UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE

FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY

GRAFICKÁ ILUSTRÁCIA WALRASOVEJ ROVNOVÁHY NA EDGEWORTHOVOM OBDĹŽNIKU

2011

MICHAL MUDROŇ

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE

FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY

e8d9fb3d-96d8-4067-90a0-78544a7ef0aa

GRAFICKÁ ILUSTRÁCIA WALRASOVEJ ROVNOVÁHY NA EDGEWORTHOVOM OBDĹŽNIKU

Bakalárska práca

Študijný program : Ekonomická a finančná matematika

Študijný odbor : Aplikovaná matematika

Školiace pracovisko : Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky

Školiteľ : prof. RNDr. Pavel Brunovský, DrSc.

Bratislava, 2011

Michal Mudroň

Univerzita Komenského v Bratislave
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

ZADANIE ZÁVEREČNEJ PRÁCE

Meno a priezvisko študenta: Michal Mudroň
Študijný program: ekonomická a finančná matematika (Jednoodborové štúdium, bakalársky I. st., denná forma)
Študijný odbor: 9.1.9. aplikovaná matematika
Typ záverečnej práce: bakalárska
Jazyk záverečnej práce: slovenský

Názov : Grafická ilustrácia Walrasovej rovnováhy na Edgeworthovom obdĺžniku

Cieľ : Cieľom práce je na Edgeworthovom obdĺžniku graficky ilustrovať rozličné prípady Walrasovej rovnováhy.

Vedúci : prof. RNDr. Pavel Brunovský, DrSc.

Dátum zadania: 17.01.2011

Dátum schválenia: 18.01.2011

doc. RNDr. Margaréta Halická, CSc.
garant študijného programu

študent

vedúci práce

Dátum potvrdenia finálnej verzie práce, súhlas s jej odovzdaním (vrátane spôsobu sprístupnenia) 2. 6. 2011

vedúci práce

POĎAKOVANIE

Ďakujem svojmu vedúcemu prof. RNDr. Pavlovi Brunovskému, DrSc. za ochotu a cenné rady pri písaní záverečnej práce.

ČESTNÉ PREHLÁSENIE

Prehlasujem, že som prácu vypracoval samostatne využijúc svoje poznatky s použitím uvedenej literatúry.

V Bratislave, 2. júna 2011

podpis študenta

Abstrakt

MUDROŇ, Michal: ***Grafická ilustrácia Walrasovej rovnováhy na Edgeworthovom obdĺžniku***. [Bakalárska práca] – Univerzita Komenského v Bratislave. Fakulta matematiky, fyziky a informatiky; Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky. – Vedúci: prof. RNDr. Pavel Brunovský, DrSc.. Bratislava, 2011, 43 strán.

Cieľom práce je na Edgeworthovom obdĺžniku graficky ilustrovať rôzne prípady Walrasovej rovnováhy. Práca sa začína stručným opisom zjednodušeného výmenného trhu, neskôr sa venuje realizácii stanoveného cieľa práce. Na záver popisujeme softvérovú aplikáciu, ktorá prispela k dosiahnutiu tohto cieľa.

Kľúčové slová: Walrasova rovnováha, Edgeworthov obdĺžnik, Cobb-Douglas, zameniteľné statky, Leontief, funkcia užitočnosti

Abstract

MUDROŇ, Michal: ***Graphical Illustration of Walrasian Equilibrium Using the Edgeworth Box***. [Bachelor thesis] – Comenius University in Bratislava. Faculty of Mathematics, Physics and Informatics; Department of Applied Mathematics and Statistics. – Tutor: prof. RNDr. Pavel Brunovský, DrSc.. Bratislava, 2011, 43 p.

The purpose of this thesis is to graphically illustrate various cases of Walrasian equilibrium utilizing the Edgeworth box. The thesis begins with a brief description of a simplified exchange market model, later focuses on the realization of the set goal. It ends with the description of a software application that has contributed towards achieving this goal.

Key words: Walrasian equilibrium, Edgeworth box, Cobb-Douglas, substitute goods, Leontief, utility function

Obsah

Úvod 8

1. Trh výmeny pre dvoch spotrebiteľov 9

1.1. Typy funkcií užitočnosti 10

2. Edgeworthov obdĺžnik 13

3. Odvodenie a ilustrácia Walrasovej rovnováhy 15

3.1. Cobb-Douglas 15

3.2. Cobb-Douglas a zameniteľné statky 17

3.3. Zameniteľné statky 21

3.4. Zameniteľné statky a Leontief 26

3.5. Leontief 30

3.6. Leontief a Cobb-Douglas 35

4. Grafické rozhranie pre Edgeworthov obdĺžnik 38

Záver 42

Zoznam použitých zdrojov 43

Úvod

Na oboznámenie sa s teóriou všeobecného trhu je významnou pomôckou Edgeworthov obdĺžnik. Redukuje komplexnosť tohto trhu na trh výmeny dvoch statkov pre dvoch účastníkov trhu. Budeme ho používať pri znázorňovaní jednotlivých situácií na trhu výmeny. Toto nám zároveň poslúži ako motivácia na vytvorenie samostatného, interaktívne ovládateľného grafického rozhrania.

V prvej kapitole práce zadefinujeme pojem Walrasovej rovnováhy a opíšeme základné parametre výmenného trhu, na ktorom budeme túto rovnováhu modelovať. Budeme sa tu bližšie venovať aj trom základným druhom spotrebiteľských funkcií užitočnosti, ktoré budeme neskôr analyzovať.

Koncept Edgeworthovho obdĺžnika predstavíme v druhej kapitole.

V prvej a druhej kapitole sa budeme z veľkej časti opierať o poznatky z [1].

Hlavný dôraz budeme klásť na odvodenie a ilustráciu Walrasovej rovnováhy pre rôzne kombinácie preferencií účastníkov trhu. Tomuto bude venovaný priestor v tretej kapitole.

V poslednej, štvrtej kapitole práce sa zameriame na tvorbu spomínaného užívateľského rozhrania a opíšeme jeho jednotlivé prvky a funkcie.

1. Trh výmeny pre dvoch spotrebiteľov

Účastníci výmenného trhu, ktorých označíme ako spotrebiteľa A a spotrebiteľa B, vstupujú na tento trh za účelom výmeny svojich statkov za predpokladu, že sa správajú racionálne. Rozumieme tým také správanie, ktorým sa snažia maximálne uspokojiť svoj úžitok zo zobchodovaných množstiev jednotlivých statkov.

Nech

$n = 2$ je počet statkov

$x = (x_1, x_2)$ je vektor ich množstiev

$p = (p_1, p_2)$ je vektor cien jednotlivých statkov

u_A, u_B je funkcia užitočnosti spotrebiteľa A resp. B

$m^A(p, I)$, $m^B(p, I)$ je Marshallovská dopytová funkcia spotrebiteľa A resp. B

$\omega^A = (\omega_a, \omega_b)$, $\omega^B = (\omega_c, \omega_d)$ je počiatočné vybavenie účastníka A resp. B, s ktorým vstupuje na trh

$I^A = \langle p, \omega^A \rangle$, $I^B = \langle p, \omega^B \rangle$ je príjem (rozpočet) spotrebiteľa A resp. B získaný z predaja statkov, ktorými je vybavený

Pojmu Marshallovskej dopytovej funkcie sa bližšie venuje 2. kapitola v [1]. Pre účely tejto práce postačí vedieť, že jej hodnotami sú optimálne vektory statkov maximalizujúce funkciu užitočnosti jednotlivého spotrebiteľa pri platnosti jeho rozpočtového ohraničenia. Formálne pre $i \in \{A, B\}$:

$$u_i(x) \to max$$

pri ohraničení

$$\langle p, x \rangle = I^i = \langle p, \omega^i \rangle$$

Nech $m^i(p, I^i)$ je Marshallovská dopytová funkcia i-teho účastníka. Potom riešenie vyjadrené pomocou nej je:

$$x^i = m^i(p, I^i) = m^i(p, \langle p, \omega^i \rangle)$$

Treba poznamenať, že pre $\forall k > 0$ platí

$$m^i(kp, \langle kp, \omega^i \rangle) = m^i(p, \langle p, \omega^i \rangle)$$

teda riešenie závisí len od pomeru cien vymieňaných statkov.

Walrasovou rovnováhou nazývame stav, kedy celkový dopyt po danom statku je uspokojený, teda neprekročí jeho celkovú ponuku na trhu danú súčtom vybavení jednotlivých účastníkov. Obaja účastníci sú uspokojení, keď platí:

$$\sum_{i\in\{A,B\}} m^i(p,\langle p,\omega^i\rangle) \leq \sum_{i\in\{A,B\}} \omega^i$$

1.1. Typy funkcií užitočnosti

V práci sa zaoberáme troma typmi spotrebiteľských funkcií užitočnosti:

a) **Cobb-Douglasova funkcia užitočnosti**
b) **funkcia užitočnosti dokonale zameniteľných statkov**
c) **Leontiefova funkcia užitočnosti**

Stručne opíšeme každú z nich.

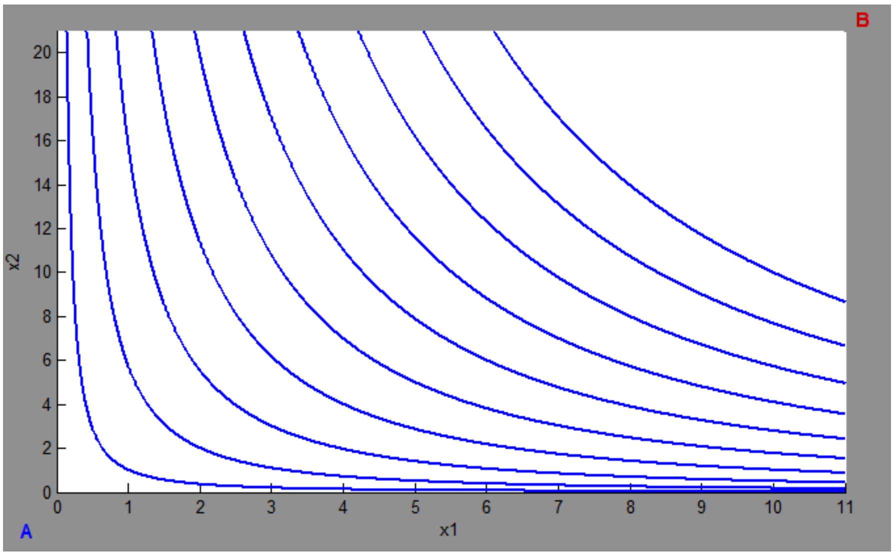
a) Cobb-Douglasova funkcia užitočnosti má tvar:

$$u(x) = x_1^a x_2^b$$

kde $a, b > 0$. Jej Marshallovskou dopytovou funkciou je:

$$m(p,I) = \left(\frac{aI}{(a+b)p_1}, \frac{bI}{(a+b)p_2}\right)$$

Jej hladiny indiferentnosti (vrstevnice) sú zobrazené na obrázku:



Obr. 1.: Vrstevnice funkcie $u(x) = x_1^{0.6}x_2^{0.4}$, $u(x) \in \{1,\dots,10\}$

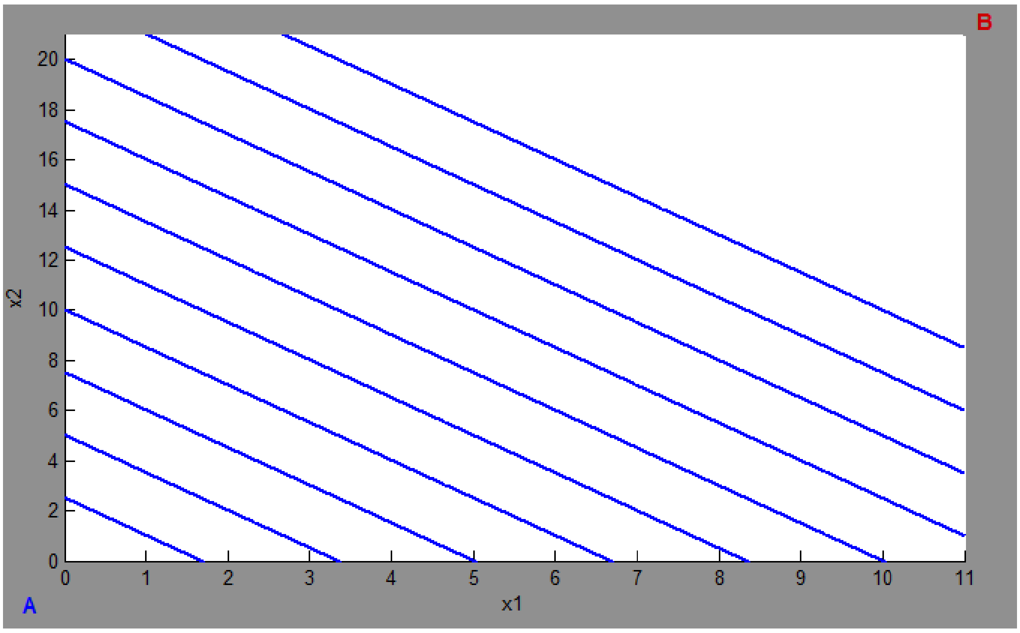
b) Pre **funkciu užitočnosti dokonale zameniteľných statkov** platí:

$$u(x) = ax_1 + bx_2$$

pre $a, b > 0$. Jej Marshallovské dopyty sú vyjadrené nasledovne:

$$m(p, I) = \begin{cases} \left(0, \dfrac{I}{p_2}\right), & \dfrac{p_1}{p_2} > \dfrac{a}{b} \\ \left(\dfrac{I}{p_1}, 0\right), & \dfrac{p_1}{p_2} < \dfrac{a}{b} \\ \{(x_1, x_2), \langle p, x \rangle = I\}, & \dfrac{p_1}{p_2} = \dfrac{a}{b} \end{cases}$$

Hladiny indiferentnosti tejto funkcie sú rovnobežné priamky so sklonom $-\frac{a}{b}$, ich priebeh vidíme na obrázku:



Obr. 2.: Vrstevnice funkcie $u(x) = 0.6x_1 + 0.4x_2$, $u(x) \in \{1, \dots, 10\}$

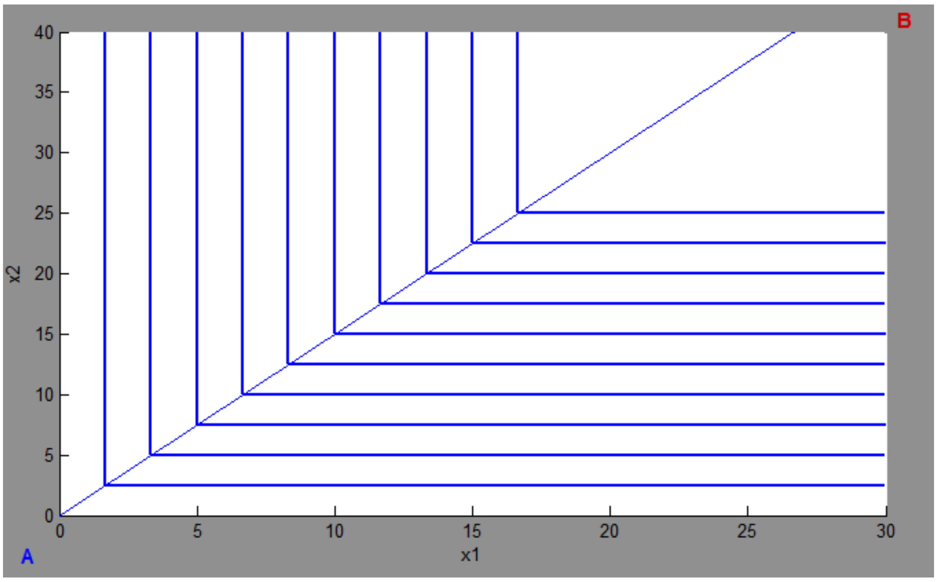
c) **Leontiefova funkcia užitočnosti** má tvar:

$$u(x) = min\{ax_1, bx_2\}$$

pre $a, b > 0$. Príslušná Marshallovská dopytová funkcia je:

$$m(p, I) = \left(\frac{bI}{bp_1 + ap_2}, \frac{aI}{bp_1 + ap_2}\right)$$

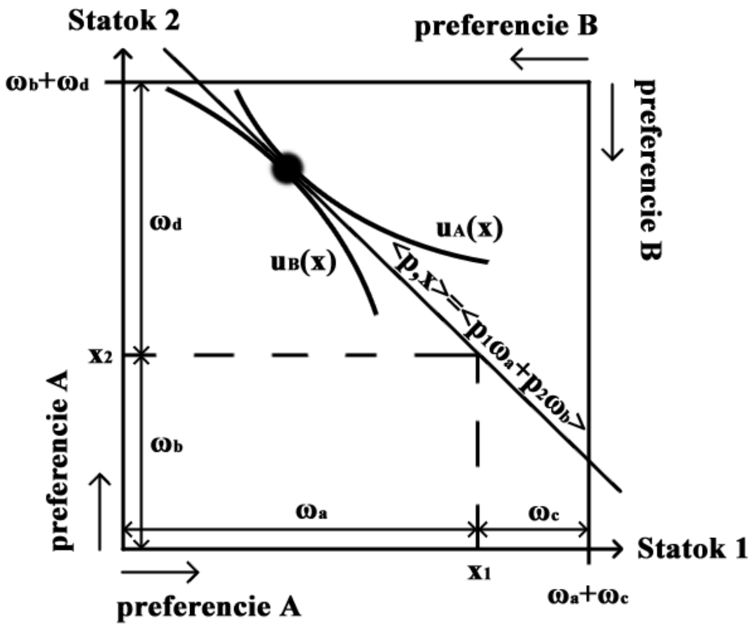
Tvar jej vrstevníc je ilustrovaný na obrázku:



Obr. 3.: Vrstevnice funkcie $u(x) = min\{0.6x_1, 0.4x_2\}$, $u(x) \in \{1, \dots, 10\}$

2. Edgeworthov obdĺžnik

Na modelovanie Walrasovej rovnováhy pre trh výmeny dvoch statkov s dvomi účastníkmi sa používa Edgeworthov obdĺžnik (anglicky: *Edgeworth box*). Táto grafická pomôcka je pomenovaná podľa írskeho filozofa a politického ekonóma Francis Ysidro Edgewortha (1845-1926), ktorý rozvinul mikroekonomickú teóriu užitočnosti, v rámci ktorej predstavil okrem iného aj pojem hladiny indiferentnosti. Schéma Edgeworthovho obdĺžnika je načrtnutá na nasledujúcom obrázku:



Obr. 4.: Edgeworthov obdĺžnik

Dĺžky jeho strán predstavujú celkové množstvá jednotlivých statkov, t.j. horizontálna strana má dĺžku $\omega_a + \omega_c$ a vertikálna má dĺžku $\omega_b + \omega_d$. Bod (x_1, x_2) v obdĺžniku predstavuje pre spotrebiteľa A alokáciu statkov $x^A = (x_1, x_2)$ a pre spotrebiteľa B alokáciu statkov $x^B = (\omega_a + \omega_c - x_1, \omega_b + \omega_d - x_2)$. Priamka

$$p_1 x_1^A + p_2 x_2^A = p_1 \omega_a + p_2 \omega_b$$

prechádzajúca bodom (ω_a, ω_b) je množinou všetkých takých spotrebných košov (alokácií statkov), ktoré si môže zo svojho rozpočtu spotrebiteľ A dovoliť, a teda je jeho rozpočtovým (resp. príjmovým) ohraničením.

Zároveň je však aj rozpočtovým ohraničením pre spotrebiteľa B, keďže spĺňa vzťah

$$p_1(\omega_a + \omega_c - x_1^A) + p_2(\omega_b + \omega_d - x_2^A) = p_1\omega_c + p_2\omega_d$$

Rovnováha nastane vtedy, ak na tejto priamke existuje bod, ktorý rieši úlohu rovnováhy spotrebiteľa (z kapitoly 1) pre obidvoch spotrebiteľov. Priamka rozpočtových obmedzení musí mať v tomto bode dotyk s hladinami indiferentnosti oboch spotrebiteľov.

3. Odvodenie a ilustrácia Walrasovej rovnováhy

V tejto kapitole postupne odvodíme a pomocou Edgeworthovho obdĺžnika zobrazíme rovnováhy pre všetky kombinácie spotrebiteľských funkcií užitočnosti, ktoré boli opísané v kapitole 1.

Kvôli prehľadnosti zavedieme pre pomer cien statkov značenie $\bar{p} = \frac{p_1}{p_2}$.

3.1. Cobb-Douglas

Nech spotrebiteľ A aj spotrebiteľ B sú charakterizovaní Cobb-Douglasovou funkciou užitočnosti, t.j.:

$$u_A(x_1, x_2) = x_1^a x_2^b$$

$$u_B(x_1, x_2) = x_1^c x_2^d$$

a teda ich Marshallovské dopytové funkcie:

$$m^A(p, I) = \left(\frac{aI_A}{(a+b)p_1}, \frac{bI_A}{(a+b)p_2}\right)$$

$$m^B(p, I) = \left(\frac{cI_B}{(c+d)p_1}, \frac{dI_B}{(c+d)p_2}\right)$$

Po krátkej úprave:

$$m^A(\bar{p}) = \left(\frac{a\omega_a + \frac{a\omega_b}{\bar{p}}}{(a+b)}, \frac{b\omega_a\bar{p} + b\omega_b}{(a+b)}\right)$$

$$m^B(\bar{p}) = \left(\frac{c\omega_c + \frac{c\omega_d}{\bar{p}}}{(c+d)}, \frac{d\omega_c\bar{p} + d\omega_d}{(c+d)}\right)$$

Musí platiť:

$$m_1^A + m_1^B = \omega_a + \omega_c$$

$$m_2^A + m_2^B = \omega_b + \omega_d$$

Teda:

$$\frac{a\omega_a + \dfrac{a\omega_b}{\bar{p}}}{(a+b)} + \frac{c\omega_c + \dfrac{c\omega_d}{\bar{p}}}{(c+d)} = \omega_a + \omega_c$$

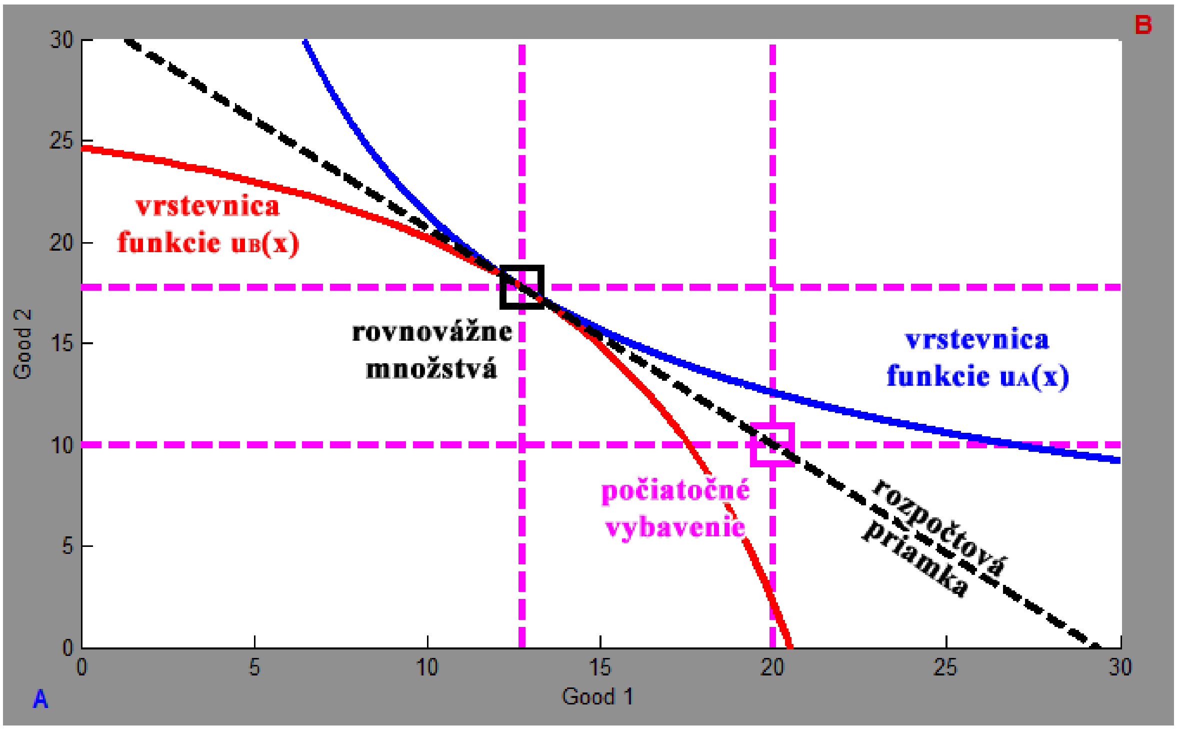
$$\frac{b\omega_a\bar{p} + b\omega_b}{(a+b)} + \frac{d\omega_c\bar{p} + d\omega_d}{(c+d)} = \omega_b + \omega_d$$

Tieto rovnice sú závislé, takže stačí, keď pomer cien vyjadríme len z jednej z nich. Vyjadrením $\bar{p}$ z prvej rovnice dostávame:

$$\bar{p} = \frac{\dfrac{a}{a+b}\omega_b + \dfrac{c}{c+d}\omega_d}{\dfrac{b}{a+b}\omega_a + \dfrac{d}{c+d}\omega_c}$$

Tým je pomer cien jednoznačne určený, rovnovážne množstvá statkov vieme pomocou neho jednoducho vyjadriť dosadením za $\bar{p}$.

Grafická interpretácia:



Obr. 5.: Cobb-Douglas vs. Cobb-Douglas

3.2. Cobb-Douglas a zameniteľné statky

Predpokladajme, že spotrebiteľ A má Cobb-Douglasovu funkciu užitočnosti a spotrebiteľ B funkciu užitočnosti dokonale zameniteľných statkov, t.j.:

$$u_A(x_1, x_2) = x_1^a x_2^b$$

$$u_B(x_1, x_2) = cx_1 + dx_2$$

Ich Marshallovské dopytové funkcie sú:

$$m^A(p, I) = \left(\frac{aI_A}{(a+b)p_1}, \frac{bI_A}{(a+b)p_2}\right)$$

$$m^B(p, I) = \begin{cases} \left(0, \frac{I_B}{p_2}\right), & \frac{p_1}{p_2} > \frac{c}{d} \\ \left(\frac{I_B}{p_1}, 0\right), & \frac{p_1}{p_2} < \frac{c}{d} \\ \{(x_1, x_2), \langle p, x\rangle = I_B\}, & \frac{p_1}{p_2} = \frac{c}{d} \end{cases}$$

Po úprave:

$$m^A(\bar{p}) = \left(\frac{a\omega_a + \frac{a\omega_b}{\bar{p}}}{(a+b)}, \frac{b\omega_a\bar{p} + b\omega_b}{(a+b)}\right)$$

$$m^B(\bar{p}) = \begin{cases} (0, \omega_c\bar{p} + \omega_d), & \bar{p} > \frac{c}{d} \\ \left(\omega_c + \frac{\omega_d}{\bar{p}}, 0\right), & \bar{p} < \frac{c}{d} \\ \{(x_1, \bar{p}(\omega_c - x_1) + \omega_d), 0 \leq x_1 \leq \omega_a + \omega_c\}, & \bar{p} = \frac{c}{d} \end{cases}$$

Z vyjadrenia Marshallovského dopytu pre spotrebiteľa B vidíme, že sa nám ponúkajú tri možné riešenia.

Pre vypočítanie Walrasovej rovnováhy najprv nájdeme bod dotyku hladín indiferentnosti funkcií užitočnosti. V tomto bode pre $\lambda \neq 0$ platí:

$$a x_1^{a-1} x_2^{b} = \lambda c$$

$$b x_1^{a} x_2^{b-1} = \lambda d$$

Vzájomným podelením týchto rovníc dostávame:

$$\frac{a x_2}{b x_1} = \frac{c}{d}$$

odtiaľ

$$x_2 = \frac{bc}{ad} x_1$$

Rozpočtová priamka prechádza bodom počiatočného vybavenia (ω_a, ω_b) , teda:

$$c x_1 + d x_2 = c x_1 + \frac{bc}{a} x_1 = c\omega_a + d\omega_b$$

Vyjadríme x_1 a následne dopočítame x_2:

$$x_1 = \frac{a}{a+b}\left(\omega_a + \frac{d}{c}\omega_b\right)$$

$$x_2 = \frac{b}{a+b}\left(\frac{c}{d}\omega_a + \omega_b\right)$$

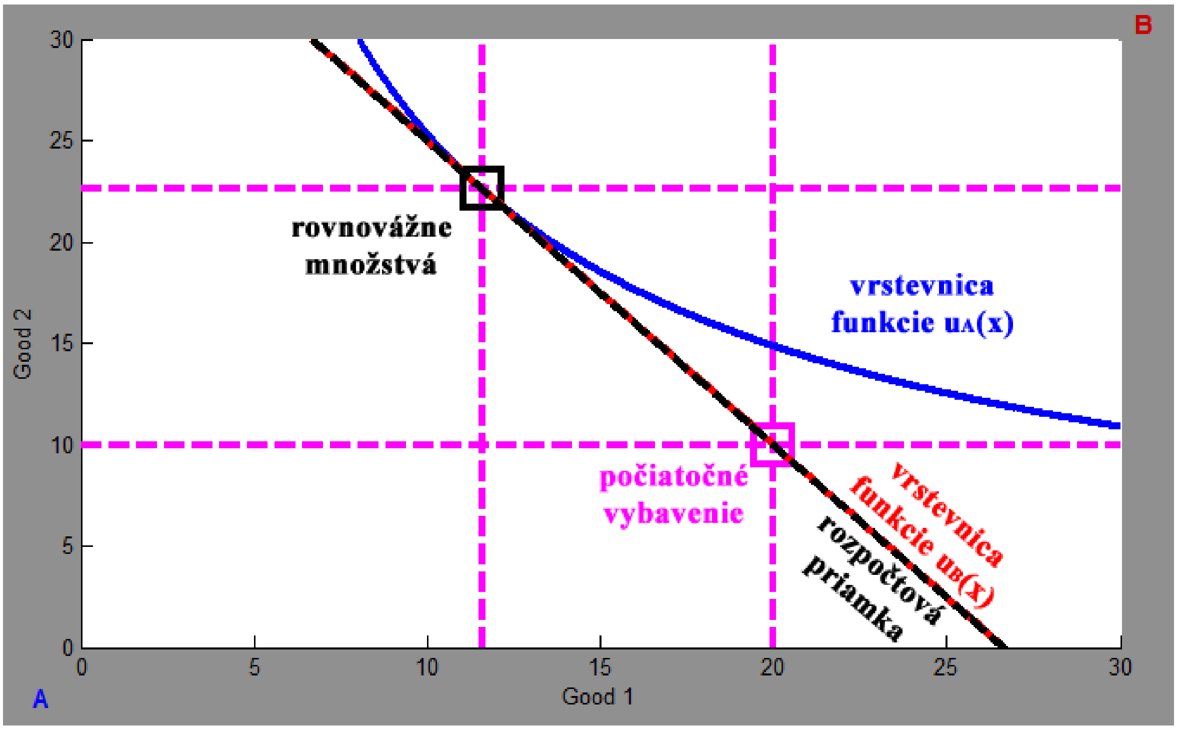
čo sú hľadané súradnice dotykového bodu. Ak $x_1 \leq \omega_a + \omega_c$ a $x_2 \leq \omega_b + \omega_d$, potom nájdený dotykový bod leží v Edgeworthovom obdĺžniku. Vtedy je rozpočtová priamka totožná s rovnovážnou hladinou indiferentnosti funkcie užitočnosti spotrebiteľa B, a teda:

$$\bar{p} = \frac{c}{d}$$

$$m^A\left(\frac{c}{d}\right) = \left(\frac{a}{a+b}\left(\omega_a + \frac{d}{c}\omega_b\right), \frac{b}{a+b}\left(\frac{c}{d}\omega_a + \omega_b\right)\right)$$

$$m^B\left(\frac{c}{d}\right) = \left(\omega_c + \frac{1}{a+b}\left(b\omega_a - \frac{ad}{c}\omega_b\right), \omega_d + \frac{1}{a+b}\left(a\omega_b - \frac{bc}{d}\omega_a\right)\right)$$

Táto situácia je ilustrovaná na obrázku 6.:



Obr. 6.: Cobb-Douglas vs. zameniteľné statky, $\bar{p} = \frac{c}{d}$

Môže však nastať prípad, kedy nájdený bod dotyku vrstevníc leží mimo Edgeworthovho obdĺžnika. Takéto prípady sú dva.

Pre prvý prípad majme, nech $x_1 > \omega_a + \omega_c$ a $x_2 \leq \omega_b + \omega_d$, teda spotrebiteľ A spotrebúva priveľa prvého statku. Vtedy treba zvýšiť jeho cenu p_1, aby spotreba prvého statku spotrebiteľom A klesla, a to tak, že spomínaný dotykový bod sa dostane na okraj Edgeworthovho obdĺžnika, kde $x_1 = \omega_a + \omega_c$. V tomto bode sa bude rozpočtová priamka dotýkať vrstevnice Cobb-Douglasovej funkcie užitočnosti spotrebiteľa A, čiže:

$$\frac{a x_2}{b(\omega_a + \omega_c)} = \bar{p}$$

Z tohto vzťahu vyjadríme x_2:

$$x_2 = \bar{p}\frac{b}{a}(\omega_a + \omega_c)$$

Keďže rozpočtová priamka prechádza bodom (ω_a, ω_b), platí:

$$\bar{p}x_1 + x_2 = \bar{p}\omega_a + \omega_b$$

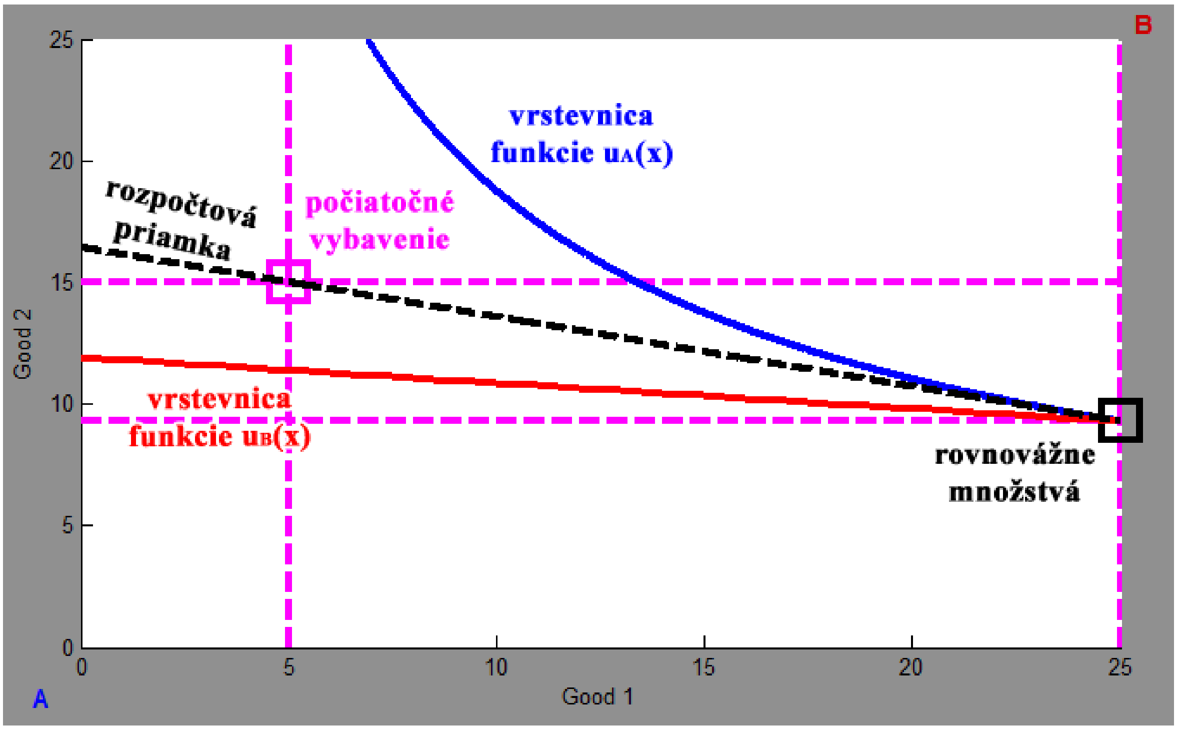
Po dosadení máme:

$$\bar{p}(\omega_a + \omega_c) + \bar{p}\frac{b}{a}(\omega_a + \omega_c) = \bar{p}\omega_a + \omega_b$$

Z čoho pre pomer cien (pre $\omega_b > 0$) vychádza, že

$$\bar{p} = \frac{a\omega_b}{(a+b)\omega_c + b\omega_a} > \frac{c}{d}$$

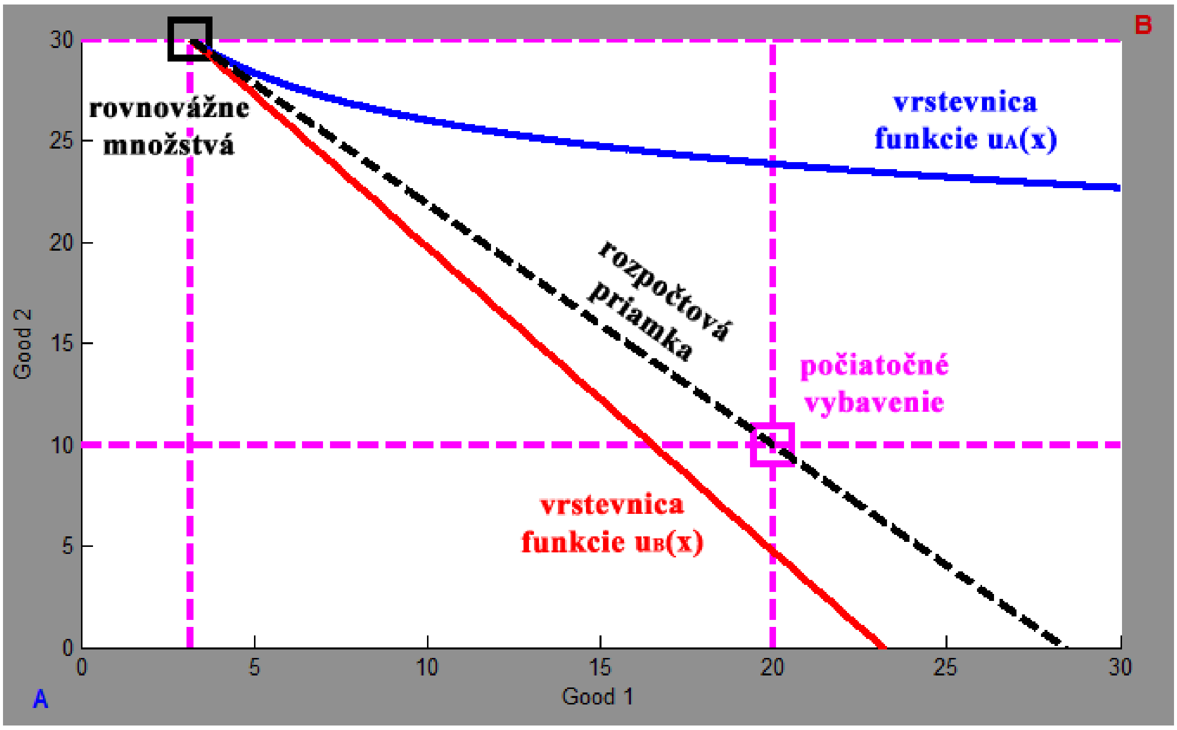
Pomocou neho už ľahko dopočítame Walrasovské množstvá statkov. Tento prípad je znázornený na obrázku:



Obr. 7.: Cobb-Douglas vs. zameniteľné statky, $\bar{p} > \frac{c}{d}$

Druhý prípad nastane, keď $x_1 \leq \omega_a + \omega_c$ a $x_2 > \omega_b + \omega_d$, teda spotrebiteľ A spotrebúva priveľa druhého statku. Zvýšime jeho cenu p_2, aby spotreba druhého statku spotrebiteľom A klesla. Bod dotyku vrstevníc sa dostane na okraj Edgeworthovho obdĺžnika, kde $x_2 = \omega_b + \omega_d$. Ďalšie odvodzovanie rovnováhy v tomto prípade je analogické s predchádzajúcim. Pre výsledný pomer cien tu platí:

$$\bar{p} = \frac{b\omega_a}{(a+b)\omega_d + a\omega_b} < \frac{c}{d}$$



Obr. 8.: Cobb-Douglas vs. zameniteľné statky, $\bar{p} < \frac{c}{d}$

3.3. Zameniteľné statky

Tomuto prípadu sa podrobne venuje 5. kapitola v [2]. Nech oboch spotrebiteľov A aj B charakterizujú funkcie užitočnosti dokonale zameniteľných statkov, t.j.

$$u_A(x_1, x_2) = ax_1 + bx_2$$

$$u_B(x_1, x_2) = cx_1 + dx_2$$

Teda ich zodpovedajúce Marshallovské dopyty sú:

$$m^A(p, I) = \begin{cases} \left(0, \frac{I_A}{p_2}\right), & \frac{p_1}{p_2} > \frac{a}{b} \\ \left(\frac{I_A}{p_1}, 0\right), & \frac{p_1}{p_2} < \frac{a}{b} \\ \{(x_1, x_2), \langle p, x \rangle = I_A\}, & \frac{p_1}{p_2} = \frac{a}{b} \end{cases}$$

$$m^B(p, I) = \begin{cases} \left(0, \frac{I_B}{p_2}\right), & \frac{p_1}{p_2} > \frac{c}{d} \\ \left(\frac{I_B}{p_1}, 0\right), & \frac{p_1}{p_2} < \frac{c}{d} \\ \{(x_1, x_2), \langle p, x \rangle = I_B\}, & \frac{p_1}{p_2} = \frac{c}{d} \end{cases}$$

Po úprave dostaneme:

$$m^A(\bar{p}) = \begin{cases} (0, \omega_a\bar{p} + \omega_b), & \bar{p} > \frac{a}{b} \\ \left(\omega_a + \frac{\omega_b}{\bar{p}}, 0\right), & \bar{p} < \frac{a}{b} \\ \{(x_1, \bar{p}(\omega_a - x_1) + \omega_b), 0 \leq \ x_1 \leq \omega_a + \omega_c\}, & \bar{p} = \frac{a}{b} \end{cases}$$

$$m^B(\bar{p}) = \begin{cases} (0, \omega_c\bar{p} + \omega_d), & \bar{p} > \frac{c}{d} \\ \left(\omega_c + \frac{\omega_d}{\bar{p}}, 0\right), & \bar{p} < \frac{c}{d} \\ \{(x_1, \bar{p}(\omega_c - x_1) + \omega_d), 0 \leq \ x_1 \leq \omega_a + \omega_c\}, & \bar{p} = \frac{c}{d} \end{cases}$$

Bez ujmy na všeobecnosti budeme predpokladať, že $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$. Pre pomer cien $\bar{p}$ sa teda naskytuje 5 možností.

V prípade, že by platilo $\frac{a}{b} < \frac{c}{d} < \bar{p}$, Marshallovské dopyty spotrebiteľov by boli:

$$m^A(\bar{p}) = (0, \omega_a\bar{p} + \omega_b)$$

$$m^B(\bar{p}) = (0, \omega_c\bar{p} + \omega_d)$$

Avšak pre takúto alokáciu statkov platí:

$$m_2^A(\bar{p}) + m_2^B(\bar{p}) = \omega_b + \omega_d + \bar{p}(\omega_a + \omega_c) > \omega_b + \omega_d$$

Vtedy celkový dopyt po druhom statku prevyšuje jeho celkovú ponuku. Takže musí platiť $\frac{a}{b} < \bar{p} \leq \frac{c}{d}$. Podobne, ak by platilo $\bar{p} < \frac{a}{b} < \frac{c}{d}$, vtedy:

$$m^A(\bar{p}) = \left(\omega_a + \frac{\omega_b}{\bar{p}}, 0\right)$$

$$m^B(\bar{p}) = \left(\omega_c + \frac{\omega_d}{\bar{p}}, 0\right)$$

čím narazíme na neuspokojený dopyt po prvom statku:

$$m_1^A(\bar{p}) + m_1^B(\bar{p}) = \omega_a + \omega_c + \frac{(\omega_b + \omega_d)}{\bar{p}} > \omega_a + \omega_c$$

V spojení s predchádzajúcim výsledkom teda musí pre $\bar{p}$ platiť:

$$\frac{a}{b} \leq \bar{p} \leq \frac{c}{d}$$

Možnosť, keď $\frac{a}{b} = \bar{p} = \frac{c}{d}$ je z matematického hľadiska nezaujímavá. Vtedy sú totiž rovnovážne hladiny indiferentnosti funkcií užitočnosti oboch spotrebiteľov totožné s rozpočtovým obmedzením, t.j. každá alokácia statkov na rozpočtovej priamke je rovnovážna a rieši úlohu maximalizácie užitočnosti.

Uvažujme teraz prípad, keď $\bar{p} = \frac{a}{b} < \frac{c}{d}$. Vtedy:

$$m^A(\bar{p}) = (x_1, \bar{p}(\omega_a - x_1) + \omega_b)$$

$$(0 \leq \ x_1 \leq \omega_a + \omega_c)$$

$$m^B(\bar{p}) = \left(\omega_c + \frac{\omega_d}{\bar{p}}, 0\right)$$

Aby nastala rovnováha, musí platiť:

$$x_1 + \omega_c + \frac{\omega_d}{\bar{p}} = \omega_a + \omega_c$$

$$\bar{p}(\omega_a - x_1) + \omega_b + 0 = \omega_b + \omega_d$$

$$(0 \leq x_1 \leq \omega_a + \omega_c)$$

Z druhej rovnice potom:

$$m_1^A = x_1 = \omega_a - \frac{\omega_d}{\bar{p}} = \omega_a - \frac{b\omega_d}{a}$$

Keďže sa jedná o množstvo statku, musí byť $x_1 \geq 0$, teda musí platiť $\frac{\omega_d}{\omega_a} \leq \frac{a}{b}$. Dosadením x_1 do $x_2 = \bar{p}(\omega_a - x_1) + \omega_b$ dostávame:

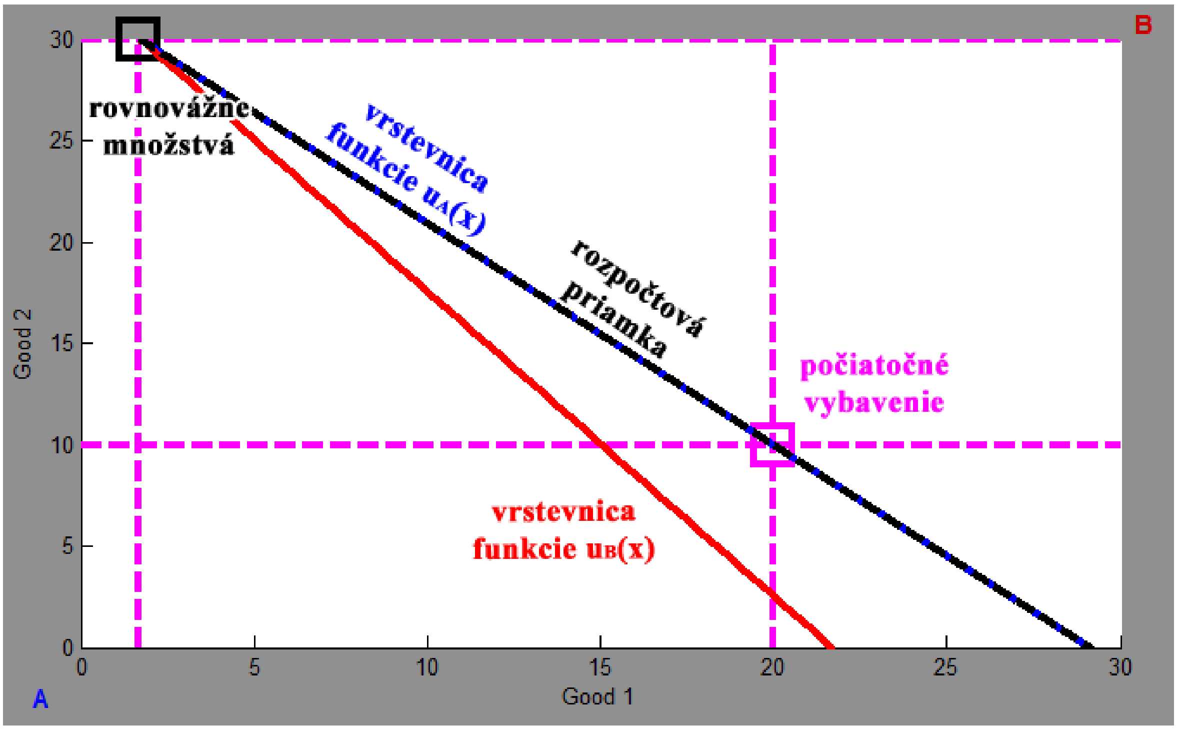
$$m_2^A = \frac{a}{b}(\omega_a - m_1^A) + \omega_b = \ \frac{a}{b}\left(\omega_a - \left(\omega_a - \frac{b\omega_d}{a}\right)\right) + \omega_b =$$

$$= \omega_b + \omega_d$$

Tento výsledok súhlasí s predpokladom $m_2^A + m_2^B = \omega_b + \omega_d$, keďže $m_2^B = 0$. Rovnovážne množstvá statkov sú teda (viď obr. 6):

$$m^A\left(\frac{a}{b}\right) = \left(\omega_a - \frac{b\omega_d}{a}, \omega_b + \omega_d\right)$$

$$m^B\left(\frac{a}{b}\right) = \left(\omega_c + \frac{b\omega_d}{a}, 0\right)$$



Obr. 9.: Zameniteľné statky vs. zameniteľné statky, $\bar{p} = \frac{a}{b} < \frac{c}{d}$

Prípad, keď $\frac{a}{b} < \frac{c}{d} = \bar{p}$, je podobný predošlému. Tu platí:

$$m^A(\bar{p}) = (0, \omega_a\bar{p} + \omega_b)$$

$$m^B(\bar{p}) = (x_1, \bar{p}(\omega_c - x_1) + \omega_d)$$

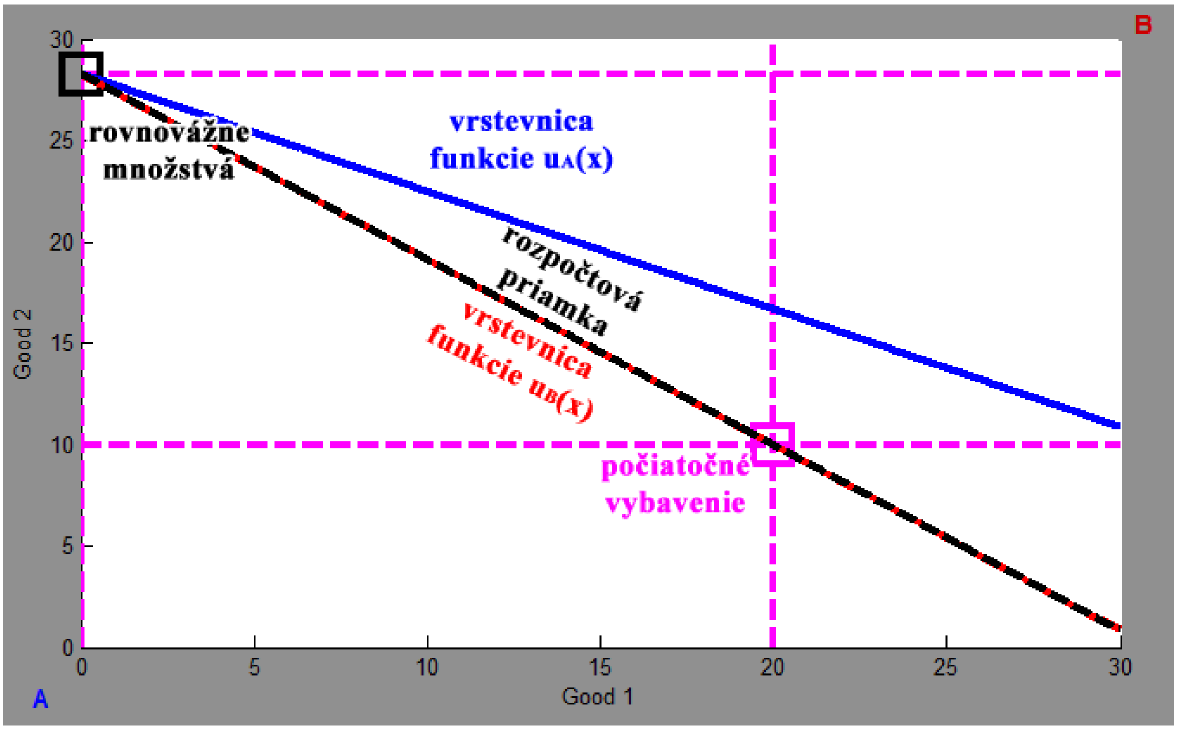
$$(0 \leq \ x_1 \leq \omega_a + \omega_c)$$

Podobným odvodzovaním ako v predchádzajúcom prípade, nájdeme nasledovnú rovnovážnu alokáciu statkov:

$$m^A\left(\frac{c}{d}\right) = \left(0, \omega_b + \frac{c\omega_a}{d}\right)$$

$$m^B\left(\frac{c}{d}\right) = \left(\omega_a + \omega_c, \omega_d - \frac{c\omega_a}{d}\right)$$

za podmienky $\frac{\omega_d}{\omega_a} \geq \frac{c}{d}$.



Obr. 10.: Zameniteľné statky vs. zameniteľné statky, $\frac{a}{b} < \frac{c}{d} = \bar{p}$

Pre posledný prípad, t.j. , $\frac{a}{b} < \bar{p} < \frac{c}{d}$, platí:

$$m^A(\bar{p}) = (0, \omega_a\bar{p} + \omega_b)$$

$$m^B(\bar{p}) = \left(\omega_c + \frac{\omega_d}{\bar{p}}, 0\right)$$

Pre rovnováhu tu platí:

$$0 + \omega_c + \frac{\omega_d}{\bar{p}} = \omega_a + \omega_c$$

$$\omega_a\bar{p} + \omega_b + 0 = \omega_b + \omega_d$$

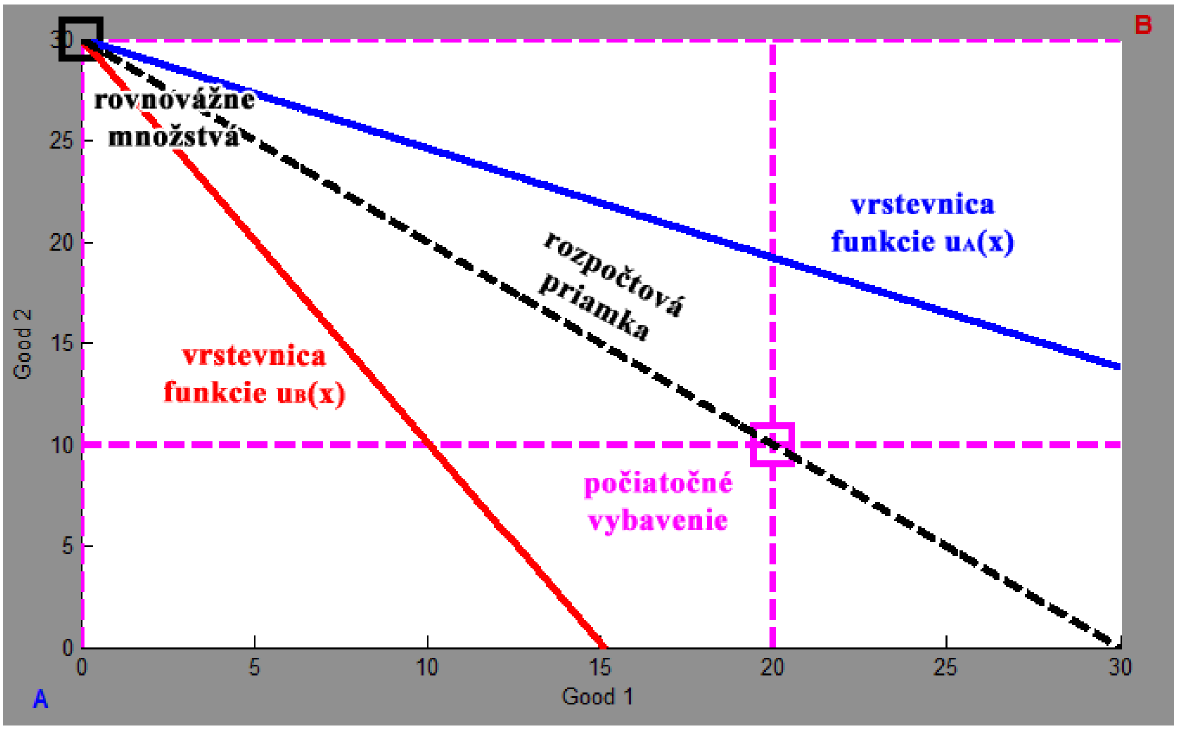
Z ľubovoľnej z týchto rovníc je triviálnou úpravou zrejmé, že:

$$\bar{p} = \frac{\omega_d}{\omega_a}$$

A teda:

$$m^A\left(\frac{\omega_d}{\omega_a}\right) = (0, \omega_b + \omega_d)$$

$$m^B\left(\frac{\omega_d}{\omega_a}\right) = (\omega_a + \omega_c, 0)$$



Obr. 11.: Zameniteľné statky vs. zameniteľné statky, $\frac{a}{b} < \bar{p} < \frac{c}{d}$

Nakoniec ešte zhrnieme výsledky, kedy pre spotrebiteľské funkcie užitočnosti dokonale zameniteľných statkov nastáva Walrasova rovnováha:

$$m^A(\bar{p}), m^B(\bar{p}) = \begin{cases} \left(\left(\omega_a - \frac{b\omega_d}{a}, \omega_b + \omega_d\right), \left(\omega_c + \frac{b\omega_d}{a}, 0\right)\right) & \frac{\omega_d}{\omega_a} \leq \bar{p} = \frac{a}{b} < \frac{c}{d} \\ (0, \omega_b + \omega_d), (\omega_a + \omega_c, 0) & \frac{a}{b} < \bar{p} = \frac{\omega_d}{\omega_a} < \frac{c}{d} \\ \left(0, \omega_b + \frac{c\omega_a}{d}\right), \left(\omega_a + \omega_c, \omega_d - \frac{c\omega_a}{d}\right) & \frac{a}{b} < \frac{c}{d} = \bar{p} \leq \frac{\omega_d}{\omega_a} \end{cases}$$

3.4. Zameniteľné statky a Leontief

Bez ujmy na všeobecnosti, nech funkcia užitočnosti spotrebiteľa A je dokonale zameniteľných statkov a nech spotrebiteľ B je charakterizovaný Leontiefovou funkciou užitočnosti, teda:

$$u_A(x_1, x_2) = ax_1 + bx_2$$

$$u_B(x_1, x_2) = min\{cx_1, dx_2\}$$

Potom ich Marshallovské dopytové funkcie sú:

$$m^A(p,I) = \begin{cases} \left(0, \dfrac{I_A}{p_2}\right), & \dfrac{p_1}{p_2} > \dfrac{a}{b} \\ \left(\dfrac{I_A}{p_1}, 0\right), & \dfrac{p_1}{p_2} < \dfrac{a}{b} \\ \{(x_1, x_2), \langle p, x\rangle = I_A\}, & \dfrac{p_1}{p_2} = \dfrac{a}{b} \end{cases}$$

$$m^B(p,I) = \left(\frac{dI_B}{dp_1 + cp_2}, \frac{cI_B}{dp_1 + cp_2}\right)$$

Upravením dostaneme:

$$m^A(\bar{p}) = \begin{cases} (0, \omega_a \bar{p} + \omega_b), & \bar{p} > \dfrac{a}{b} \\ \left(\omega_a + \dfrac{\omega_b}{\bar{p}}, 0\right), & \bar{p} < \dfrac{a}{b} \\ \{(x_1, \bar{p}(\omega_a - x_1) + \omega_b), 0 \leq \ x_1 \leq \omega_a + \omega_c\}, & \bar{p} = \dfrac{a}{b} \end{cases}$$

$$m^B(\bar{p}) = \left(\frac{d\omega_c \bar{p} + d\omega_d}{d\bar{p} + c}, \frac{c\omega_c \bar{p} + c\omega_d}{d\bar{p} + c}\right)$$

Tu sa vyskytujú tri možné riešenia. Nech $\bar{p} > \frac{a}{b}$. Platí:

$$m_1^A + m_1^B = \omega_a + \omega_c$$

Potom z toho, že $m_1^A = 0$ vieme, že:

$$\omega_a + \omega_c = m_1^B = \frac{d\omega_c \bar{p} + d\omega_d}{d\bar{p} + c}$$

Odtiaľ vyjadríme $\bar{p}$ nasledovne:

$$\bar{p} = \frac{d\omega_d - c\omega_a - c\omega_c}{d\omega_a}$$

Tým sú rovnovážne dopyty jednoznačne určené. Aby nebol neuspokojený celkový dopyt po druhom statku, musí byť výsledné $\bar{p} \leq 1$. Teda musí platiť:

$$\omega_a + \frac{c}{d}(\omega_a + \omega_c) \geq \omega_d$$

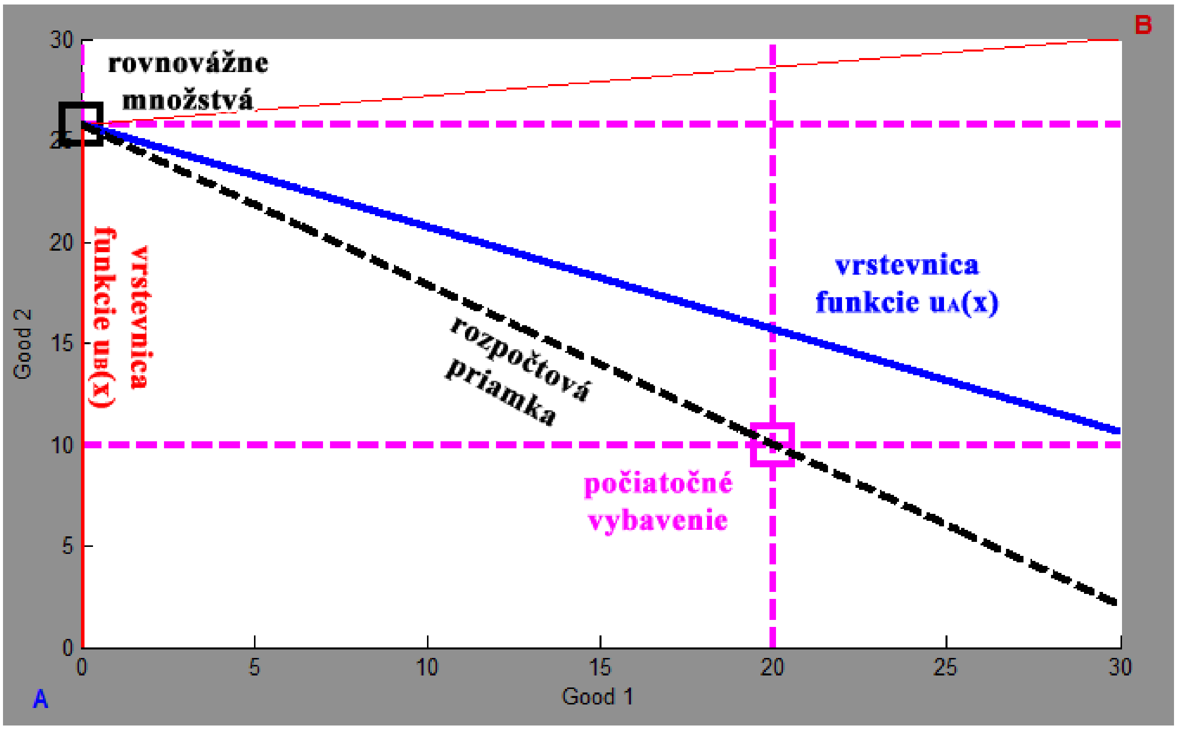
Okrem toho, keďže pomer cien má byť kladný, dostávame podmienky:

$$\omega_a > 0$$

$$\omega_d > \frac{c}{d}(\omega_a + \omega_c)$$

Zhrnutím všetkých troch podmienok do jednej dostávame:

$$\frac{c}{d}(\omega_a + \omega_c) < \omega_d \leq \omega_a + \frac{c}{d}(\omega_a + \omega_c)$$



Obr. 12.: Zameniteľné statky vs. Leontief, $\bar{p} > \frac{a}{b}$

Pre opačný prípad, keď $\bar{p} < \frac{a}{b}$, máme:

$$m_2^A + m_2^B = \omega_b + \omega_d$$

Potom z $m_2^A = 0$ určíme:

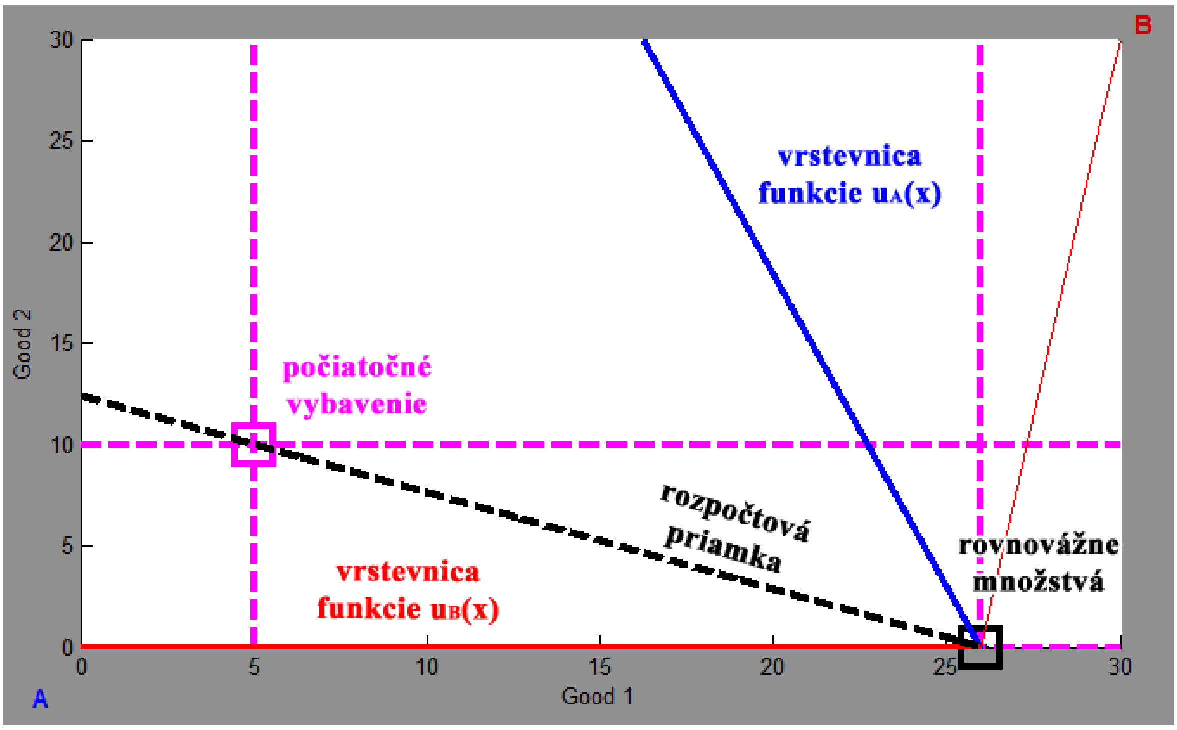
$$\omega_b + \omega_d = m_2^B = \frac{c\omega_c\bar{p} + c\omega_d}{d\bar{p} + c}$$

Odkiaľ:

$$\bar{p} = \frac{c\omega_b}{c\omega_c - d\omega_b - d\omega_d}$$

Analogicky ako v predošlom prípade, podmienky pre výsledné $\bar{p}$ zhrnieme do jednej:

$$\frac{d}{c}(\omega_b + \omega_d) < \omega_c \leq \omega_b + \frac{d}{c}(\omega_b + \omega_d)$$



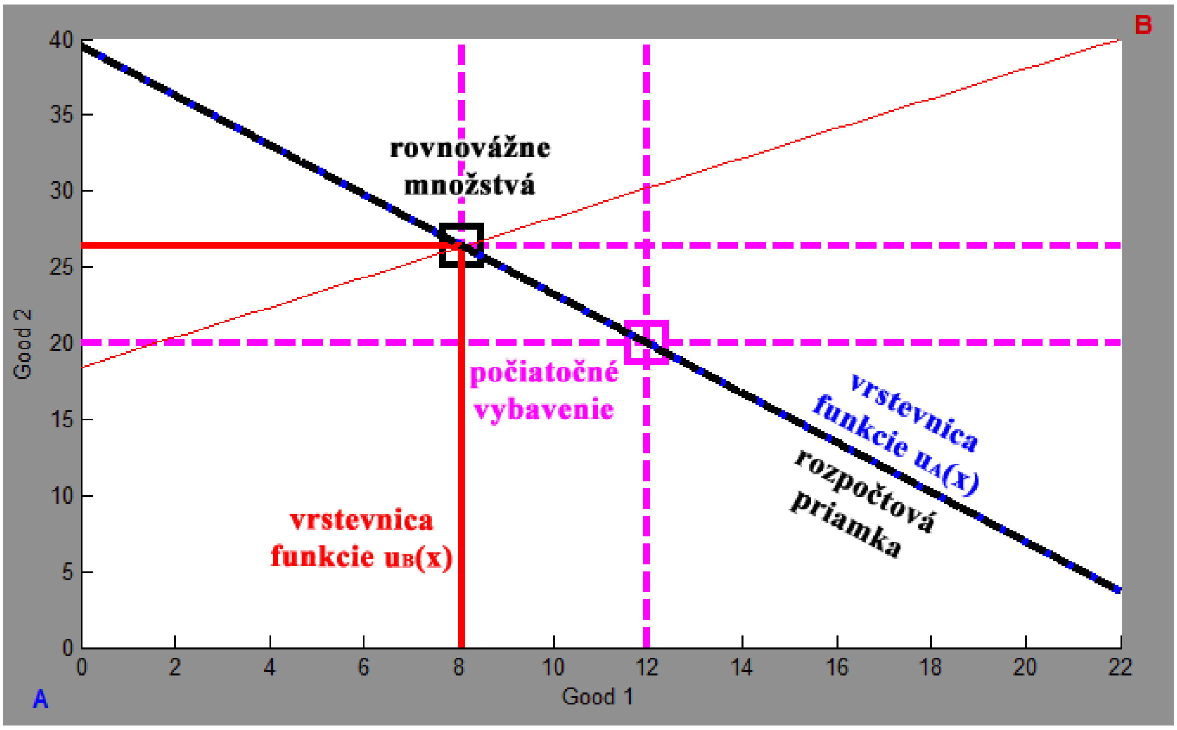
Obr. 13.: Zameniteľné statky vs. Leontief, $\bar{p} < \frac{a}{b}$

Posledná možnosť nastáva, keď $\bar{p} = \frac{a}{b}$. Vtedy dosadením do m^A a m^B dostaneme:

$$m^A\left(\frac{a}{b}\right) = \left(\omega_a + \frac{bc\omega_c - bd\omega_d}{ad + bc}, \omega_b + \frac{ad\omega_d - ac\omega_c}{ad + bc}\right)$$

$$m^B\left(\frac{a}{b}\right) = \left(\frac{ad\omega_c + bd\omega_d}{ad + bc}, \frac{ac\omega_c + bc\omega_d}{ad + bc}\right)$$

Táto rovnováha je ilustrovaná na nasledujúcej strane.



Obr. 14.: Zameniteľné statky vs. Leontief, $\bar{p} = \frac{a}{b}$

3.5. Leontief

Nech spotrebiteľa A aj spotrebiteľa B charakterizujú Leontiefove funkcie užitočnosti, čiže:

$$u_A(x_1, x_2) = min\{ax_1, bx_2\}$$

$$u_B(x_1, x_2) = min\{cx_1, dx_2\}$$

Príslušné Marshallovské dopytové funkcie sú:

$$m^A(p, I) = \left(\frac{bI_A}{bp_1 + ap_2}, \frac{aI_A}{bp_1 + ap_2}\right)$$

$$m^B(p, I) = \left(\frac{dI_B}{dp_1 + cp_2}, \frac{cI_B}{dp_1 + cp_2}\right)$$

Upravené pre $\bar{p} = \frac{p_1}{p_2}$:

$$m^A(\bar{p}) = \left(\frac{b\omega_a\bar{p} + b\omega_b}{b\bar{p} + a}, \frac{a\omega_a\bar{p} + a\omega_b}{b\bar{p} + a}\right)$$

$$m^B(\bar{p}) = \left(\frac{d\omega_c\bar{p} + d\omega_d}{d\bar{p} + c}, \frac{c\omega_c\bar{p} + c\omega_d}{d\bar{p} + c}\right)$$

V prípade trhu výmeny dvoch spotrebiteľov s Leontiefovými funkciami užitočnosti je hľadanie jednoznačnej Walrasovej rovnováhy výnimočné v tom, že obaja účastníci trhu chcú mať výsledné rovnovážne statky v presnom pomere. V našom prípade je tento pomer pre spotrebiteľa A:

$$\frac{m_2^A}{m_1^A} = \frac{a}{b}$$

a pre spotrebiteľa B:

$$\frac{m_2^B}{m_1^B} = \frac{c}{d}$$

Tieto pomery zároveň vyjadrujú smernice úsečiek, po ktorých sa pohybujú „vrcholy" hladín indiferentnosti spotrebiteľov vrámci Edgeworthovho obdĺžnika (pod pojmom „vrchol" hladiny indiferentnosti Leontiefovej funkcie užitočnosti rozumieme bod alokácie statkov $\left(\frac{U}{a}, \frac{U}{b}\right)$ pre spotrebiteľa A resp. bod alokácie statkov $\left(\frac{U}{c}, \frac{U}{d}\right)$ pre spotrebiteľa B, kde U je daná hodnota užitočnosti). Riešenie takejto úlohy teda závisí od vzájomného vzťahu týchto pomerov a sklonu diagonály Edgeworthovho obdĺžnika.

Pre spotrebiteľa A má spomínaná úsečka rovnicu:

$$f_A(x) = \frac{a}{b}x$$

v súradnicovej sústave s počiatkom v bode [0,0], a pre spotrebiteľa B:

$$f_B^*(x) = \frac{c}{d}x$$

v súradnicovej sústave s počiatkom v bode $[\omega_a + \omega_c, \omega_b + \omega_d]$, resp.

$$f_B(x) = \frac{c}{d}(x - \omega_a - \omega_c) + \omega_b + \omega_d$$

v súradnicovej sústave s počiatkom v bode [0,0]. Pre oboch spotrebiteľov platí $0 \leq x \leq \omega_a + \omega_c$.

Sklon diagonály Edgeworthovho obdĺžnika je vyjadrený pomerom $\frac{\omega_b+\omega_d}{\omega_a+\omega_c}$.

Za predpokladu, že ceny oboch statkov sú nenulové a výsledné rovnovážne množstvá sú jednoznačne dané, ponúkajú sa nám dve možnosti riešenia.

Prvá možnosť nastáva, keď platí:

$$\frac{a}{b} < \frac{\omega_b + \omega_d}{\omega_a + \omega_c} < \frac{c}{d}$$

resp.:

$$\frac{a}{b} > \frac{\omega_b + \omega_d}{\omega_a + \omega_c} > \frac{c}{d}$$

Vtedy sa úsečky f_A a f_B pretnú pod resp. nad diagonálou Edgeworthovho obdĺžnika. Teda platí:

$$f_A(x) \equiv \frac{a}{b}x = \frac{c}{d}(x - \omega_a - \omega_c) + \omega_b + \omega_d \equiv f_B(x)$$

Z tohto vzťahu vyjadríme x, vyjde:

$$m_1^A \equiv x = \frac{\omega_b + \omega_d - \frac{c}{d}(\omega_a + \omega_c)}{\frac{a}{b} - \frac{c}{d}}$$

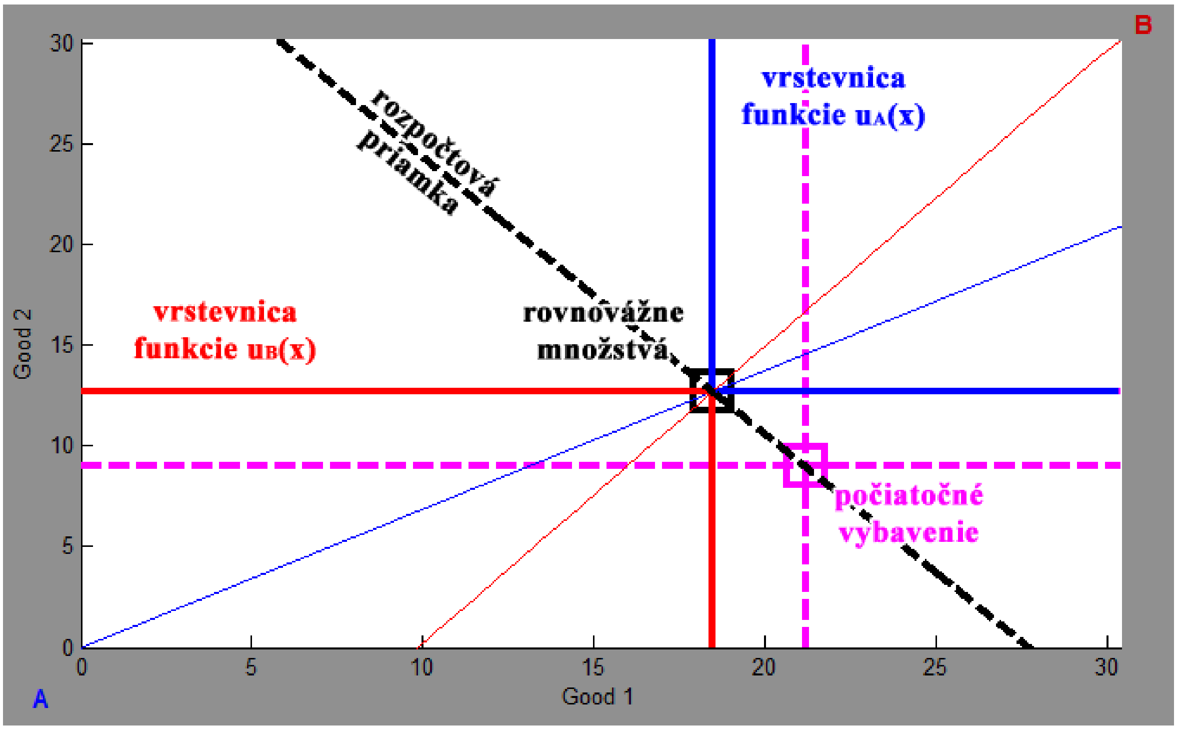
Potom zvyšné množstvá statkov dopočítame pomocou týchto vzťahov:

$$m_2^A = \frac{a}{b} m_1^A$$

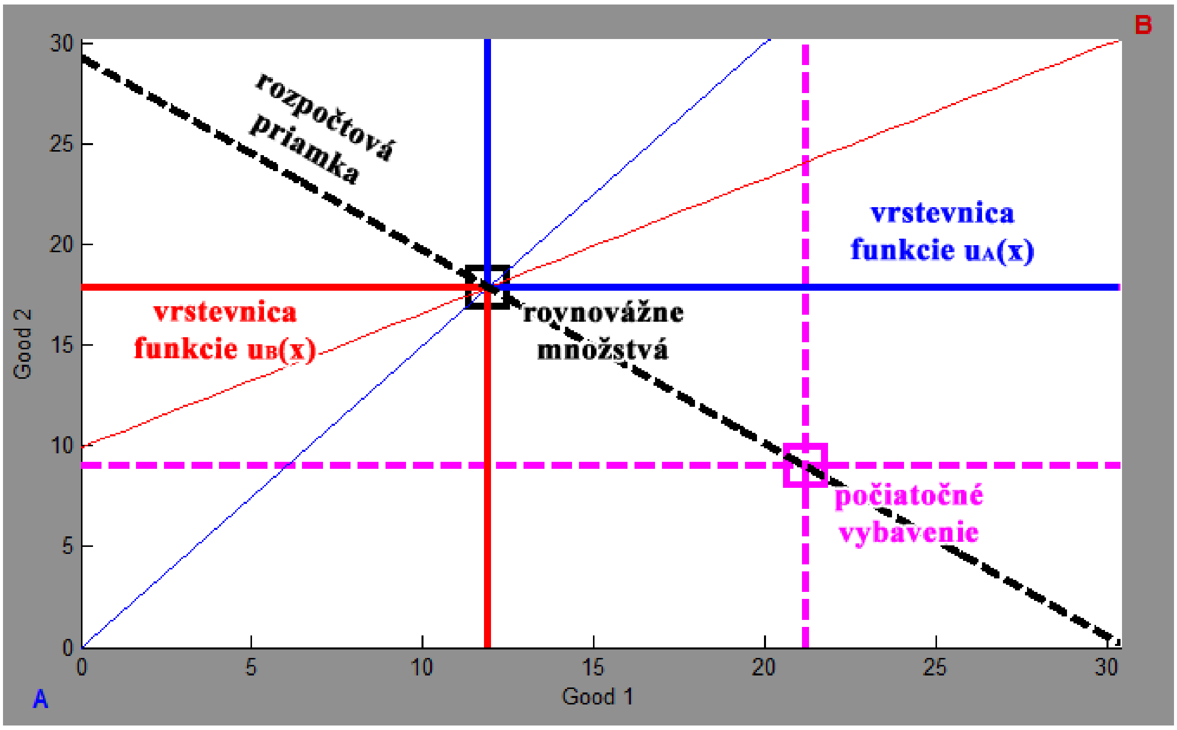
$$m_1^B = \omega_a + \omega_c - m_1^A$$

$$m_2^B = \omega_b + \omega_d - m_2^A$$

Tento typ rovnováh je znázornený na nasledujúcich obrázkoch.



Obr. 15.: Leontief vs. Leontief, $\frac{a}{b} < \frac{\omega_b+\omega_d}{\omega_a+\omega_c} < \frac{c}{d}$



Obr. 16.: Leontief vs. Leontief, $\frac{a}{b} > \frac{\omega_b+\omega_d}{\omega_a+\omega_c} > \frac{c}{d}$

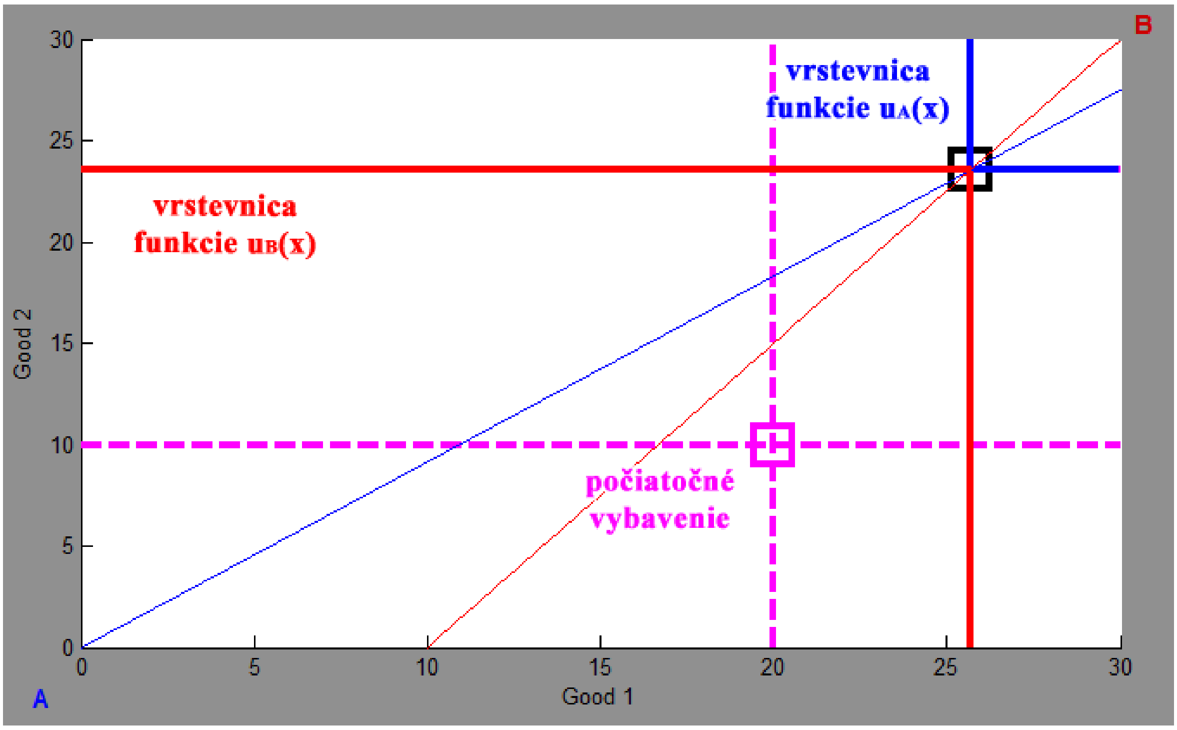
Takáto alokácia statkov však nemusí spĺňať kritériá Walrasovskej rovnováhy, a to vtedy, keď sa rovnovážna alokácia nachádza v rámci Edgeworthovho obdĺžnika „severovýchodne" (napravo a nahor), resp. „juhozápadne" (naľavo a nadol) od alokácie statkov v pôvodnom vybavení. Tým sa myslí:

$$\omega_a < m_1^A \wedge \omega_b < m_2^A$$

resp.

$$\omega_a > m_1^A \wedge \omega_b > m_2^A$$

Ak však platí jeden z týchto vzťahov, rozpočtová priamka má kladný sklon a pomer cien je záporný, takže Walrasova rovnováha nenastane. Názorný príklad nájdeme na obrázku:

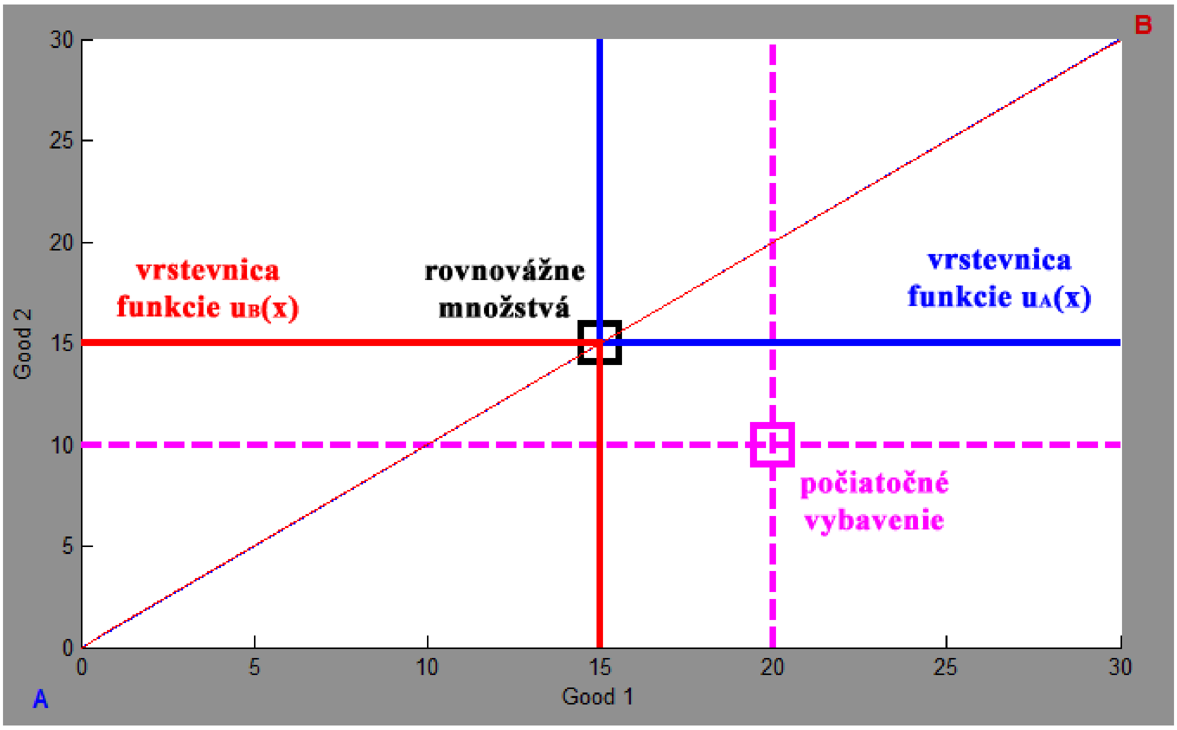


Obr. 17.: Leontief vs. Leontief - tu Walrasova rovnováha nenastane

Druhou možnosťou je, keď

$$\frac{a}{b} = \frac{\omega_b + \omega_d}{\omega_a + \omega_c} = \frac{c}{d}$$

Vtedy sú úsečky f_A a f_B totožné s diagonálou Edgeworthovho obdĺžnika, teda „vrcholy" vrstevníc funkcií užitočnosti spotrebiteľov sa pohybujú po rovnakej úsečke. Požadované pomery rovnovážnych množstiev statkov sa rovnajú pomeru celkových množstiev statkov na trhu. V tomto prípade si spotrebitelia rozdelia jednotlivé statky v pomere 1:1.



Obr. 18.: Leontief vs. Leontief, $\frac{a}{b} = \frac{\omega_b+\omega_d}{\omega_a+\omega_c} = \frac{c}{d}$

3.6. Leontief a Cobb-Douglas

V poslednej kombinácii funkcií užitočnosti (opäť bez ujmy na všeobecnosť) predpokladáme, že spotrebiteľ A má Cobb-Douglasovu a spotrebiteľ B Leontiefovu funkciu užitočnosti.

$$u_A(x_1, x_2) = x_1^a x_2^b$$

$$u_B(x_1, x_2) = min\{cx_1, dx_2\}$$

Marshallovskými dopytmi budú:

$$m^A(p,I) = \left(\frac{aI_A}{(a+b)p_1}, \frac{bI_A}{(a+b)p_2}\right)$$

$$m^B(p,I) = \left(\frac{dI_B}{dp_1 + cp_2}, \frac{cI_B}{dp_1 + cp_2}\right)$$

Po úprave:

$$m^A(\bar{p}) = \left(\frac{a\omega_a + \frac{a\omega_b}{\bar{p}}}{(a+b)}, \frac{b\omega_a\bar{p} + b\omega_b}{(a+b)}\right)$$

$$m^B(\bar{p}) = \left(\frac{d\omega_c\bar{p} + d\omega_d}{d\bar{p} + c}, \frac{c\omega_c\bar{p} + c\omega_d}{d\bar{p} + c}\right)$$

Požadujeme rovnosť celkového dopytu a celkovej ponuky po statkoch, teda:

$$\frac{a\omega_a + \frac{a\omega_b}{\bar{p}}}{(a+b)} + \frac{d\omega_c\bar{p} + d\omega_d}{d\bar{p} + c} = \omega_a + \omega_c$$

$$\frac{b\omega_a\bar{p} + b\omega_b}{(a+b)} + \frac{c\omega_c\bar{p} + c\omega_d}{d\bar{p} + c} = \omega_b + \omega_d$$

Zavedieme pomocné výrazy:

$$\rho = bd\omega_a$$

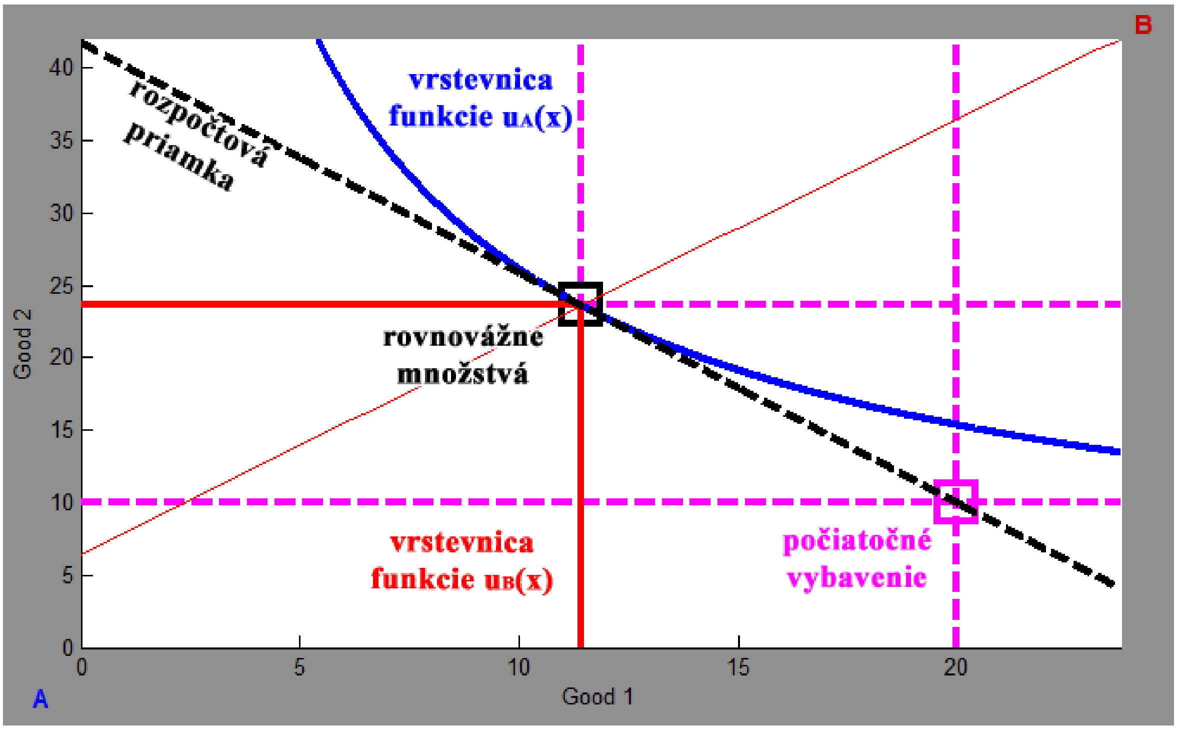
$$\sigma = bc(\omega_a + \omega_c) - ad(\omega_b + \omega_d) + ac\omega_c - ad\omega_d$$

$$\tau = -ac\omega_b$$

Potom upravením prvej rovnice dostaneme kvadratickú rovnicu:

$$\rho\bar{p}^2 + \sigma\bar{p} + \tau = 0$$

Výsledné $\bar{p}$ dosadíme do vzorcov pre $m^A(\bar{p})$, $m^B(\bar{p})$ a dostaneme rovnováhu, ktorá je zobrazená na obrázku 19.



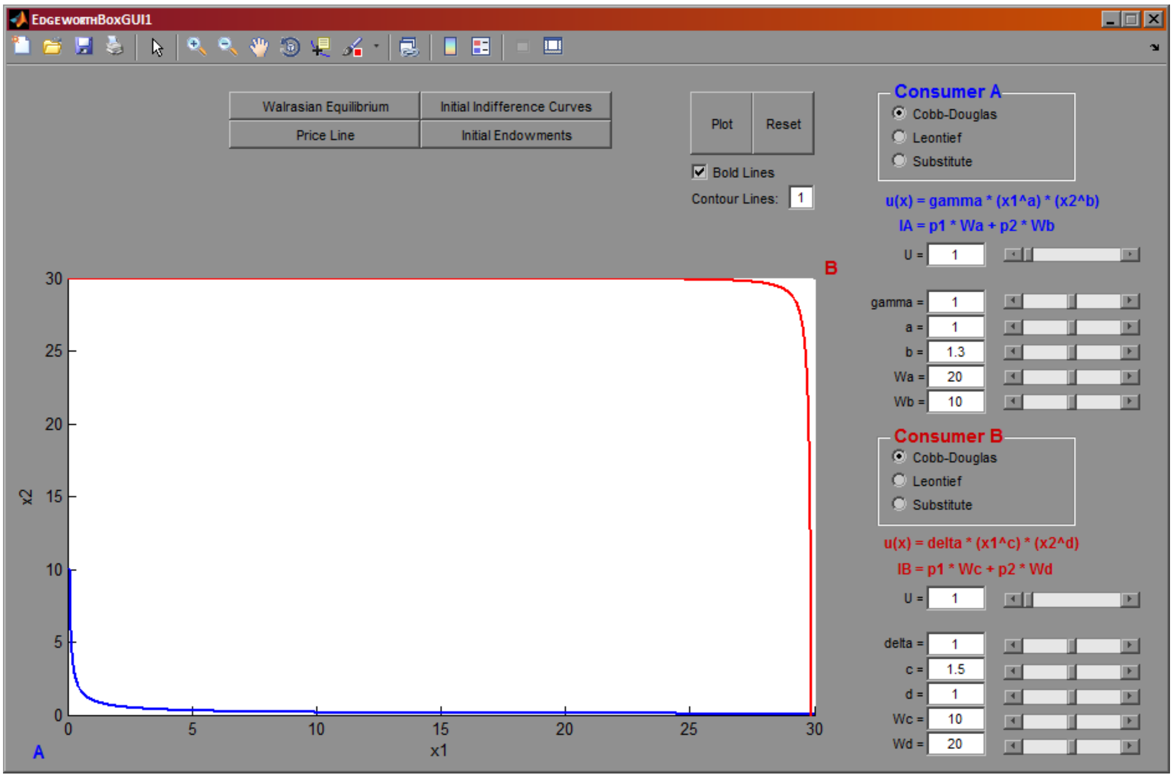
Obr. 19.: Cobb-Douglas vs. Leontief

4. Grafické rozhranie pre Edgeworthov obdĺžnik

Za účelom grafickej ilustrácie ale aj hlbšieho pochopenia fungovania výmenného trhu dvoch statkov pre dvoch spotrebiteľov sme si ako jeden z hlavných cieľov práce stanovili vytvorenie interaktívneho grafického rozhrania. Toto rozhranie nám prostredníctvom výstupov pomohlo pri ilustrácií rozličných typov situácií, ktorým sme sa detailnejšie venovali v kapitole 3. V tejto kapitole sa budeme venovať popisu tohto rozhrania a jeho funkcií.

Program sme vytvorili v Matlabe. Je určený pre operačné systémy Windows, spustiteľný je v Matlabe 2009a a jeho novších verziách. Pozostáva z interaktívneho užívateľského rozhrania (EdgeworthBoxGUI1.fig) a jadra programu (EdgeworthBoxGUI1.m). Po spustení jadra programu sa užívateľovi otvorí okno rozhrania, v ktorom môže nastaviť vlastné parametre pre účastníkov trhu. Jadro programu z nich vypočíta príslušné rovnice pre hladiny indiferentnosti funkcií užitočnosti a prípadné Walrasove rovnováhy. Následne ich spolu s ďalšími zvoliteľnými prvkami vykreslí prostredníctvom vstavanej vykresľovacej plochy. Vykresľovanie je dynamické, dochádza k nemu pri každej zmene vstupných parametrov.

Základný vzhľad užívateľského rozhrania programu je ilustrovaný na obrázku 20.:

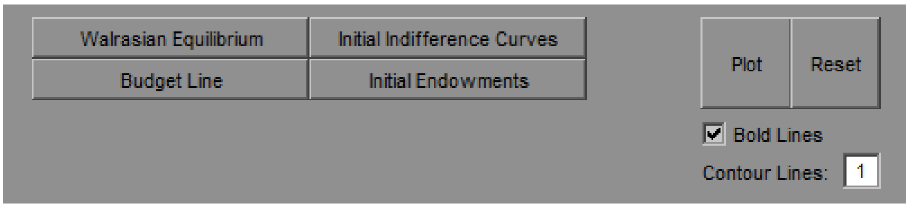


Obr. 20.: Vzhľad rozhrania po spustení programu

Postupne opíšeme jeho jednotlivé ovládacie prvky. V ľavej hornej časti rozhrania sa nachádza základný ovládací panel pre vykresľovacie plochy v Matlabe.

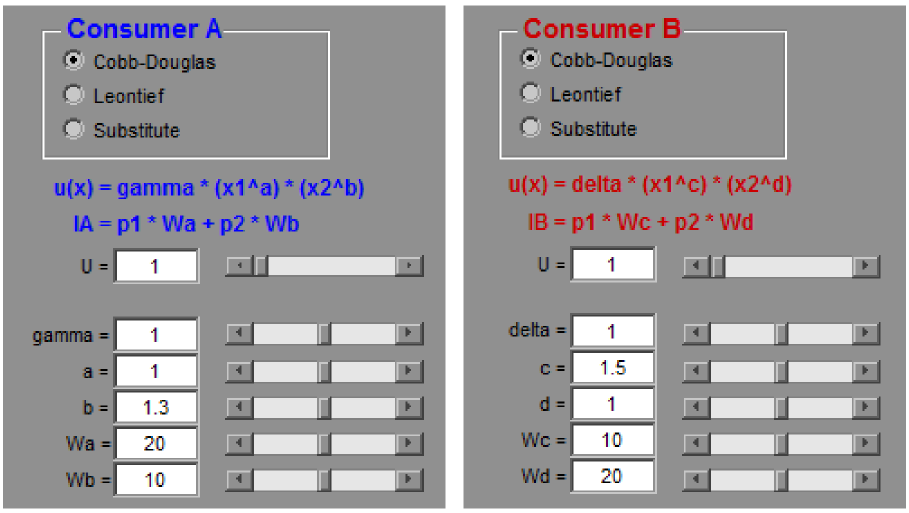
Obr. 21.: Ovládací panel

Pomocou neho vieme nastaviť napr. priblíženie grafu, posúvanie do strán, trojrozmernú rotáciu, zistenie presných súradníc bodov na grafoch atď. Pod ním sa nachádza časť s tlačidlami pre vykresľovanie alebo resetovanie rozhrania, Walrasovej rovnováhy, rozpočtovej priamky, pôvodnej výbavy spotrebiteľov a hladín indiferentnosti v pôvodnej výbave. Tiež sa tu nachádza ovládanie hrúbky čiar pre vykresľovanie grafov. Posledný prvok, políčko *Contour Lines* nastavuje počet zobrazovaných hladín indiferentnosti (pre celočíselné hodnoty užitočnosti).



Obr. 22.: Panel tlačidiel

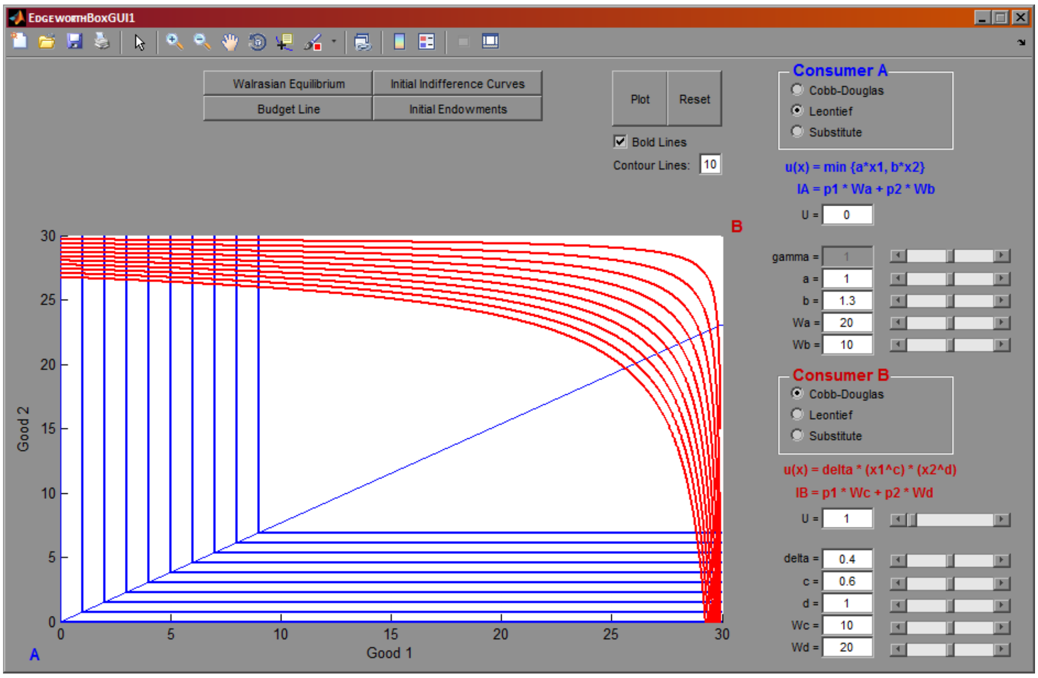
Nižšie sa nachádza plocha pre Edgeworthov obdĺžnik, schému ktorého možno nájsť v kapitole 2. Na pravej strane rozhrania vidíme dve podobné časti:



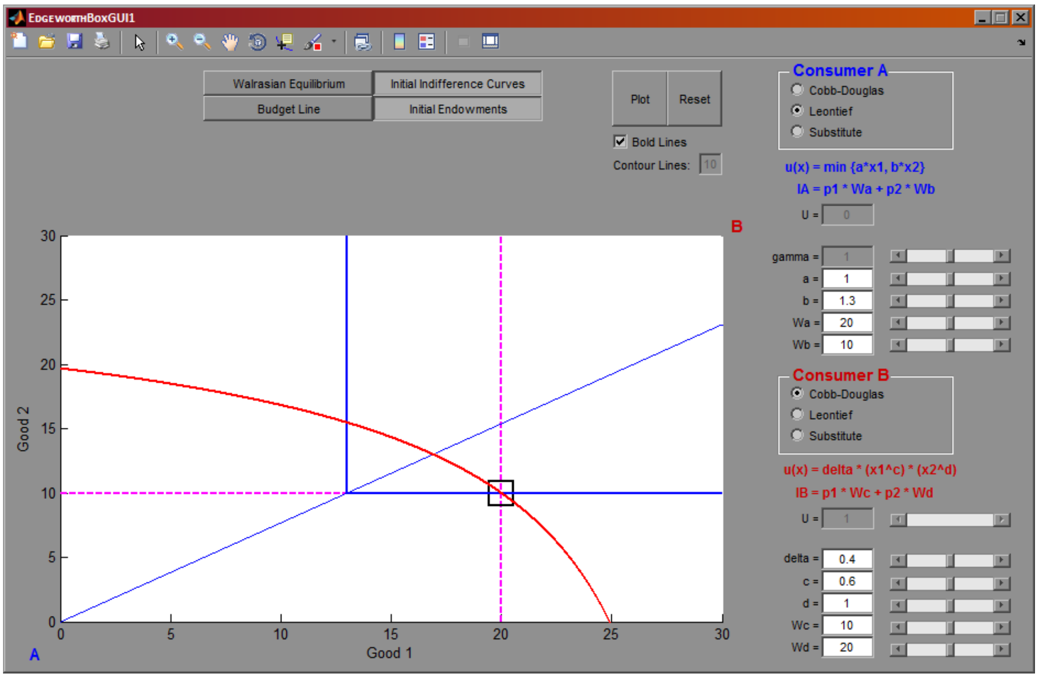
Obr. 23.: Časť pre nastavenie vstupných parametrov

Tu užívateľ nastavuje parametre funkcií užitočnosti pre oboch spotrebiteľov. Rovnice týchto funkcií sa menia s ich voľbou. Pre objasnenie dodávame, že parametre Wa, Wb, Wc a Wd vyjadrujú počiatočné množstvá statkov vo výbavách spotrebiteľov, s ktorými sme pracovali v predchádzajúcich kapitolách, teda ω_a, ω_b pre spotrebiteľa A, ω_c a ω_d pre spotrebiteľa B.

Výstup po vykreslení prvých desiatich vrstevníc pre oboch účastníkov (vrstevnice Leontiefovej funkcie užitočnosti sú vykresľované aj s priamkou, po ktorej sa pohybujú ich „vrcholy“):

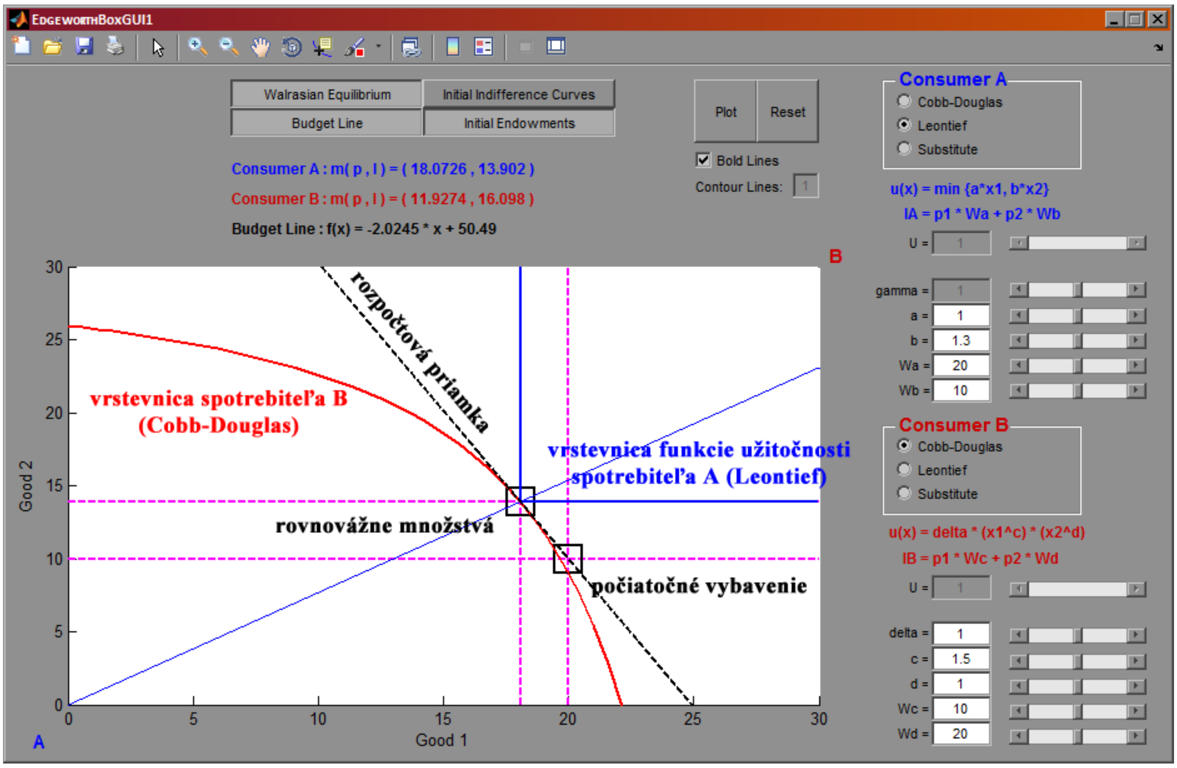


Obr. 24.: Vrstevnice funkcií užitočnosti



Obr. 25.: Vykreslenie vrstevníc v počiatočnej výbave účastníkov:

Po nastavení parametrov pre oboch účastníkov trhu, zobrazení počiatočného vybavenia, rozpočtovej priamky a vykreslenia Walrasovsky rovnovážnych množstiev s vrstevnicami pre tieto množstvá dostávame takýto výstup:



Obr. 26.: Vykreslenie modelovej situácie

Pod časťou s tlačidlami sa nám teraz zobrazili aj hodnoty jednotlivých rovnovážnych množstiev pre oboch spotrebiteľov ako aj rovnica rozpočtovej priamky.

V tomto bode má užívateľ možnosť pomocou posuvníkov na pravej strane rozhrania dynamicky znázorniť, ako sa mení situácia, keď sa menia jednotlivé koeficienty. Môže obmeniť druhy funkcií užitočnosti aj hodnoty koeficientov podľa svojho uváženia, ak chce napríklad modelovať konkrétny príklad Walrasovej rovnováhy. Na vrátenie všetkých hodnôt a nastavení do počiatočného stavu slúži tlačidlo *Reset*.

Záver

Cieľom tejto bakalárskej práce bolo pomocou Edgeworthovho obdĺžnika ilustrovať rozličné prípady Walrasovej rovnováhy.

Po úvode do tematiky v prvých dvoch kapitolách sme tento cieľ splnili v tretej kapitole. Významnú úlohu pri ilustrácii odvodených rovnovážnych množstiev a pomeru cien pritom zohralo nami vytvorené grafické rozhranie, ktorého funkcie sme opísali v poslednej kapitole.

Veríme, že táto práca prinesie úžitok záujemcom o teóriu všeobecného trhu, študentom mikroekonómie a prípadne aj vyučujúcim ako didaktická pomôcka na efektívnejšie sprostredkovanie tejto problematiky.

Zoznam použitých zdrojov

[1] BRUNOVSKÝ, P.: *Mikroekonómia*. Učebný text FMFI UK, dostupný na <http://pc2.iam.fmph.uniba.sk/skripta/brunovsky2/>.

[2] ĎURICA, M.: *Analýza Walrasovej rovnováhy v prípade zameniteľných statkov*. Bakalárska práca, FMFI UK, 2008.