

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE  
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY

**Dynamický model populácie SR s vekovou  
štruktúrou**



**UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE**  
**FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY**

Evidenčné číslo : 3d15a8f0-a0d7-4db8-b56b-206ce0c69499

# **Dynamický model populácie SR s vekovou štruktúrou**

**BAKALÁRSKA PRÁCA**

Študijný program : Ekonomická a finančná matematika

Študijný odbor: 9.1.9 Aplikovaná matematika

Školiace pracovisko: Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky

Školiteľ: Prof. RNDr. Pavol Brunovský, DrSc.

BRATISLAVA 2011

Hana Miklóssyová



Univerzita Komenského v Bratislave  
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

## ZADANIE ZÁVEREČNEJ PRÁCE

**Meno a priezvisko študenta:** Hana Miklóssyová  
**Študijný program:** ekonomická a finančná matematika (Jednoodborové štúdium, bakalársky I. st., denná forma)  
**Študijný odbor:** 9.1.9. aplikovaná matematika  
**Typ záverečnej práce:** bakalárska  
**Jazyk záverečnej práce:** slovenský

**Názov :** Dynamický model populácie SR s vekovou štruktúrou

**Cieľ :** Vytvoriť model populačného vývoja SR s vekovou štruktúrou na aktuálnych dátach.

**Literatúra :** [1] P. Brunovský: Diferenčné a diferenciálne rovnice, učebný text FMFI UK.

**Vedúci :** prof. RNDr. Pavel Brunovský, DrSc.

**Dátum zadania:** 27.10.2010

**Dátum schválenia:** 08.11.2010

doc. RNDr. Margaréta Halická, CSc.  
garant študijného programu

.....  
študent

.....  
vedúci práce

Dátum potvrdenia finálnej verzie práce, súhlas s jej odovzdaním (vrátane spôsobu prístupnosti) 31.5.2011

.....  
vedúci práce

### **Čestné vyhlásenie**

Čestne vyhlasujem, že som bakalársku prácu vypracovala samostatne s využitím uvedenej literatúry.

Datum:

.....

## **Pod'akovanie**

Touto cestou by som chcela vyjadriť poďakovanie vedúcemu bakalárskej práce Prof. RNDr. Pavlovi Brunovskému, za jeho odborné vedenie, rady a pomoc, ktoré mi pri písaní bakalárskej práce poskytoval.

## Abstrakt

MIKLÓSSYOVÁ, Hana: Dynamický model populácie SR s vekovou štruktúrou [Bakalárska práca], Univerzita Komenského v Bratislave, Fakulta matematiky, fyziky a informatiky, Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky; školiteľ : Prof. RNDr. Pavol Brunovský, DrSc., Bratislava, 38 strán

Bakalárska práca sa zaoberá modelovaním populácie SR. V prvej časti sa oboznamujeme s problematikou demografie, jej základnými ukazovateľmi. Tieto ukazovatele ďalej používame pri vytváraní dynamických modelov. Po predstavení jednotlivých modelov konštruujeme prognózy vývoja a skúmame ich citlivosť na zmeny. Na záver použijeme vybrané modely na odhadovanie budúceho stavu populácie.

**Kľúčové slová:** dynamický systém, model s vekovou štruktúrou, prognózy vývoja populácie

## **Abstract**

MIKLÓSSYOVÁ, Hana: Dynamic model of the Slovak Republic population with age structure [Bachelor`s thesis], Comenius University in Bratislava, Faculty of Mathematics, Physics and Informatics, Department of Applied Mathematics and Statistics, BSc Thesis supervisor : Prof. RNDr. Pavol Brunovský, DrSc., Bratislava, p 38.

This bachelor thesis deals with modeling of the Slovak Republic population dynamics. The first part discusses the concepts of demography, its basic indicators. These indicators are used to create dynamic models. After presenting individual models, we construct future population prognosis and examine their sensitivity to change. Finally, we use selected models to make an estimate of population.

**Keywords:** dynamic system, model with age structure, future population estimates

## Obsah

Úvod.....	1
1 Základné pojmy demografie .....	2
1.1 Pôrodnosť .....	2
1.2 Plodnosť .....	3
1.3 Úmrtnosť .....	4
1.4 Migrácia .....	4
1.5 Prírastok obyvateľstva.....	5
1.6 Pohlavná štruktúra.....	6
2 Dynamický systém.....	7
2.1 Lineárny jednorozmerný dynamický systém .....	7
2.1.1 Základná rovnica demografie .....	7
2.1.2 Lineárny jednorozmerný dynamický systém .....	8
2.1.3 Viacrozmerné lineárne dynamické systémy .....	8
3 Diskrétny model dynamiky populácie s vekovou štruktúrou .....	10
3.1 Základný model.....	10
3.2 Zväčšenie počtu vekových intervalov .....	11
3.3 Ročné vekové intervaly.....	12
3.4 Model so ženskou dominanciou.....	13
4 Citlivosť modelov s vekovou štruktúrou .....	14
4.1 Základný model.....	14
4.2 Zväčšenie počtu vekových intervalov .....	20
4.3 Ročné vekové intervaly.....	26
4.4 Model so ženskou dominanciou.....	30
5 Prognózy do budúcnosti.....	33
Záver .....	37
A. Príloha.....	39
Použitá literatúra .....	41



## Úvod

Cieľom tejto práce je vytvoriť dynamický model populácie SR s vekovou štruktúrou na aktuálnych dátach. Na základe tohto modelu robíme prognózy vývoja populácie.

V prvej kapitole sa oboznamujeme so základnou problematikou demografie. Stručne si predstavíme základne pojmy a ukazovatele demografie, spôsob ich výpočtu.

V druhej časti sa oboznámime s teóriou konštrukcie dynamických systémov. Pomocou tejto teórie a základných demografických ukazovateľov začíname v tretej kapitole vytvárať prvý základný model s vekovou štruktúrou. Skúmame jeho vlastnosti a dlhodobý vývoj. Tento model postupne obohacujeme za účelom vylepšenia. Zjemnením delenia sa nám podarí odstrániť jeden z predpokladov potrebných pre fungovanie základného modelu.

Po konštrukcii modelov začíname v štvrtej kapitole skúmať ich citlivosť na reálnych dátach, ktoré sú verejne dostupné na stránkach Inštitútu štatistiky a informatiky. Zameriavame sa pritom na dva pohľady a to krátkodobý a dlhodobý. Narábame s jednotlivými modelmi tak, aby sme dosiahli čo najpresnejšie výsledky blízke realite.

V piatej kapitole prechádzame k samotnej konštrukcii prognóz do budúcnosti. Využívame poznatky, ktoré sme nadobudli po vyšetrení citlivosti dát tak, aby sme skonštruovali čo najlepšie prognózy. Vyberáme si typ modelu, vstupné ukazovatele a roky na základe štatistických dát z ktorých budeme modelovať budúci stav populácie.

# 1 Základné pojmy demografie

Model populácie Slovenskej republiky spadá pod predmet štúdia demografie. Predtým ako začneme samotné modelovanie, musíme sa bližšie oboznámiť s problematikou demografie, jej základnými pojmami a ukazovateľmi.

*Demografia* je veda a praktická činnosť, ktorá sa zaoberá reprodukciou ľudských populácií, kde reprodukciu chápeme ako neustálu obnovu populácií v dôsledku prebiehajúcich procesov rodenia a umierania [1,2].

Demografia vychádza zo *základných dát*, ktoré sú získané zo zdrojov demografických dát (matrika, sčítanie obyvateľstva, register obyvateľov...). Základné dáta predstavujú súhrn rôzne usporiadaných *absolútnych čísel*. Samotné absolútne údaje môžeme považovať za ukazovatele, ako je napríklad počet narodených, počet úmrtí, celkový počet obyvateľstva. Spracovaním základných dát sa dostaneme k *dátam analytickým*. Tu sa oboznamujeme s rôznymi ukazovateľmi ako pôrodnosť, sobášnosť, či priemerný vek.

V našom prípade nás budú hlavne zaujímať definície a spôsob výpočtu nasledovných ukazovateľov:

- pôrodnosť
- plodnosť
- úmrtnosť
- migrácia
- prírastok obyvateľstva
- pohlavná štruktúra

## 1.1 Pôrodnosť

*Pôrodnosť* je definovaná ako rodenie detí, chápané ako demografický jav [2]. Najjednoduchším ukazovateľom úrovne pôrodnosti je *hrubá miera pôrodnosti* -  $b$ , definovaná ako pomer počtu všetkých živonarodených ( $N$ ) a veľkosti populácie ( $P$ ) vo vymedzenom období.

$$b = \frac{N}{P} \quad (1.1)$$

Napríklad v roku 2000 v Slovenskej republike je hrubá miera celkovej pôrodnosti:

$$b = \frac{N}{P} = \frac{55151}{5398657} = 0,0095 = 0,95 \%$$

Toto číslo nám umožňuje porovnávať úrovně pôrodnosti populácii rôznych veľkostí. Pokiaľ sa chceme zamerať na konkrétnu podskupinu obyvateľstva, je treba spraviť určité zmeny v rovnici (1.1). Príkladom je hrubá miera pôrodnosti obyvateľstva vo veku 21 až 25 rokov z roku 2000, daná ako:

$$b(21,5) = \frac{N(21,5)}{P(21,5)} = \frac{21055}{472260} = 0,0446 = 4,46\%$$

Vo všeobecnosti môžeme pre *mieru pôrodnosti podľa vekového intervalu* –  $b(v,n)$  použiť zápis:

$$b(v,n) = \frac{N(v,n)}{P(v,n)}. \quad (1.2)$$

Označenie  $v$  označuje vek, v ktorom interval začína a číslo  $n$  vyjadruje trvanie intervalu.  $N(v,n)$  je počet živonarodených detí ženám vo veku  $v$  až  $(v+n-1)$  rokov a  $P(v,n)$  vyjadruje veľkosť populácie  $v$  až  $(v+n-1)$  ročných jedincov. Pokiaľ si zvolíme trvanie intervalu ako 1 rok, dostaneme sa tak k *miere pôrodnosti podľa veku* –  $b_i$ , kde  $N_i$  označuje počet živonarodených žien vo veku  $i$  a  $P_i$  veľkosť populácie  $i$  ročných jedincov.

$$b_i = \frac{N_i}{P_i} \quad (1.3)$$

## 1.2 Plodnosť

*Plodnosť* je definovaná ako realizovaná fyziologická plodnosť [2]. Zatiaľ čo pri hrubej miere pôrodnosti sme sa zameriavali na pomer k celkovému počtu obyvateľstva, v prípade plodnosti je potrebné rozlišovať medzi pohlaviami. *Hrubou mierou plodnosti* nazveme pomer počtu všetkých živonarodených ( $N$ ) a veľkosti populácie žien ( $P^{\tilde{z}}$ ) vo vymedzenom období.

$$f = \frac{N}{P^{\tilde{z}}} \quad (1.4)$$

Po analogickej úprave vzťahov (1.2) sa dostaneme k *miere plodnosti podľa vekového intervalu* –  $f(v,n)$

$$f(v,n) = \frac{N(v,n)}{P^{\tilde{z}}(v,n)}, \quad (1.5)$$

kde  $P^{\tilde{z}}(v,n)$  vyjadruje veľkosť populácie žien  $v$  až  $(v+n-1)$  ročných jedincov.

*Mieru plodnosti podľa veku* –  $f_i$  vyjadríme pozmenením vzťahu (1.3) ako:

$$f_i = \frac{N_i}{P_i^{\tilde{z}}}, \quad (1.6)$$

kde  $P_i^z$  vyjadruje veľkosť populácie žien  $i$  ročných jedincov. Napríklad mieru plodnosti podľa veku 21 rokov pre rok 2000 vypočítame

$$f_{21} = \frac{N_{21}}{P_{21}^z} = \frac{3596}{47395} = 0,0759 = 7,59\%.$$

### 1.3 Úmrtnosť

Úmrtnosť je definovaná ako výskyt úmrtí v danej populácii sledovaný ako hromadný demografický jav [2]. Jedným z ukazovateľov intenzity úmrtnosti je *hrubá miera úmrtnosti* -  $m$ , ktorá vyjadruje pomer počtu úmrtí ( $D$ ) k veľkosti populácie vo vymedzenom období.

$$m = \frac{D}{P} \quad (1.7)$$

Výpočet *miery úmrtnosti podľa vekového intervalu* -  $d(v,n)$  bude vyzerat' nasledovne:

$$m(v,n) = \frac{D(v,n)}{P(v,n)}, \quad (1.8)$$

kde  $D(v,n)$  predstavuje počet úmrtí jedincov vo veku  $v$  až  $(v+n-1)$  rokov.

Pri *miere úmrtnosti podľa veku* -  $m_i$  sa môžeme zaujímať o celú populáciu vo veku  $i$  bez rozdielu pohlavia, alebo môžeme rozlišovať *ženskú a mužskú úmrtnosť podľa veku* -  $m_i^{pohl}$ :

$$m_i^{pohl} = \frac{D_i^{pohl}}{P_i^{pohl}}, \quad (1.9)$$

kde  $D_i^{pohl}$  vyjadruje počet úmrtí jedincov vo veku  $i$  príslušného pohlavia. Príkladom je mužská miera úmrtnosti podľa veku 60 rokov z roku 2000:

$$m_{60}^m = \frac{D_{60}^m}{P_{60}^m} = \frac{513}{20554} = 0,0246 = 2,46\%.$$

### 1.4 Migrácia

*Migrácia* (sťahovanie) je definovaná ako pohyb bez hranice administratívnej jednotky, pri ktorom dochádza k zmene trvalého pobytu osoby (v Slovenskej republike zmena obce trvalého pobytu, niekde zmena obvyklého pobytu) [2]. *Zahraničnou migráciou* nazývame pohyb cez hranice štátu [2].

Migráciu môžeme rozdeliť na *emigráciu* a *imigráciu*. Emigrácia predstavuje sťahovanie z určitej územnej jednotky a imigrácia sťahovanie do určitej územnej jednotky.

Osoby, ktoré menia miesto (obec) svojho trvalého (obvyklého) pobytu z jednej krajiny do inej krajiny alebo z jedného regiónu do iného regiónu v rámci krajiny, nazývame *migrantmi*. V prípade pohybu z určitej územnej jednotky túto osobu pomenujeme *prist'ahovaný*. Pokiaľ sa jedná o pohyb do určitej územnej jednotky migrant sa bude nazývať *vyst'ahovaný*.

### 1.5 Prírastok obyvateľstva

Oboznámili sme sa s ukazovateľmi, ktoré ovplyvňujú veľkosť populácie, v neposlednom rade nás ale zaujíma samotný prírastok obyvateľstva. *Prirodzeným prírastkom obyvateľstva - PP* nazveme rozdiel medzi počtami živých narodení a úmrtí vo vymedzenom období.

$$PP = N - D \quad (1.10)$$

Prirodzený prírastok pre rok 2000 vypočítame ako

$$PP = N - D = 55151 - 51980 = 3171.$$

*Migračné saldo - MS* je rozdiel medzi počtom prist'ahovaných(*I*) a vyst'ahovaných(*E*) vo vymedzenom období.

$$MS = I - E \quad (1.11)$$

Aký je konečný *celkový prírastok - CP* ? Celkovým prírastok nazveme súčet prirodzeného prírastku a migračného salda.

$$CP = PP + MS \quad (1.12)$$

Ďalším ukazovateľom prírastku obyvateľstva je hrubá miera prírastku, v tomto prípade takisto rozlišujeme *prirodzenú hrubú mieru - pp*,

$$pp = \frac{PP}{P} \quad (1.13)$$

*celkovú hrubú mieru prírastku - cp*

$$cp = \frac{CP}{P} \quad (1.14)$$

a *hrubú mieru migračného salda - ms*.

$$ms = \frac{MS}{P} \quad (1.15)$$

## 1.6 Pohlavná štruktúra

*Pohlavná štruktúra* je definovaná ako rozdelenie obyvateľstva podľa pohlavia[2]. Zaujímavé na pohlavnej štruktúre je, že i keď sa rodí pomerne viac chlapcov, tak v populácii prevláda počet žien. Je to spôsobené viacerými ukazovateľmi.

*Koeficient maskulinity* je podiel mužov v danej populácii

$$ma = \frac{P^M}{P}, \quad (1.16)$$

kde  $P^M$  vyjadruje veľkosť mužskej populácie v sledovanom období.

Podobne si vieme vypočítať *koeficient femininity* ako

$$fe = \frac{P^{\check{z}}}{P}, \quad (1.17)$$

*Sekundárny index maskulinity* sa počíta ako pomer narodených chlapcov a dievčat.

$$sma = \frac{N^M}{N^{\check{z}}} \quad (1.18)$$

## 2 Dynamický systém

Pre ďalšie výpočty, prognózy rastu populácie potrebujeme matematický aparát, ktorý opisuje rast populácie ako dlhodobý časový vývoj izolovaného systému v dôsledku prebiehajúcich vnútorných procesov (pôrodnosť, úmrtnosť). Samozrejme v takomto systéme nemôžeme zahrnúť všetky faktory v realite systém ovplyvňujúce. Musíme mať na pamäti, že sa jedná o predpovede konštruované pomocou matematických metód, a preto sa odvodzujú zo zvoleného systému matematických predpokladov. Tieto predpoklady idealizujú skutočnosť. Neuvažujeme napríklad migráciu obyvateľstva, či sociálno-ekonomické aspekty vývoja populácie.

Matematický model takéhoto systému budeme nazývať *dynamický systém*. V našom prípade sa bude jednať o *diskrétny dynamický systém*, kde budeme sledovať vývoj populácie v oddelených časových okamihoch (rokoch). Pokiaľ by sme chceli sledovať systém v nepretržitých časových okamihoch, dostal by prívlastok spojité.

*Stavom* nášho dynamického systému nazveme takú informáciu, ktorej znalosť v nejakom časovom okamihu (roku) spolu so znalosťou vnútorných mechanizmov vývoja systému a vonkajších vplyvov umožňuje predpovedať jeho vývoj v budúcnosti pri absencii vonkajších vplyvov.

### 2.1 Lineárny jednorozmerný dynamický systém

#### 2.1.1 Základná rovnica demografie

Predpokladajme, že krajina (alebo iná územná jednotka) obsahuje populáciu veľkosti  $P(t)$  jedincov v čase  $t$ . Aká bude veľkosť populácie v čase  $t+1$ ? Pokiaľ budeme považovať populáciu za uzavretý systém, tak veľkosť populácii v čase  $t+1$  bude

$$P(t+1) = ppP(t), \quad (2.1)$$

kde  $pp$  je hrubá miera prirodzeného prírastku z rovnice (1.13). Ak sa  $pp$  s časom nemení, tak hodnoty  $P(t)$  tvoria geometrickú postupnosť a platí

$$P(t) = pp^{t-t_0}P(t_0).$$

Podľa *Malthusovho zákona* [5] môžeme pozorovať asymptotické správanie pre

- $pp > 1$  : populácia rastie nad všetky medze
- $pp = 1$  : populácia zostáva konštantná
- $pp < 1$  : populácia vyhynie.

### 2.1.2 Lineárny jednorozmerný dynamický systém

Zovšeobecnením rovnice (2.1) dostaneme lineárny dynamický systém. Lineárnym dynamickým systémom nazveme systém, ktorého stav je opísaný reálnym číslom  $x$  a ktorého hodnota v okamihu  $t+1$  je určená jeho hodnotou v čase  $t$  vzťahom

$$x(t+1) = ax(t), \quad (2.2)$$

kde  $a \in \mathbf{R}$ . Za priestor stavov môžeme vziať  $X = \mathbf{R}$ .

Trajektóriu dynamického systému (2.2) cez bod  $x_0$  nazývame postupnosť  $x(t) = x(t, x_0)$ ,  $t = 0, 1, 2, \dots, n$ , ktorá spĺňa (2.2) a  $x(0) = x_0$ . Platí

$$x(t, x_0) = a^t x_0. \quad (2.3)$$

### 2.1.3 Viacrozmerné lineárne dynamické systémy

Zovšeobecnením systému (2.2) a (2.3) sa môžeme ľahko dostať k viacrozmernému systému, kde  $x \in \mathbf{R}^n$ , a matica  $A$  je rozmerov  $n \times n$ .

$$x(t+1) = Ax(t), \quad (2.4)$$

$$x(t) = A^t x(0). \quad (2.5)$$

Pokiaľ chceme vidieť asymptotické správanie nášho systému, potrebujeme počítať mocniny matice  $A$ . Ak sú vlastné hodnoty matice  $A$  rozličné, označíme ich  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  a ich vlastné vektory označíme  $v_1, \dots, v_n$ . Potom platí

$$Av_i = \lambda_i v_i, \quad i = 1, \dots, n,$$

Teda

$$AV = V\Lambda \quad \text{kde } V = (v_1, \dots, v_n) \\ \Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$$

a  $V$  je regulárne. Z toho dostávame

$$AV = V\Lambda V^{-1}$$

a

$$A^t = V\Lambda V^{-1} = V \begin{pmatrix} \lambda_1^t & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n^t \end{pmatrix} V^{-1}. \quad (2.6)$$

Môže nastať aj prípad, keď  $\lambda_i$  sú komplexné, tým sa budeme zaoberať neskôr.

Každú trajektóriu (2.4) možno vyjadriť v tvare

$$x(t) = V\Lambda^t c,$$

alebo

$$x(t) = \sum_{i=1}^n c_i v_i \lambda_i^t, \quad (2.7)$$



kde  $v_i$  sú vlastné vektory vlastných hodnôt  $\lambda_i$  a  $c_i$  sú vhodné konštanty[5]. Ak poznáme  $x(0)$ , môžeme vektor  $c$  koeficientov určiť z rovnice

$$Vc = x(0), \quad (2.8)$$

alebo ekvivalentne zo sústavy rovníc

$$\sum_{i=1}^n c_i v_i = x(0), \quad (2.9)$$

pretože matica  $V$  je regulárna.

Ako sme už naznačili, vlastné hodnoty matice  $A$  nemusia byť všetky reálne. V takom prípade má spolu s komplexnou vlastnou hodnotou  $\lambda$  aj komplexne združenú vlastnú hodnotu  $\bar{\lambda}$ . Rovnako sú komplexne združené ich vlastné vektory  $v, \bar{v}$ . Napriek tomu, že v pravej strane (2.9) sa vtedy vyskytujú komplexné čísla, jej hodnota  $x(t)$  bude reálna. Vo vyjadrení (3.7) pre  $x(t)$  budú členy  $\lambda, \bar{\lambda}$  mať tvar

$$x(t) = \dots + cv\lambda^t + \overline{cv\lambda^t} + \dots = \dots 2\operatorname{Re}(cv\lambda^t) \dots$$

Ak  $\lambda$  vyjadríme v polárnom tvare  $\lambda = \rho(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ ,  $\rho = |\lambda|$ ,  $\varphi = \arg \lambda$ , potom platí  $\varphi \neq 0$  a

$$\lambda^t = \rho^t (\cos t\varphi + i \sin t\varphi),$$

$$\bar{\lambda}^t = \rho^t (\cos t\varphi - i \sin t\varphi),$$

a teda

$$\begin{aligned} x(t) &= \dots + cv\lambda^t + \overline{cv\lambda^t} + \dots =, \\ &= \dots 2\operatorname{Re}(cv\lambda^t) \dots = \rho^t (a \cos t\varphi + b \sin t\varphi) \end{aligned} \quad (2.10)$$

pre vhodné vektory  $a, b$  [5].

Vlastné číslo  $\lambda_1$ , ktoré je v absolútnej hodnote najväčšie vlastné číslo matice  $A_{n \times n}$ ,

$$\text{t.j. } |\lambda_1| > \lambda_i, \text{ pre } i = 2, 3, \dots, n,$$

nazveme *dominantné vlastné číslo*. Z [3] vieme, že v demografických modeloch je toto dominantné číslo navyše kladné a reálne. Všetky členy jeho vlastného vektora budú mať rovnaké znamienko. Znalosť dominantného čísla  $\lambda_1$  nám umožňuje upraviť (2.9) na tvar

$$x(t) = c_1 v_1 \lambda_1^t + \lambda_1^t \sum_{i=2}^n c_i v_i \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right)^t \quad (2.11)$$

Okrem prvého člena  $c_1 v_1 \lambda_1^t$ , ostatné členy v zátvorke konvergujú k nule pri  $t \rightarrow \infty$ . Trajektória sa teda bude asymptoticky približovať násobku vektora  $v_1$  dominantného čísla  $\lambda_1$ .

### 3 Diskrétny model dynamiky populácie s vekovou štruktúrou

#### 3.1 Základný model

V tomto zjednodušenom modeli budeme predpokladať, že jedinci sú schopní reprodukcie len v určitom časovom intervale. Vďaka tomuto predpokladu môžeme populáciu rozdeliť do 3 typov vekových intervalov a to na predreprodukčný, reprodukčný a poreprodukčný vekový interval.

Ďalším predpokladom je, že miera pôrodnosti a úmrtnosti sa pre jednotlivé vekové intervaly časom nemenia. Populáciu budeme považovať za uzavretý systém, nebudeme počítat' s migráciou.

Stav populácie opíšme pomocou demografických ukazovateľov, konkrétne veľkosť populácie, miera pôrodnosti (1.2) a miera úmrtnosti (1.8) podľa vekového intervalu.

Veľkosť populácie charakterizujeme vektorom  $x=(x_1, x_2, x_3)$ , kde

$x_1$  počet jedincov s vekom v intervale  $[0; a_1)$

$x_2$  počet jedincov s vekom v intervale  $[a_1; a_2)$

$x_3$  počet jedincov s vekom v intervale nad  $a_2$  rokov.

Ďalej označíme

$m_k$  mieru úmrtnosti  $k$ -tej vekovej skupiny a

$b$  mieru pôrodnosti druhej (reprodukčnej) skupiny.

Ak predpokladáme, že populácia je vzhľadom na vek rovnomerne rozložená a za jednotku času si zoberieme 1 rok, tak dostaneme nasledovný systém:

$$\begin{aligned}x_1(t+1) &= \left(1 - m_1 - \frac{1}{a_1}\right)x_1(t) + bx_2(t) \\x_2(t+1) &= \frac{1}{a_1}x_1(t) + \left(1 - m_2 - \frac{1}{a_2 - a_1}\right)x_2(t) \\x_3(t+1) &= \frac{1}{a_2 - a_1}x_2(t) + (1 - m_3)x_3(t)\end{aligned}\tag{3.1}$$

Tento systém môžeme transformovať na (2.4). Z toho vyplýva, že trajektóriu (2.9) možno napísať v tvare

$$x(t) = c_1 v_1 \lambda_1^t + c_2 v_2 \lambda_2^t + c_3 v_3 \lambda_3^t.$$

Pokiaľ budeme poznať dominantné vlastné číslo, budeme môcť upraviť trajektóriu do tvaru (2.15). Vekový profil populácie sa bude z dlhodobého hľadiska približovať vektoru dominantného vlastného čísla.

### 3.2 Zväčšenie počtu vekových intervalov

Zjemnením delenia populácie nadobudneme väčší počet vekových intervalov. Ostatné predpoklady základného modelu ostávajú platné. Len určití jedinci sú schopní reprodukcie, teda nie všetky vekové intervaly budú ukazovať nenulovú mieru pôrodnosti.

*Reprodukčnou skupinou* obyvateľov nazveme skupinu obyvateľov  $x_i$  z intervalu  $[a_i, a_{i+1})$ ,  $i = 0, 1, 2, \dots, n$ ; ktorý spĺňa obe podmienky

$$\begin{aligned} a_d &\leq a_i, \\ a_{i+1} &\leq a_h, \end{aligned} \quad (3.2)$$

kde  $a_d$  predstavuje dolnú hranicu reprodukčného intervalu a  $a_h$  predstavuje hornú hranicu reprodukčného intervalu. Pre túto skupinu platí, že pôrodnosť  $b_i > 0$ .

Z podmienok vyplýva, že skupinu obyvateľov spĺňajúcu  $a_{i+1} < a_h$  nazveme *predreprodukčnou skupinou* a pre  $a_h < a_{i+1}$  *poreprodukčnou skupinou*.

Po uplynutí jednej časovej jednotky (1 roka) pôrodnosť priamo ovplyvňuje iba prvú skupinu obyvateľov  $x_0$  s intervalom  $[0, a_1)$ . U ostatných skupín sa prejaví až po uplynutí viacerých rokov.

Na základe týchto poznatkov môžeme pristúpiť ku konštrukcii všeobecného modelu, kde uvažujeme mieru pôrodnosti iba u reprodukčných skupín.

Pre prvú vekovú skupinu  $x_0$  z intervalu  $[0, a_1)$  platí

$$x_0(t+1) = \left(1 - m_0 - \frac{1}{a_1}\right)x_1(t) + \sum_{j=d}^{h-1} b_j x_j(t) \quad (3.3)$$

a pre skupinu jedincov  $x_i$  z vekového intervalu  $[a_i, a_{i+1})$ , kde  $i=1,2,3, \dots, n$  nadobúda model takýto tvar:

$$x_i(t+1) = \frac{1}{a_i - a_{i-1}}x_{i-1}(t) + \left(1 - m_i - \frac{1}{a_{i+1} - a_i}\right)x_i(t) \quad (3.4)$$

Na základe týchto rovníc si vytvoríme maticu  $A$  z (2.4), trajektóriu možno napísať v tvare (2.9).

### 3.3 Ročné vekové intervaly

Predpokladu rovnomerného rozdelenia obyvateľstva sa môžeme vyhnúť a to tým, že veľkosť vekového intervalu položíme rovnú dĺžke časovej jednotky, teda jednému roku. V praxi to znamená, že po roku sa všetci prežívajúci jedinci z vekovej skupiny  $x_i$  presunú do vekovej skupiny  $x_{i+1}$ . Označenie  $x_i(t)$  zodpovedá počtu obyvateľov, ktorý práve dovŕšili vek  $i$  v čase  $t$ . Ostatné predpoklady ostávajú platné. Pre skupinu novorodencov  $x_0$  bude vyzeráť model nasledovne:

$$x_0(t+1) = \sum_{j=d}^h b_j x_j(t), \quad (3.5)$$

kde  $d$  predstavuje dolnú a  $h$  hornú vekovú hranicu reprodukčného intervalu. Pre  $i=1,2,\dots, n$  bude vyzeráť model:

$$x_i(t+1) = (1 - m_{i-1})x_{i-1}(t). \quad (3.6)$$

V tomto modeli má vlastný vektor dominantného vlastného čísla väčšiu výpovednú hodnotu. Ako už vieme, tak sa zloženie populácie s  $t \rightarrow \infty$  bude bez ohľadu na začiatkový stav populácie asymptoticky približovať tomuto vektoru(2.11). Tento vlastný vektor si môžeme vhodne normovaním upraviť tak, aby súčet jeho zložiek bol rovný 1. Po takejto úprave bude každá zložka percentuálne vyjadrovať podiel na populácii. Na základe tohto upraveného vektora budeme vedieť povedať, k akému percentuálnemu zloženiu sa bude populácia asymptoticky približovať.

### 3.4 Model so ženskou dominanciou

Najdôležitejším ukazovateľom sa javí byť miera pôrodnosti, ako jediná obohacuje náš model vo forme novorodencov. V modeli s ročnými vekovými intervalmi počítame mieru pôrodnosti  $b_i$  (1.3). V celkovom počte obyvateľov sú samozrejme zahrnuté obe pohlavia, muži aj ženy. Obnovovanie systému závisí hlavne od počtu žien. Tento fakt skúsime zahrnúť do nášho modelu. Upravíme model s ročnými vekovými intervalmi tak, aby sme tam zahrnuli len ženskú časť populácie a nazveme ho model so ženskou dominanciou.

Model s ročnými vekovými intervalmi si upravíme nasledovne. Nebudeme brať do úvahy celkový počet obyvateľov  $x$ , ale len celkový počet žien, ktorý nám bude vyjadrovať vektor  $z$ . Ako v predošlom modeli, bude  $z_i(t)$  vyjadrovať počet žien, ktoré dovíšili  $i$ -ty rok v čase  $t$ . Tentokrát nepoužijeme mieru pôrodnosti, ale upravíme si mieru plodnosti (1.6), ktorú budeme počítat' ako pomer počtu narodených dievčat ( $N^z$ ) a počtu žien ( $P^z$ ). Označíme si ho ako vektor  $f^z$ , kde  $f_i^z$  vyjadruje pomer narodených dievčat ženám s vekom  $i$  a celkový počet žien s vekom  $i$ . Mieru úmrtnosti žien budeme počítat' podľa (1.9) a označíme si ju ako  $u$ .

Po takejto transformácii bude vyzerat' upravený model pre novorodencov nasledovne:

$$z_0(t+1) = \sum_{j=k}^l f_j^z z_j(t), \quad (3.7)$$

kde  $k$  predstavuje dolnú a  $l$  hornú hranicu reprodukčného intervalu. Pre  $i=1,2,\dots, n$  bude vyzerat' model:

$$z_i(t+1) = (1 - m_{i-1}^z) z_{i-1}(t) \quad (3.8)$$

## 4 Citlivosť modelov s vekovou štruktúrou

Dopracovali sme sa k štyrom rôznym modelom s vekovou štruktúrou, podľa ktorých môžeme robiť prognózy vývoja populácie do budúcnosti. Základ všetkých modelov je rovnaký. Pri modelovaní populácie používame veľkosť populácie, mieru úmrtnosti, mieru pôrodnosti (v prípade ženskej dominancie sa jedná o mieru plodnosti). Nakoľko odlišné môžeme očakávať výsledky? Záleží veľmi na počte intervalov a pohlaví, alebo nám vyjdú rovnaké výsledky?

Pri tvorení hypotéz môžeme zaujať dva pohľady. Buď sa zameriame na krátkodobé hľadisko alebo dlhodobé. Pri krátkodobom hľadisku nám stačí využiť rovnicu (2.5) a spraviť prognózu na nasledujúce roky. Aby sme overili presnosť prognóz, štartovací rok si zvolíme tak, aby sme výsledky mohli porovnať s reálnymi údajmi.

Pri študovaní dlhodobého hľadiska sa zaujímame hlavne o výslednú formu trajektórie (2.11). Po určení dominantného vlastného čísla vieme, že sa systém bude asymptoticky približovať k vlastnému vektoru vlastného čísla.

### 4.1 Základný model

#### Krátkodobé prognózy

Pri voľbe hraníc základného modelu (3.1) budeme vychádzať z použitých ukazovateľov a to miery pôrodnosti a úmrtnosti. Predpokladáme rovnomerné rozdelenie populácie, preto vypočítaná miera úmrtnosti a pôrodnosti má popisovať celý vekový interval, čo nie je úplne pravda. Ak zle zvolíme hranice, môže sa to výrazne odzrkadliť na týchto ukazovateľoch. Ako začiatkový rok si zvolíme rok 2000.

Napríklad, pokiaľ by sme zvolili hornú hranicu vekového intervalu 80, tak by sa parametre z údajov [4] z roku 2000 vypočítali nasledovne:  $m_1 = 0,0006$ ,  $m_2 = 0,0097$ ,  $m_3 = 0,1517$ ,  $b = 0,0132$ , kde

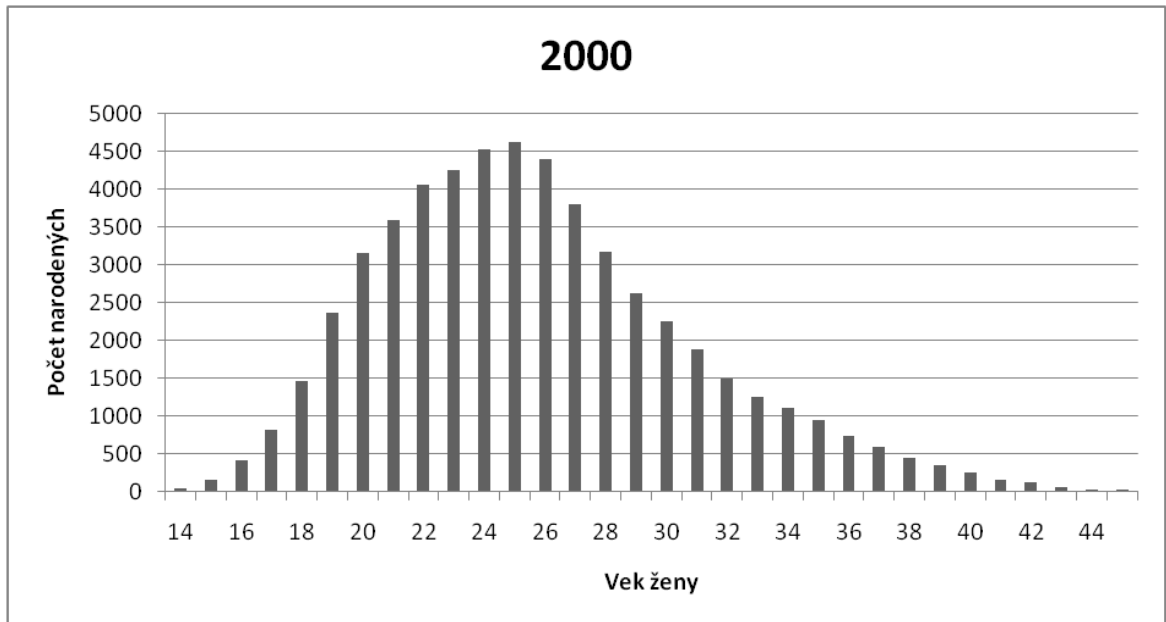
$$A = \begin{pmatrix} 0,9494 & 0,0132 & 0 \\ 0,05 & 0,9736 & 0 \\ 0 & 0,0167 & 0,8483 \end{pmatrix} \quad x_0 = \begin{pmatrix} 1517144 \\ 3781858 \\ 99655 \end{pmatrix}.$$

Nízka miera pôrodnosti je spôsobená tým, že sme do vekového intervalu započítali časť populácie so zanedbateľným alebo nulovým počtom narodených detí vzhľadom na vysoký vek matiek. Samozrejme že sa zle zvolené hranice prejavili aj na miere úmrtnosti, keďže s vyšším vekom populácie je očakávaný aj väčší počet úmrtí. Väčší dôraz pri

interpretovaní výsledku treba klásť miere pôrodnosti, keďže ako jediná vytvára najmladšiu časť predreprodukčnej skupiny vo forme novorodencov.

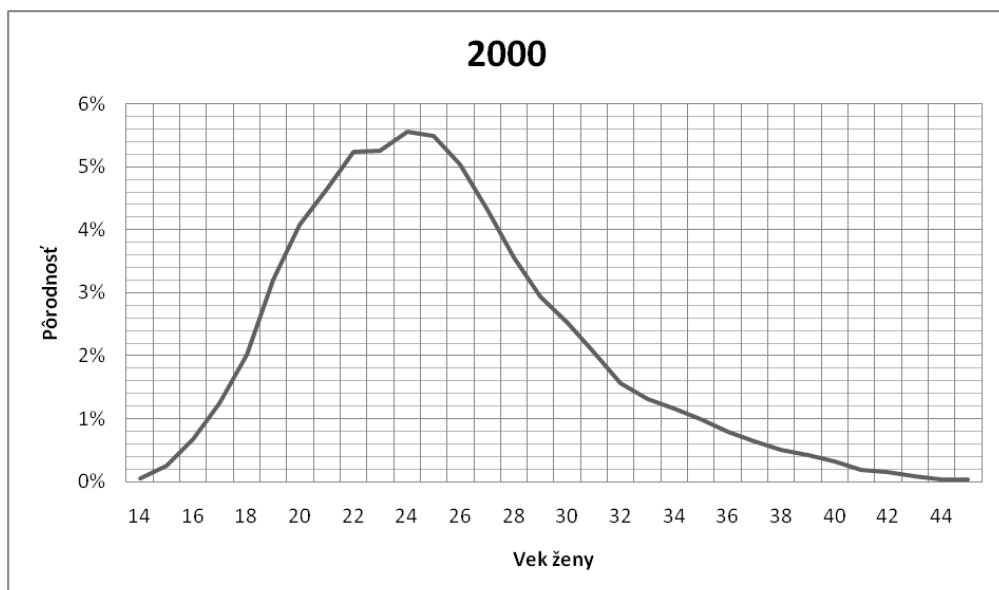
Pri rozhodovaní v našom základnom modeli sa sústreďíme na počet narodení vzhľadom na vek ženy z údajov [5] z roku 2000.

**obr. 1 počet narodení vzhľadom na vek ženy**



Na prvý pohľad vidieť, že voľba hraníc 20,80 bola nevhodná, nakoľko po roku 50 je počet narodení zanedbateľný, skoro rovný 0. Obrázok nám ďalej pomôže skôr pri odhadovaní, nakoľko v modeli sa nevyskytuje počet narodení priamo, ale vo forme pôrodnosti. Preto po spracovaní údajov si pomôžeme mierou pôrodnosti podľa veku(1.3) v obr.2.

**obr. 2 Pôrodnosť podľa veku**



Skúsime zvoliť hranice tak, aby hraničné pôrodnosti intervalov boli na približne rovnakej úrovni. Potom porovnáme výsledky v snahe zistiť nakoľko citlivý je tento model.

Začneme voľbou vekových hraníc, ktorých pôrodnosť podľa veku ženy, je väčšia, rovná 1%. S touto podmienkou určíme spodnú hranicu ako 17 rokov, kde pôrodnosť je rovná približne 1,25%. Horná hranica sa už nezapočítava do reprodukčného intervalu, preto ju zvolíme 35 rokov, kde pôrodnosť je rovná približne 0,99%. Pôrodnosť podľa veku ženy pri 34 rokoch je 1,16%. Na základe tejto voľby dostaneme nové parametre:  $m_1 = 0,0006$ ,  $m_2 = 0,0008$ ,  $m_3 = 0,0194$ ,  $b = 0,0332$ , kde

$$A = \begin{pmatrix} 0,9405 & 0,0332 & 0 \\ 0,0588 & 0,9437 & 0 \\ 0 & 0,0556 & 0,9806 \end{pmatrix} \quad x_0 = \begin{pmatrix} 1246477 \\ 1533825 \\ 2618355 \end{pmatrix}.$$

Volili sme hranice tak, aby sa miera pôrodnosti podľa veku rovnala na okrajoch intervalu aspoň 1%. Skúsme zahrnúť do vekového intervalu aj pôrodnosť nižšiu, blízku 0. Inštitút informatiky a štatistiky zaznamenáva najnižší vek rodičky -14, teda 14 rokov a menej. Najvyšší vek rodičky je zaznamenaný +50, teda 50 a viac rokov. Pre jednoduchosť si ako okraje intervalu zvolíme 14 a 50 rokov. Naše výpočty táto nezrovnalosť výrazne neovplyvní, keďže v týchto krajných rokoch je zaznamenaný minimálny počet živonarodených. Na základe týchto novozvolených hraníc vypočítame nové parametre:  $m_1 = 0,0007$ ,  $m_2 = 0,0017$ ,  $m_3 = 0,0335$ ,  $b = 0,0183$ , kde

$$A = \begin{pmatrix} 0,9279 & 0,0183 & 0 \\ 0,0714 & 0,9705 & 0 \\ 0 & 0,0278 & 0,9665 \end{pmatrix} \quad x_0 = \begin{pmatrix} 981848 \\ 3016335 \\ 1400474 \end{pmatrix}$$

Naopak, čo sa stane, pokiaľ okraje intervalu s nízkou pôrodnosťou zanedbáme, aké môžeme očakávať výsledky? Samozrejme miera pôrodnosti vekového intervalu vzrastie, ale počet obyvateľov z tohto intervalu klesne. Uvidíme, nakoľko sa to odzrkadlí na výsledkoch. Zvolíme hranice, kde pôrodnosť podľa veku ženy je väčšia, rovná 3%. Ako spodnú hranicu dáme 19 rokov, kde miera pôrodnosti vzhľadom na vek ženy vychádza 3,2% a ako hornú hranicu si zvolíme 29 rokov s pôrodnosťou 2,94%. Miera pôrodnosti podľa veku ženy pri 28 rokoch je 3,57%. Vypočítané parametre sú  $m_1 = 0,0006$ ,  $m_2 = 0,0007$ ,  $m_3 = 0,0167$ ,  $b = 0,0417$ , kde

$$A = \begin{pmatrix} 0,9467 & 0,0417 & 0 \\ 0,0526 & 0,8993 & 0 \\ 0 & 0,1 & 0,9833 \end{pmatrix} \quad x_0 = \begin{pmatrix} 1425772 \\ 909871 \\ 3063014 \end{pmatrix}.$$

Ako sme predpokladali, zatiaľ nám vyšla najvyššia miera pôrodnosti, až 4,16%.



Skúšali sme posúvať hranice na základe rôznych úvah. Snažili sme sa do reprodukčnej skupiny zahrnúť hraničné vekové skupiny s pôrodnosťou blízkou 1%; vekové skupiny, ktoré preukazovali nenulovú pôrodnosť, alebo naopak sme sa snažili zúžiť interval na skupiny s pomerne vysokou pôrodnosťou 3%. Aby sme vedeli usúdiť, nakoľko je citlivý systém, vytvoríme s týmito výsledkami prognózy na základe rovnice (2.5) na najbližších 9 nasledujúcich rokoch.

Nebudeme porovnávať počet jedincov vo vekových intervaloch, keďže sa hranice líšia. Zameriame sa na celkovú veľkosť populácie  $x$ , kde  $x = x_1 + x_2 + x_3$ . Ako začiatkový rok  $t=0$  si zvolíme rok 2000 s celkovou populáciou 5 398 657.

Samozrejme nás nezaujíma len samotná citlivosť systému na zmeny, ale aj jeho spoľahlivosť. Chceme vedieť čo najpresnejšie odhadnúť budúci vývoj populácie. Preto výsledky porovnáme s reálnymi údajmi, ktoré sme získali z Inštitútu informatiky a štatistiky za roky 2000 až 2009. V tabuľke na obr. 3 je vidieť reálne údaje, výsledky na základe výpočtov pomocou rovnice (2.5), rozdiel medzi našimi vypočítanými hodnotami a reálnymi hodnotami, priemernú a kvadratickú odchýlku.

**obr. 3**

Rok	t	Reálne údaje	Veková hranica (17,35)	Rozdiel	Veková hranica (14,50)	Rozdiel	Veková hranica (19,29)	Rozdiel
2001	1	5378783	5396794	18011	5401083	22300	5395852	17069
2002	2	5378951	5393854	14903	5401973	23022	5385711	6760
2003	3	5379161	5389843	10682	5401376	22215	5369394	-9767
2004	4	5380053	5384770	4717	5399340	19287	5347887	-32166
2005	5	5384822	5378648	-6174	5395915	11093	5322027	-62795
2006	6	5389180	5371490	-17690	5391147	1967	5292526	-96654
2007	7	5393637	5363312	-30325	5385084	-8553	5259988	-133649
2008	8	5400998	5354133	-46865	5377774	-23224	5224929	-176069
2009	9	5412254	5343972	-68282	5369262	-42992	5187785	-224469
Kvadratická odchýlka				10430		7437		37516
Priemerná odchýlka				24183		19406		84378

Na tabuľke možno pozorovať, že najmenšiu kvadratickú i priemernú odchýlku prejavil model modelovaný na základe vekových hraníc (14,50) a ako druhý najlepší sa javí model s hranicami (17,35).

Ako si môžeme všimnúť, v prípade hraníc (19,29), kde sme brali do úvahy populáciu s vysokou reprodukciou, model predpovedá spočiatku kladný rast, ktorý potom ale začne značne upadať, čo spôsobuje aj veľkú odchýlku od reality. Je to spôsobené tým,

že pomerne malá časť populácie je schopná reprodukcie. Ani vysoká miera pôrodnosti nie je schopná tento nedostatok zachrániť, populácia začne starnúť a vymierať. Pri výbere hraníc sa radšej zameriame na väčšie spektrum populácie aj s nižšou mierou pôrodnosti, čoho dôkazom sú pomerne dobré výsledky hraníc (17,35) a (14,50).

## Dlhodobé prognózy

Vypočítali sme si krátkodobé prognózy, teraz sa budeme zaujímať o dlhodobé prognózy a asymptotické správanie. Vypočítame si k jednotlivým hraniciam vlastné čísla a vlastné hodnoty, po určení dominantného vlastného čísla budeme vedieť určiť vekový profil, ku ktorému sa bude populácia približovať bez ohľadu na začiatočný stav populácie.

Pre vekové hranice (17,35) nám z údajov[5] vyšla matica  $A$

$$A = \begin{pmatrix} 0,9405 & 0,0332 & 0 \\ 0,0588 & 0,9437 & 0 \\ 0 & 0,0556 & 0,9806 \end{pmatrix}.$$

Matica  $A$  má zrejme vlastnú hodnotu  $\lambda_3 = 0,9806$  s vlastným vektorom  $v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

Ďalšie dve vlastné hodnoty sú vlastnými hodnotami matice

$$A = \begin{pmatrix} 0,9405 & 0,0332 \\ 0,0588 & 0,9437 \end{pmatrix}.$$

Tie sa dajú dopočítať na základe charakteristickej rovnice

$$\lambda^2 - (0,9405 + 0,9437)\lambda + 0,9405 \times 0,9437 - 0,0332 \times 0,0588$$

a jej koreňmi sú  $\lambda_1 = 0,9863$ ,  $\lambda_2 = 0,8979$ . Vlastnými vektormi vlastných hodnôt sú vektory

$$v_1 = \begin{pmatrix} 0,0733 \\ 0,1011 \\ 0,9922 \end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0,5424 \\ -0,6974 \\ 0,4684 \end{pmatrix}.$$

Dominantným vlastným číslom tejto matice  $A$  je  $\lambda_1 = 0,9863$  z vlastným vektorom  $v_1 =$

$$\begin{pmatrix} 0,0733 \\ 0,1011 \\ 0,9922 \end{pmatrix}.$$

Pre vekové hranice (14,50) nám z údajov[5] vyšla matica  $A$

$$A = \begin{pmatrix} 0,9279 & 0,0183 & 0 \\ 0,0714 & 0,9705 & 0 \\ 0 & 0,0278 & 0,9665 \end{pmatrix}$$

Vlastné čísla a vlastné vektory si dopočítame ako:

$$\lambda_1 = 0,9665, v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \lambda_2 = 0,9911, v_2 = \begin{pmatrix} 0,1882 \\ 0,6514 \\ 0,735 \end{pmatrix}, \lambda_3 = 0,9072, v_3 = \begin{pmatrix} 0,6258 \\ -0,7063 \\ 0,3308 \end{pmatrix}$$

V tomto prípade nám vyšla dominantná vlastná hodnota  $\lambda_2 = 0,9911$  s vlastným vektorom  $v_2 = \begin{pmatrix} 0,1882 \\ 0,6514 \\ 0,735 \end{pmatrix}$ .

Ostáva nám dopočítať vlastné hodnoty a vlastné vektory matice A s vekovými hranicami (19,29).

$$A = \begin{pmatrix} 0,9467 & 0,0417 & 0 \\ 0,0526 & 0,8993 & 0 \\ 0 & 0,1 & 0,9833 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_1 = 0,8483, v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \lambda_2 = 0,9899, v_2 = \begin{pmatrix} 0,3077 \\ 0,945 \\ 0,1112 \end{pmatrix}, \lambda_3 = 0,9331, v_3 = \begin{pmatrix} 0,6225 \\ -0,7679 \\ -0,1509 \end{pmatrix}$$

Dominantné vlastné číslo je  $\lambda_2 = 0,9899$  s vlastnou hodnotou  $v_2 = \begin{pmatrix} 0,3077 \\ 0,945 \\ 0,1112 \end{pmatrix}$ .

Ako interpretovať výsledky? Dominantné vlastné čísla sú všetky kladné a reálne, členy vlastných vektorov majú rovnaké znamienko, ukazujú nám vekový profil, ku ktorému sa budú systémy asymptoticky približovať. Ďalej vidíme, že všetky dominantné čísla sú menšie ako 1, populácia pri  $t \rightarrow \infty$  vyhynie.

Vzhľadom na určenie rôznych hraníc nemôžeme presne porovnávať jednotlivé vektory, pretože v každom modeli je iné delenie obyvateľstva. Výsledky sú špecifické pre svoj model.

Pre hranice (17,35) sme vypočítali dominantný vektor  $v_1 = \begin{pmatrix} 0,0733 \\ 0,1011 \\ 0,9922 \end{pmatrix}$ .

Populácia sa začne približovať vekovému profilu, kde väčšinu obyvateľstva tvorí poreprodukčná skupina  $x_3$ . Keďže nebude obsahovať dostatočne veľa reprodukcie schopných jedincov, začne vymierať.

Pre hranice (14,50) nám vyšlo  $v_2 = \begin{pmatrix} 0,1882 \\ 0,6514 \\ 0,735 \end{pmatrix}$  ako dominantný vlastný vektor.

I v tomto prípade sa bude poreprodukčná skupina podieľať na väčšine obyvateľstva, ale nie až tak výrazne. Vďaka posunutiu hraníc sme dosiahli väčší podiel reprodukčnej skupiny v celkovom počte.

O hraniciach (19,29) s dominantným vektorom  $v_2 = \begin{pmatrix} 0,3077 \\ 0,945 \\ 0,1112 \end{pmatrix}$  môžeme povedať,

že nadobudne pomerne veľké zastúpenie v reprodukčnej skupine.

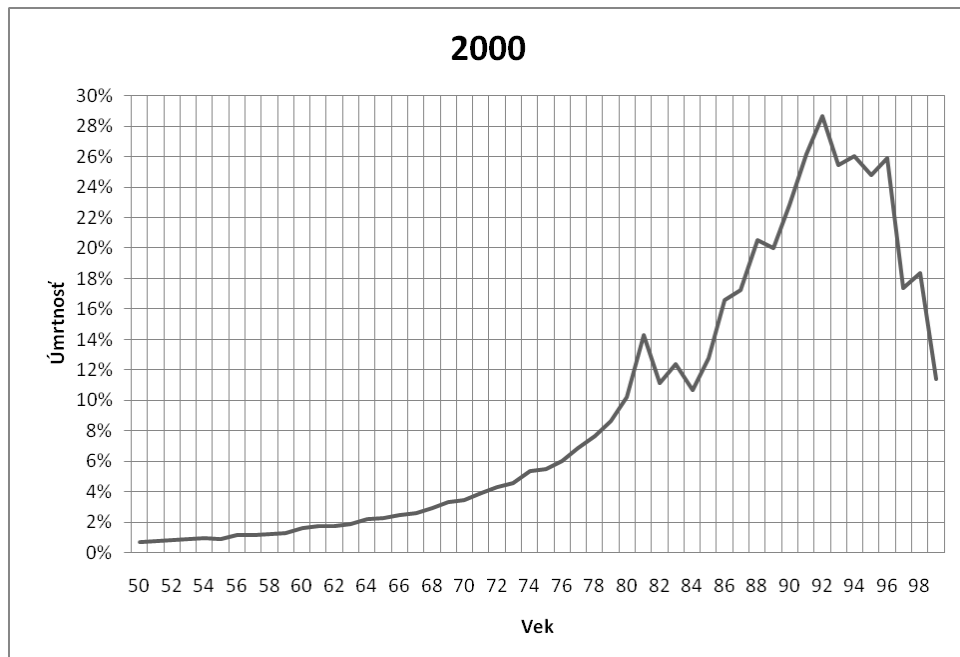
## 4.2 Zväčšenie počtu vekových intervalov

### Krátkodobé prognózy

Na základe úvah z predošlej časti budeme podobne voliť vekové intervaly. Zameriame sa na mieru pôrodnosti, podľa ktorej rozdelíme populáciu na viaceré vekové intervaly. Na začiatok zvolíme hranice podľa veľkosti pôrodnosti ako (14, 17, 19, 29, 35, 50), tým rozdelíme populáciu na 7 vekových intervalov. Interval [0, 14) predstavuje predreprodukčnú časť obyvateľstva, intervaly [14, 17), [17, 19), [19, 29), [29,35), [35, 50) reprodukčnú časť obyvateľstva a ľudia 50 a viac ročný predstavujú poreprodukčnú časť obyvateľstva. Na základe týchto kritérií uskutočníme výpočty s použitím rovnice (3.1). Tento model si označíme ako A.

Zamerali sme sa hlavne na mieru pôrodnosti, pretože predstavuje jediný ukazovateľ, ktorý zabezpečuje nový prírastok obyvateľov. Teraz, keďže nie sme ovplyvnení počtom vekových intervalov ako v základnom modeli, môžeme zahrnúť do našich úvah o rozdelení vekových intervalov aj mieru úmrtnosti. O miere úmrtnosti predpokladáme, že v poreprodukčnej časti obyvateľstva s rastom veku bude stúpať. Aj tu si zoberieme na pomoc mieru úmrtnosti podľa veku (1.9) na obr. 4. Údaje sme čerpali z [4] z roku 2000.

obr.4

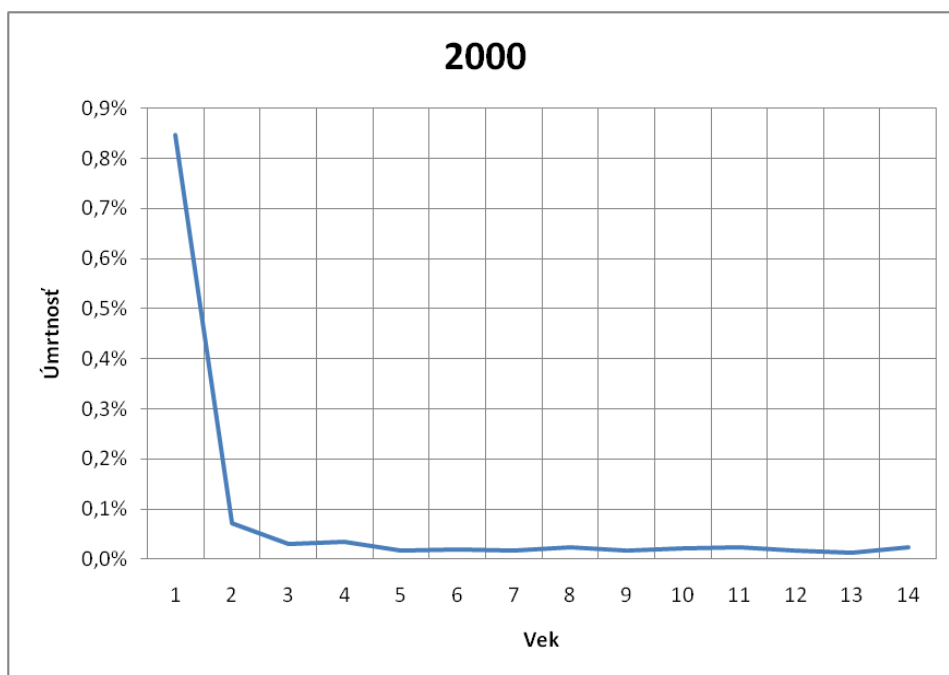


Rozdelíme intervaly na miestach, kde miera úmrtnosti obyvateľstva je blízka hodnotám 5%, 10% a 20%. Takto nám vyjdú hranice 74 s mierou úmrtnosti 5,34%, 80

s mierou úmrtnosti 10,21% a 88 s mierou úmrtnosti 20,5%. Vytvoríme si nový model, kde zahrnieme aj tieto nové hranice. Celkom budeme mať 10 intervalov s hranicami (14, 17, 19, 29, 35, 50, 74, 80, 88 ). Tento model pomenujeme ako B.

Sústredili sme sa na delenie reprodukčnej a poreprodukčnej časti obyvateľstva. Ako môžeme deliť predreprodukčnú skupinu? Zameriame sa taktiež na mieru úmrtnosti podľa veku (1.9) na obr. 5, kde tentokrát sledujeme skupinu od novorodencov až po 13 ročných. Údaje sme čerpali z [4] z roku 2000. Ako si môžeme všimnúť, nie sú tam žiadne výrazné výkyvy až na novorodeneckú mieru úmrtnosti. Vytvoríme ďalší model, ktorý obohatíme o hranicu 2 rokov. Budeme mať teda hranice (2, 14, 17, 19, 29, 35, 50, 74, 80, 88 ), ktoré nám rozdelia populáciu na 11 intervalov. Pre lepšie porovnanie si tento model pomenujeme ako C.

**obr.5**



Na základe týchto 3 modelov spravíme predikcie na ďalších 9 rokov. Tieto výsledky porovnáme s reálnymi dátami z [4] za roky 2000 až 2009. Vzhľadom na podobné delenie budeme porovnávať nielen celkový počet obyvateľov, ale porovnáme aj predreprodukčné, reprodukčné a poreprodukčné skupiny. Ako hranice reprodukčnej skupiny sme si zvolili [14, 50). Nakoniec nás samozrejme bude zaujímať priemerná a kvadratická odchýlka odhadov od reálnych údajov. Výsledky možno vidieť v tabuľke na obr.6, kde máme celkový počet populácie, rozdiel medzi odhadmi modelov a reálnymi údajmi, priemernú a kvadratickú odchýlku.

obr. 6

Rok	t	Reálne údaje	Model A	Rozdiel	Model B	Rozdiel	Model C	Rozdiel
2001	1	5378783	5401083	22300	5431267	52484	5431267	52484
2002	2	5378951	5402614	23663	5461800	82849	5461806	82855
2003	3	5379161	5403166	24005	5490134	110973	5490159	110998
2004	4	5380053	5402596	22543	5516122	136069	5516193	136140
2005	5	5384822	5400771	15949	5539648	154826	5539805	154983
2006	6	5389180	5397580	8400	5560643	171463	5560932	171752
2007	7	5393637	5392946	-691	5579081	185444	5579549	185912
2008	8	5400998	5386819	-14179	5594973	193975	5595663	194665
2009	9	5412254	5379172	-33082	5608353	196099	5609305	197051
Priemerná odchýlka				18312		142687		142982
Kvadratická odchýlka				6815		50220		50342

Tabuľky na obr. 7 nám ukazujú to isté ako obr. 6, len namiesto celkového počtu používame jednotlivé počty obyvateľov vzhľadom na príslušnosť k skupine. Tieto hodnoty si vypočítame ako súčet tých zložiek vektora  $x$ , ktoré patria do príslušnej skupiny.

obr. 7.a

Rok	t	Reálne údaje			Model A					
		0-13	14-50	50-99+	0-13	Rozdiel	14-50	Rozdiel	50-99+	Rozdiel
2001	1	956265	3005052	1417466	966167	9902	3000125	-4927	1434791	17325
2002	2	924570	3002487	1451894	951833	27263	2983550	-18937	1467231	15337
2003	3	893054	2998116	1487991	938610	45556	2966466	-31650	1498089	10098
2004	4	865442	2992278	1522333	926228	60786	2948764	-43514	1527603	5270
2005	5	840121	2986677	1558024	914451	74330	2930357	-56320	1555962	-2062
2006	6	816962	2978496	1593722	903090	86128	2911181	-67315	1583310	-10412
2007	7	796805	2966752	1630080	892003	95198	2891189	-75563	1609754	-20326
2008	8	778798	2958442	1663758	881090	102292	2870360	-88082	1635369	-28389
2009	9	770234	2946727	1695293	870284	100050	2848688	-98039	1660200	-35093
Priemerná odchýlka					66834		53816		16035	
Kvadratická odchýlka					24618		20506		6313	

**obr. 7.b**

Rok	t	Reálne údaje			Model B					
		0-13	14-50	50-99+	0-13	Rozdiel	14-50	Rozdiel	50-99+	Rozdiel
2001	1	956265	3005052	1417466	966167	9902	3000125	-4927	1464975	47509
2002	2	924570	3002487	1451894	951833	27263	2983550	-18937	1526417	74523
2003	3	893054	2998116	1487991	938610	45556	2966466	-31650	1585058	97067
2004	4	865442	2992278	1522333	926228	60786	2948764	-43514	1641129	118796
2005	5	840121	2986677	1558024	914451	74330	2930357	-56320	1694839	136815
2006	6	816962	2978496	1593722	903090	86128	2911181	-67315	1746373	152651
2007	7	796805	2966752	1630080	892003	95198	2891189	-75563	1795889	165809
2008	8	778798	2958442	1663758	881090	102292	2870360	-88082	1843523	179765
2009	9	770234	2946727	1695293	870284	100050	2848688	-98039	1889382	194089
Priemerná odchýlka					66834			53816		129669
Kvadratická odchýlka					24618			20506		45926

**obr. 7.c**

Rok	t	Reálne údaje			Model C					
		0-13	14-50	50-99+	0-13	Rozdiel	14-50	Rozdiel	50-99+	Rozdiel
2001	1	956265	3005052	1417466	963887	7622	3002405	-2647	1464975	47509
2002	2	924570	3002487	1451894	947541	22971	2987848	-14639	1526417	74523
2003	3	893054	2998116	1487991	932619	39565	2972482	-25634	1585058	97067
2004	4	865442	2992278	1522333	918854	53412	2956210	-36068	1641129	118796
2005	5	840121	2986677	1558024	905983	65862	2938983	-47694	1694839	136815
2006	6	816962	2978496	1593722	893779	76817	2920780	-57716	1746373	152651
2007	7	796805	2966752	1630080	882057	85252	2901601	-65151	1795892	165812
2008	8	778798	2958442	1663758	870674	91876	2881458	-76984	1843531	179773
2009	9	770234	2946727	1695293	859526	89292	2860378	-86349	1889401	194108
Priemerná odchýlka					59185			45876		129673
Kvadratická odchýlka					21921			17713		45927

Podľa obr. 6 sa najlepšie postavený model vzhľadom na celkovú veľkosť populácie javí byť model A. Pri modeloch B a C dochádza k príliš rýchlemu rastu populácie. Prečo, i keď model A vyzerá dobre postavený, nám vyšiel na začiatku modelu A taký veľký rozdiel? Rok 2001 je podľa údajov z [4] určitým spôsobom prelomový, vidieť to aj v tabuľke na obr. 8. Od roku 1992 vidieť kladný celkový prírastok, až v roku 2001 je zaznamenaný pokles. Keďže modely boli tvorené z údajov z roku 2000, je prirodzené, že modelujú kladný rast populácie. I keď v roku 2001 počet narodených (55151) prevyšuje počet úmrtí (52724), nastal pokles populácie. Tento pokles populácie je spôsobený iným ukazovateľom, s ktorým v našom modeli nepočítame. Napriek kladnému prirodzenému

prírastku migračné saldo (1.11) ako jediné môže vysvetľovať záporný celkový prírastok z (1.12).

**obr. 8**

Rok	Počet obyv.	Celkový prírastok	Rok	Počet obyv.	Celkový prírastok
1992	5295877	-	2002	5378951	168
1993	5314155	18278	2003	5379161	210
1994	5336455	22300	2004	5380053	892
1995	5356207	19752	2005	5384822	4769
1996	5367790	11583	2006	5389180	4358
1997	5378932	11142	2007	5393637	4457
1998	5387650	8718	2008	5400998	7361
1999	5393382	5732	2009	5412254	11256
2000	5398657	5275	2010	5424925	12671
2001	5378783	-19874			

Naším predpokladom bolo, že pri jemnejšom delení na vekové skupiny mám vyjdú presnejšie výsledky. Ako ale vidíme, nie je to pravda. Lepšie nám popisuje situáciu model A, ktorý sa zameriava na delenie podľa pôrodnosti.

I keď celkový počet obyvateľov vykazuje v modeli A pomerne malú odchýlku, na obr. 7 vidíme, že vzhľadom na vekové skupiny nie je dostatočne presný. Jedným z dôvodov nepresnosti je predpokladané rovnomerné rozdelenie obyvateľstva. Ako vidíme, je priveľký nárast v predreprodukčnej skupine, ktorý môže byť spôsobený vyšším predpokladaným počtom narodených detí, ako je skutočnosť, alebo nižším počtom starnúcich jedincov, ktorí sa majú presunúť do reprodukčnej skupiny. Deficit v reprodukčnej skupine je spôsobený naším predpokladom rovnomerného rozdelenie. Buď je táto skupine málo obohacovaná starnúcimi jedincami z predreprodukčnej skupiny alebo naopak rýchlym starnutím jedincov presúvajúcich sa do poreprodukčnej skupiny. Tento predpoklad potvrdzuje kladný rozdiel v poreprodukčnej skupine.

Podobne môžeme interpretovať odchýlky aj v modeloch B a C. Samozrejme, odchýlky vyšli celkovo väčšie, čo sme už podľa výsledkov z obr. 6 mohli predpokladať.



## Dlhodobé prognózy

Pre modely A, B a C si vypočítame dominantné vlastné čísla a vektory. Zvyšné vlastné čísla a ich vektory nás podľa (2.11) veľmi nezaujímajú. Vektory dominantných vlastných čísel bez ďalšej úpravy nebude možné medzi sebou porovnať, keďže každý vektor opisuje iné delenie obyvateľstva. Výsledky vidieť na obr. 9.

obr. 9

Model A	Model B	Model C
dominantné $\lambda$	dominantné $\lambda$	dominantné $\lambda$
0,9860	0,9860	0,9859
vektor	vektor	vektor
0,1593	0,1560	0,0185
0,0356	0,0349	0,1325
0,0244	0,0239	0,0346
0,1405	0,1377	0,0237
0,0914	0,0896	0,1368
0,2728	0,2672	0,0890
0,9329	0,9138	0,2664
	0,1440	0,9176
	0,1207	0,1447
	0,0714	0,1213
		0,0718

Ako vidíme, je splnená definícia dominantného vlastného čísla, vektory dominantných vlastných čísel majú rovnaké znamienko. Z dlhodobého hľadiska budú vekové profily konvergovať k týmto vektorom.

Napríklad v prípade modelu A bude mať najväčšie zastúpenie siedma veková skupina. Podľa delenia modelu A na intervaly [0, 14), [14, 17), [17, 19), [19, 29), [29,35), [35, 50), [50, 99+) sa jedná teda o skupinu 50 a viac ročných jedincov.

V prípade modelu B bude mať najväčšie zastúpenie siedma veková skupina. Model B sa delí na vekové intervaly s hranicami (14, 17, 19, 29, 35, 50, 74, 80, 88 ). Siedma veková skupina zodpovedá obyvateľom vo vekovom rozmedzí [50, 74).

V prípade modelu C bude mať najväčšie zastúpenie ôsma veková skupina. Model C sa delí na vekové intervaly s hranicami (2, 14, 17, 19, 29, 35, 50, 74, 80, 88 ). Podobne ako pri modeli B sa jedná o vekovú skupinu obyvateľov vo vekovom rozmedzí [50, 74).

Napriek rozdielu v počte intervalov dochádzame k rovnakému záveru vo všetkých modeloch. Najväčší podiel na populácii budú mať jedinci z poreprodukčného intervalu starší ako 50 rokov, konkrétne v modeli B a C vo vekovom rozmedzí [50, 74).

Vektory dominantných vlastných čísel si upravíme, aby sme mohli lepšie porovnávať modely medzi sebou navzájom. Zložky vektora, ktoré patria do tej istej skupiny podľa schopnosti reprodukcie, spočítame. Takto nám vyjde upravený vektor  $\in \mathbf{R}^3$ , kde prvá zložka bude vyjadrovať predreprodukčnú, druhá zložka reprodukčnú a tretia zložka poreprodukčnú skupinu. Výsledky vidieť na obr.10, okrem upravených vektorov uvádzame aj percentuálny podiel na celku.

**obr. 10**

Model A		Model B		Model C	
Upravený vektor	Percentuálne zastúpenie	Upravený vektor	Percentuálne zastúpenie	Upravený vektor	Percentuálne zastúpenie
0,1593	9,61%	0,1560	7,97%	0,1671	8,47%
0,5647	34,08%	0,5532	28,24%	0,5504	27,90%
0,9329	56,30%	1,2498	63,80%	1,2553	63,63%

I keď nám vyšli rôzne výsledky v krátkodobých odhadoch, z dlhodobého hľadiska sa populácia bude blížiť k veľmi podobnému vekovému zloženiu. Odchýlky medzi jednotlivými modelmi sú minimálne. Zaujímavé je, že delenie populácie má výrazný vplyv len na krátkodobé prognózy. Rozdiel medzi delením modelov sa prejavuje hlavne v rýchlosti rastu (poklesu) populácie, ale zloženie podľa schopnosti reprodukcie sa blíži k podobnému výsledku.

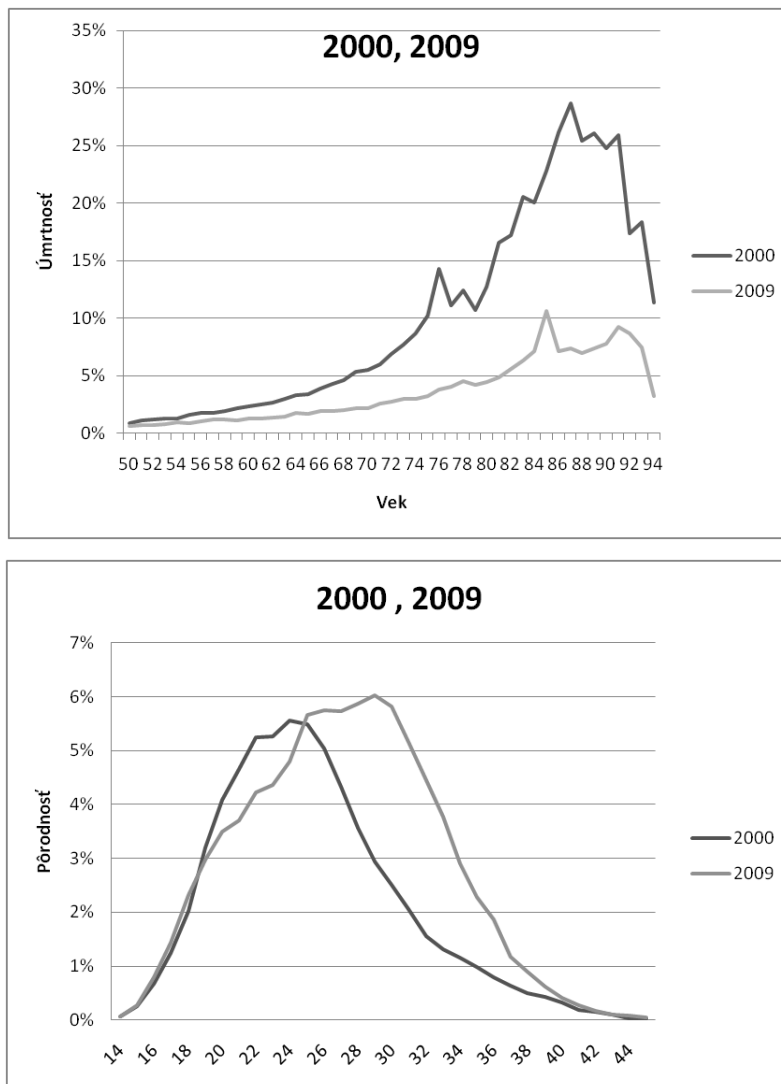
### **4.3 Ročné vekové intervaly**

#### **Krátkodobé prognózy**

V tomto modeli sa nám podaril odstrániť predpoklad rovnomerného rozdelenia obyvateľstva. Stále nám ostáva predpoklad nemennosti miery pôrodnosti a úmrtnosti. Skúsime tento model s ročnými vekovými hranicami aplikovať na údaje z [4]. Vzhľadom na závery z obr. 8, si v modeli ako začiatočný rok zvolíme rok 2001, aby sme lepšie vedeli vyhodnotiť výsledky vzhľadom na nezahrnuté ukazovatele, akým je migračné saldo (1.11).

Nakoľko náš predpoklad konštantnej miery úmrtnosti a pôrodnosti zodpovedá realite? Ako veľmi ich zmeny ovplyvnia výsledky? Aby sme sa vedeli aspoň približne v danej problematike orientovať, pozrieme sa na graf miery pôrodnosti a úmrtnosti podľa veku pre rok 2000 a 2009 na obr. 11. Údaje sme čerpali z [4] z roku 2000 a 2009.

obr. 11



Vidieť, že náš predpoklad nezávislosti úmrtností a pôrodností od času nezodpovedá realite. Z porovnania rokov vidieť, že postupom času začína miera úmrtnosti klesať. Tento pokles môže byť spôsobený zlepšením medicínskej starostlivosti, čo má za následok menší počet úmrtí. Priemerná dĺžka života postupne narastá. Posunutie pôrodnosti je spôsobené zmenou životného štýlu žien. V dnešnej dobe sa najskôr snažia sociálne zabezpečiť dieťa, prednejší im je pracovný postup. Dieťa plánujú až v neskoršom veku. V praxi to pre náš model znamená, že matica  $A$  z rovnice (2.5) bude mať odlišný tvar v závislosti od roku, na základe ktorého túto maticu  $A$  modelujeme. Potrebujeme zistiť, nakoľko citlivý je systém na túto zmenu.

Aplikujeme model s ročnými vekovými intervalmi (3.5) a (3.6) na dáta[4] z roku 2000, 2001, 2005 a 2009. Akým spôsobom budeme porovnávať výsledky? Ako dolnú

hranicu reprodukčného intervalu  $k$  si zvolíme vek 14 rokov a ako hornú hranicu  $l$  si zvolíme 50 rokov. V našom modeli zaznamenávame maximálny vekový interval 99+, čo predstavuje obyvateľov starých alebo starších ako 99 rokov, preto nám  $n$  vyjde rovné 99. Matice  $A$  si vypočítame na základe miery pôrodnosti a úmrtnosti z daných rokov. Ako  $x_0$  pre  $t = 0$  si zvolíme rok 2001. Vypočítame si z (3.5) a (3.6) prognózy na ďalších 8 rokov a porovnáme výsledky. Výsledky je možné vidieť na tabuľke v obr. 12. Tabuľka nám ukazuje reálny celkový počet obyvateľov, celkový počet obyvateľov vypočítaný na základe ročných vekových intervalov, rozdiel od reálnych dát, priemernú a kvadratickú odchýlku.

**obr.12**

Rok	t	Reálne údaje	2000	Rozdiel	2001	Rozdiel	2005	Rozdiel	2009	Rozdiel
2001	0	5378783	5378783	0	5378783	0	5378783	0	5378783	0
2002	1	5378951	5381100	2149	5377717	-1234	5380769	1818	5390071	11120
2003	2	5379161	5383404	4243	5376232	-2929	5383275	4114	5401451	22290
2004	3	5380053	5385315	5262	5374589	-5464	5385742	5689	5412622	32569
2005	4	5384822	5386983	2161	5372484	-12338	5387834	3012	5423546	38724
2006	5	5389180	5388157	-1023	5370063	-19117	5389273	93	5434090	44910
2007	6	5393637	5388681	-4956	5367070	-26567	5389694	-3943	5444245	50608
2008	7	5400998	5388355	-12643	5363252	-37746	5389384	-11614	5453650	52652
2009	8	5412254	5386909	-25345	5358506	-53748	5388114	-24140	5462028	49774
Priemerná odchýlka				6420		17683		6047		33627
Kvadratická odchýlka				3301		8298		3133		12673

Rok 2001 sme označili za prelomový kvôli tomu, že narušil tendenciu rastu obyvateľstva zaznamenaného od roku 1992. Na základe výsledkov z obr.9 vidíme, že tento pokles sa odrazil aj na formovaní matice  $A$ , preto nám vyšli pomerne veľké odchýlky. Doposiaľ najlepšie krátkodobé prognózy vychádzajú na základe matice  $A$  počítanej z roku 2005. Ako druhé najlepšie prognózy sú počítané na základe matice  $A$  z roku 2000. Posunutie miery úmrtnosti a pôrodnosti sa výrazne prejavilo iba v roku 2009, kde má rozdiel tendenciu narastať.

Na základe výsledkov môžeme spraviť viacero záverov. Pokiaľ ideme modelovať krátkodobý rast populácie v budúcnosti od určitého roku, nesmieme sa zamerať len na aktuálnosť dát. Dôležitý je výber roku, podľa ktorého budeme konštruovať maticu  $A$  z rovnice (2.5). Tento rok by mal byť stabilný, nemal by vykazovať markantný rozdiel v raste populácie od ostatných blízkych rokov (veľký nárast, veľký pokles). Pokiaľ sa jedná o aktuálnosť, môžeme vyberať aj vo viacročnom rozpätí (v našom prípade +3 roky),

ak nie je preukázaná veľká zmena úmrtnosti a pôrodnosti (model z roku 2009 ukazoval príliš veľký nárast).

## Dlhodobé prognózy

Pri ročných vekových intervaloch nám vyjdú vlastné vektory  $\in \mathbf{R}^{100}$ . Na rozdiel od krátkodobých prognóz nám nezáleží na začiatočnom počte obyvateľov, zaujímame sa hlavne o dominantné vlastné čísla a ich príslušné vektory. Vypočítame si dominantné vlastné čísla a ich vektory pre matice  $A$  modelované podľa vekových ročných intervalov (3.5) a (3.6) z rokov 2000, 2001, 2005 a 2009 z údajov [3]. Vypočítané vektory si upravíme tak, aby súčet ich zložiek bol rovný 1. Týmto spôsobom nám bude každá zložka percentuálne vyjadrovať podiel na populácii. Výsledné vektory a ich vlastné čísla je možné vidieť v prílohe obr. A.1. Pre jednoduchosť tu budeme porovnávať zloženie populácie podľa schopnosti reprodukcie. Zložky upravených vektorov, ktoré patria do tej istej skupiny podľa schopnosti reprodukcie, spočítame. Na obr. 13 môžeme vidieť dominantné vlastné čísla  $\lambda$  a percentuálne zloženie obyvateľstva podľa jednotlivých rokov, ku ktorému sa bude populácia asymptoticky približovať.

**obr.13**

	Dominantné vlastné čísla $\lambda$			
	2000	2001	2005	2009
	0,9831	0,9807	0,9826	0,9868
Skupina	Percentuálne zloženie podľa upraveného vektora			
Predreprodukčná	10,25%	9,24%	9,87%	11,49%
Reprodukčná	40,01%	38,51%	39,16%	40,79%
Poreprodukčná	49,74%	52,25%	50,97%	47,73%

Výsledky nám vyšli veľmi podobné, vo všetkých prípadoch prevláda poreprodukčná skupina, ktorá je tvorená 50 a viac ročným obyvateľstvom. Ako druhá najviac zastúpená skupina je skupina reprodukčná. Najmenší podiel na populácii má predreprodukčná skupina. Na rozdiel od krátkodobých odhadov nám vyšli veľmi podobné výsledky, nie sú tu veľké výchylky. Z dlhodobého hľadiska nezáleží až tak veľmi na výbere roku, podľa ktorého budeme modelovať populáciu v budúcnosti, výsledky nám vyjdú veľmi podobné.

#### 4.4 Model so ženskou dominanciou

##### Krátkodobé prognózy

Ako aj v modeli s ročnými vekovými intervalmi si zvolíme v modeli so ženskou dominanciou  $k=14$ ,  $l=50$ ,  $n=99$ . Na modelovanie matice  $A$  systému rovníc so ženskou dominanciou (3.7) a (3.8) si zvolíme roky 2000,2001,2005 a 2009. Budeme robiť prognózy na ďalších 5 rokov, keďže pri väčšom počte rokov začínajú odchýlky od reálnych dát narastať. Ako začiatočný rok si zvolíme rok 2005, kde  $t=0$ . Voľbu roku sme previedli na základe výsledkov z obr. 8, kde rok 2005 na rozdiel od roku 2001 začína vykazovať podobný celkový prírastok ako nasledujúce roky. Výsledky je možno vidieť v tabuľke na obr. 14. Tabuľka nám ukazuje reálny celkový počet obyvateľov, celkový počet obyvateľov vypočítaný na základe ročných vekových intervalov, rozdiel od reálnych dát, priemernú a kvadratickú odchýlku.

**obr.14**

Rok	t	Reálne údaje	2000	Rozdiel	2001	Rozdiel	2005	Rozdiel	2009	Rozdiel
2005	0	2771332	2771332	0	2771332	0	2771332	0	2771332	0
2006	1	2773308	2772080	-1228	2770095	-3213	2772152	-1156	2777057	3749
2007	2	2775353	2772788	-2565	2768994	-6359	2772746	-2607	2782945	7592
2008	3	2777871	2773121	-4750	2767559	-10312	2773022	-4849	2788515	10644
2009	4	2782450	2772857	-9593	2765678	-16772	2772793	-9657	2793531	11081
2010	5	2787987	2771989	-15998	2763180	-24807	2772133	-15854	2797883	9896
Priemerná odchýlka				6827		12293		6825		8592
Kvadratická odchýlka				3892		6492		3879		4028

Napriek tomu, že sme robili prognózy na menší počet rokov, nám vyšli odchýlky oproti krátkodobým prognózam z modelu s ročnými vekovými intervalmi vyššie. Presnosť modelov je podobná ako pri ročných vekových intervaloch, najlepším je model s demografickými ukazovateľmi z roku 2005, ako druhý najlepší sa javí byť model z roku 2000. Zmenila sa významnosť pre roky 2001 a 2009, ale dôvod odchýlok ostal rovnaký. Rok 2000 vykazuje vysokú odchýlku kvôli rýchlemu poklesu populácie, zatiaľ čo model z roku 2009 sa líši od reálnych údajov kvôli nadmernému rastu. Takéto správanie modelov potvrdzuje aj obr. 8. Celkové prírastky rokov 2000 a 2005 sú si podobné, preto nám vyšli aj podobné prognózy. Rok 2001 mal záporný prirodzený prírastok, nie je teda prekvapujúce, že modeluje pokles populácie. Naopak rok 2009 preukazuje pomerne vysoký celkový prírastok, preto modeluje vyšší rast populácie.

## Dlhodobé prognózy

Pri modeloch so ženskou dominanciou nám vyjdú vlastné vektory  $\in \mathbf{R}^{100}$ . Budeme postupovať podobne ako pri ročných vekových intervaloch, keďže sa jedná o podobný systém rovníc, len s tým rozdielom, že počítame aj s mužskou časťou populácie. Vypočítame si dominantné vlastné čísla a ich vektory pre matice  $A$  modelované podľa ženskej dominancie(3.7) a (3.8) z rokov 2000, 2001, 2005 a 2009 z údajov [3]. Vypočítané vektory si upravíme tak, aby súčet ich zložiek bol rovný 1. Týmto spôsobom nám bude každá zložka percentuálne vyjadrovať podiel na populácii. Výsledné vektory a ich vlastné čísla je možné vidieť v prílohe obr. A.2. Pre jednoduchosť tu budeme porovnávať zloženie populácie podľa schopnosti reprodukcie. Zložky upravených vektorov, ktoré patria do tej istej skupiny podľa schopnosti reprodukcie, spočítame.

Predtým ako sa pozrieme na výsledky, aké máme predpoklady, očakávame nejaké výrazne zmeny od ročných vekových intervalov? Pomôžeme si ukazovateľmi pohlavnej vekovej štruktúry. Na obr. 15 môžeme vidieť ukazovatele koeficient maskulinity(1.16), koeficient femininity(1.17) a sekundárny koeficient maskulinity(1.18) pre jednotlivé roky.

**obr.15**

	2000	2001	2005	2009
ma	0,95	0,94	0,94	0,95
fe	1,06	1,06	1,06	1,06
sma	1,04	1,04	1,06	1,05

Koeficient maskulinity je vo všetkých prípadoch menší ako koeficient femininity. V praxi to znamená, že väčšiu časť populácie tvoria ženy. Vidíme ale, že sekundárny koeficient maskulinity je väčší ako 1, rodí sa viac chlapcov ako dievčat. Napriek tomu ženská časť populácie prevláda. Tieto ukazovatele nám napovedajú, že bude existovať rozdiel medzi úmrtnosťou žien a mužov. Všeobecne sa ženy dožívajú vyššieho veku. Preto budeme predpokladať iné percentuálne zastúpenie skupín podľa schopnosti reprodukcie.

Na obr. 16 môžeme vidieť dominantné vlastné čísla  $\lambda$  a percentuálne zloženie obyvateľstva podľa jednotlivých rokov, ku ktorému sa bude populácia asymptoticky približovať v prípade modelu s ročnými vekovými intervalmi a modelu so ženskou dominanciou.

**obr. 16**

Ročné vekové intervaly	Dominantné vlastné čísla $\lambda$			
	2000	2001	2005	2009
	0,9831	0,9807	0,9826	0,9868
Skupina	Percentuálne zloženie podľa upraveného vektora			
Predreprodukčná	10,25%	9,24%	9,87%	11,49%
Reprodukčná	40,01%	38,51%	39,16%	40,79%
Poreprodukčná	49,74%	52,25%	50,97%	47,73%
Model so ženskou dominanciou	Dominantné vlastné čísla $\lambda$			
	2000	2001	2005	2009
	0,9831	0,9807	0,9824	0,9870
Skupina	Percentuálne zloženie podľa upraveného vektora			
Predreprodukčná	9,41%	8,43%	9,00%	10,77%
Reprodukčná	37,11%	35,53%	36,22%	38,38%
Poreprodukčná	53,47%	56,04%	54,78%	50,86%

Splnili sa naše očakávania. Nastala zmena v percentuálnom zastúpení obyvateľstva. V prípade modelu so ženskou dominanciou je väčšia časť ženskej populácii v poreprodukčnom intervale, pomerne menej žien sa nachádza v predreprodukčnom a reprodukčnom intervale.



## 5 Prognózy do budúcnosti

V predošlej kapitole nám išlo o overenie citlivosti a presnosti modelov. Na základe výsledkov z kapitoly 4 môžeme spraviť viacero záverov.

Menej citlivé boli dlhodobé prognózy. Pokiaľ sme hýbali vekovými intervalmi, alebo menili počet vekových intervalov, zaznamenali sme výrazné zmeny vo vlastných vektoroch. Zmeny sa neprejavili v prípade, ak sme volili rôzne roky na výpočet matice  $A$  (2.4), vychádzali nám podobné výsledky a podobné percentuálne zloženie populácie. Dá sa povedať, že sa populácia bude asymptoticky približovať k podobnému vektoru dominantného vlastného čísla bez ohľadu na voľbu roku.

Krátkodobé prognózy boli citlivejšie, zaznamenali sme väčšie odchýlky. Nielenže záležalo na výbere hraníc a počte intervalov, relevantný bol aj výber roku. Najlepšími hranicami reprodukčného intervalu sa preukázali hranice  $[14, 50)$  v základnom modeli. Pri navýšení počtu vekových intervalov bolo ideálne sa zamerať na mieru pôrodnosti. Nepodarilo sa nám spresniť odhady delením intervalov podľa miery úmrtnosti.

Dôležitým ukazovateľom pre ročné vekové intervaly bol celkový prírastok obyvateľstva vybraného roku. Celkový prírastok dobre opisoval predpokladaný vývoj prognóz v budúcnosti. Ak sme si vybrali na modelovanie rok so záporným celkovým prírastkom, modelovaný vývoj ukazoval podobný pokles. Model so ženskou dominanciou neukazoval veľké rozdiely od modelu s ročnými vekovými intervalmi, vyšli podobné odchýlky.

Ako budeme modelovať prognózy do budúcnosti, tak aby sme dosiahli čo najpresnejšie výsledky? Ako začiatočný rok s  $t=0$  si zvolíme rok 2010. Spravíme si základný model s hranicami  $[14, 50)$  a model s ročnými vekovými intervalmi, aby sme odstránili podmienku rovnomerného rozdelenia obyvateľstva. Rok, podľa ktorého budeme modelovať (2.4), si zvolíme na základe celkového prírastku obyvateľstva z obr. 17.

**obr. 17**

Rok	Počet obyv.	Celkový prírastok
2004	5380053	-
2005	5384822	4769
2006	5389180	4358
2007	5393637	4457
2008	5400998	7361
2009	5412254	11256
2010	5424925	12671

Rok 2009 a 2010 preukazujú podobný celkový prírastok obyvateľstva. Ostatné roky ukazujú pomerne nižší nárast. Na modelovanie (2.4) zvolíme rok 2009 alebo 2010. Údaje z [5] nie sú kompletne pre rok 2010, máme k dispozícii len počet obyvateľov. Na základe týchto údajov si môžeme zvoliť začiatočný vektor  $x_0$ , ale nemôžeme dopočítať maticu  $A$  z (2.4). Preto budeme modelovať prognózy na základe roku 2009. Prejdeme k samotnému výpočtu prognóz.

### Krátkodobé hľadisko

Začíname krátkodobou prognózou, pretože všeobecne preukazuje väčšiu citlivosť na zmeny. Ako začiatočný rok, kde  $t=0$  máme zvolený rok 2010. Údaje z [5] z roku 2009 využijeme na výpočet (3.1) pre základný model a (3.5), (3.6) pre model s ročnými vekovými intervalmi. Dolnú hranicu reprodukčného intervalu  $d$  máme 14 rokov a hornú hranicu reprodukčného intervalu  $h$  máme 50 rokov. Budeme porovnávať výsledky základného modelu a modelu s ročnými vekovými intervalmi. Krátkodobé prognózy sa preukázali byť pomerne presné len na menší počet rokov, preto budeme robiť prognózy na ďalších 5 rokov. Na obr. 18.a a 18.b je celkový počet obyvateľov a jednotlivé počty obyvateľov vzhľadom na príslušnosť k skupine pre model základný a s ročnými vekovými intervalmi, očakávaný prírastok populácie oboch modelov.

**obr. 18.a**

		Základný Model				
		0-13	14-50	50-99+	Celkový počet	Prírastok
2010	2010	770251	2931643	1723031	5424925	-
	2011	775622	2901200	1755323	5432145	7220
	2012	779973	2872028	1785849	5437850	5705
	2013	783404	2844018	1814694	5442116	4266
	2014	786006	2817069	1841938	5445013	2897
	2015	787861	2791091	1867657	5446608	1596

**obr. 18.b**

		Ročné vekové intervaly				
		0-13	14-50	50-99+	Celkový počet	Prírastok
2010	2010	770251	2931643	1723031	5424925	-
	2011	770802	2911624	1748160	5430586	5661
	2012	773004	2889907	1773055	5435967	5380
	2013	776116	2869106	1794668	5439889	3923
	2014	779261	2845090	1817979	5442330	2441
	2015	783169	2818643	1841284	5443096	766

Pre porovnanie výsledkov použijeme obr. 18.c, ktorý nám zobrazuje rozdiel modelu s ročnými vekovými intervalmi a základného modelu. Ďalej je v tabuľke uvedená priemerná a kvadratická odchýlka.

**obr. 18.c**

		Rozdiel Modelov 18.b - 18.a				
		0-13	14-50	50-99+	Celkový počet	Prírastok
	2011	-4819	10424	-7163	-1559	-1559
	2012	-6968	17878	-12794	-1884	-325
	2013	-7288	25088	-20026	-2227	-343
	2014	-6745	28022	-23959	-2683	-456
	2015	-4692	27552	-26373	-3513	-830
	Priemerná odchýlka	3390	12107	10035	1318	390
	Kvadratická odchýlka	1541	5668	4825	613	209

Obe prognózy majú podobné výsledky celkového počtu obyvateľstva, čo je vidieť aj na nízkej priemernej(1318) a kvadratickej(613) odchýlke. Dokonca modelujú podobné celkové prírastky.

Najmarkantnejší rozdiel je vidieť v jednotlivých reprodukčných skupinách. Model s ročnými vekovými intervalmi má pred- a poreprodukčnú skupinu menej početnú ako v základnom modeli. Tento záporný rozdiel je vyvážený väčším podielom reprodukčnej skupiny v modeli s ročnými vekovými intervalmi. Preto nám celkový počet obyvateľov vychádza pomerne podobný.

Použili sme dva rôzne modely na tie isté začiatkové dáta. Celkové výsledky nám vyšli veľmi podobné, i keď v jednom modeli máme delenie len na tri intervaly a v druhom na sto vekových intervalov. Jediné výrazné rozdiely boli medzi samotnými skupinami delenými podľa schopnosti reprodukcie. Tieto rozdiely sú spôsobené nielen jemnosťou delenia, ale aj odlišnosťami predpokladov, keďže sa nám v modeli s ročnými vekovými intervalmi podarilo odstrániť rovnomerné rozdelenie obyvateľstva.

## Dlhodobé hľadisko

Najskôr sme začali krátkodobým hľadiskom, keďže je citlivejšie na zmeny a vykazuje väčšie výchylky. Z dlhodobého hľadiska nás, na rozdiel od krátkodobého, nezaujíma začiatkový rok. Stačí nám, ak si dopočítame dominantné vlastné čísla a ich vektory pre oba modely, aby sme zistili asymptotické správanie trajektórie (2.11). Vzhľadom na to, že modely majú rôzne delenie, budeme porovnávať len percentuálne zloženie podľa schopnosti reprodukcie. Vektory si upravíme tak, aby súčin ich zložiek bol rovný 1. Zložky upraveného vektora modelu s ročnými vekovými intervalmi spočítame podľa príslušnosti k reprodukčnej skupine, vyjde nám vektor  $\in \mathbf{R}^3$ . Porovnanie je vidieť na obr. 19.

**obr. 19**

	Základný Model	Ročné vekové intervaly
	Dominantné vlastné čísla $\lambda$	
	0,9935	0,9868
	Skupina	
Predreprodukčná	12,28%	11,49%
Reprodukčná	38,77%	40,79%
Poreprodukčná	48,95%	47,73%

Zaujímavé je, že napriek rôznemu počtu vekových intervalov nám vyšli podobné výsledky. Z dlhodobého hľadiska bude prevládať poreprodukčná skupina s 47,73 – 48,95%. Druhý najväčší podiel bude tvoriť reprodukčná skupina s 38,77% - 40,79% a najmenej jedincov bude v predreprodukčnej skupine(11,49 – 12,28%).

## Záver

Po určení potrebných predpokladov a demografických ukazovateľov sme začali s konštrukciou modelu. Na začiatok sme zvolili relatívne jednoduchý model s delením populácie na 3 skupiny. Tento model sme začali obohacovať, pridávali sme jemnejšie delenie, až sa nám podarilo vyhnúť predpokladu rovnomerného delenia obyvateľstva. Zameriavali sme sa potom na ďalšie faktory, ktoré môžu ovplyvniť vývoj populácie, ako je napríklad ženská dominancia.

Potrebovali sme overiť citlivosť modelov. Zisťovali sme nakoľko sa líšia dlhodobé a krátkodobé výsledky. Snažili sme sa hýbať so vstupnými ukazovateľmi (miera pôrodnosti, miera úmrtnosti) tak, aby nám vychádzali čo najlepšie výsledky. Došli sme k záveru, že najdôležitejším faktorom modelu je miera pôrodnosti, podľa nej sme prispôbovali ďalšie modelovanie. Uprednostnili sme širšie spektrum populácie pred užším výberom populácie s vyššou mierou pôrodnosti. Zaujímavé bolo, že i keď sa jednotlivé modely líšili z krátkodobého hľadiska, z dlhodobého hľadiska vychádzali podobné výsledky bez ohľadu na začiatkový rok, či rok na základe ktorého sme modelovali dáta. Z krátkodobého hľadiska sa zdal byť dôležitým výber roku, ktorý sme vyberali podľa celkového prírastku obyvateľstva. Na základe štúdia citlivosti sme vyvodili viacero záverov, ako skonštruovať čo najpresnejšie prognózy.

Nakoniec sme všetky nadobudnuté poznatky využili v predpovedaní budúceho vývoja populácie bez možnosti overenia s reálnymi dátami. Na modelovanie sme využili prvý základný model s tromi vekovými skupinami a rozvíty model s ročnými vekovými intervalmi. Prekvapujúco nám vyšli veľmi podobné celkové výsledky v krátkodobých prognózach, jediný markantný rozdiel bol medzi reprodukčnými skupinami. Dlhodobé prognózy boli z hľadiska reprodukčných skupín skoro totožné, vykazovali výchylky maximálne 2%.

Ako môžeme zhodnotiť naše modely? Či už si zvolíme jednoduché alebo zložitejšie modely s jemnejším delením, nie je až tak dôležité. Najväčší vplyv na krátkodobé prognózy má samotný výber údajov, ich spracovanie a využitie. Pri výbere údajov na krátkodobé prognózy uprednostníme stabilitu roku, z ktorého chceme čerpať, pred samotnou aktuálnosťou. Nech už si vyberieme rok stabilný, alebo naopak, rok vykazujúci veľké výchylky, dlhodobé prognózy z týchto údajov nám budú stále vychádzať podobné napriek rozdielnym krátkodobým prognózam.

Samozrejme prognózy sú stavané na matematickom aparáte s určitými predpokladmi, ktoré sa nedajú úplne odstrániť. Výsledky preto treba interpretovať ako hľadanie súvislostí medzi demografickými ukazovateľmi a ich vplyvom na budúci vývoj.

Zaiste existujú oveľa komplexnejšie modely, ktoré sa snažia predpovedať budúci vývoj. Využívajú iné ukazovatele a metódy. My sme sa hlavne snažili zdokonaľiť náš skonštruovaný model v medziach nášho vzdelania.

## A. Príloha

### obr. A.1

#### Ročné vekové intervaly

Vek	2000	2001	2005	2009	Vek	2000	2001	2005	2009
0	0,66%	0,58%	0,63%	0,76%	50	1,43%	1,44%	1,42%	1,38%
1	0,67%	0,59%	0,64%	0,76%	51	1,45%	1,46%	1,44%	1,39%
2	0,68%	0,60%	0,65%	0,77%	52	1,46%	1,48%	1,45%	1,40%
3	0,69%	0,61%	0,66%	0,78%	53	1,48%	1,49%	1,47%	1,41%
4	0,70%	0,63%	0,67%	0,79%	54	1,49%	1,51%	1,48%	1,42%
5	0,71%	0,64%	0,68%	0,80%	55	1,50%	1,52%	1,49%	1,43%
6	0,72%	0,65%	0,70%	0,81%	56	1,51%	1,54%	1,50%	1,43%
7	0,74%	0,66%	0,71%	0,82%	57	1,52%	1,55%	1,52%	1,44%
8	0,75%	0,68%	0,72%	0,84%	58	1,53%	1,56%	1,52%	1,44%
9	0,76%	0,69%	0,73%	0,85%	59	1,53%	1,57%	1,53%	1,44%
10	0,77%	0,70%	0,75%	0,86%	60	1,54%	1,58%	1,54%	1,44%
11	0,79%	0,72%	0,76%	0,87%	61	1,54%	1,59%	1,54%	1,44%
12	0,80%	0,73%	0,77%	0,88%	62	1,54%	1,59%	1,54%	1,44%
13	0,81%	0,75%	0,79%	0,89%	63	1,54%	1,60%	1,55%	1,43%
14	0,83%	0,76%	0,80%	0,90%	64	1,54%	1,59%	1,55%	1,43%
15	0,84%	0,77%	0,81%	0,92%	65	1,53%	1,59%	1,54%	1,42%
16	0,86%	0,79%	0,83%	0,93%	66	1,52%	1,58%	1,54%	1,41%
17	0,87%	0,80%	0,84%	0,94%	67	1,51%	1,58%	1,53%	1,40%
18	0,88%	0,82%	0,86%	0,95%	68	1,49%	1,56%	1,52%	1,39%
19	0,90%	0,84%	0,87%	0,96%	69	1,47%	1,55%	1,50%	1,37%
20	0,91%	0,85%	0,89%	0,98%	70	1,45%	1,53%	1,48%	1,36%
21	0,93%	0,87%	0,90%	0,99%	71	1,42%	1,51%	1,46%	1,33%
22	0,94%	0,88%	0,92%	1,00%	72	1,39%	1,47%	1,44%	1,31%
23	0,96%	0,90%	0,93%	1,01%	73	1,35%	1,44%	1,41%	1,28%
24	0,98%	0,92%	0,95%	1,03%	74	1,31%	1,40%	1,37%	1,25%
25	0,99%	0,94%	0,97%	1,04%	75	1,26%	1,36%	1,33%	1,21%
26	1,01%	0,95%	0,98%	1,05%	76	1,21%	1,31%	1,28%	1,17%
27	1,03%	0,97%	1,00%	1,07%	77	1,16%	1,26%	1,23%	1,13%
28	1,04%	0,99%	1,02%	1,08%	78	1,10%	1,20%	1,18%	1,08%
29	1,06%	1,01%	1,03%	1,09%	79	1,03%	1,14%	1,11%	1,02%
30	1,08%	1,03%	1,05%	1,11%	80	0,96%	1,07%	1,04%	0,97%
31	1,09%	1,05%	1,07%	1,12%	81	0,88%	0,98%	0,97%	0,90%
32	1,11%	1,07%	1,09%	1,14%	82	0,76%	0,89%	0,89%	0,83%
33	1,13%	1,09%	1,10%	1,15%	83	0,69%	0,76%	0,80%	0,76%
34	1,15%	1,11%	1,12%	1,16%	84	0,62%	0,68%	0,72%	0,68%
35	1,17%	1,13%	1,14%	1,18%	85	0,56%	0,61%	0,63%	0,60%
36	1,18%	1,15%	1,16%	1,19%	86	0,50%	0,55%	0,53%	0,52%
37	1,20%	1,17%	1,18%	1,21%	87	0,42%	0,48%	0,41%	0,45%
38	1,22%	1,19%	1,20%	1,22%	88	0,35%	0,40%	0,35%	0,38%
39	1,24%	1,21%	1,22%	1,24%	89	0,29%	0,33%	0,29%	0,31%
40	1,26%	1,23%	1,24%	1,25%	90	0,23%	0,26%	0,24%	0,24%
41	1,28%	1,25%	1,26%	1,27%	91	0,18%	0,20%	0,20%	0,16%
42	1,30%	1,27%	1,27%	1,28%	92	0,14%	0,15%	0,14%	0,12%
43	1,32%	1,30%	1,29%	1,29%	93	0,10%	0,10%	0,11%	0,09%
44	1,33%	1,32%	1,31%	1,31%	94	0,08%	0,07%	0,07%	0,07%
45	1,35%	1,34%	1,33%	1,32%	95	0,06%	0,05%	0,05%	0,05%
46	1,37%	1,36%	1,35%	1,33%	96	0,04%	0,03%	0,04%	0,04%
47	1,39%	1,38%	1,37%	1,35%	97	0,03%	0,02%	0,02%	0,03%
48	1,40%	1,40%	1,39%	1,36%	98	0,03%	0,01%	0,01%	0,02%
49	1,42%	1,42%	1,40%	1,37%	99+	0,02%	0,01%	0,01%	0,01%

## obr. A.2

## Model so ženskou dominanciou

Vek	2000	2001	2005	2009	Vek	2000	2001	2005	2009
0	0,61%	0,53%	0,58%	0,71%	50	1,36%	1,36%	1,34%	1,32%
1	0,61%	0,54%	0,58%	0,72%	51	1,38%	1,38%	1,36%	1,33%
2	0,62%	0,55%	0,59%	0,72%	52	1,40%	1,40%	1,38%	1,34%
3	0,63%	0,56%	0,60%	0,73%	53	1,41%	1,42%	1,40%	1,36%
4	0,64%	0,57%	0,61%	0,74%	54	1,43%	1,44%	1,42%	1,37%
5	0,65%	0,58%	0,62%	0,75%	55	1,45%	1,46%	1,44%	1,38%
6	0,66%	0,59%	0,64%	0,76%	56	1,47%	1,48%	1,46%	1,39%
7	0,68%	0,61%	0,65%	0,77%	57	1,48%	1,50%	1,48%	1,40%
8	0,69%	0,62%	0,66%	0,78%	58	1,50%	1,52%	1,49%	1,41%
9	0,70%	0,63%	0,67%	0,79%	59	1,51%	1,54%	1,51%	1,42%
10	0,71%	0,64%	0,68%	0,80%	60	1,53%	1,56%	1,52%	1,43%
11	0,72%	0,65%	0,69%	0,81%	61	1,54%	1,58%	1,54%	1,44%
12	0,74%	0,67%	0,71%	0,82%	62	1,55%	1,59%	1,55%	1,45%
13	0,75%	0,68%	0,72%	0,84%	63	1,56%	1,61%	1,57%	1,45%
14	0,76%	0,69%	0,73%	0,85%	64	1,57%	1,62%	1,58%	1,46%
15	0,77%	0,71%	0,74%	0,86%	65	1,58%	1,63%	1,59%	1,46%
16	0,79%	0,72%	0,76%	0,87%	66	1,58%	1,64%	1,60%	1,46%
17	0,80%	0,74%	0,77%	0,88%	67	1,59%	1,65%	1,60%	1,46%
18	0,81%	0,75%	0,79%	0,89%	68	1,58%	1,65%	1,60%	1,46%
19	0,83%	0,76%	0,80%	0,90%	69	1,58%	1,65%	1,60%	1,46%
20	0,84%	0,78%	0,81%	0,91%	70	1,57%	1,65%	1,60%	1,45%
21	0,86%	0,79%	0,83%	0,93%	71	1,56%	1,64%	1,59%	1,44%
22	0,87%	0,81%	0,84%	0,94%	72	1,54%	1,63%	1,58%	1,43%
23	0,88%	0,83%	0,86%	0,95%	73	1,52%	1,61%	1,57%	1,41%
24	0,90%	0,84%	0,87%	0,96%	74	1,49%	1,59%	1,55%	1,39%
25	0,91%	0,86%	0,89%	0,98%	75	1,46%	1,56%	1,51%	1,36%
26	0,93%	0,87%	0,90%	0,99%	76	1,42%	1,52%	1,48%	1,33%
27	0,95%	0,89%	0,92%	1,00%	77	1,37%	1,47%	1,44%	1,30%
28	0,96%	0,91%	0,93%	1,01%	78	1,31%	1,42%	1,39%	1,25%
29	0,98%	0,93%	0,95%	1,03%	79	1,25%	1,36%	1,33%	1,20%
30	0,99%	0,94%	0,97%	1,04%	80	1,17%	1,29%	1,27%	1,15%
31	1,01%	0,96%	0,98%	1,05%	81	1,09%	1,20%	1,19%	1,08%
32	1,03%	0,98%	1,00%	1,07%	82	0,96%	1,11%	1,11%	1,01%
33	1,04%	1,00%	1,02%	1,08%	83	0,88%	0,96%	1,02%	0,93%
34	1,06%	1,02%	1,04%	1,09%	84	0,79%	0,88%	0,92%	0,85%
35	1,08%	1,04%	1,05%	1,11%	85	0,72%	0,79%	0,82%	0,76%
36	1,10%	1,06%	1,07%	1,12%	86	0,65%	0,72%	0,70%	0,67%
37	1,12%	1,08%	1,09%	1,14%	87	0,55%	0,64%	0,56%	0,58%
38	1,13%	1,10%	1,11%	1,15%	88	0,47%	0,54%	0,48%	0,49%
39	1,15%	1,12%	1,13%	1,16%	89	0,39%	0,44%	0,40%	0,40%
40	1,17%	1,14%	1,15%	1,18%	90	0,32%	0,36%	0,34%	0,31%
41	1,19%	1,16%	1,17%	1,19%	91	0,25%	0,29%	0,27%	0,21%
42	1,21%	1,18%	1,19%	1,21%	92	0,19%	0,21%	0,20%	0,16%
43	1,23%	1,20%	1,21%	1,22%	93	0,14%	0,15%	0,15%	0,12%
44	1,25%	1,22%	1,23%	1,24%	94	0,10%	0,10%	0,11%	0,10%
45	1,26%	1,25%	1,25%	1,25%	95	0,08%	0,07%	0,08%	0,07%
46	1,28%	1,27%	1,26%	1,26%	96	0,06%	0,05%	0,05%	0,05%
47	1,30%	1,29%	1,28%	1,28%	97	0,04%	0,03%	0,03%	0,04%
48	1,32%	1,31%	1,30%	1,29%	98	0,04%	0,02%	0,02%	0,02%
49	1,34%	1,33%	1,32%	1,31%	99+	0,03%	0,01%	0,01%	0,02%



## Použitá literatúra

- [1.] **Pavlík, Z. - Rachtáriková, J. - Šubrtová, A.:** *Základy demografie*. Praha, Academia 1968.
- [2.] **Jurčová, D.:** *Slovník demografických pojmů*. Bratislava, Edícia Akty 2005. 80 - 856590 - 40 -9.
- [3.] **Cipra, T.:** *Matematické metody demografie a pojištění*. Praha, SNTL - Nakladatelství technické literatury 1990. ISBN - 80-03-00222-2.
- [4.] **Brunovský, P. :** [Online], 2010.  
[http://www.iam.fmph.uniba.sk/institute/brunovsky/ddrtext\\_09-10.pdf](http://www.iam.fmph.uniba.sk/institute/brunovsky/ddrtext_09-10.pdf).
- [5.] **Slovak Republic Population information :** [Online], 2011.  
<http://www.infostat.sk/slovakpopin/>.