UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY
A INFORMATIKY

# METÓDY VNÚTORNÉHO BODU V DEA MODELOCH

2011

Katarína Pokorná

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY
A INFORMATIKY

# METÓDY VNÚTORNÉHO BODU V DEA MODELOCH

**Bakalárska práca**

| | |
|---|---|
| Študijný program: | Ekonomická a finančná matematika |
| Študijný odbor: | 9.1.9 Aplikovaná matematika |
| Školiace pracovisko: | Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky |
| Vedúci bakalárskej práce: | Doc. RNDr. Margaréta Halická, CSc. |
| Evidenčné číslo: | bf0deb20-b344-46c8-b54d-643d0c637db1 |

**Bratislava, 2011** **Katarína Pokorná**

Univerzita Komenského v Bratislave
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

# ZADANIE ZÁVEREČNEJ PRÁCE

**Meno a priezvisko študenta:** Katarína Pokorná
**Študijný program:** ekonomická a finančná matematika (Jednoodborové štúdium, bakalársky I. st., denná forma)
**Študijný odbor:** 9.1.9. aplikovaná matematika
**Typ záverečnej práce:** bakalárska
**Jazyk záverečnej práce:** slovenský

**Názov :** Metódy vnútorného bodu v DEA modeloch

**Cieľ :** Analyzovať výhody a nevýhody použitia metód vnútorného bodu v DEA modelovaní.

**Literatúra :** [1] Cooper, Seifert, Tone: Data Envelopment Analysis, Kluwer 1999.

**Anotácia :** DEA modely vedú na potrebu riešiť určité úlohy lineárneho prgramovania. Tieto možno riešiť buď simplexovou metódou, alebo metódami vnútorného bodu. Zatiaľ čo riešením simplexovou metódou dostávame bázické riešenie, metódou vnútorného bodu ostrokomplementárne riešenie. Tieto vlastnosti riešení možno využiť pri interpretácii výsledkov príslušného DEA modelu.

**Vedúci :** doc. RNDr. Margaréta Halická, CSc.

**Dátum zadania:** 27.10.2010

**Dátum schválenia:** 08.11.2010

M. Halická
doc. RNDr. Margaréta Halická, CSc.
garant študijného programu

Pokorná
študent

M. Halická
vedúci práce

Dátum potvrdenia finálnej verzie práce, súhlas s jej odovzdaním (vrátane spôsobu sprístupnenia)

M. Halická
vedúci práce

Čestne prehlasujem, že som bakalársku prácu vypracovala samostatne s využitím svojich vedomostí a s použitím uvedenej literatúry.

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

Katarína Pokorná

Touto cestou sa chcem poďakovať svojej vedúcej bakalárskej práce Doc. RNDr. Margaréte Halickej, CSc. za ochotu, pomoc, odborné rady a podnetné pripomienky, ktoré mi pomohli pri písaní tejto práce. Ďakujem aj svojej rodine a priateľom za ich trpezlivosť a podporu.

# Abstrakt

Bakalárska práca sa zaoberá skúmaním analýzy obálky dát z hľadiska interpretácie výsledkov, pri ktorej možno využiť vlastnosti riešení získaných pomocou metód vnútorného bodu a pomocou simplexovej metódy. V práci je stručne vysvetlený úvod do problematiky, ako aj uvedené základné DEA modely. Podrobnejšie sa práca venuje zisťovaniu pseudoefektívnosti pomocou rôznych metód a uvádza výsledky na konkrétnom príklade. Posledná kapitola je zameraná na praktickú aplikáciu DEA modelov pri hodnotení efektívnosti pennsylvánskych nemocníc a na tejto aplikácii demonštruje porovnanie simplexovej metódy a metód vnútorného bodu pri riešení vstupne orientovaného CCR modelu.

Kľúčové slová: Analýza obálky dát (DEA), metódy vnútorného bodu, simplexova metóda, efektívnosť nemocníc

# Abstract

This thesis explores the area of Data Envelopment Analysis from the result interpretation point of view. These were obtained by interior-point methods and the simplex method. The work provides a short introduction to the problem as well as description of basic DEA models. It includes deeper analysis of pseudo-efficiency of different methods and provides results with examples. Last chapter is focused on practical application of DEA models with Pennsylvania hospital efficiency evaluation and demonstrates simplex method and interior-point methods in solving input-oriented CCR model.

Keywords: Data Envelopment Analysis (DEA), interior-point methods, simplex method, hospital efficiency

# Obsah

# Úvod

Jedným z aktuálnych problémov manažérskej praxe je hodnotenie efektívnosti a výkonnosti jednotlivých producentov v rámci danej skupiny. Pod pojmom producent sa myslí organizačný útvar nevýrobného charakteru, či už vo verejnom alebo súkromnom sektore, ako napríklad vzdelávacia inštitúcia, zdravotnícke zariadenie alebo firma. Cieľom ekonomického manažmentu nie je len akési zoradenie útvarov, ale predovšetkým snaha nájsť a odstrániť neefektívne faktory ovplyvňujúce správanie producenta.
Meranie efektívnosti a porovnávanie útvarov je základom pre *Data Envelopment Analysis* (tzv. Analýza obálky dát), ktorá pre danú problematiku patrí v poslednej dobe k najčastejšie používaným metódam. Modely, ktoré Data Envelopment Analysis používa, vychádzajú z teórie lineárneho programovania. Preto na riešenie daných modelov možno použiť rôzne algoritmy, či už metódy vnútorného bodu, alebo simplexovú metódu.

Cieľom tejto práce bude zistiť, aký rozdiel vnášajú jednotlivé algoritmy do interpretácie daného modelu. Prvá kapitola je venovaná niektorým vzťahom a pojmom z teórie lineárneho programovania, ktoré budeme využívať pri práci s modelmi analýzy obálky dát. V druhej kapitole oboznámime čitateľa so základnými orientovanými modelmi Data Envelopment Analysis, ako napríklad, s CCR modelom, ktorým sa budeme viac zaoberať. Tretia kapitola vysvetľuje metódy používané na zisťovanie pseudoefektívnosti analyzovaných útvarov a tiež uvádza krátky problém ako ukážku na porovnanie týchto metód. A v poslednej kapitole uvedieme praktickú aplikáciu modelov Data Envelopment Analysis pri vyhodnocovaní pennsylvánskych všeobecných pohotovostných nemocníc, ako aj porovnanie riešení metódami vnútorného bodu a simplexovou metódou. Na záver zhrnieme výsledky našej práce. V prílohách je možné nájsť zdrojový kód a tabuľky dát použitých v aplikácii.

# 1 Základné pojmy a vzťahy v LP

*Data Envelopment Analysis* (skrátene DEA) využíva vo svojich modeloch teóriu lineárneho programovania. Dôležitú úlohu tu hrá najmä dualita, preto si ozrejmime základné vzťahy, ktoré budeme neskôr používať. V prvom rade si definujeme dvojicu vzájomne duálnych úloh lineárneho programovania. Keďže úlohy LP môžu byť v rôznom tvare, my uvedieme najvšeobecnejší tvar spolu s príslušnou duálnou úlohou.

Primárna úloha LP vo všeobecnom tvare

$$\begin{aligned} \max_{x_1,x_2} \quad & c_1^T x_1 + c_2^T x_2, \\ & A_{11}x_1 + A_{12}x_2 \leq b_1, \\ & A_{21}x_1 + A_{22}x_2 = b_2, \\ & x_1 \geq 0 \end{aligned} \tag{P}$$

a k nej príslušná duálna úloha

$$\begin{aligned} \min_{y_1,y_2} \quad & b_1^T y_1 + b_2^T y_2, \\ & A_{11}^T x_1 + A_{12}^T x_2 \geq c_1, \\ & A_{21}^T x_1 + A_{22}^T x_2 = c_2, \\ & y_1 \geq 0, \end{aligned} \tag{D}$$

kde rozmery príslušných matíc sa dajú odvodiť zo schémy: $\begin{array}{ccc} & n_1 & n_2 \\ m1 & A_{11} & A_{12} \\ m2 & A_{21} & A_{22} \end{array}$.

V oboch úlohách (P) a (D) možno dorovnať nerovnice na rovnosti pomocou tzv. doplnkových premenných $z_1 \geq 0$ a $z_2 \geq 0$ nasledovne:

$$A_{11}x_1 + A_{12}x_2 + z_1 = b_1 \quad \text{v (P)}, \quad A_{11}^T x_1 + A_{12}^T x_2 - z_2 = c_1 \quad \text{v (D)}.$$

Ďalej budeme uvažovať úlohy (P) a (D) už aj s doplnkovými premennými $z_1, z_2$. Funkcie, ktoré budeme v úlohách maximalizovať alebo minimalizovať,t.j. $c_1^T x_1 + c_2^T x_2$ a $b_1^T y_1 + b_2^T y_2$, sa nazývajú účelové funkcie. Rovnosti a nerovnosti nazveme obmedzeniami. Potom do množiny prípustných riešení budú patriť všetky riešenia spĺňajúce obmedzenia a optimálnym riešením bude riešenie z tejto množiny, v ktorom bude mať účelová funkcia optimálnu hodnotu. Všetky optimálne riešenia tvoria množinu optimálnych riešení. Zo základnej vety o lineárnom programovaní (Plesník [1], str.70) vyplýva, že pre úlohu LP nastane práve jedna z možností - optimalita, neohraničenosť alebo neprípustnosť.

**Veta 1.1** (slabá veta o dualite)**.** *Pre ľubovoľné prípustné riešenie* $(x_1, x_2)$ *úlohy (P) a ľubovoľné prípustné riešenie* $(y_1, y_2)$ *úlohy (D) platí:*

$$c_1^T x_1 + c_2^T x_2 \leq b_1^T y_1 + b_2^T y_2.$$

*Dôkaz.* Je možné nájsť v Plesník [1], str. 81 pre úlohy LP s obmedzeniami v tvare nerovností, na ktoré sa naša dvojica úloh jednoducho transformuje. □

Keď aplikujeme výsledky teórie duality na dvojicu úloh (P) a (D), dostaneme:

a) $0 \leq (b_1^T y_1 + b_2^T y_2) - (c_1^T x_1 + c_2^T x_2) = (y_1^T z_1 + x_1^T z_2)$ pre všetky prípustné $(x_1, x_2)$ a $(y_1, y_2)$.

b) Pre úlohy (P) a (D) môže nastať práve jedna z troch možností

   (i) Ak má optimálne riešenie jedna z úloh, tak má aj druhá a optimálne hodnoty účelových funkcií sa rovnajú. (silná veta o dualite)

   (ii) Ak je jedna z úloh neohraničená, potom druhá je neprípustná.

   (iii) Obe úlohy sú neprípustné.

Z (a) a (i) vyplýva, že ak $(x_1, x_2, z_1)$ a $(y_1, y_2, z_2)$ sú optimálne riešenia úloh (P) a (D), potom sú *komplementárne*, t.j. $(y_1^T z_1 + x_1^T z_2) = 0$. To znamená, že z primárno-duálnej dvojice $(x_1, z_1)$ ,$(z_2, y_1)$ je buď primárna alebo duálna zložka (alebo obe) nulová, pretože príslušné veličiny sú nezáporné. Všimnime si, že $y_1$ je nezáporná premenná z (D) a je násobená $z_1$ doplnkovou premennou pre nerovnosť z (P) a podobne $x_1$ je nezáporná premenná z (P) násobená $z_2$ doplnkovou premennou pre nerovnosť z (D).

Pre nás však bude podstatná vlastnosť, že ak budú existovať optimálne riešenia, tak budú existovať aj *ostro komplementárne*, teda také, pre ktoré bude v každom súčine práve jedna zložka nulová.

**Veta 1.2** (veta o existencii ostrokomplementárneho riešenia)**.** *Ak majú obe úlohy (P) a (D) prípustné riešenia, potom existuje optimálne riešenie* $(x_1^*, z_1^*)$ *úlohy (P) a optimálne riešenie* $(z_2^*, y_1^*)$ *úlohy (D) také, že* $x_1^* + z_2^* > 0$ *a* $z_1^* + y_1^* > 0$.

*Dôkaz.* Je možné nájsť vo Vanderbei [2], str. 168-170 , kapitola o ostrej komplementarite, pre úlohy LP iného typu ako naše, ale ľahkou transformáciou dostaneme, čo potrebujeme. □

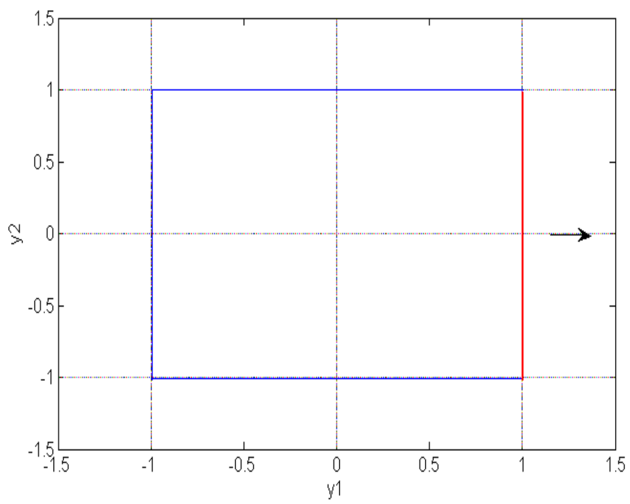
## 1.1 Metódy riešenia úloh LP

Na riešenie úloh lineárneho programovania sa bežne používajú 2 základné metódy, tzv. simplexová metóda a metóda vnútorného bodu. Obe metódy hľadajú optimálne riešenie úlohy, ak také riešenie existuje. Dá sa ukázať, že množinou prípustných riešení v ľubovoľnej úlohe LP je polyéder (tiež polyedrická množina), t.j. prienik konečného počtu polpriestorov v $R^n$, a množina optimálnych riešení je stenou tohto polyédra. V prípade, že je množina optimálnych riešení neprázdna, existuje optimálne riešenie. Ak existuje iba jedno optimálne riešenie, ide o stenu nulovej dimenzie, tzv. vrchol alebo krajný bod. Ak má úloha LP aspoň 2 optimálne riešenia, tak optimálnych riešení bude nekonečne veľa a budú tvoriť celú stenu dimenzie 1. A práve v prípade existencie viacerých optimálnych riešení sa líšia uvedené metódy na riešenie úloh lineárneho programovania.

1. Simplexová metóda - je iteračný proces začínajúci v niektorom z krajných bodov polyedrickej množiny, ktorá je množinou prípustných riešení. Postupne hľadá optimálne riešenie presúvaním sa z jedného krajného bodu do druhého po hranách množiny tak, aby sa v každom kroku zlepšovala (alebo aspoň ostala rovnaká) hodnota účelovej funkcie. Po konečnom počte krokov simplexová metóda nájde optimálne riešenie, ktorým bude niektorý z krajných bodov množiny alebo zistí, že neexistuje optimálne riešenie. V prípade, že množina optimálnych riešení je iba jeden krajný bod, tak je tento bod ostrokomplementárnym riešením úlohy LP.

2. Metóda vnútorného bodu - je iteračná metóda, ktorá začína hľadať optimálne riešenie vo vnútri množiny prípustných riešení. Postupne prechádza cez vnútro množiny a konverguje ku "stredu"množiny optimálnych riešení. O tomto "strede"sa vie z teórie metód vnútorného bodu, že je to ostrokomplementárne riešenie a teda obsahuje maximálny počet kladných zložiek. V prípade, že úloha má iba jedno optimálne riešenie, tak pôjde o krajný bod, inak je riešením už spomínaný "stred"množiny optimálnych riešení.

**Príklad.** *Skúmajme optimalizačnú úlohu:* $\max\{y_1 \mid y_1 \leq 1, y_1 \geq -1, y_2 \leq 1, y_2 \geq -1\}$. *Na obrázku je znázornená množina prípustných riešení, ako aj množina optimálnych riešení. S použitím metódy vnútorného bodu dostaneme bod* $(1,0)$*, ktorý je "stredom"množiny optimálnych riešení. Keď na riešenie danej úlohy použijeme simplexovú metódu, tak výsledkom bude jeden z krajných bodov* $(1,1),(1,-1)$*.*



# 2 DEA modelovanie

V tejto kapitole uvedieme niektoré pojmy a základné modely, voľne spracované podľa prednášok ([3]) a literatúry ([4]).

DEA analýza sa venuje hodnoteniu efektívnosti útvarov, ktoré vykonávajú podobnú alebo rovnakú aktivitu. Hovoríme o homogénnej skupine útvarov, ktorých činnosť je charakterizovaná niekoľkými vstupmi a niekoľkými výstupmi. Budeme predpokladať, že útvar sa snaží zvyšovať výkonnosť minimalizáciou vstupov alebo zväčšovaním hodnôt výstupov pri inak nezmenených podmienkach.

V prípade jedného vstupu a jedného výstupu vyjadruje *efektívnosť* daného útvaru príslušný pomerový ukazovateľ

$$\frac{\text{výstup}}{\text{vstup}}.$$

Príkladom takéhoto ukazovateľa môže byť počet pacientov na jedného lekára, firemný zisk na jedného zamestnanca a iné. V prípade viacerých vstupov a viacerých výstupov dostaneme niekoľko pomerových ukazovateľov, ktorých výsledné hodnoty nemusia byť vo vzájomnom súlade. To znamená, že podľa jedného pomerového ukazovateľa možno označiť útvar za efektívny a podľa iného ukazovateľa je možné daný útvar vyhodnotiť ako neefektívny. Preto výhodou DEA oproti iným metódam je, že pri hodnotení môže komplexne zahrnúť vplyvy viacerých vstupov a výstupov na daný útvar, pričom k nim priradí váhy, ktoré možno považovať za akési ich kladné ohodnotenia.

DEA modely využívajú metódu matematického programovania, ktorá umožňuje pracovať s veľkým počtom premenných a obmedzení. Zavedieme označenia, ktoré budeme v modeloch ďalej používať.

$$\begin{aligned}
DMU_i &\ldots i\text{-ty útvar (Decision making unit)} \\
n &\ldots \text{počet útvarov} \\
m &\ldots \text{počet vstupov} \\
s &\ldots \text{počet výstupov} \\
x_j \in R^m &\ldots m\text{-rozmerný vektor vyjadrujúci vstupy j-teho útvaru} \\
y_j \in R^s &\ldots s\text{-rozmerný vektor vyjadrujúci výstupy j-teho útvaru} \\
v_j \in R^m &\ldots m\text{-rozmerný vektor váh pre vstupy j-teho útvaru} \\
u_j \in R^s &\ldots s\text{-rozmerný vektor váh pre výstupy j-teho útvaru} \\
* &\ldots \text{symbol pre označenie optimálneho riešenia}
\end{aligned}$$

Predpoklady:

$$x_j \geq 0, x_j \neq 0,$$

$$y_j \geq 0, y_j \neq 0.$$

Potom pre známe váhy, ktoré prikladáme jednotlivým vstupom a výstupom, t.j. pre dané nejaké vektory $u > 0, v > 0$ váh pre vstupy a výstupy, vyjadríme mieru efektívnosti $E_j(u,v)$ útvaru $DMU_j$ v danom systéme váh ako podiel

$$E_j(u,v) = \frac{u^T y_j}{v^T x_j} = \frac{\sum_{i=1}^{s} u_i y_{ji}}{\sum_{i=1}^{m} v_i x_{ji}}.$$

Podmienka kladných zložiek vektorov váh vyjadruje fakt, že všetky vstupy a výstupy sú dôležité pre činnosť útvaru a preto ich treba brať do úvahy. Je zrejmé, že váhy $u > 0$ a $v > 0$ vieme vždy zvoliť tak, aby $E_j(u,v) \in (0,1]$ pre každé $DMU_j$.

## 2.1 Základné DEA modely

Pri analýze útvarov vzniká otázka voľby kladných váh, ak nie sú známe. Preto $DMU_j$ hľadá váhy, pre ktoré hodnota $E_i(u,v)$ ostatných $DMU_i$ spĺňa požiadavku $E_i(u,v) \in (0,1]$ a zároveň pre daný $DMU_j$ je $E_j(u,v)$ maximálna. Túto úlohu rieši koncepčný model (1), z ktorého vychádzajú základné DEA modely.

$$\begin{aligned} \max_{u,v} \quad & E_j(u,v), \\ & E_i(u,v) \leq 1, \quad \forall i, \\ & u > 0, v > 0. \end{aligned} \tag{1}$$

Avšak kvôli podmienke $u > 0, v > 0$ sa môže stať, že daný model nebude mať riešenie.

**Definícia 2.1.** *Nech dvojica $(u^*, v^*)$ je optimálnym riešením úlohy (1) a $E_j^* = E_j^*(u^*, v^*)$ je optimálnou hodnotou jej účelovej funkcie. Ak $E_j^* = 1$, potom $DMU_j$ je efektívny. V ostatných prípadoch je neefektívny. Ak $E_j^* < 1$, tak $E_j^*$ nazývame mierou efektívnosti.*

V mikroekonomickej teórii sa s produkčným procesom spája tzv. produkčná množina (production possibility set, množina produkčných možností), ktorá zahŕňa všetky možnosti produkcie, ktoré by mohla firma používať. V DEA analýze tiež možno definovať produkčnú množinu s tým rozdielom, že je pre nás neznámou, preto sa dá iba aproximovať na základe informácie o daných útvaroch $DMU_j$, ktoré bude obsahovať a na základe vlastností, ktoré by mala spĺňať.

**Definícia 2.2** (Vlastnosti produkčnej množiny)**.** *Pod množinou $G$ produkčných možností budeme rozumieť najmenšiu možnú množinu spĺňajúcu nasledovné vlastnosti:*

*(A1) Nech $Z = \{(x_j, y_j) \mid j = 1, \ldots, n\}$. Potom $Z \subset G$.*

*(A2) $G$ je konvexná, t.j. konvexné kombinácie dvojíc $(x_i, y_i) \in G$ patria do $G$.*

*(A3) Nech $(x_A, y_A) \in G$. Potom aj $\{(x,y) \mid x_A \geq x, y_A \leq y\} \subset G$.*

*(A4) Nech* $(x_A, y_A) \in G$. *Potom* $(cx_A, cy_A) \in G \quad \forall c > 0$.

*Ak G spĺňa vlastnosti (A1)-(A3), hovoríme o variabilných výnosoch z rozsahu (VRS). Naviac ak G spĺňa aj vlastnosť (A4), tak ide o konštantné výnosy z rozsahu (CRS).*

Potom pre dané vstupy $x$ a výstupy $y$ má produkčná množina s CRS tvar:

$$G = \{(x, y) \mid \sum_{i=1}^{n} x_i\lambda_i \leq x, \sum_{i=1}^{n} y_i\lambda_i \geq y, \lambda_i \geq 0 \quad \forall i\}$$

Pre VRS sa pridá podmienka $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$.

Produkčná množina určuje tzv. efektívnu hranicu (efficient frontier), na ktorej ležia kombinácie vstupov a výstupov efektívnych útvarov.

### CCR model

CCR model (autori: Charnes,Cooper,Rhodes) je model pre konštantné výnosy z rozsahu odvodený z koncepčného modelu (1), ale aby bol úlohou lineárneho programovania, je potrebné rozšíriť množinu prípustných riešení na $u \geq 0, v \geq 0$ a odstrániť zlomok z účelovej funkcie. Kvôli rozšíreniu množiny musíme byť opatrní pri interpretácii modelu, ktorej sa budeme venovať neskôr.
Odstránenie zlomku sa dá urobiť dvomi spôsobmi, preto poznáme dva druhy CCR modelov. Prvým sú modely orientované na vstupy, ktoré sa snažía zistiť, ako zlepšiť vstupné hodnoty útvarov $DMU_i$ tak, aby sa útvary stali efektívnymi. Analogicky sa formulujú modely orientované na výstupy.
Úpravami koncepčného modelu (1) teda dostaneme CCR vstupne orientovaný multiplikatívny model

$$\begin{aligned} \max_{u,v} \quad & u^T y_j, \\ v^T x_j &= 1, \\ u^T y_i - v^T x_i &\leq 0, \quad \forall i, \\ u \geq 0, v &\geq 0 \end{aligned} \tag{CCR-I-MM}$$

a k nemu vytvorenú duálnu úlohu, tzv. obálkový model:

$$\begin{aligned} \min_{\theta,\lambda} \quad & \theta, \\ \sum_{i=1}^{n} x_i\lambda_i &\leq \theta x_j, \\ \sum_{i=1}^{n} y_i\lambda_i &\geq y_j, \\ \lambda_i &\geq 0, \quad \forall i. \end{aligned} \tag{CCR-I-D}$$

Dá sa ukázať, že oba modely (CCR-I-MM) a (CCR-I-D) sú prípustné. Z teórie LP vyplýva, že v oboch modeloch bude existovať optimálne riešenie.

**Definícia 2.3.** *Nech* $(u^*, v^*)$ *je optimálnym riešením a nech* $E_j^*$ *je optimálnou hodnotou účelovej funkcie úlohy (CCR-I-MM).*
*Ak* $\exists(u^*, v^*)$ *také, že* $u^* > 0, v^* > 0$ *a* $E_j^* = 1$*, potom* $DMU_j$ *je efektívny.*
*Ak* $\exists(u^*, v^*) : u^* > 0, v^* > 0$ *a* $E_j^* < 1$*, tak* $E_j^*$ *je mierou efektívnosti* $DMU_j$*.*
*Ak neexistuje optimálne riešenie s kladnými váhami (t.j. aspoň jedna zložka vektorov* $u, v$ *je v každom optimálnom riešení nulová) a* $E_j^* = 1$*, potom útvar* $DMU_j$ *je pseudoefektívny, resp. ak* $E_j^* < 1$*, tak* $E_j^*$ *nazývame mierou pseudoefektívnosti* $DMU_j$*.*

Obálkový model (CCR-I-D) sa dá upraviť na model (CCR-I-OM) doplnením ohraničení na rovnosti pomocou doplnkových premenných $s_x, s_y$, tzv. slack-ov (rezervy). Takto upravený model budeme ďalej používať, pretože je vhodnejší na intepretáciu:

$$
\begin{aligned}
\min_{\theta,\lambda,s_x,s_y} \quad & \theta, \\
\sum_{i=1}^{n} x_i\lambda_i + s_x &= \theta x_j, \\
\sum_{i=1}^{n} y_i\lambda_i - s_y &= y_j, \\
\lambda_i &\geq 0, \quad \forall i, \\
s_x \geq 0, s_y &\geq 0.
\end{aligned}
\tag{CCR-I-OM}
$$

Model (CCR-I-OM) je tiež prípustný, stačí k prípustnému riešeniu modelu (CCR-I-D) doplniť vhodné $(s_x, s_y)$. To znamená, že existuje optimálne riešenie modelu (CCR-I-OM).

**Definícia 2.4.** *Nech* $(s_x^*, s_y^*)$ *je optimálnym riešením a nech* $\theta^*$ *je optimálnou hodnotou účelovej funkcie úlohy (CCR-I-OM).*
*Ak pre* $\forall(s_x^*, s_y^*)$ *platí, že* $s_x^* = 0, s_y^* = 0$ *a hodnota* $\theta^* = 1$*, potom* $DMU_j$ *je efektívny.*
*Ak* $\forall(s_x^*, s_y^*) : s_x^* = 0, s_y^* = 0$ *a* $\theta^* < 1$*, tak* $\theta^*$ *je mierou efektívnosti* $DMU_j$*.*
*Ak* $\exists(s_x^*, s_y^*)$ *také, že aspoň jedna zložka vektorov* $s_x^*, s_y^*$ *je nenulová a* $\theta^* = 1$*, potom útvar* $DMU_j$ *je pseudoefektívny. Ak* $\exists(s_x^*, s_y^*)$ *také, že aspoň jedna zložka vektorov* $s_x^*, s_y^*$ *je nenulová a* $\theta^* < 1$*, tak* $\theta^*$ *nazývame mierou pseudoefektívnosti.*

Analogicky môžeme zadefinovať CCR výstupne orientovaný multiplikatívny model

$$
\begin{aligned}
\min_{u,v} \quad & v^T x_j, \\
u^T y_j &= 1, \\
u^T y_i - v^T x_i &\leq 0, \quad \forall i, \\
u \geq 0, v &\geq 0
\end{aligned}
\tag{CCR-O-MM}
$$

a k nemu príslušný upravený obálkový model

$$
\begin{aligned}
\max_{\psi,\lambda,s_x,s_y} \quad & \psi, \\
\sum_{i=1}^{n} x_i\lambda_i + s_x &= x_j, \\
\sum_{i=1}^{n} y_i\lambda_i - s_y &= \psi y_j, \\
\lambda_i &\geq 0, \quad \forall i, \\
s_x \geq 0, s_y &\geq 0.
\end{aligned}
\tag{CCR-O-OM}
$$

Na rozdiel od CCR vstupne orientovaného modelu sú optimálne hodnoty účelových funkcií CCR výstupne orientovaného multiplikatívneho modelu $v^{*T}x_j$ a príslušného obálkového modelu $\psi^*$ z intervalu $[1,\infty)$. Preto potom mieru efektívnosti, resp. pseudoefektívnosti definujeme pre CCR výstupne orientovaný model ako prevrátenú hodnotu optimálnej hodnoty účelovej funkcie.

**BCC model**

BCC model (autori Banker,Charnes,Cooper) je orientovaný model pre variabilné výnosy z rozsahu. Odvodený bol z CCR modelu pridaním ohraničenia $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i = 1$ do obálkového modelu, čo sa v príslušnej duálnej úlohe, teda v multiplikatívnom modeli, prejavilo pridaním novej premennej. Po úpravách dostaneme BCC vstupne orientovaný obálkový model

$$
\begin{aligned}
\min_{\theta,\lambda,s_x,s_y} \quad & \theta, \\
\sum_{i=1}^{n} x_i\lambda_i + s_x &= \theta x_j, \\
\sum_{i=1}^{n} y_i\lambda_i - s_y &= y_j, \\
\sum_{i=1}^{n} \lambda_i &= 1, \\
\lambda_i &\geq 0, \quad \forall i, \\
s_x \geq 0, s_y &\geq 0
\end{aligned}
\tag{BCC-I-OM}
$$

a k nemu vytvorenú duálnu úlohu, t.j. multiplikatívny model:

$$
\begin{aligned}
\max_{u,v,u_0} \quad & u^T y_j - u_0, \\
v^T x_j &= 1, \\
u^T y_i - v^T x_i - u_0, &\leq 0 \quad \forall i, \\
u \geq 0, v &\geq 0.
\end{aligned}
\tag{BCC-I-MM}
$$

Podobne ako pri CCR modeloch, aj tu môžeme zadefinovať BCC výstupne orientovaný multiplikatívny model

$$\begin{aligned} \min_{u,v,v_0} \quad & v^T x_j - v_0, \\ u^T y_j &= 1, \\ u^T y_i - v^T x_i + v_0 &\leq 0, \quad \forall i, \\ u \geq 0, v &\geq 0 \end{aligned} \tag{BCC-O-MM}$$

a k nemu príslušný obálkový model

$$\begin{aligned} \max_{\psi,\lambda,s_x,s_y} \quad & \psi, \\ \sum_{i=1}^{n} x_i \lambda_i + s_x &= x_j, \\ \sum_{i=1}^{n} y_i \lambda_i - s_y &= \psi y_j, \\ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i &= 1, \\ \lambda_i &\geq 0, \quad \forall i, \\ s_x \geq 0, s_y &\geq 0. \end{aligned} \tag{BCC-O-OM}$$

Ako aj pri CCR modeloch, tak aj pri BCC modeloch nadobúdajú optimálne hodnoty účelových funkcií pre vstupne orientovaný model hodnoty z intervalu $(0, 1]$ a pre výstupný model hodnoty z intervalu $[1, \infty)$. Preto analogicky možno definovať efektívne útvary a mieru efektívnosti. Avšak v porovnaní s CCR modelmi je výsledná miera efektívnosti pre BCC modely vyššia, pretože pridaním ohraničenia v obálkovom modeli sa zmenšila množina prípustných riešení, takže optimálna hodnota nemôže byť nižšia. Z toho vyplýva, že CCR efektívne útvary sú efektívne aj v BCC, ale naopak to platiť nemusí.

## 2.2 Interpretácia modelu

Ukázali sme si základné modely CCR a BCC a definovali k nim efektívnosť útvaru. Ku každému modelu možno pristupovať dvomi spôsobmi a to buď cez multiplikatívny model alebo cez obálkový model. Oba modely sú navzájom duálnymi úlohami lineárneho programovania, preto sa vynára otázka, ako sú prepojené optimálne riešenia týchto úloh. Odpoveďou bude veta o ekvivalencii interpretácie multiplikatívneho a obálkového modelu.

V multiplikatívnom modeli označíme účelové funkcie $u^T y_j := U$ pre vstupne orientovaný model a $v^T x_j := V$ pre výstupne orientovaný model. O optimálnych hodnotách účelových funkcii multiplikatívneho modelu vieme, že $U^* \in (0, 1]$ a $V^* \in [1, \infty)$ a podľa silnej vety o dualite pre optimálne hodnoty obálkového modelu platí: $\theta^* = U^*, \psi^* = V^*$.

Pri dualite lineárneho programovania sme hovorili o komplementarite premenných, konkrétne ohraničené premenné jedného modelu sú komplementárne s doplnkovými premennými druhého modelu. V našom prípade nás bude zaujímať iba komplementarita ohraničených premenných $\begin{pmatrix} v \\ u \end{pmatrix} \geq 0$ k doplnkovým premenným $\begin{pmatrix} s_x \\ s_y \end{pmatrix} \geq 0$. Pre ľubovoľnú dvojicu $\begin{pmatrix} v \\ u \end{pmatrix}$ a $\begin{pmatrix} s_x \\ s_y \end{pmatrix}$ optimálnych riešení platí komplementarita, t.j. $v^T s_x + u^T s_y = 0$. Z nezápornosti dostávame komplementaritu po zložkách:

$$\begin{aligned} v_i s_{xi} &= 0 \quad \forall i = 1, \ldots, m \\ u_i s_{yi} &= 0 \quad \forall j = 1, \ldots, s \end{aligned} \tag{2}$$

**Veta 2.5** (Veta o ekvivalencii interpretácie multiplikatívneho a obálkového modelu)**.** *Nech $u, v$ je optimálne riešenie multiplikatívneho modelu a $s_x, s_y$ je optimálne riešenie obálkového modelu. Potom platí nasledujúca ekvivalencia*

$$\exists u > 0, v > 0 \Leftrightarrow \forall s_x, s_y : s_x = 0, s_y = 0,$$

*a definície (2.3) a (2.4) sú evivalentné.*

*Dôkaz.* "$\Rightarrow$"Nech $\exists u > 0, v > 0$, ktoré je optimálnym riešením multiplikatívneho modelu. Pretože v každej dvojici optimálnych riešení musí platiť (2), tak v každom optimálnom riešení $s_x, s_y$ obálkového modelu platí, že $s_x = 0, s_y = 0$.
"$\Leftarrow$"Dokážeme opačnú implikáciu. Na dôkaz využijeme vetu (1.2) o existencii ostrokomplementárneho riešenia, t.j. riešenia, v ktorom práve jedna z komplementárnej dvojice je nulová. Nech teda pre $\forall s_x, s_y$ optimálne riešenie obálkového modelu platí: $s_x = 0, s_y = 0$. Potom $\exists u > 0, v > 0$, ktoré tvorí s každým $s_x = 0, s_y = 0$ ostrokomplementárnu dvojicu.

Teraz môžeme interpretovať výsledky obálkového modelu analogicky ako v multiplikatívnom modeli, akurát nahradíme podmienku $\exists u > 0, v > 0$ optimálneho riešenia podmienkou $\forall s_x = 0, s_y = 0$. □

# 3 Pseudoefektívnosť

Pri základných orientovaných modeloch ako sú CCR a BCC modely, sa okrem efektívnych a neefektívnych útvarov môžeme stretnúť aj s pseudoefektívnymi útvarmi. Vyznačujú sa tým, že v každom optimálnom riešení je niektorá z optimálnych váh $u_i^*$,$v_j^*$ je nulová (muliplikatívny model) alebo existuje také riešenie, že v ňom niektorý zo slackov $s_x^*$,$s_y^*$ je nenulový (obálkový model). Takúto možnosť sme pripustili pri zostavovaní modelu, kde sme rozšírili množinu prípustných riešení, aby sme dostali úlohu lineárneho programovania. Avšak pseudoefektívne útvary môžu spôsobiť chyby v interpretácii výsledku, preto je potrebné zisťovať pseudoefektívnosť pri orientovaných modeloch.

## 3.1 Zisťovanie pseudoefektívnosti

Na zisťovanie pseudoefektívnosti existujú rôzne metódy, medzi nimi aj metódy vnútorného bodu, $\epsilon$-metóda a dvojfázová metóda, ktorým sa budeme venovať.

### 3.1.1 Metódy vnútorného bodu

Ako už bolo spomenuté, metódy vnútorného bodu (Interior-point methods) sú založené na hľadaní optimálneho riešenia cez vnútro množiny prípustných riešení. Získame tak ostrokomplementárne riešenie, ktoré bude mať maximálny počet kladných prvkov. Nech teraz $u^*, v^*$ je optimálne riešenie multiplikatívneho modelu získané metódami vnútorného bodu. Vďaka vlastnosti ostrokomplementárneho riešenia, $u^*$ a $v^*$ obsahujú maximálny počet kladných zložiek (spomedzi všetkých optimálnych riešení), preto ak niektorá zo zložiek $u^*$ a $v^*$ je nulová, tak ide o pseudoefektívnosť. V obálkovom modeli získame metódou vnútorného bodu optimálne riešenie $s_x^*, s_y^*$. Ak platí, že $s_x^* = 0, s_y^* = 0$, potom z ostrej komplementarity $s_x^*$ a $s_y^*$ vyplýva, že každé iné optimálne riešenie je nulové a teda nejde o pseudoefektívnosť ani o mieru pseudoefektívnosti.

### 3.1.2 $\epsilon$ - metóda

$\epsilon$ - metóda vychádza zo simplexovej metódy. Zakladá sa na tom, že v multiplikatívnom modeli nahradíme podmienky $u \geq 0$, $v \geq 0$ za podmienky $u \geq \epsilon e$, $v \geq \epsilon e$, kde e je vektor samých jednotiek (ide o tzv. odrazenie od 0). Ak by sme našli riešenie takto upraveného modelu a $\theta^* = 1$, znamenalo by to, že pre pôvodný model možno vylúčiť pseudoefektívnosť. Otázkou ostáva ako bezpečne zvoliť $\epsilon$, aby sme v upravenom modeli našli riešenie. Nevýhodou $\epsilon$-metódy je, že pre neefektívne útvary z multiplikatívneho modelu nevyplýva, či ide o mieru efektívnosti alebo mieru pseudoefektívnosti. V obálkovom modeli sa zmena podmienok prejaví v účelovej funkcií. Od pôvodnej účelovej funkcie sa odčíta výraz $\epsilon(s_x^T e + s_y^T e)$, preto pseudoefektívnosť môže nastať v prípade, keď hodnota účelovej funkcie bude menšia ako 1. Či hodnota účelovej funkcie vyjadruje mieru efektívnosti alebo len mieru pseudoefektívnosti, zistíme podľa hodnôt $s_x$,$s_y$ v optimálnom riešení. Ak niektorá zložka týchto vektorov je kladná, ide iba o mieru pseudoefektívnosti.

### 3.1.3 Dvojfázová metóda

Dvojfázová metóda, podobne ako $\epsilon$ - metóda, vychádza zo simplexovej metódy. Skladá sa z dvoch fáz. V 1.fáze hľadáme riešenie obálkového modelu. Ak niektorá zo zložiek $s_x^*$,$s_y^*$ je nenulová, ide o pseudoefektívnosť alebo mieru pseudoefektívnosti. V prípade, že $s_x^* = 0$ a $s_y^* = 0$, prejdeme do druhej fázy, v ktorej zafixujeme hodnotu $\theta^*$ z 1.fázy. Teraz však nahradíme účelovú funkciu za funkciu: $\theta^* - (s_x^T e + s_y^T e)$. Čo je ekvivalentné s $max(s_x^T e + \ s_y^T e) =: H$. Vyriešime takto upravený model a ak $H^* > 0$ ide o pseudoefektívnosť, ak $H^* = 0$ bude sa jednať o mieru efektívnosti.

Poďme sa pozrieť, ako vyzerá rozdiel v riešeniach jednotlivými metódami na menšom príklade.

## 3.2 Použitie metód, ich výhody a nevýhody

Uvažujme upravené dáta s 2 vstupmi a 2 výstupmi pre 12 útvarov z knihy ([4], str.12).
Najprv budeme riešiť CCR vstupne orientovaný model metódou vnútorného bodu. To

Tabuľka 1: Dáta

| Útvar | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Vstupy | 20 | 20 | 25 | 27 | 22 | 55 | 33 | 31 | 30 | 50 | 53 | 38 |
| | 151 | 131 | 160 | 168 | 158 | 255 | 235 | 206 | 244 | 268 | 306 | 284 |
| Výstupy | 100 | 100 | 160 | 180 | 94 | 230 | 220 | 152 | 190 | 250 | 260 | 250 |
| | 90 | 90 | 55 | 72 | 66 | 90 | 88 | 80 | 100 | 100 | 147 | 120 |

znamená, že výslednými riešeniami budú ostrokomplementárne riešenia, teda riešenia s maximálnym počtom kladných zložiek. Preto ak v multiplikatívnom modeli bude niektorá z priradených váh nulová, pôjde o pseudoefektívnosť alebo mieru pseudoefektívnosti. Keď sa pozrieme do tabuľky 2, vidíme hneď viacero takých útvarov. Konkrétne, pseudoefektívne sú útvary č.1 a č.7, pretože okrem nulovej váhy majú hodnotu účelovej funkcie (ďalej len CCR-I) rovnú 1. Pri útvaroch č. 3,5,6,9,10,11 hovoríme o miere pseudoefektívnosti, lebo CCR-I<1 a niektorá zložka váh je nulová. V obálkovom modeli nám to potvrdili aj príslušné komplementárne slacky (Tabuľka 3). A naopak, ak v obálkovom modeli budú slacky nulové, z ostrej komplementarity vieme, že potom všetky slacky daného útvaru budú nulové a teda pôjde o efektívnosť, resp. mieru efetívnosti. Podobne to bude aj v multiplikatívnom modeli, ak bude mať daný útvar nenulové váhy $u^*, v^*$, tak pôjde o efektívnosť alebo o mieru efektívnosti. Z tabuliek 2,3 vidno, že efektívne útvary sú útvary č.2,4,12 a o mieru efektívnosti ide pri ôsmom útvare.

Tabuľka 2: Riešenie metódou vnútorného bodu - (CCR-I-MM)

| Útvar | CCR-I | Priradené váhy | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | $v_1^*$ | $v_2^*$ | $u_1^*$ | $u_2^*$ |
| 1 | 1 | 0.050000 | 0 | 0.000445 | 0.010617 |
| 2 | 1 | 0.030393 | 0.002993 | 0.001800 | 0.009111 |
| 3 | 0.96000 | 0.040000 | 0 | 0.006000 | 0 |
| 4 | 1 | 0.019656 | 0.002794 | 0.004407 | 0.002871 |
| 5 | 0.75792 | 0.045455 | 0 | 0.004416 | 0.005195 |
| 6 | 0.84183 | 0 | 0.003922 | 0.003660 | 0 |
| 7 | 1 | 0.030303 | 0 | 0.004339 | 0.000517 |
| 8 | 0.78899 | 0.025202 | 0.001062 | 0.003443 | 0.003320 |
| 9 | 0.99619 | 0.033333 | 0 | 0.003238 | 0.003810 |
| 10 | 0.87065 | 0 | 0.003731 | 0.003223 | 0.000635 |
| 11 | 0.89889 | 0 | 0.003268 | 0.002065 | 0.002462 |
| 12 | 1 | 0.025987 | 0.000044 | 0.003241 | 0.001581 |

Tabuľka 3: Riešenie metódou vnútorného bodu - (CCR-I-OM)

| Útvar | CCR-I | Slacky | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | $s_{x_1}^*$ | $s_{x_2}^*$ | $s_{y_1}^*$ | $s_{y_2}^*$ |
| 1 | 1 | 0 | 13.6540 | 0 | 0 |
| 2 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 3 | 0.96000 | 0 | 3.5757 | 0 | 9 |
| 4 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 5 | 0.75792 | 0 | 3.6530 | 0 | 0 |
| 6 | 0.84183 | 11.8010 | 0 | 0 | 2 |
| 7 | 1 | 0 | 24.8080 | 0 | 0 |
| 8 | 0.78899 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 9 | 0.99619 | 0 | 21.4410 | 0 | 0 |
| 10 | 0.87065 | 6.0323 | 0 | 0 | 0 |
| 11 | 0.89889 | 4.3411 | 0 | 0 | 0 |
| 12 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |

Ďalej budeme riešiť náš model pomocou simplexovej metódy. Na rozdiel od metód vnútorného bodu, riešenie získané simplexovou metódou je bázické, t.j. je to jeden z krajných bodov množiny optimálnych riešení. Z toho vyplýva, že keď v multiplikatívnom modeli dostaneme riešenie s nejakou nulovou zložkou váh, tak nevieme s určitosťou povedať, či neexistuje iné riešenie, ktoré by mohlo mať kladné váhy. Podobné je to aj v obálkovom modeli. Nulovosť slackov nevylúči možnú existenciu riešenia s nenulovými slackmi. V tabuľkách 4, 5 sú uvedené výsledky riešeného modelu pomocou simplexovej metódy. V porovnaní s tabuľkami 2, 3 vidieť mnoho rozdielov. Z multiplikatívneho modelu sa dá jednoznačne povedať iba o ôsmom útvare, že ide o mieru efektívnosti. Z obálkového modelu vyplýva miera pseudoefektívnosti pre útvary č. 3,6,9,10,11. Pri ostatných útvaroch nie je možné určiť o aké útvary z hľadiska efektívnosti ide. Toto je veľkou nevýhodou simplexovej metódy, preto sa vyvinuli metódy, ktoré síce vychádzajú zo simplexovej metódy, ale mohli by viac pomôcť pri hodnotení efektívnosti útvarov.

Tabuľka 4: Riešenie simplexovou metódou - (CCR-I-MM)

| Útvar | CCR-I | Priradené váhy | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | $v_1^*$ | $v_2^*$ | $u_1^*$ | $u_2^*$ |
| 1 | 1 | 0.050000 | 0 | 0.004857 | 0.005714 |
| 2 | 1 | 0 | 0.007634 | 0.004824 | 0.005751 |
| 3 | 0.96000 | 0.040000 | 0 | 0.006000 | 0 |
| 4 | 1 | 0 | 0.005952 | 0.005556 | 0 |
| 5 | 0.75792 | 0.045455 | 0 | 0.004416 | 0.005195 |
| 6 | 0.84183 | 0 | 0.003923 | 0.003660 | 0 |
| 7 | 1 | 0.030303 | 0 | 0.004546 | 0 |
| 8 | 0.78899 | 0.025202 | 0.001062 | 0.003443 | 0.003320 |
| 9 | 0.99619 | 0.033333 | 0 | 0.003238 | 0.003810 |
| 10 | 0.87065 | 0 | 0.003731 | 0.003483 | 0 |
| 11 | 0.89889 | 0 | 0.003268 | 0.002065 | 0.002462 |
| 12 | 1 | 0.026316 | 0 | 0.003684 | 0.000658 |

Prvou upravenou metódou je $\epsilon$-metóda. Zvoľme $\epsilon = 0.001$. V multiplikatívnom modeli sa dá všimnúť (Tabuľka 6), že váhy, ktoré pri metóde vnútorného bodu boli nulové, sa teraz rovnajú epsilonu kvôli podmienke $u \geq \epsilon e$, $v \geq \epsilon e$, v upravenom modeli. Príslušným útvarom sa znížila hodnota účelovej funkcie, pretože $\theta - \epsilon(s_x^T e + s_y^T e)$. Z toho vyplýva, že už nebudú tieto útvary efektívne, ale či pôjde o pseudoefektívnosť, musíme skúmať v obálkovom modeli. Nenulové slacky sa zväčšili oproti metóde vnútorného bodu, ale nulové ostali nulové. Avšak hodnoty účelových funkcí CCR-I pre útvary, pri ktorých ide o efektívnosť alebo mieru efektívnosti, sa nezmenili. Jedinou výnimkou je útvar č.12, ktorý sme podľa metód vnútorného bodu označili za efektívny. V tabuľke 6 vidíme, že $v_2^* = 0.001$. A v tabuľke 7 je príslušný slack rovný 46.8110. To by znamenalo, že ide o pseudoefektívnosť. Ak by sme však na začiatku zvolili $\epsilon = 0.0001$, tak už by sme dostali pri danom útvare všetky slacky nulové a váhy by boli väčšie ako $\epsilon$ a teda by sa potvrdila efektívnosť dvanásteho útvaru. Preto problém, ktorý pri $\epsilon$-metóde môže nastať, sa týka voľby $\epsilon$. Ak zvolíme $\epsilon$ veľmi malé, ani nerozoznáme rozdiel od pôvodnej úlohy. Naopak pri väčšom $\epsilon$ nemusí mať úloha prípustné riešenie alebo môže skresliť výsledok.

Tabuľka 5: Riešenie simplexovou metódou - (CCR-I-OM)

| Útvar | CCR-I | Slacky | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | $s_{x_1}^*$ | $s_{x_2}^*$ | $s_{y_1}^*$ | $s_{y_2}^*$ |
| 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 2 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 3 | 0.96000 | 0 | 0 | 0 | 9 |
| 4 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 5 | 0.75792 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 6 | 0.84183 | 11.8010 | 0 | 0 | 2 |
| 7 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 8 | 0.78899 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 9 | 0.99619 | 0 | 19.3940 | 0 | 0 |
| 10 | 0.87065 | 6.0323 | 0 | 0 | 0 |
| 11 | 0.89889 | 4.3411 | 0 | 0 | 0 |
| 12 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |

Poslednou metódou je dvojfázová metóda. V prvej fáze sa dopracujeme k rovnakému riešeniu obálkového modelu ako pri simplexovej metóde. Útvary, ktoré budú mať nenulové slacky, budú pseudoefektívne alebo pôjde o mieru pseudefektívnosti. V našom prípade to budú útvary č.3,6,9,10,11. Ostatné, čo ostali, majú slacky nulové a možno s nimi prejsť do druhej fázy so zafixovaním optimálnej hodnoty účelovej funkcie. V druhej fáze sa rieši upravený model, ide o maximalizáciu účelovej funkcie $max(s_x^T e + s_y^T e) =: H$. V našom príklade vyšli hodnoty $H^*$ nulové pri útvaroch 2,4,8,12 , teda sa jedná buď o efektívnosť, alebo o mieru efektívnosti. Pri zvyšných ide o pseudoefektívnosť alebo mieru pseudoefektívnosti. Ukazuje sa, že dvojfázová metóda je numericky spoľahlivá, na rozdiel od $\epsilon$-metódy. Obe metódy vychádzajú zo simplexovej metódy, ktorá niekedy môže byť výhodnejšia ako metódy vnútorného bodu, ale závisí to skôr od veľkosti a zložitosti lineárneho problému. Inak možno označiť metódu vnútorného bodu za najvýhodnejšiu pri zisťovaní pseudoefektívnosti, pretože z riešenia vždy vieme priamo určiť, či sa jedná o efektívnosť alebo pseudoefektívnosť daného útvaru.

Tabuľka 6: Riešenie $\epsilon$-metódou ($\epsilon = 0.001$)

| Útvar | CCR-I | Priradené váhy | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | $v_1^*$ | $v_2^*$ | $u_1^*$ | $u_2^*$ |
| 1 | 0.98000 | 0.042450 | 0.001 | 0.005061 | 0.005266 |
| 2 | 1 | 0.039185 | 0.001651 | 0.005354 | 0.005162 |
| 3 | 0.94673 | 0.033600 | 0.001 | 0.005573 | 0.001 |
| 4 | 1 | 0.029344 | 0.001236 | 0.004009 | 0.003866 |
| 5 | 0.75360 | 0.038273 | 0.001 | 0.004655 | 0.004788 |
| 6 | 0.82803 | 0.001 | 0.003706 | 0.003209 | 0.001 |
| 7 | 0.97033 | 0.023182 | 0.001 | 0.003182 | 0.003071 |
| 8 | 0.78899 | 0.025202 | 0.001062 | 0.003443 | 0.003320 |
| 9 | 0.97261 | 0.025200 | 0.001 | 0.003385 | 0.003294 |
| 10 | 0.86461 | 0.001 | 0.003545 | 0.002350 | 0.002770 |
| 11 | 0.89455 | 0.001 | 0.003095 | 0.002066 | 0.002431 |
| 12 | 0.99266 | 0.018842 | 0.001 | 0.002705 | 0.002638 |

Tabuľka 7: Riešenie $\epsilon$-metódou ($\epsilon = 0.001$)

| Útvar | CCR-I | Slacky | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | $s_{x_1}^*$ | $s_{x_2}^*$ | $s_{y_1}^*$ | $s_{y_2}^*$ |
| 1 | 0.98000 | 0 | 20 | 0 | 0 |
| 2 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 3 | 0.94673 | 0 | 4.2667 | 0 | 9 |
| 4 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 5 | 0.75360 | 0 | 4.3174 | 0 | 0 |
| 6 | 0.82803 | 11.8010 | 0 | 0 | 2 |
| 7 | 0.97033 | 0 | 29.6670 | 0 | 0 |
| 8 | 0.78899 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 9 | 0.97261 | 0 | 23.5850 | 0 | 0 |
| 10 | 0.86461 | 6.0323 | 0 | 0 | 0 |
| 11 | 0.89455 | 4.3411 | 0 | 0 | 0 |
| 12 | 0.99266 | 0 | 46.8110 | 0 | 0 |

# 4 Hodnotenie efektívnosti nemocníc

V tejto kapitole aplikujeme už spomenuté metódy na zisťovanie efektívnosti vybraných nemocenských zariadení z Pennsylvánie. Najprv vyhodnotíme efektívnosť jednotlivých zariadení, interpretujeme výsledky a potom porovnáme rozdiely v použitých metódach.

Vzhľadom k tomu, že zdravotníctvo je jednou z hlavných oblastí, kde sa využívajú DEA modely, bolo pôvodným zámerom tejto práce aplikovať DEA modely na hodnotenie efektívnosti slovenských lôžkových zariadení. V roku 2007 bola táto analýza vykonaná pre nemocnice v Českej rebublike ([5]) a následne spracovaná v časopise Into Balance ([6]) pre slovenské lôžkové zariadenia, čo bolo hlavnou inšpiráciou pre našu aplikáciu. Avšak pri získavaní údajov sme sa stretli s neochotou poskytnúť potrebné dáta slovenských nemocníc, preto sme sa snažili nájsť vhodnú alternatívu, kde by sme mali sprístupnené všetky údaje.

## 4.1 Výber dát

V USA patrí zdravotníctvo medzi najrýchlejšie rastúce sektory, preto po prečítaní článku ([7]) sme sa rozhodli vybrať pre naše účely pennsylvánske všeobecné pohotovostné nemocnice (general acute care hospital). Pod pojmom všeobecné pohotovostné nemocnice budeme rozumieť licencované nemocnice poskytujúce 24 hodinovú starostlivosť o hospitalizovaných pacientov, vrátane niekoľkých základných služieb, ako napr. liečebné, ošetrovateľské, chirurgické a laboratórne služby.
Dáta pochádzajú z nemocenských správ, ktoré zozbieral Pennsylvania Health Care Cost Containment Council (PHC4) ([8]) a zo štatistík Pennsylvania Department of Health ([9]) pre fiškálny rok 2009. Z finančnej analýzy prvého menovaného zdroja sme určili jednu vstupnú a jednu výstupnú premennú, konkrétne, celkové prevádzkové náklady ako vstupnú premennú a celkové prevádzkové príjmy ako výstupnú premennú. Obe sú uvedené v tisícoch dolárov. Podobne aj z druhého zdroja sme určili dve premenné a to počet lôžok predstavujúci vstupnú premennú a počet tzv. paciento-dní ako výstupnú premennú. Spolu teda budeme do našej analýzy zahŕňať 2 vstupné a 2 výstupné premenné. Čo presne sa pod danými pojmami premenných myslí, uvedieme v nasledujúcom texte.
Vybrané vstupy:

- TOE (Total Operating Expences) - celkové prevádzkové náklady predstavujú všetky náklady spojené s prevádzkou celého zariadenia, ako sú mzdy, odmeny, zásoby, odpisy, úroky, poistenie a pohľadávky. Získanie trvalého zariadenia a iného majetku sa nepovažuje za náklady, ale prejaví sa na súvahe zariadenia ako aktíva. Avšak, náklady na investičný majetok, ako aj odpisy, náklady na prevádzku a údržbu kapitálového vybavenia, sú prevádzkové náklady.

- Lôžka (Beds set up and staffed) - nemocničné lôžka pravidelne udržiavané podľa údajov z 30.6. v hlásenom roku, využité pre pacientov, ktorým sa poskytuje ubytovanie s podpornými službami (ako strava, pranie a upratovanie) a pre obyvateľov, ktorí ostávajú 24 hodín a viac. Zahrňuje tiež novorodenecké lôžka pre strednú/intenzívnu starostlivosť, a vynecháva novorodenecké postieľky a lôžka pre dlhodobú starostlivosť.

Vybrané výstupy:

- TOR (Total Operating Revenue) - celkové prevádzkové príjmy predstavujú všetky príjmy pridelené na splnenie prevádzkových nákladov. Zahŕňa zdroje príjmov ako čistý príjem od pacientov, výnosy z investícii, príspevky, a príjmy z iných prevádzok (napr. jedáleň, parkovisko, nájomné, výskumné a vzdelávacie aktivity). Jednotlivé nemocnice môžu priradiť výnosy z investícii, príspevky, atď., ako neprevádzkové príjmy.

- Paciento-dni (Patient days of care) - paciento-dni sú jednotkou v účtovacom systéme používanom zdravotníckymi zariadeniami. Každý deň reprezentuje jednotku času, počas ktorej pacient využíva zariadenie. Napr. 50 pacientov v nemocnici po jednom dni reprezentuje 50 paciento-dní.

Z dát, ktoré boli dostupné, sme získali kompletné údaje pre 148 nemocníc. Nemocnice sa nachádzajú v deviatich regiónoch podľa delienia PHC4. A keďže budeme chcieť výsledky porovnávať aj s DEA-Solverom, tak použijeme iba vstupnú vzorku 50 nemocníc, ktoré sa nachádzajú v regiónoch 2,4 a 5. Pre korektnosť očíslujeme nemocnice číslami od 1 po 50, kde prvých 22 nemocníc patrí do druhého regiónu, nasledujúcich 12 do štvrtého regiónu a posledných 16 nemocníc je z piateho regiónu. V tabuľkách 17,18 z prílohy vidieť základnú charakteristiku súboru dát, ktorý budeme analyzovať.

Pre analýzu sme vybrali model orientovaný na vstupy, pretože počet prípadov predstavujúci výstupnú premennú Paciento-dni, je vnímaný ako daná potreba zdravotníckych služieb, ktorú treba splniť. O naplnenie daných výstupov sa budeme snažiť minimalizovaním vstupov, teda pre neefektívne útvary pôjde hlavne o redukciu počtu postelí a o redukciu celkových prevádzkových nákladov. Z modelov orientovaných na vstupy prichádzajú do úvahy CCR alebo BCC model, čiže treba určiť, či sa jedná o konštantné alebo variabilné výnosy z rozsahu. My sme sa rozhodli pre CCR model orientovaný na vstupy, pretože očakávame, že k-násobným zvýšením alebo znížením počtu postelí sa k-násobne zvýši, resp. zníži počet paciento-dní. Podobne je to aj s financiami. O koľko viac získame peňazí na prevádzku, o toľko viac ich môžeme minúť.

Tabuľka 8: Sumár dát pre vzorku všeobecných pohotovostných nemocníc

| Charakteristika | Vstupy | | Výstupy | |
|---|---|---|---|---|
| | TOE (tisíce $) | Lôžka | TOR (tisíce $) | Paciento-dni |
| Maximum | 738683 | 638 | 815586 | 178186 |
| Minimum | 16671 | 21 | 16614 | 4548 |
| Priemer | 149264.74 | 167.86 | 157017.18 | 37038.84 |
| Štand. odchýlka | 183196.31 | 148.28 | 198590.73 | 41684.51 |
| Rozsah | 722012 | 617 | 798972 | 173638 |

Modelovať teda budeme CCR vstupne orientovaný model pre 50 útvarov s dvoma vstupnými a dvoma výstupnými premennými.

## 4.2 Interpretácia výsledkov

Na riešenie problému sme najprv použili DEA-Solver-LV, ktorý je súčasťou základnej literatúry DEA modelov ([4]). Kompletné použité dáta sú uvedené v prílohe Dáta a výsledky analýzy v tabuľkách 9, 10,11 a 12. Náš CCR model ukázal, že z vybraných nemocníc má 10 nemocníc hodnotu efektívnosti rovnú číslu 1. Keď sa pozrieme na príslušné priradené váhy (Tabuľka 9, 10), vidíme, že všetky sú nenulové a teda podľa definície (2.3) ide o efektívne útvary. To znamená, že nemocnice č.12,15,23,25,29,30,31,35,45 a 48 využívajú svoje prostriedky najefektívnejšie oproti ostatným nemocniciam, t.j. lôžková vyťaženosť je maximálna.

Ostatné útvary majú efektívnosť menšiu ako 1. Bude nás zaujímať, či ide o mieru efektívnosti alebo mieru pseudoefektívnosti. Z výsledkov môžeme vidieť, že niektoré priradené váhy sú nulové, čo by mohlo znamenať, že ide o pseudoefektívne útvary. Vzhľadom na to, že sa nám nepodarilo presne zistiť akú metódu používa softvér na riešenie modelu, musíme sa pozrieť okrem priradených váh aj na hodnoty slackov (Tabuľka 11,12).

Zistili sme, že 13 nemocníc má nenulové slacky, jedná sa teda o pseudoefektívnosť útvarov. Nenulovosť niektorého zo slackov implikuje existenciu nejakej priradenej váhy s nulovou hodnotou. Takýto jav sa ťažko interpretuje, pretože nulové váhy neodrážajú všetky relevantné stanovené vstupy a výstupy.

Zvyšných 27 nemocníc je neefektívnych, pretože miera efektívnosti je menšia ako 1 a existujú kladné priradené váhy k jednotlivým útvarom. Miera efektívnosti nám hovorí ako je potrebné znížiť vstupy pri zachovaní výstupov, aby sa stal útvar efektívnym. Napríklad, nemocnica číslo 4 s mierou efektívnosti 0.86999 sa stane efektívnou, ak zníži počet postelí zo 69 na 60 (t.j. o 13%) a prevádzkové náklady zo 46634 tisíc dolárov na 40571 tisíc dolárov pri zachovaní hodnoty výstupov.

Jednou veľkou výhodou DEA modelov je, že efektívne útvary vytvárajú tzv. referenčnú množinu, ktorá pomáha určiť efekívny vzor pre neefektívne útvary. Každý neefektívny útvar sa dá zapísať nejakou lineárnou kombináciou efektívnych útvarov. Napr. pre nemocnicu číslo 4 sú v referenčnej množine efektívne nemocnice č. 23,30 a 45. Avšak neznamená to v praxi, že nutne treba hneď znižovať príslušné počty, efektívne nemocnice môžu poslúžiť len ako inšpirácia pre zlepšenie daného zariadenia.

Tabuľka 9: DEA-LV-Solver: Vyhodnotenie efektívnosti nemocníc (1)

| Nemocnica | Efektívnosť | Priradené váhy | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | CCR-I | TOE | Lôžka | TOR | Paciento-dni |
| | | $v_1^*$ | $v_2^*$ | $u_1^*$ | $u_2^*$ |
| 1 | 0.90395 | 1.29E-05 | 1.67E-03 | 9.19E-06 | 1.61E-05 |
| 2 | 0.93686 | 3.26E-05 | 4.23E-03 | 2.67E-05 | 2.82E-05 |
| 3 | 0.98440 | 0 | 2.86E-02 | 1.60E-05 | 0 |
| 4 | 0.86997 | 1.89E-05 | 1.75E-03 | 1.76E-05 | 4.05E-06 |
| 5 | 0.88782 | 1.15E-05 | 1.49E-03 | 9.41E-06 | 9.93E-06 |
| 6 | 0.89416 | 5.23E-05 | 0 | 3.84E-05 | 2.47E-05 |
| 7 | 0.91050 | 4.69E-06 | 4.50E-04 | 4.13E-06 | 2.17E-06 |
| 8 | 0.95002 | 1.37E-05 | 1.77E-03 | 9.73E-06 | 1.70E-05 |
| 9 | 0.88411 | 2.75E-05 | 1.56E-03 | 1.89E-05 | 2.60E-05 |
| 10 | 0.89081 | 2.36E-05 | 0 | 2.01E-05 | 0 |
| 11 | 0.94871 | 3.03E-06 | 3.93E-04 | 2.48E-06 | 2.62E-06 |
| 12 | 1 | 8.25E-06 | 4.68E-04 | 5.67E-06 | 7.80E-06 |
| 13 | 0.86343 | 6.00E-05 | 0 | 4.40E-05 | 2.84E-05 |
| 14 | 0.85370 | 6.76E-06 | 6.49E-04 | 5.95E-06 | 3.12E-06 |
| 15 | 1 | 2.14E-05 | 1.21E-03 | 1.47E-05 | 2.02E-05 |
| 16 | 0.86950 | 2.67E-05 | 2.56E-03 | 2.35E-05 | 1.23E-05 |
| 17 | 0.96772 | 2.32E-06 | 1.04E-03 | 1.16E-06 | 7.70E-06 |
| 18 | 0.93039 | 2.99E-06 | 2.58E-03 | 1.27E-06 | 1.59E-05 |
| 19 | 0.86990 | 3.37E-05 | 0 | 2.47E-05 | 1.59E-05 |
| 20 | 0.90572 | 6.85E-06 | 8.88E-04 | 4.88E-06 | 8.54E-06 |

Tabuľka 10: DEA-LV-Solver: Vyhodnotenie efektívnosti nemocníc (2)

| Nemocnica | Efektívnosť | Priradené váhy | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | CCR-I | TOE | Lôžka | TOR | Paciento-dni |
| | | $v_1^*$ | $v_2^*$ | $u_1^*$ | $u_2^*$ |
| 21 | 0.96543 | 6.02E-06 | 2.70E-03 | 3.01E-06 | 2.00E-05 |
| 22 | 0.87008 | 1.33E-05 | 1.24E-03 | 1.24E-05 | 2.87E-06 |
| 23 | 1 | 1.40E-05 | 1.32E-03 | 1.27E-05 | 4.72E-06 |
| 24 | 0.91412 | 8.22E-06 | 5.44E-04 | 7.75E-06 | 0 |
| 25 | 1 | 1.38E-06 | 1.56E-04 | 1.30E-06 | 3.35E-07 |
| 26 | 0.93163 | 4.08E-05 | 3.78E-03 | 3.80E-05 | 8.76E-06 |
| 27 | 0.90431 | 1.02E-05 | 9.83E-04 | 9.00E-06 | 4.73E-06 |
| 28 | 0.82010 | 2.72E-05 | 1.80E-03 | 2.56E-05 | 0 |
| 29 | 1 | 5.20E-06 | 6.75E-04 | 4.26E-06 | 4.50E-06 |
| 30 | 1 | 2.80E-05 | 2.59E-03 | 2.61E-05 | 6.01E-06 |
| 31 | 1 | 1.20E-05 | 1.03E-02 | 5.07E-06 | 6.34E-05 |
| 32 | 0.88625 | 2.44E-05 | 0 | 1.93E-05 | 6.56E-06 |
| 33 | 0.75503 | 2.89E-05 | 0 | 2.12E-05 | 1.37E-05 |
| 34 | 0.93372 | 4.57E-06 | 5.93E-04 | 3.74E-06 | 3.95E-06 |
| 35 | 1 | 9.53E-06 | 9.16E-04 | 8.39E-06 | 4.40E-06 |
| 36 | 0.98952 | 4.03E-06 | 3.87E-04 | 3.54E-06 | 1.86E-06 |
| 37 | 0.93332 | 5.80E-06 | 5.38E-04 | 5.40E-06 | 1.25E-06 |
| 38 | 0.91754 | 3.13E-05 | 3.55E-03 | 2.95E-05 | 7.61E-06 |
| 39 | 0.98443 | 8.56E-06 | 1.54E-03 | 8.72E-06 | 0 |
| 40 | 0.97060 | 2.05E-06 | 4.08E-03 | 0 | 2.31E-05 |
| 41 | 0.92436 | 7.30E-06 | 6.77E-04 | 6.80E-06 | 1.57E-06 |
| 42 | 0.87328 | 2.23E-05 | 0 | 1.90E-05 | 0 |
| 43 | 0.95006 | 3.61E-06 | 4.67E-04 | 2.95E-06 | 3.11E-06 |
| 44 | 0.86884 | 2.29E-05 | 1.30E-03 | 1.57E-05 | 2.16E-05 |
| 45 | 1 | 1.23E-06 | 1.40E-04 | 1.16E-06 | 3.00E-07 |
| 46 | 0.81836 | 1.24E-05 | 0 | 9.08E-06 | 5.86E-06 |
| 47 | 0.90754 | 9.36E-06 | 8.68E-04 | 8.72E-06 | 2.01E-06 |
| 48 | 1 | 1.14E-06 | 4.81E-04 | 1.01E-06 | 1.83E-06 |
| 49 | 0.95636 | 9.52E-07 | 8.21E-04 | 4.03E-07 | 5.04E-06 |
| 50 | 0.98228 | 1.40E-06 | 1.58E-04 | 1.32E-06 | 3.40E-07 |

Tabuľka 11: DEA-LV-Solver: Vyhodnotenie efektívnosti nemocníc (3)

| Nemocnica | Efektívnosť | Slacks | | | | Referenčná |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | CCR-I | TOE | Lôžka | TOR | Paciento-dni | množina |
| | | $s^*_{x_1}$ | $s^*_{x_2}$ | $s^*_{y_1}$ | $s^*_{y_2}$ | $\lambda_i$ |
| 1 | 0.90395 | 0 | 0 | 0 | 0 | 12,29,35 |
| 2 | 0.93686 | 0 | 0 | 0 | 0 | 29,35,45 |
| 3 | 0.98440 | 4913.173 | 0 | 0 | 643.690 | 25 |
| 4 | 0.86999 | 0 | 0 | 0 | 0 | 23,30,45 |
| 5 | 0.88782 | 0 | 0 | 0 | 0 | 29,35,40 |
| 6 | 0.89416 | 0 | 1.505 | 0 | 0 | 15,35 |
| 7 | 0.91050 | 0 | 0 | 0 | 0 | 23,35,45 |
| 8 | 0.95002 | 0 | 0 | 0 | 0 | 12,29,35 |
| 9 | 0.88411 | 0 | 0 | 0 | 0 | 12,15,35 |
| 10 | 0.89081 | 0 | 12.448 | 0 | 1668.900 | 23 |
| 11 | 0.94871 | 0 | 0 | 0 | 0 | 29,35,45 |
| 12 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 12 |
| 13 | 0.86343 | 0 | 1.631 | 0 | 0 | 15,35 |
| 14 | 0.85370 | 0 | 0 | 0 | 0 | 23,35,45 |
| 15 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 15 |
| 16 | 0.86950 | 0 | 0 | 0 | 0 | 23,35,45 |
| 17 | 0.96772 | 0 | 0 | 0 | 0 | 12,29,31 |
| 18 | 0.93039 | 0 | 0 | 0 | 0 | 29,31,45 |
| 19 | 0.86990 | 0 | 12.407 | 0 | 0 | 15,35 |
| 20 | 0.90572 | 0 | 0 | 0 | 0 | 12,29,35 |
| 21 | 0.96543 | 0 | 0 | 0 | 0 | 12,29,31 |
| 22 | 0.87008 | 0 | 0 | 0 | 0 | 23,30,45 |
| 23 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 23 |
| 24 | 0.91412 | 0 | 0 | 0 | 769.462 | 23,30 |
| 25 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 25 |
| 26 | 0.93162 | 0 | 0 | 0 | 0 | 23,30,45 |
| 27 | 0.90431 | 0 | 0 | 0 | 0 | 23,35,45 |
| 28 | 0.82010 | 0 | 0 | 0 | 1013.627 | 23,30 |
| 29 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 29 |
| 30 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 30 |

Tabuľka 12: DEA-LV-Solver: Vyhodnotenie efektívnosti nemocníc (4)

| Nemocnica | Efektívnosť | Slacks | | | | Referenčná |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | CCR-I | TOE | Lôžka | TOR | Paciento-dni | množina |
| | | $s^*_{x_1}$ | $s^*_{x_2}$ | $s^*_{y_1}$ | $s^*_{y_2}$ | $\lambda_i$ |
| 31 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 31 |
| 32 | 0.88625 | 0 | 12.055 | 0 | 0 | 23,35 |
| 33 | 0.75503 | 0 | 18.202 | 0 | 0 | 15,35 |
| 34 | 0.93372 | 0 | 0 | 0 | 0 | 29,35,45 |
| 35 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 35 |
| 36 | 0.98952 | 0 | 0 | 0 | 0 | 23,35,45 |
| 37 | 0.93332 | 0 | 0 | 0 | 0 | 23,30,45 |
| 38 | 0.91754 | 0 | 0 | 0 | 0 | 25,30,45 |
| 39 | 0.98443 | 0 | 0 | 0 | 1267.899 | 25,30 |
| 40 | 0.97060 | 0 | 0 | 11789.361 | 0 | 31,45 |
| 41 | 0.92436 | 0 | 0 | 0 | 0 | 23,30,45 |
| 42 | 0.87328 | 0 | 61.853 | 0 | 2069.271 | 23 |
| 43 | 0.95009 | 0 | 0 | 0 | 0 | 29,35,45 |
| 44 | 0.86884 | 0 | 0 | 0 | 0 | 12,15,35 |
| 45 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 45 |
| 46 | 0.81836 | 0 | 30.042 | 0 | 0 | 15,35 |
| 47 | 0.90754 | 0 | 0 | 0 | 0 | 23,30,45 |
| 48 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 48 |
| 49 | 0.95636 | 0 | 0 | 0 | 0 | 29,31,45 |
| 50 | 0.98228 | 0 | 0 | 0 | 0 | 25,30,45 |

## 4.3 Porovnanie metód

Na hodnotenie efektívnosti pennsylvánskych nemocníc sme najprv použili DEA-Solver-LV, teraz nás však bude zaujímať prostredie Matlabu. Matlab umožňuje riešiť úlohy lineárneho programovania pomocou funkcie linprog. V jednom z nastavení funkcie linprog je voľba algoritmu, pomocou ktorého nájde funkcia optimálne riešenie. Preto sme zostavili krátky program, ktorý rieši náš CCR vstupne orientovaný model buď pomocou metód vnútorného bodu, alebo pomocou simplexovej metódy. Zdrojový kód programu je možné nájsť v prílohe, príslušné výsledky pre jednotlivé metódy na vybranom súbore 50 nemocníc sa nachádzajú v tabuľkách 13,14,15 a 16. Keďže optimálne hodnoty slackov v obálkovom modeli vyšli rovnako pri oboch metódach a pri riešení úlohy pomocou DEA-Solveru, tak sme ich už neuvádzali v novej tabuľke.

Ako sme už spomínali v predchádzajúcich kapitolách, metódou vnútorného bodu sa postupne dopracujeme k ostrokomplementárnemu riešeniu, pričom simplexovou metódou dostaneme riešenie v niektorom z krajných bodov množiny optimálnych riešení. V našom príklade pennsylvánskych nemocníc sa táto vlastnosť riešení preukázala pri útvaroch s hodnotou optimálnej účelovej funkcie CCR-I rovnej 1, t.j. pri efektívnych alebo pseudoefektívnych útvaroch. Týka sa to desiatich nemocníc označených číslami 12,15,23,25,29,30,31,35,45 a 48. Pozrime sa teraz do tabuliek 13, 14 s výslednými hodnotami príslušných priradených váh $u^*, v^*$. Môžeme vidieť, že riešenia nájdené metódami vnútorného bodu majú všetky zložky nenulové. A keďže ide o riešenie s maximálnym počtom kladných zložiek, tak dané nemocnice hodnotíme ako efektívne. Avšak pri riešeniach zo simplexovej metódy to je iné (Tabuľky 15, 16). Napríklad, pre nemocnicu číslo 15 sa našlo riešenie pomocou simplexovej metódy dokonca až s dvoma nulovými zložkami priradených váh. Nemožno prehlásiť, že je táto nemocnica pseudoefektívna, pretože môže existovať aj kladné riešenie v niektorom z iných krajných bodov optimálnej množiny riešení. Preto sa v tomto prípade musíme pozrieť aj na vyrátané hodnoty slackov pre danú nemocnicu. Napriek tomu, že sú všetky slacky nulové, nevieme, či neexistuje aj nenulové riešenie. Z tohoto pohľadu sa nedá určiť, či je nemocnica č.15 efektívna alebo pseudoefektívna.

Celkovo teda možno povedať, že čo sa týka jednoznačnosti riešenia, tak metódy vnútorného bodu sú lepšie ako simplexová metóda.

Tabuľka 13: Metódy vnútorného bodu: Vyhodnotenie efektívnosti nemocníc (1)

| Nemocnica | Efektívnosť | Priradené váhy | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | CCR-I | TOE | Lôžka | TOR | Paciento-dni |
| | | $v_1^*$ | $v_2^*$ | $u_1^*$ | $u_2^*$ |
| 1 | 0.90395 | 1.29E-05 | 1.67E-03 | 9.19E-06 | 1.61E-05 |
| 2 | 0.93686 | 3.26E-05 | 4.23E-03 | 2.67E-05 | 2.82E-05 |
| 3 | 0.98440 | 0 | 2.86E-02 | 1.60E-05 | 0 |
| 4 | 0.86997 | 1.89E-05 | 1.75E-03 | 1.76E-05 | 4.05E-06 |
| 5 | 0.88782 | 1.15E-05 | 1.49E-03 | 9.41E-06 | 9.93E-06 |
| 6 | 0.89416 | 5.23E-05 | 0 | 3.84E-05 | 2.47E-05 |
| 7 | 0.91050 | 4.69E-06 | 4.50E-04 | 4.13E-06 | 2.17E-06 |
| 8 | 0.95002 | 1.37E-05 | 1.77E-03 | 9.73E-06 | 1.70E-05 |
| 9 | 0.88411 | 2.75E-05 | 1.56E-03 | 1.89E-05 | 2.60E-05 |
| 10 | 0.89081 | 2.36E-05 | 0 | 2.01E-05 | 0 |
| 11 | 0.94871 | 3.03E-06 | 3.93E-04 | 2.48E-06 | 2.62E-06 |
| 12 | 1 | 5.77E-06 | 1.61E-03 | 7.32E-08 | 2.09E-05 |
| 13 | 0.86343 | 6.00E-05 | 0 | 4.40E-05 | 2.84E-05 |
| 14 | 0.85370 | 6.76E-06 | 6.49E-04 | 5.95E-06 | 3.12E-06 |
| 15 | 1 | 2.43E-05 | 4.47E-04 | 1.45E-06 | 4.46E-05 |
| 16 | 0.86950 | 2.67E-05 | 2.56E-03 | 2.35E-05 | 1.23E-05 |
| 17 | 0.96772 | 2.32E-06 | 1.04E-03 | 1.16E-06 | 7.70E-06 |
| 18 | 0.93039 | 2.99E-06 | 2.58E-03 | 1.27E-06 | 1.59E-05 |
| 19 | 0.86990 | 3.37E-05 | 0 | 2.47E-05 | 1.59E-05 |
| 20 | 0.90572 | 6.85E-06 | 8.88E-04 | 4.88E-06 | 8.54E-06 |
| 21 | 0.96543 | 6.02E-06 | 2.70E-03 | 3.01E-06 | 2.00E-05 |
| 22 | 0.87008 | 1.33E-05 | 1.24E-03 | 1.24E-05 | 2.87E-06 |
| 23 | 1 | 1.58E-05 | 1.93E-04 | 1.29E-05 | 3.76E-06 |
| 24 | 0.91412 | 8.22E-06 | 5.44E-04 | 7.75E-06 | 0 |
| 25 | 1 | 2.10E-07 | 2.07E-03 | 1.33E-06 | 1.23E-07 |
| 26 | 0.93163 | 4.08E-05 | 3.78E-03 | 3.80E-05 | 8.76E-06 |
| 27 | 0.90431 | 1.02E-05 | 9.83E-04 | 9.00E-06 | 4.73E-06 |
| 28 | 0.82010 | 2.72E-05 | 1.80E-03 | 2.56E-05 | 0 |
| 29 | 1 | 3.92E-06 | 1.70E-03 | 2.21E-06 | 1.19E-05 |
| 30 | 1 | 2.68E-05 | 4.21E-03 | 2.66E-05 | 2.17E-07 |

Tabuľka 14: Metódy vnútorného bodu: Vyhodnotenie efektívnosti nemocníc (2)

| Nemocnica | Efektívnosť | Priradené váhy | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | CCR-I | TOE | Lôžka | TOR | Paciento-dni |
| | | $v_1^*$ | $v_2^*$ | $u_1^*$ | $u_2^*$ |
| 31 | 1 | 1.07E-05 | 1.12E-02 | 2.05E-07 | 7.69E-05 |
| 32 | 0.88625 | 2.44E-05 | 0 | 1.93E-05 | 6.56E-06 |
| 33 | 0.75503 | 2.89E-05 | 0 | 2.12E-05 | 1.37E-05 |
| 34 | 0.93372 | 4.57E-06 | 5.93E-04 | 3.74E-06 | 3.95E-06 |
| 35 | 1 | 1.03E-05 | 4.78E-04 | 7.70E-06 | 6.88E-06 |
| 36 | 0.98952 | 4.03E-06 | 3.87E-04 | 3.54E-06 | 1.86E-06 |
| 37 | 0.93332 | 5.80E-06 | 5.38E-04 | 5.40E-06 | 1.25E-06 |
| 38 | 0.91754 | 3.13E-05 | 3.55E-03 | 2.95E-05 | 7.61E-06 |
| 39 | 0.98443 | 8.56E-06 | 1.54E-03 | 8.72E-06 | 0 |
| 40 | 0.97060 | 2.05E-06 | 4.08E-03 | 0 | 2.31E-05 |
| 41 | 0.92436 | 7.30E-06 | 6.77E-04 | 6.80E-06 | 1.57E-06 |
| 42 | 0.87328 | 2.23E-05 | 0 | 1.90E-05 | 0 |
| 43 | 0.95006 | 3.61E-06 | 4.67E-04 | 2.95E-06 | 3.11E-06 |
| 44 | 0.86884 | 2.29E-05 | 1.30E-03 | 1.57E-05 | 2.16E-05 |
| 45 | 1 | 1.10E-06 | 2.93E-04 | 9.44e-07 | 1.29E-06 |
| 46 | 0.81836 | 1.24E-05 | 0 | 9.08E-06 | 5.86E-06 |
| 47 | 0.90754 | 9.36E-06 | 8.68E-04 | 8.72E-06 | 2.01E-06 |
| 48 | 1 | 1.50E-07 | 2.03E-3 | 5.81E-07 | 4.13E-06 |
| 49 | 0.95636 | 9.52E-07 | 8.21E-04 | 4.03E-07 | 5.04E-06 |
| 50 | 0.98228 | 1.40E-06 | 1.58E-04 | 1.32E-06 | 3.40E-07 |

Tabuľka 15: Simplexová metóda: Vyhodnotenie efektívnosti nemocníc (1)

| Nemocnica | Efektívnosť | Priradené váhy | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | CCR-I | TOE | Lôžka | TOR | Paciento-dni |
| | | $v_1^*$ | $v_2^*$ | $u_1^*$ | $u_2^*$ |
| 1 | 0.90395 | 1.29E-05 | 1.67E-03 | 9.19E-06 | 1.61E-05 |
| 2 | 0.93686 | 3.26E-05 | 4.23E-03 | 2.67E-05 | 2.82E-05 |
| 3 | 0.98440 | 0 | 2.86E-02 | 1.60E-05 | 0 |
| 4 | 0.86997 | 1.89E-05 | 1.75E-03 | 1.76E-05 | 4.05E-06 |
| 5 | 0.88782 | 1.15E-05 | 1.49E-03 | 9.41E-06 | 9.93E-06 |
| 6 | 0.89416 | 5.23E-05 | 0 | 3.84E-05 | 2.47E-05 |
| 7 | 0.91050 | 4.69E-06 | 4.50E-04 | 4.13E-06 | 2.17E-06 |
| 8 | 0.95002 | 1.37E-05 | 1.77E-03 | 9.73E-06 | 1.70E-05 |
| 9 | 0.88411 | 2.75E-05 | 1.56E-03 | 1.89E-05 | 2.60E-05 |
| 10 | 0.89081 | 2.36E-05 | 0 | 2.01E-05 | 0 |
| 11 | 0.94871 | 3.03E-06 | 3.93E-04 | 2.48E-06 | 2.62E-06 |
| 12 | 1 | 8.25E-06 | 4.68E-04 | 5.67E-06 | 7.80E-06 |
| 13 | 0.86343 | 6.00E-05 | 0 | 4.40E-05 | 2.84E-05 |
| 14 | 0.85370 | 6.76E-06 | 6.49E-04 | 5.95E-06 | 3.12E-06 |
| 15 | 1 | 2.59E-05 | 0 | 0 | 4.73E-05 |
| 16 | 0.86950 | 2.67E-05 | 2.56E-03 | 2.35E-05 | 1.23E-05 |
| 17 | 0.96772 | 2.32E-06 | 1.04E-03 | 1.16E-06 | 7.70E-06 |
| 18 | 0.93039 | 2.99E-06 | 2.58E-03 | 1.27E-06 | 1.59E-05 |
| 19 | 0.86990 | 3.37E-05 | 0 | 2.47E-05 | 1.59E-05 |
| 20 | 0.90572 | 6.85E-06 | 8.88E-04 | 4.88E-06 | 8.54E-06 |
| 21 | 0.96543 | 6.02E-06 | 2.70E-03 | 3.01E-06 | 2.00E-05 |
| 22 | 0.87008 | 1.33E-05 | 1.24E-03 | 1.24E-05 | 2.87E-06 |
| 23 | 1 | 1.61E-05 | 0 | 1.37E-05 | 0 |
| 24 | 0.91412 | 8.22E-06 | 5.44E-04 | 7.75E-06 | 0 |
| 25 | 1 | 1.38E-06 | 1.56E-04 | 1.30E-06 | 3.35E-07 |
| 26 | 0.93163 | 4.08E-05 | 3.78E-03 | 3.80E-05 | 8.76E-06 |
| 27 | 0.90431 | 1.02E-05 | 9.83E-04 | 9.00E-06 | 4.73E-06 |
| 28 | 0.82010 | 2.72E-05 | 1.80E-03 | 2.56E-05 | 0 |
| 29 | 1 | 5.20E-06 | 6.75E-04 | 4.26E-06 | 4.50E-06 |
| 30 | 1 | 2.85E-05 | 1.89E-03 | 2.69E-05 | 0 |

Tabuľka 16: Simplexová metóda: Vyhodnotenie efektívnosti nemocníc (2)

| Nemocnica | Efektívnosť | Priradené váhy | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | CCR-I | TOE | Lôžka | TOR | Paciento-dni |
| | | $v_1^*$ | $v_2^*$ | $u_1^*$ | $u_2^*$ |
| 31 | 1 | 1.65E-05 | 7.38E-03 | 8.24E-06 | 5.46E-05 |
| 32 | 0.88625 | 2.44E-05 | 0 | 1.93E-05 | 6.56E-06 |
| 33 | 0.75503 | 2.89E-05 | 0 | 2.12E-05 | 1.37E-05 |
| 34 | 0.93372 | 4.57E-06 | 5.93E-04 | 3.74E-06 | 3.95E-06 |
| 35 | 1 | 1.11E-05 | 0 | 8.78E-06 | 2.99E-06 |
| 36 | 0.98952 | 4.03E-06 | 3.87E-04 | 3.54E-06 | 1.86E-06 |
| 37 | 0.93332 | 5.80E-06 | 5.38E-04 | 5.40E-06 | 1.25E-06 |
| 38 | 0.91754 | 3.13E-05 | 3.55E-03 | 2.95E-05 | 7.61E-06 |
| 39 | 0.98443 | 8.56E-06 | 1.54E-03 | 8.72E-06 | 0 |
| 40 | 0.97060 | 2.05E-06 | 4.08E-03 | 0 | 2.31E-05 |
| 41 | 0.92436 | 7.30E-06 | 6.77E-04 | 6.80E-06 | 1.57E-06 |
| 42 | 0.87328 | 2.23E-05 | 0 | 1.90E-05 | 0 |
| 43 | 0.95006 | 3.61E-06 | 4.67E-04 | 2.95E-06 | 3.11E-06 |
| 44 | 0.86884 | 2.29E-05 | 1.30E-03 | 1.57E-05 | 2.16E-05 |
| 45 | 1 | 1.25E-06 | 1.16E-04 | 1.17E-06 | 2.69E-07 |
| 46 | 0.81836 | 1.24E-05 | 0 | 9.08E-06 | 5.86E-06 |
| 47 | 0.90754 | 9.36E-06 | 8.68E-04 | 8.72E-06 | 2.01E-06 |
| 48 | 1 | 1.14E-06 | 4.81E-04 | 1.01E-06 | 1.83E-06 |
| 49 | 0.95636 | 9.52E-07 | 8.21E-04 | 4.03E-07 | 5.04E-06 |
| 50 | 0.98228 | 1.40E-06 | 1.58E-04 | 1.32E-06 | 3.40E-07 |

# Záver

Cieľom bakalárskej práce bolo skúmať Data Envelopment Analysis z hľadiska riešenia vybraného DEA modelu pomocou rôznych metód - metód vnútorného bodu a simplexovej metódy. V prvom rade sme sa postupne oboznámili s teóriu lineárneho programovania a základnými DEA modelmi a potom sme venovali priestor porovnávaniu jednotlivých metód na konkrétnych príkladoch.

Najprv sme porovnávali metódy vnútorného bodu pri zisťovaní pseudoefektívnosti útvarov spolu s $\epsilon$-metódou a dvojfázovou metódou, ktoré vychádzajú zo simplexovej metódy. Ukázalo sa, že najhoršou metódou na zisťovanie pseudoefektv́inosti je $\epsilon$-metóda, hlavne z dôvodu nutnej voľby $\epsilon$, ktorá môže spôsobiť neprípustnosť príslušnej úlohy. Za numericky spoľahlivú metódu možno považovať dvojfázovú metódu, ktorá však vychádza iba z obálkového modelu. Preto za najvýhodnejšiu metódu sme označili metódu vnútorného bodu, pretože ponúka rýchle odhalenie pseudoefektívnosti útvaru aj z obálkového aj z multiplikatívneho modelu, t.j. z primárnej aj duánej úlohy.

Kľúčovou kapitolou bakalárskej práce je posledná kapitola, v ktorej sme aplikovali DEA modely na praktický príklad a všeobecne sme porovnali riešenia metódami vnútorného bodu a simplexovou metódou. Dalo sa predpokladať už z predchádzajúcej analýzy, že metódy vnútorného bodu budú výhodnejšie ako simplexová metóda pri interpretácii výsledkov a náš predpoklad sa aj naplnil. Hlavným dôvodom je fakt, že riešením metódami vnútorného bodu je ostrokomplementárne riešenie, ktoré je "stredom"množiny optimálnych riešení a obsahuje maximálny počet kladných zložiek. Na rozdiel od simplexovej metódy, ktorá ponúka iba bázické riešenie, t.j. riešením je niektorý z krajných bodov optimálnej množiny.

# Literatúra


[1] Plesník J., Dupačová J., Valach M.: *Lineárne programovanie*, Alfa, 1990

[2] Vanderbei R.J.: *Linear programming: Foundations and Extensions*, Springer, 2001

[3] Halická M.: *DEA modely*, Prednášky 2010/2011, MFF UK, Bratislava

[4] Cooper W.W., Seiford L.M., Tone K.: *Data Envelopment analysis: A Comprehensive Text with Models, Applications, References and DEA-Solver Software*, Kluwer Academic Publishers,2000.

[5] Dlouhý M.,Jablonský J., Novosádová I.: *Využití analýzy obalu dat pro hodnocení efektivnosti českých nemocnic*, Politická ekonomie, č.1/2007, str. 60-71

[6] Frisová S.: *Hodnotenie technickej efektívnosti lôžkových zariadení slovenských nemocníc*, Into Balance, č.6/2007, str. 12-18

[7] Du J. a kol.: *Incorporating health outcomes in Pennsylvania hospital efficiency: an additive super-efficiency DEA approach*, Annals of Operations Research, 2011, str.1-12

[8] *Pennsylvania Health Care Cost Containment Council - PHC4*, 23.2.2011,<http://www.phc4.org/reports/fin/09/>

[9] *Pennsylvania Department of Health*, 23.2.2011, <http://www.portal.state.pa.us/portal/server.pt/community/health_statistics/14136/health_facilities/590080>

[10] Plesník J.: *Lineárne programovanie*, Prednášky 2009/2010, MFF UK, Bratislava

[11] Jablonský J., Dlouhý M.: *Modely hodnocení efektivnosti produkčných jednotek*, Professional Publishing,2004

[12] Lauko M.: *DEA analýza efektívnosti: SBM model*, Bakalárska práca 2007, MFF UK, Bratislava

[13] Mlynárik M.: *DEA modely: Assurance region model*, Bakalárska práca 2007, MFF UK, Bratislava

# Prílohy

## A Zdrojový kód

```
function ccr(X,Y)
%CCR vstupne orientovany model pre zadane vstupy a vystupy
n=size(X,1); %pocet DMU utvarov
m=size(X,2); %pocet vstupnych udajov
s=size(Y,2); %pocet vystupnych udajov
for j=1:n
    xj=X(j,:);  % vstupy pre j-ty utvar
    yj=Y(j,:);  % vystupy pre j-ty utvar
    f=-[yj zeros(1,m)];
    A=[Y -X];
    b=zeros(n,1);
    Aeq=[zeros(1,s) xj];
    beq=ones(size(Aeq,1),1);
    lb=zeros(s+m,1);
    %nastavenie pre riesenie ulohy metodami vnutorneho bodu
    options=optimset('Largescale','on','Simplex','off');
    %nastavenie pre riesenie ulohy simplexovou metodou
    %options=optimset('Largescale','off','Simplex','on');
    [optries(:,j),fval,exitflag,output,lambda(j,1)]=
                           linprog(f,A,b,Aeq,beq,lb,[],[],options);
    E(j)=-fval; %efektivnost utvaru
    U(j,:)=optries(1:s,j);   %vahy priradene k vystupom
    V(j,:)=optries(s+1:s+m,j);  %vahy priradene k vstupom
    fi(j,:)=lambda(j).eqlin; %hodnota optim. ucelovej funkcie obalkoveho modelu
    lam(j,:)=lambda(j).ineqlin;   %lambdy z obalkoveho modelu
    slack(j,:)=lambda(j).lower;
end
sy=slack(:,1:s);   %slacky prisluchajuce k vystupom
sx=slack(:,s+1:s+m); %slacky prisluchajuce k vstupom
sy(sy<1e-4)=0; sx(sx<1e-4)=0;
V(V<1e-8)=0; U(U<1e-8)=0;
[[1:n]' V U E']  %vypise v stlpcoch priradene vahy a hodnotu efektivnosti utvaru
[[1:n]' sx sy fi]  %vypise v stlpcoch slacky a hodnotu optim.ucelovej funkcie fi
```

```
%-----epsilon metoda-----
function epsmetoda(X,Y)
%CCR vstupne orientovany model
%pre zadane vstupy a vystupy
n=size(X,1); %pocet DMU utvarov
m=size(X,2); %pocet vstupnych udajov
s=size(Y,2); %pocet vystupnych udajov

e=1e-3   %volba epsilonu

for j=1:n
    xj=X(j,:);  % vstupy pre j-ty utvar
    yj=Y(j,:);  % vystupy pre j-ty utvar
    f=-[yj zeros(1,m)];
    A=[Y -X];
    b=zeros(n,1);
    Aeq=[zeros(1,s) xj];
    beq=ones(size(Aeq,1),1);
    lb=e.*ones(s+m,1);   %tzv. odrazenie od 0
    options=optimset('Largescale','off','Simplex','on');
    [optries(:,j),fval,exitflag,output,lambda(j,1)]=
                           linprog(f,A,b,Aeq,beq,lb,[],[],options);
    E(j)=-fval; %efektivnost utvaru
    U(j,:)=optries(1:s,j);  %vahy priradene k vystupom
    V(j,:)=optries(s+1:s+m,j);  %vahy priradene k vstupom
    lam(j,:)=lambda(j).ineqlin;  %lambdy z obalkoveho modelu
    slack(j,:)=lambda(j).lower;
    fi(j,:)=lambda(j).eqlin-e.*slack(j,:)*ones(s+m,1);
end
sy=slack(:,1:s);  %slacky prisluchajuce k vystupom
sx=slack(:,s+1:s+m);  %slacky prisluchajuce k vstupom
sy(sy<1e-4)=0;
sx(sx<1e-4)=0;
V(V<1e-8)=0;
U(U<1e-8)=0;
[[1:n]' E' V U ]    %vypise v stlpcoch priradene vahy a hodnotu efektivnosti utvaru
[[1:n]' fi sx sy ]  %vypise v stlpcoch slacky a hodnotu optim.ucelovej funkcie fi
```

# B Dáta

Tabuľka 17: Použitá vzorka dát všeobecných pohotovostných nemocníc (1)

| Nemocnica | TOE (tisíce $) | Lôžka | TOR (tisíce $) | Paciento-dni |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 66209 | 87 | 65724 | 18644 |
| 2 | 26270 | 34 | 27276 | 7430 |
| 3 | 62289 | 35 | 61405 | 9687 |
| 4 | 46634 | 69 | 47150 | 10365 |
| 5 | 74517 | 96 | 74563 | 18737 |
| 6 | 19125 | 35 | 19743 | 5527 |
| 7 | 193175 | 209 | 196950 | 45164 |
| 8 | 62841 | 80 | 65606 | 18317 |
| 9 | 32429 | 70 | 31128 | 11417 |
| 10 | 42368 | 83 | 44333 | 8371 |
| 11 | 284253 | 351 | 298018 | 79815 |
| 12 | 107994 | 234 | 111297 | 747384 |
| 13 | 16671 | 31 | 16614 | 4659 |
| 14 | 128399 | 204 | 126421 | 32688 |
| 15 | 38582 | 144 | 38949 | 21145 |
| 16 | 33291 | 44 | 32810 | 8120 |
| 17 | 244857 | 415 | 247215 | 88402 |
| 18 | 160698 | 201 | 163791 | 45594 |
| 19 | 29703 | 72 | 29451 | 8940 |
| 20 | 123785 | 171 | 124228 | 35078 |
| 21 | 92576 | 164 | 94439 | 34090 |
| 22 | 66895 | 87 | 66955 | 13350 |
| 23 | 61993 | 101 | 72819 | 16491 |
| 24 | 112709 | 135 | 117902 | 20970 |
| 25 | 677753 | 414 | 737845 | 124134 |
| 26 | 22199 | 25 | 23471 | 4572 |
| 27 | 85914 | 123 | 89119 | 21557 |
| 28 | 33577 | 49 | 32017 | 5715 |
| 29 | 165305 | 207 | 181568 | 50411 |
| 30 | 33432 | 25 | 37202 | 5136 |

Tabuľka 18: Použitá vzorka dát všeobecných pohotovostných nemocníc (2)

| Nemocnica | TOE (tisíce $) | Lôžka | TOR (tisíce $) | Paciento-dni |
|---|---|---|---|---|
| 31 | 36085 | 55 | 35802 | 12909 |
| 32 | 40993 | 83 | 42210 | 11031 |
| 33 | 34642 | 92 | 29782 | 9097 |
| 34 | 190274 | 219 | 196781 | 49926 |
| 35 | 89997 | 155 | 104032 | 28886 |
| 36 | 225371 | 238 | 249616 | 56253 |
| 37 | 159528 | 138 | 165325 | 31957 |
| 38 | 29548 | 21 | 29949 | 4548 |
| 39 | 103229 | 76 | 112874 | 14597 |
| 40 | 161200 | 164 | 156884 | 41983 |
| 41 | 126618 | 111 | 129800 | 26397 |
| 42 | 44912 | 144 | 46070 | 8364 |
| 43 | 239221 | 294 | 250518 | 67687 |
| 44 | 39603 | 73 | 38860 | 11959 |
| 45 | 738683 | 638 | 815586 | 178186 |
| 46 | 80785 | 214 | 74146 | 24747 |
| 47 | 97561 | 100 | 99211 | 21226 |
| 48 | 691531 | 441 | 741150 | 138015 |
| 49 | 533541 | 599 | 547891 | 145845 |
| 50 | 653472 | 543 | 708363 | 146419 |