných trhoch ukázali, že oveľa lepším rozdelením je studentovo rozdelenie. Studentovo rozdelenie samozrejme relatívne rýchlo konverguje k normálnemu rozdeleniu, ale pre menšie časové intervaly sa aproximácia normálnym rozdelením ukázala ako nedostatočná.

Obr. 6: Porovnanie kumulatívnych výnosov s distribučnými funkciami



Zdroj: *Theory of Financial Risk and Derivative Pricing: From Statistical Physics to Risk Management*, s.96

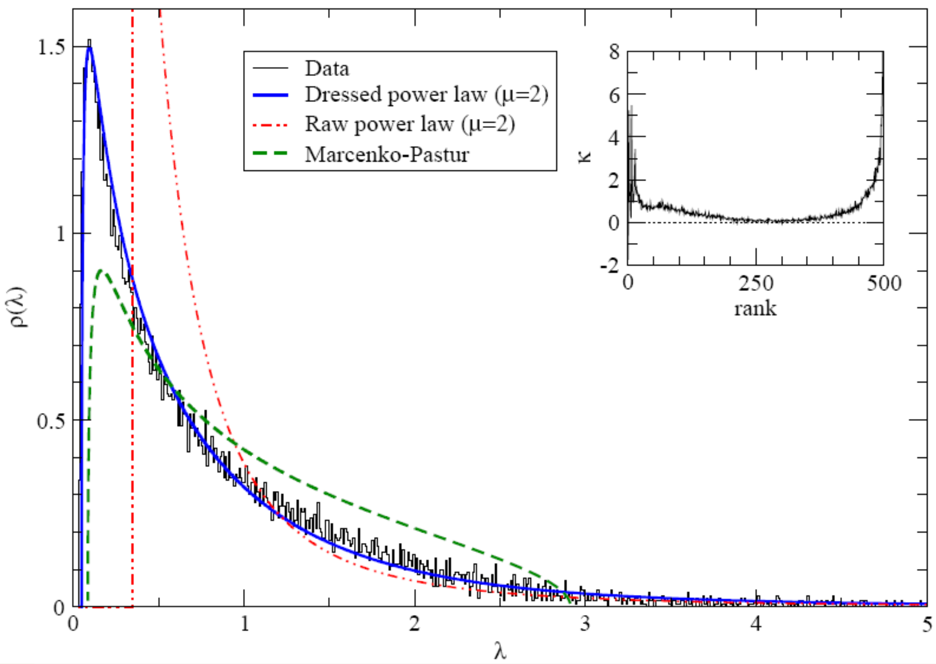
Na Obr. 6 je možné vidieť vzťah medzi očakávanou návratnosťou (x-ová os) a jej pravdepodobnosťami (y-nová os). Ako je z grafu zrejmé, normálne rozdelenie popisuje situáciu dobre pri nižších návratnostiach, ale pri väčších sa ukazuje, že má príliš ľahké chvosty. Rozdelenie s ťažšími chvostami, Studentovo, popisuje reálnu situáciu oveľa spoľahlivejšie. Okrem Studentovho rozdelenia sa v literatúre objavujú dosť často aj aproximácie pomocou Léviho distribučnej funkcie, s ktorou sa ale ťažšie počíta, čo je aj jeden z dôvodov prečo sa stále ako aproximácia využíva normálne rozdelenie.

Pri úpravách už známych poznatkov o náhodných maticiach nastávajú problémy. V teórii sa pracuje s normálnym rozdelením. Pri zámene za Studentovo rozdelenie nastávajú komplikácie napríklad pri odvodzovaní podmienej hustoty pre vlastné čísla, nakoľko už samotná združená hustota korelačnej matice je značne komplikovanejšia [1]. Našťastie, prvky matice si aj pri inom rozdelení zachovávajú vlastnosť *i.i.d.*, čo umožňuje aspoň isté uľahčenie pri úpravách. "Záchranou"je ale fakt, že pri veľkých maticiach, prípadne pri veľkom počte dát nastáva podobný efekt ako u *Centrálnej limitnej vety - Central Limit Theorem*. Tá tvrdí, že pri dostatočne veľkom počte nezávyslých náhodných premenných sa ich rozdelenie bude približovať tomu normálnemu. Podobná situácia nastáva aj pri náhodných maticiach – bez ohľadu na rozdelenie prvkov náhodnej matice sa bude rozdelenie vlastných čísel približovať, s rastúcim množstvom dát, k Wignerovmu alebo Marčenko-Pasturovmu (podľa metódy zostrojenia matice – *GOE*, *GUE* alebo *Wishart*)

3.2 Výsledky z finančných trhov

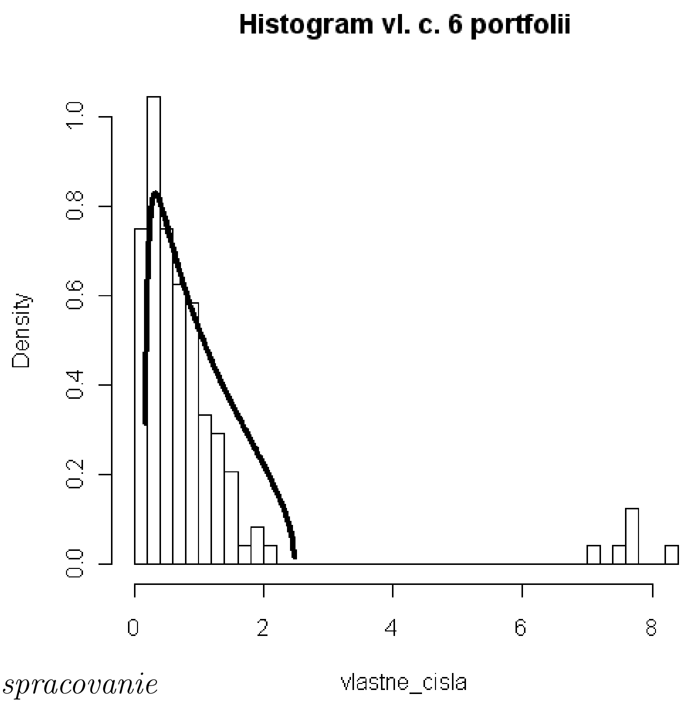
Porovnanie teoretických výsledkov s finančnými pozorovaniami sa nachádzajú v [1]. Autori pracujú so vzorkami korelačných matíc, ktoré zostrojili pre 500 najlikvidnejších spoločností v danom časovom intervale a mali k dispozícii 1000 meraní. Z toho vyplýva, že $Q = T/N = 2$ a teda že Wishartove rozdelenie (nakoľko predpokladáme Pearsonovu konštrukciu symetrickej matice) s $q = 1/2$ by malo popisovať rozloženie vlastných hodnôt tejto nameranej korelačnej matice. Ukazuje sa ale, že teoretický výsledok Marčenka-Pastura ani po zohľadnení Studentovho rozdelenia a faktu, že máme obmedzený počet dát, nekopíruje namerané hodnoty.

Obr. 7: Porovnanie empirických meraní s teoretickými výpočtami



Zdroj: *Financial Applications of Random Matrix Theory: a short review*, s.18

Obr. 8: Porovnanie korelácii 6 portfólií s distribučnou funkciou Marčenka-Pastura



Zdroj: *Vlastné spracovanie*

Ob. 8 zachytáva vlastné čísla 6 rôznych portfólií obsahujúcich 20 akcií. Na výpočet boli použité trojmesačné dáta, čo predstavuje niečo cez 60 obchodovaných dní. Pomer q je teda $20/60 = 1/3$. Dosadením $1/3$ do predpisu funkcie Marčenka-Pastura sme dostali hrubo vyznačenú krivku. Opäť máme možnosť vidieť, že sa na histograme objavili vlastné čísla ktorých existenciu distribučná funkcia Marčenka-Pastura neumožňuje. Zároveň nepresne popisuje aj pravdepodobnosti výskytu menších vlastných hodnôt.

Ako vhodným kandidátom na skutočné rozdelenie vlastných hodnôt sa ukázali mocninové rozdelenia, ktoré sa dajú dobre parametrizovať - prispôsobiť ich chvosty empirickým pozorovaniam.

$$\rho_C(\lambda) = \frac{\mu A}{(\lambda - \lambda_0)^\mu} \Theta(\lambda - \lambda_{min}) \tag{33}$$

Parametrizovaním tohoto mocninového rozdelenia sa podarilo oveľa spoľahlivejšie zachytiť pozorovaný jav a teda aj aplikácie tohto rozdelenia na ekonomické poznatky môžu dať presnejšie výsledky.

V prvej kapitole sme využili korelačnú maticu na určenie váh jednotlivých komponentov portfólia a na stanovenie jeho rizika. Ako sa ukázalo, pri malom počte dát sa skutočná korelačná matica C môže značne líšiť od tej empirickej E. Očistením E od tohto šumu vieme dosiahnuť lepšiu spoľahlivosť rizika a portfólio bude ležať presnejšie na efektívnej hranici z Markowitzovho modelu.

Záver

V tejto práci sme sa rozhodli zhrnúť základné poznatky o náhodných maticiach a ich výskyte a využití v Markowitzovom modely. Cieľom bolo definovať konštrukciu a rozdelenia náhodných matíc a ich vlastných čísel a možné využitie týchto poznatkov v pri analýze a spravovaní portfólia.

Prvá časť sa venovala vysvetleniu dôvodov pre využitie náhodných matíc v Markowitzovom modely. Zavedením náhodných matíc sme boli schopní rozlíšiť korelačnú maticu pochádzajúcu z emprických dát od tej skutočnej, a následne presnejšie definovať optimálne váhy a volatilitu portfólia. Ukázalo sa, že volatilita počítaná z historických dát je podhodnotená oproti tej skutočnej.

Druhá kapitola uvádza niekoľko možných spôsobov ako skonštruovať náhodnú maticu a následne jej distribučnú funkciu. Ďalej sa spomína spôsob, akým sa dá z tejto distribúcie odvodiť distribučná funkcia pre vlastné čísla. V závere druhej kapitoly sme načrtli hlavné myšlienky dôkazov Wignerovho polkružnicového zákona a distribučnej funkcie Marčenka-Pastura.

V poslednej kapitole sa vysvetlili obmedzenia pri používaní teórie na reálnych finančných dátach a zanedbania, z ktorými sa bežne vo finančnej matematike pracuje. Na konci práce sa porovnali dáta z finančných trhov s rozdelením Marčenka-Pastura a navrhuje sa možné vylepšenie modelu.

Literatúra

[1] J-P. Bouchaud, M. Potters, *Financial Applications of Random Matrix Theory: a short review*, http://arxiv.org/abs/0910.1205v1, (2009)

[2] J-P. Bouchaud, M. Potters, *Theory of Financial Risk and Derivative Pricing: From Statistical Physics to Risk Management*, Cambridge University Press, (2004)

[3] J-P. Bouchaud, M. Potters, *Financial Applications of Random Matrix Theory: Old Laces and New Pieces*, Acta Physica Polonica B, 36 (2005)

[4] A. Edeleman, N. R. Rao, *Random matrix theory*, Acta Numerica, 1 (2005)

[5] T. Tao, *Topics in random matrix theory*, UCLA, (2011)