FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY
UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE

PROBLÉM VOĽBY ROBUSTNÉHO PORTFÓLIA

BAKALÁRSKA PRÁCA

Peter Štefko

BRATISLAVA 2011

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY

Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky

PROBLÉM VOĽBY ROBUSTNÉHO PORTFÓLIA

BAKALÁRSKA PRÁCA

Peter Štefko

Študijný odbor: 9.1.9. Aplikovaná matematika
Študijný program: Ekonomická a finančná matematika
Vedúca bakalárskej práce: Mgr. Jana Szolgayová, PhD.

Kód práce: c7f4c2f4-924d-49b7-8f54-00b6cd8e1c63

BRATISLAVA 2011

Univerzita Komenského v Bratislave
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

ZADANIE ZÁVEREČNEJ PRÁCE

Meno a priezvisko študenta: Peter Štefko
Študijný program: ekonomická a finančná matematika (Jednoodborové štúdium, bakalársky I. st., denná forma)
Študijný odbor: 9.1.9. aplikovaná matematika
Typ záverečnej práce: bakalárska
Jazyk záverečnej práce: slovenský

Názov : Problém voľby robustného portfólia

Cieľ : Jedným zo závažných nedostatkov klasickej teórie voľby portfólia je veľká citlivosť výsledkov na vstupné parametre. Úlohou študenta je na základe literatúry sprostredkovať čitateľovi modifikácie klasickej teórie, ktoré sa snažia na daný nedostatok reagovať a ilustrovať rozdiely vo výsledkoch na príkladoch.

Literatúra : Deng et al: A minimax portfolio selection strategy with equilibrium.

Vedúci : Mgr. Jana Szolgayová, PhD.

Dátum zadania: 27.10.2010

Dátum schválenia: 08.11.2010

doc. RNDr. Margaréta Halická, CSc.
garant študijného programu

študent

vedúci práce

Dátum potvrdenia finálnej verzie práce, súhlas s jej odovzdaním (vrátane spôsobu sprístupnenia)

vedúci práce

Čestné prehlásenie

Čestne prehlasujem, že som túto bakalársku prácu vypracoval sám, výlučne s pomocou nadobudnutých teoretických vedomostí, konzultácií a uvedenej literatúry.

V Bratislave, máj 2011 ....

Peter Štefko

Poďakovanie

Na tomto mieste by som sa chcel poďakovať svojej vedúcej, Mgr. Jane Szolgayovej, PhD., za jej odborné pripomienky, cenné rady a za množstvo času a trpezlivosti, ktoré mi venovala pri písaní tejto bakalárskej práce.

Abstrakt

ŠTEFKO, Peter: Problém voľby robustného portfólia [Bakalárska práca], Univerzita Komenského v Bratislave, Fakulta matematiky, fyziky a informatiky, Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky; vedúca práce: Mgr. Jana Szolgayová, PhD., Bratislava, 2011, 38 s.

Klasický Markowitzov ”mean-variance” model optimálneho portfólia vykazuje významnú citlivosť na vstupné parametre. Alternatívou môže byť Robustný model, ktorý sa snaží poskytovať určitú stabilitu výstupov vzhľadom na neistoty v odhadoch očakávaných výnosov rizikových aktív. V práci sú tieto dva modely teoreticky analyzované a následne ich efektívnosť porovnaná vo viacerých situáciách na trhu.

Kľúčové slová: mean-variance optimalizácia, minimax optimalizácia, efektívna hranica, trhové portfólio, krátka pozícia

Abstract

ŠTEFKO, Peter: Robust portfolio selection problem [Bachelor thesis], Comenius University in Bratislava, Faculty of mathemathics, physics and informatics, Department of applied mathematics and statistics; supervisor: Mgr. Jana Szolgayová, PhD., Bratislava, 2011, 38 p.

The output of standard ”mean-variance” portfolio optimization problem is significantly sensitive to changes in input parameters. The possible alternative, specifically the so-called Robust model is supposed to ensure certain stability of the output considering the uncertainty in the estimates of expected returns on risky assets. In this bachelor thesis, we offer a theoretical analysis of these two models and consecutive comparison of their efficiency in different market situations.

Keywords: mean-variance optimization, minimax optimization, efficient frontier, market portfolio, short position

Obsah

Úvod

Jedným z najbežnejsích spôsobov zhodnocovania peňazí v súčasnosti je ich investícia do aktív. Každý investor investuje svoje peniaze do aktíva s očakávaním, že toto aktívum mu v budúcnosti prinesie určitý výnos. S týmto výnosom sa však v drvivej väčšine prípadov spája aj riziko, t.j. investor si výnosom plynúcim z investície do rizikového aktíva nikdy nemôže byť stopercentne istý. Očakávaný výnos a rizikovosť aktív je možné na základe dát získaných z minulosti odhadnúť. Investor, vychádzajúc z týchto odhadov, si kladie otázku: Ako rozdeliť moje peniaze medzi mnou vybrané aktíva tak, aby celkový očakávaný výnos, poprípade rizikovosť mojej investície zodpovedala mojim požiadavkám? Odpoveď na túto otázku prináša teória portfólia.

Modelov, ktoré sa zaoberajú určením optimálneho portfólia, t.j. optimálnych váh jednotlivých aktív v portfóliu, je viacero. Tým najznámejším je bezpochyby Markowitzov mean-variance model. Vstupom doň sú odhadnuté hodnoty očakávaných výnosov aktív, odhady ich variancií a vzájomných kovariancií. Výstupom je množina optimálnych portfólií, tzv. efektívna hranica, ktorá je parametrizovaná averziou investora voči riziku. Pod pojmom portfólio rozumieme vektor váh jednotlivých aktív, pričom súčet zložiek tohoto vektora je vždy 1, keďže predpokladáme, že nami určený obnos peňazí chceme vždy celý rozdeliť medzi aktíva v portfóliu (otázne je len to, v akom pomere). Základný Markowitzov model uvažuje n rizikových aktív, dá sa však upraviť tak, aby výsledné portfólio bolo tvorené n rizikovými aktívami a jedným bezrizikovým aktívom, čiže aktívom s nulovou varianciou (=rizikovosťou). Výstupom je opäť efektívna hranica.

Markowitzov model sa na prvý pohľad môže zdať úplne postačujúcim a existencia nejakých ďalších modelov určujúcich optimálne portfóliá nepotrebná. V praxi sa však ukazuje, že výsledná efektívna hranica získaná z Markowitzovho modelu je citlivá aj na malé zmeny v očakávaných výnosoch aktív. Inými slovami, pri malej zmene vektora očakávaných výnosov na vstupe nastáva významnejšia zmena výstupu, ktorým je efektívna hranica. Druhým uvažovaným modelom v tejto práci preto bude tzv. Robustný model voľby portfólia. [3] Od Markowitzovho modelu sa líši vstupnými parametrami, konkrétne odhadmi očakávaných výnosov aktív. Tie v tomto prípade neodhadujeme presnou hodnotou, namiesto nej do modelu vstupuje len určitý interval, v ktorom očakávame, že sa skutočná hodnota výnosu daného aktíva s dostatočnou pravdepodobnosťou nachádza. Variancie a kovariancie výnosov sú aj naďalej odhadnuté konkrétnou hodnotou, nakoľko malé zmeny týchto hodnôt nespôsobujú také veľké odchýlky na výstupe ako v prípade odhadov výnosov. Takýto model je teda "robustný"vzhľadom na rozdiely medzi očakávaným výnosom a výnosom, ktoré dané aktívum počas investície skutočne poskytne.

Pri optimalizácii portfólia sa v praxi postupuje tak, že vstupné parametre sú odhadmi získanými pomocou dát z hisotrického obdobia. To, či zvolíme dáta za posledný rok alebo 10 rokov má prirodzene veľký vplyv na výsledný odhad parametra. Samozrejme požadujeme model, ktorý zakaždým poskytne čo najpresnejšie a najkonzistentnejšie výstupy. Ak je takýmto výstupom portfólio, požadujeme, aby bolo z hľadiska preferencií investora kvalitné aj v prípade, že pri odhade vstupných parametrov nastala istá odchýlka od jeho skutočnej hodnoty (táto odchýlka je spôsobená tým, že vždy disponujeme iba nejakou časťou dát, ktorých parametre odhadujeme). Model, ktorý poskytuje určitú robustnosť vzhľadom na odchýlky vstupných dát je teda žiadúci a potrebný.

Odlišnosť vstupných parametrov týchto dvoch modelov prirodzene spôsobuje aj rozdiely v spôsobe ich riešenia. To, do akej úrovne je Robustný model efektívnejší oproti klasickému Markowitzovmu modelu, ako aj to, akým spôsobom je vlastne jeho robustnosť zabezpečená, je predmetom záujmu tejto bakalárskej práce.

V prvej kapitole uvedieme základný teoretický prehľad oboch modelov, motiváciu na skúmanie Robustného modelu a takisto spomenieme a objasníme niektoré základné pojmy z oblasti teórie portfólia, akými sú napr. efektívna hranica či trhové portfólio.

Druhá kapitola ponúka porovnanie funkčnosti a efektívnosti oboch modelov v rozličných situáciách na trhu. Tieto situácie sa líšia celkovým počtom aktív na trhu ako aj tým, či sú jednotlivé rizikové aktíva navzájom korelované. Vždy nás zaujíma kompozícia trhového portfólia, ktoré získame pomocou nami analyzovaných modelov.

1 Predstavenie modelov

1.1 Markowitzov model

Medzi základné práce na poli hľadania optimálnych portfólií patrí jednoznačne práca Harry M. Markowitza, známa taktiež ako "Modern portfolio theory". V tejto práci ju budeme nazývať Markowizovým modelom. Ide v podstate o najrozšírenejší model voľby optimálneho portfólia. Predpokladajme, že máme n rizikových aktív (takýmto aktívom môže byť napríklad akcia firmy), z ktorých chceme zostaviť portfólio, pričom máme pevne určenú čiastku, ktorú plánujeme (celú, bezo zvyšku) do tohoto portfólia investovať. Podľa čoho rozhodnúť, koľko peňazí z tejto čiastky investovať do konkrétneho aktíva i?

Toto rozhodovanie pozostáva z dvoch častí. Tá prvá začína pozorovaním jednotlivých charakteristík prístupných, nami zvolených aktív a vyvodením záverov ohľadom ich správania. V druhej časti využijeme tieto informácie k samotnému zostaveniu optimálneho portfólia. [1]

Je zrejmé, že v prvej časti nás bude zaujímať najmä **očakávaný výnos**, ktorý nám naše aktíva poskytnú. Túto hodnotu však presne nepoznáme, napriek tomu ju môžeme odhadnúť na základe dát získaných z minulosti. [1] Takisto musíme vziať do úvahy fakt, že táto *odhadnutá* hodnota očakávaného výnosu sa môže od skutočnej hodnoty líšiť. To, aký veľký tento rozdiel bude však tiež môžeme popísať charakteristikou nazvanou **rizikovosť** (volatilita, variancia) aktíva. Tá nám v podstate popisuje spoľahlivosť odhadu očakávaného výnosu - čím väčšia rizikovosť aktíva, tým menšia je spoľahlivosť odhadu očakávaného výnosu. Inými slovami, tým menej si môžeme byť istí, že dané aktívum nám nami odhadnutý výnos v budúcnosti skutočne poskytne.

Okrem týchto dvoch charakteristík jednotlivých aktív nás pri voľbe portfólia bude samozrejme zaujímať aj to, či medzi výnosmi nejakého páru nami uvažovaných aktív neexistuje nejaký súvis, čiže či s rastom hodnoty jedného aktíva v našom portfóliu nenastáva zároveň aj zhodnocovanie nejakého iného aktíva a naopak. Zároveň nás zaujíma, nakoľko je tento súvis silný. Túto charakteristiku dvojice aktív nazývame **kovariancia výnosov aktív**.

Výnosy aktív sú náhodné premenné, ktorých stredné hodnoty, variancie či kovariancie presne nepoznáme. Aby sme však model v praxi mohli použiť, je potrebné ich odhadnúť.

Predpokladajme, že máme pre všetky aktíva k dispozícii hodnoty výnosov poskytnutých v minulosti. Zaujíma nás, ako matematicky vyjadriť nami požadované charakteristiky týchto aktív, popísané vyššie. Nech $\widetilde{r}_{i1}, \ldots, \widetilde{r}_{im}$ sú výnosy, ktoré aktívum i v minulosti poskytlo (máme k dispozícii m pozorovaní). Potom:

- **Očakávaným výnosom** aktíva i je hodnota:

$$r_i = E[\overline{r_i}]$$

[1]Spôsobov definície výnosu aktíva je viacero. My budeme v tejto práci používať výnos aktíva i definovaný nasledovne [2, s. 24]:

$$\widetilde{r_i} = \frac{p_1 - p_0 + d}{p_0},$$

kde p_0 je cena aktíva i na začiatku roku, p_1 je cena aktíva i na konci roku a d sú dividendy vyplatené počas tohoto roku.

Túto hodnotu odhadujeme nasledovne:

$$\overline{r_i} = \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m}\widetilde{r}_{ik}$$

Odhadom r_i je teda aritmetický priemer nami pozorovaných výnosov.

- **Varianciou očakávaného výnosu** aktíva i je hodnota [2, s. 31]:

$$\sigma_i^2 = E[(\overline{r_i} - r_i)^2]$$

Túto hodnotu odhadujeme nasledovne:

$$s_i^2 = \frac{1}{m-1}\sum_{k=1}^{m}(\widetilde{r}_{ik} - r_i)^2$$

pričom platí, že $E[s_i^2] = \sigma_i^2$, t.j. s_i^2 je nevychýlený odhad σ_i^2.

- **Kovarianciou očakávaných výnosov** aktív i a j bude hodnota:

$$\sigma_{ij} = E[(\overline{r_i} - r_i)(\overline{r_j} - r_j)]$$

Túto hodnotu odhadujeme nasledovne:

$$\overline{\sigma_{ij}} = \frac{1}{m-1}\sum_{k=1}^{m}(\widetilde{r}_{ik} - r_i)(\widetilde{r}_{jk} - r_j)$$

pričom platí, že $E[\overline{\sigma_{ij}}] = \sigma_{ij}$, čiže takisto sa jedná o nevychýlený odhad.

Vidíme, že keďže takto definované odhady sú nevychýlené (stredná hodnota odhadu parametra je vo všetkých prípadoch rovná skutočnej hodnote parametra), ich použitie je v praxi vhodné. Keďže jednoduchšie a názornejšie je počítať s vektormi, tieto charakteristiky prepíšeme do vektorovej a maticovej formy nasledovne:

- **Vektorom očakávaných výnosov** rizikových aktív budeme nazývať vektor

$$r = \begin{pmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_n \end{pmatrix}$$

- **Kovariančnou maticou výnosov** rizikových aktív budeme nazývať maticu

$$\Sigma = Var(r) = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & \dots & \sigma_{1n} \\ \sigma_{12} & \sigma_2^2 & \dots & \sigma_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{1n} & \sigma_{2n} & \dots & \sigma_n^2 \end{pmatrix}$$

Na tomto mieste upozorníme na významnú vlastnosť kovariančnej matice Σ.

Lemma 1.1 *Kovariančná matica* $\Sigma = E[(r - E[r])(r - E[r])^T]$ *je symetrická a kladne semidefinitná, t.j. pre každý nenáhodný vektor* $u \in R^n$ *platí:* $u^T \Sigma u \geq 0$*[15]* [2]

Dôkaz: Symetria jednoznačne vyplýva zo vzťahu $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$. Kladná semidefinitnosť:

$$u^T \Sigma u = u^T Var(r) u = Var(u^T r) = D(u^T r) \geq 0,$$

kde D je disperzia a u je nenáhodný vektor.

■

Uvedené dve charakteristiky, čiže vektor očakávaných výnosov a kovariančna matica našich rizikových aktív, sú vstupnými parametrami Markowitzovho modelu, teda parametre, ktoré musíme poznať, ak chceme nájsť optimálne portfólio. Výstupným parametrom sú optimálne váhy jednotlivých aktív v našom portfóliu $w_1, \ldots, w_n$, [3] ktoré takisto zapíšeme vo vektorovej forme ako **vektor optimálnych váh**:

$$w = \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}$$

Keďže naším zámerom vždy bude prerozdeliť *celú* investovanú čiastku medzi tieto aktíva, musí platiť podmienka:

$$\sum_{i=1}^{n} w_i = 1 \Leftrightarrow w^T \mathbf{1} = 1,$$

kde

$$\mathbf{1} = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \in R^n.$$

Na tomto mieste upozornime na to, aké podmienky sa kladú na znamienka jednotlivých váh. Na prvý pohľad sa môže zdať, že všetky hodnoty váh aktív budú kladné, resp. nezáporné. Argumentáciou môže byť, že nemôžeme vlastniť záporné množstvo nejakého aktíva. To však nie je celkom správna úvaha. Všeobecná teória portfólia totiž akceptuje aj prítomnosť záporných váh aktív. Ekonomická interpretácia takéhoto výsledku je, že aktíva so zápornou váhou v podstate predávame, teda vlastníme ich záporný počet. Hovoríme takisto, že s daným aktívom ideme do *krátkej pozície (short sale)*. V niektorých prípadoch však túto možnosť obmedzíme.

Keďže už poznáme vstupné aj výstupné parametre Markowitzovho modelu, môžeme pristúpiť k druhej časti procesu - samotnému riešeniu optimalizačného problému. Ak jednotlivé aktíva majú očakávané výnosy r, potom sa ľahko nahliadne, že pri portfóliu s váhami w je očakávaný výnos tohto portfólia váženým priemerom očakávaných výnosov jednotlivých aktív:

$$r_P = w_1 r_1 + \ldots + w_n r_n = w^T r.$$

[2] Táto vlastnosť kovariančnej matice platí vtedy, ak jej prvkami sú skutočné (v praxi nám neznáme) hodnoty variancií a kovariancií. Preto v prípade, že maticu Σ odhadujeme na základe limitovaného počtu dát (len pomocou s_i^2 a $\overline{\sigma_{ij}}$), jej kladná definitnosť nemusí byť zaručená. Týmto sa však v tejto práci nebudeme zaoberať.

[3] Váha aktíva i sa rovná podielu množstva peňazí investovaného do aktíva i a celkového množstva investovaných peňazí.

Variancia výnosu, čiže riziko, spojené s investíciou do takéhoto portfólia pri kovariančnej matici aktív Σ potom je

$$\sigma_P^2 = w^T \Sigma w.$$

Každý investor sa vždy snaží buď maximalizovať výnos portfólia, minimalizovať jeho varianciu [2, s. 18], alebo oboje naraz, a to pri istých osobných preferenciách :

- Investor, ktorý neberie ohľad na to, ako rizikové bude jeho portfólio a zaujíma ho iba maximalizácia očakávaného výnosu portfólia, bude riešiť úlohu:

$$\begin{aligned} &\max_w w^T r \\ &w^T \mathbf{1} = 1 \end{aligned}$$

  Takýto investor sa nazýva *riziko obľubujúci.* [4]

- Investor, ktorého snahou bude najmä minimalizovať riziko jeho investície, bez ohľadu na jej výnos, bude riešiť úlohu:

$$\begin{aligned} &\max_w (-w^T \Sigma w) \\ &w^T \mathbf{1} = 1 \end{aligned}$$

  Takýto investor sa nazýva *riziko averzný.* [4]

- Investor, ktorý chce s váhou $\alpha \in (0,1\rangle$ minimalizovať varianciu portfólia a s váhou $1-\alpha$ maximalizovať jeho výnos, bude riešiť úlohu:

$$\begin{aligned} &\max_w (1-\alpha) w^T r - \alpha w^T \Sigma w \\ &w^T \mathbf{1} = 1 \end{aligned} \tag{1}$$

  Tento investor je ”povahovo” medzi riziko averzným a riziko obľubujúcim investorom, pretože mu do istej miery záleží aj na minimalizácii variancie portfólia, aj na maximalizácii jeho výnosu. Parameter α budeme nazývať *riziko averzným parametrom* investora. [3]

Vidíme, že posledný prípad je akýmsi zovšeobecnením, ktoré v sebe zahŕňa aj prvé dva prípady, t.j.:

- Investor je riziko obľubujúci $\Leftrightarrow \alpha \to 0^+$.

- Investor je riziko averzný $\Leftrightarrow \alpha = 1$.

V ďalšom budeme predpokladať, že investor nikdy nie je absolútne riziko obľubujúci, teda že $\alpha \in (0,1\rangle$. [3] Úloha (1) je teda úlohou Markowitzovho modelu pre voľbu optimálneho portfólia. [4] Vektor w^*, ktorý rieši úlohu (1), nazývame vektorom optimálnych váh. Naše (optimálne) portfólio je ním teda pre danú hodnotu parametra α jednoznačne definované.

[4] V literatúre sa často používa aj rozdielny spôsob parametrizácie cez riziko averzný parameter. Napríklad I.

Toto je základný Markowitzov model, ktorý však vo svojich úvahách nezahŕňa tzv. bezrizikové aktívum, čiže aktívum, ktoré ponúka istý výnos. Je to teda aktívum s nulovou varianciou. Pre bezrizikové aktívum s výnosom r_0 teda platí $\sigma_0^2 = 0$. Takéto aktíva sú vo väčšine situácií dostupné, preto má zmysel sa nimi zaoberať. Za bezrizikové aktívum sa napríklad považuje účet v banke, ktorý ponúka pevne daný výnos vo forme úroku. Ďalším príkladom môžu byť šátne cenné papiere, ktorých výnos je v podstate bezrizikový, výnimku samozrejme tvorí krach štátu. Za rizikové aktíva sa naopak považujú akcie firiem, ktorých výnosy nie sú isté.

Ako upraviť Markowitzov model tak, aby v sebe zahŕňal aj bezrizikové aktívum? Nech poznáme vektor r, čiže očakávané výnosy rizikových aktív, ako aj hodnotu r_0, čiže výnos bezrizikového aktíva [5]. Váhu bezrizikového aktíva v našom portfóliu označme w_0, váhy rizikových aktív nech sú uložené vo vektore w. Očakávaný výnos portfólia zostaveného aj z bezrizikového aktíva, aj z rizikových aktív bude, rovnako ako v predošlom prípade, váženým priemerom očakávaných výnosov jednotlivých aktív a výnosu bezrizikového aktíva:

$$r_P = w_0 r_0 + w_1 r_1 + \ldots + w_n r_n = w_0 r_0 + w^T r$$

Keďže variancia bezrizikového aktíva je nulová, predpis variancie tohoto portfólia bude oproti variancii portfólia neobsahujúceho bezrizikové aktívum nezmenený:

$$\sigma_P^2 = w^T \Sigma w$$

Zároveň musí platiť, že súčet váh všetkých aktív v portfóliu je rovný 1, čiže podmienka $w^T \mathbf{1} = 1$ sa zmení na:

$$w_0 + w^T \mathbf{1} = 1$$

Aplikovaním týchto zmien na úlohu (1) dostávame *Markowitzov model voľby optimálneho portfólia:*

$$\begin{aligned} &\max_{w,w_0} (1-\alpha)(w_0 r_0 + w^T r) - \alpha w^T \Sigma w \\ &w_0 + w^T \mathbf{1} = 1 \end{aligned} \tag{2}$$

Predpokladajme, že sme vyriešili úlohu (2), teda že sme našli optimálne portfólio pre nejakú hodnotu parametra α. Očakávaný výnos tohoto portfólia r_α a variancia tohoto portfólia σ_α^2 tvoria usporiadanú dvojicu $(\sigma_\alpha^2, r_\alpha)$.

Melicherčík v [4] rieši úlohu:

$$\begin{aligned} &\min_w \frac{1}{2} w^T \Sigma w \\ &w^T r = r_P \\ &w^T \mathbf{1} = 1, \end{aligned}$$

používa teda minimalizáciu variancie portfólia pri fixne určenej hodnote očakávaného výnosu (pridané ďalšie ohraničenie). Autori [17] naopak riešia úlohu

$$\begin{aligned} &\min_w w^T \Sigma w - q * w^T r \\ &w^T \mathbf{1} = 1, \end{aligned}$$

pričom používajú upravený riziko averzný parameter $q \in \langle 0, \infty)$. Všetky tieto úlohy sú však ekvivalentné a spejú k rovnakému výsledku.

[5] Tento výnos už nenazývame *očakávaným*, pretože je "stopercentne" istý.

Definícia 1.1 *Množinu portfólií takých, že riešia úlohu (2) pre nejakú hodnotu parametra $\alpha \in (0,1\rangle$, čiže množinu*

$$\{(\sigma_\alpha^2, r_\alpha) \mid \alpha \in (0,1\rangle\},$$

nazývame efektívna hranica (efficient frontier).

Tento pojem je v teórii portfólia veľmi dôležitý. Pre každé portfólio z tejto množiny platí, že je optimálne pre danú hodnotu α, čiže pre investora s riziko averzným parametrom α je práve toto portfólio tým najvýhodnejším.

Efektívna hranica pre portfólio zložené iba z rizikových aktív má v priestore (σ_P^2, r_P) tvar paraboly. Každej hodnote parametra α na nej zodpovedá určitý bod $(\sigma_\alpha^2, r_\alpha)$. Investor, ktorý má riziko averzný parameter α teda nemôže vlastniť portfólio s výnosom väčším ako je r_α ktoré má rizikovosť menšiu ako je hodnota σ_α^2.

Po pridaní bezrizikového aktíva do portfólia sa nám situácia zmení. Efektívnou hranicou portfólia obsahujúceho bezrizikové aktívum s výnosom r_0 je priamka prechádzajúca bodom $(0, r_0)$, ktorá je dotyčnicou k pôvodnej efektívnej hranici. V ďalšom texte budeme používať nasledovný dôležitý pojem:

Definícia 1.2 *Portfólio nachádzajúce sa na "novej" efektívnej hranici také, že váha bezrizikového aktíva v ňom je nulová, nazývame* trhové portfólio.

Trhovému portfóliu teda zodpovedá taká hodnota parametra α, že $w_0(\alpha) = 0$. Znamená to, že toto portfólio v podstate neberie do úvahy bezrizikové aktívum, a teda musí patriť takisto do pôvodnej efektívnej hranice. Z toho logicky dostávame, že nová efektívna hranica sa pôvodnej dotýka práve v bode, ktorý zodpovedá trhovému portfóliu. (obr.1) Trhové portfólio je vlastne portfólio obsahujúce všetky rizikové aktíva dostupné na trhu v pomere zodpovedajúcom ich podielu na trhu. Zohráva dôležitú úlohu napríklad v tzv. CAPM-Modeli. Keďže v praxi je presné určenie trhového portfólia nereálne, snažia sa ho aproximovať rôzne svetové akciové indexy, ako napríklad NASDAQ, S&P 500, Dow Jones. [17]

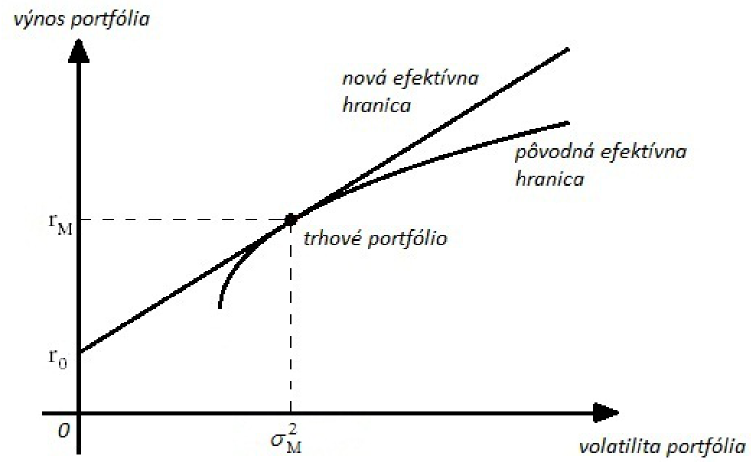
1.2 Robustný model

1.2.1 Motivácia

Práca Harry M. Markowitza [1] vydaná v roku 1952, podporená následne jeho knižnou publikáciou [2] z roku 1959 sa stali základmi modernej teórie portfólia. O význame jeho práce svedčí aj fakt, že za prínos v oblasti modernej teórie portfólia mu bola v roku 1990 udelená Cena Švédskej ríšskej banky za ekonomické vedy na pamiatku Alfreda Nobela, známa takisto ako Nobelova cena za ekonómiu.

Keďže sa táto téma stala predmetom záujmu mnohých ďalších výskumníkov, časom sa objavili mnohé nedostatky tohoto modelu, spojené s jeho kritikou. Uvedieme niektoré z nich:

- J. Murphy vo svojom článku [5] uvádza, že aktíva s nízkou varianciou majú tendenciu mať skutočné výnosy vyššie ako očakávané výnosy, a naopak aktíva s vysokou varianciou majú nižšie



Obr. 1: Zmena efektívnej hranice po pridaní bezrizikového aktíva do portfólia. Čirenou bodkou je vyznačené trhové portfólio.

skutočné výnosy oproti očakávaným. Ďalej spomína, že viaceré štúdie ukázali, že neexistuje významný vzťah medzi výnosom aktíva a jeho rizikovosťou, že riziko spojené s investíciou do rizikovejšieho portfólia často nie je vykompenzované vyšším výnosom.

- Finančný ekonóm Nassim Nicholas Taleb vo svojej knihe [6] tvrdo kritizuje Markowitzov model za predpoklad Gaussovho rozdelenia výnosov aktív.

- M.J.Best a R.R.Grauer sa v článkoch [7], [8] a [9] venovali tzv. analýze citlivosti, v ktorej testovali citlivosť zmeny výstupného parametra, ktorým je optimálne portfólio, spôsobenej zmenou vstupných parametrov, ktorými sú vektor očakávaných výnosov a kovariančná matica rizikových aktív.

  Vo svojich prácach dospeli k zaujímavým výsledkom. Zistili, že aj nepatrné zmeny v odhadoch parametrov na vstupe sa prejavili na porovnateľne väčších zmenách na výstupe. Konkrétne zmeny v odhadoch očakávaných výnosov rizikových aktív spôsobovali väčšie odchýlky ako zmeny v odhadoch ich variancií a kovariancií.

Tieto, ale aj mnohé iné nedostatky základného Markowitzovho modelu spôsobili vznik mnohých iných modelov. Ich snahou bolo jednotlivé chyby eliminovať, poprípade sa upriamiť na rôzne špecifickejšie prípady. Niektoré z nich menujeme:

- Asi najvýznamnejším je práca Sharpa [10], Lintnera [11] a Mossina [12], tzv. *Capital Asset Pricing Model - CAPM*, ktorý určuje minimálny požadovaný výnos aktíva s danou rizikovosťou, ktoré chceme pridať do nášho optimálneho portfólia.

- Problém predpokladu Gaussovho rozdelenia výnosov, rovnako ako aj údajne chybné meranie rizika aktív ich varianciou, sa snaží eliminovať tzv. *Post-Modern Portfolio Theory* - tento termín prvýkrát použili Brian M. Rom a Kathleen W. Ferguson v článku [13]. Dospeli k záveru, že klasická Markowitzova teória je symetrickým prípadom ich Post-modernej teórie.

- Riešenie problému citlivosti výstupov vzhľadom na zmeny odhadov očakávaných výnosov na vstupe ponúkol Deng et al. v článku [3]. Keďže ich práca ponúka zaujímavý prínos ku klasickému Markowitzovmu modelu tým, že eliminuje jeden z jeho významných nedostatkov, budeme sa v našej práci venovať práve tomuto modelu - tzv. Robustnému modelu voľby portfólia.

1.2.2 Robustný model voľby portfólia

Keďže sa teda chceme vyhnúť presným odhadom očakávaných výnosov rizikových aktív, ktoré môžu v prípade nepresnosti spôsobiť veľké odchýlky vo výslednom optimálnom portfóliu [3], bude rozumné očakávané výnosy týchto aktív odhadnúť nejakým intervalom. Pravdepodobnosť, že skutočný výnos bude ležať v tomto intervale je totiž podstatne väčšia ako pravdepodobnosť, že sme tento výnos presne odhadli konkrétnou hodnotou. Keďže bezrizikové aktívum neprináša so sebou žiadnu neistotu týkajúcu sa jeho výnosu, výnos bezrizikového aktíva nebudeme odhadovať intervalom, nemalo by to zmysel. Výnos bezrizikového aktíva teda bude naďalej presnou hodnotou, značenou r_0.

Hodnoty r_i, ktoré figurovali na vstupe v Markowitzovom modeli teda nahradíme intervalom $\langle a_i, b_i \rangle$, pričom predpokladáme, že platí:

$$\begin{aligned} a_i \leq r_i \leq b_i \;\; \forall i = 1, \ldots, n \\ r_i \geq r_o \;\; \forall i = 1, \ldots, n \end{aligned}$$

Očakávame teda, že rizikové aktíva nám poskytnú výnosy, ktoré budú ležať v uvedených intervaloch. Zároveň uvádzame podmienku, že od žiadneho z rizikových aktív nebudeme očakávať výnos nižší, ako je výnos bezrizikového aktíva. Táto podmienka je prirodzená, keďže ak by takéto aktívum aj existovalo, žiadny investor by ho nezahrnul do svojho portfólia ako optimálnu investičnú stratégiu [3, s. 280]. Má totiž už k dispozícii aktívum, ktoré mu prinesie vyšší výnos a neprináša so sebou žiadne riziko.

Ako určiť $\{a_i\}_{i=1}^n, \{b_i\}_{i=1}^n$? Môžu vyplývať rovnako ako v prípade presných hodnôt z historických pozorovaní, poprípade vypočítané s pomocou pravdepodobnostných modelov odhadujúcich budúce výnosy aktív [3, s. 280].

Aj napriek tomu, že očakávané výnosy rizikových aktív odhadujeme intervalom, ich variancie a kovariancie odhadujeme naďalej presnou hodnotou. Dôvodom je už spomenutý fakt, že odchýlky v týchto odhadoch nespôsobujú až také razantné zmeny na výslednom optimálnom portfóliu, ako odchýlky v odhadoch očakávaných výnosov. Tomu, ako však kovariančnú maticu odhadnúť, keď nemáme presné hodnoty očakávaných výnosov, sa vo svojom článku [14] venovali Y. Xia et al.

Na vstupe robustného modelu teda máme:

- r_0 ... výnos bezrizikového aktíva,
- $a = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ ... ohraničenia očakávaných výnosov rizikových aktív (zapísali sme ich vo vektorovej forme),

- $\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & \dots & \sigma_{1n} \\ \sigma_{12} & \sigma_2^2 & \dots & \sigma_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{1n} & \sigma_{2n} & \dots & \sigma_n^2 \end{pmatrix}$ ... kovariančná matica rizikových aktív

Výnos a variancia výsledného portfólia má samozrejme rovnaký predpis ako v Markowitzovom modeli, t.j.:

$$r_P = w_0 r_0 + w_1 r_1 + \ldots + w_n r_n = w_0 r_0 + w^T r$$

$$\sigma_P^2 = w^T \Sigma w$$

Pri danom riziko averznom parametri $\alpha \in (0, 1\rangle$ sa teda investor snaží maximalizovať svoju "funkciu užitočnosti":

$$(1-\alpha)(w_0 r_0 + w^T r) - \alpha w^T \Sigma w.$$

Keďže ale nepozná presné hodnoty r_i, musí tento problém vyriešiť iným spôsobom ako v Markowitzovom modeli. Nami analyzovaný článok [3] navrhuje nasledovné riešenie: Hľadať najvýhodnejšie portfólio pri čo najhoršom možnom vývine výnosov rizikových aktív v rámci našich odhadov, čiže hľadať najlepšiu možnú stratégiu pri čo najhoršom možnom vývine našej investície. V praxi to znamená, že investor najprv minimalizuje svoju užitočnosť cez výnosy rizikových aktív, a pre toto minimum potom hľadá optimálne portfólio, ktoré mu ponúkne najvyšší výnos, resp. najnižšiu varianciu - tieto preferencie opäť závisia od hodnoty riziko averzného parametra α. Investor sa teda snaží vyťažiť čo najviac z čo najhoršej možnej situácie. [3] Matematicky zapísané, investor rieši úlohu:

$$\begin{aligned} &\max_{w,w_0} \min_r (1-\alpha)(w_0 r_0 + w^T r) - \alpha w^T \Sigma w \\ &\qquad w_0 + w^T \mathbf{1} = 1 \\ &\qquad r_i \geq r_0 \ \ \forall i = 1, \ldots, n \\ &\qquad a_i \leq r_i \leq b_i \ \ \forall i = 1, \ldots, n \end{aligned} \tag{3}$$

Označme:

$$W = \{(w_0, w_1, \ldots, w_n) \in R^{n+1} \mid \sum_{i=0}^{n} w_i = 1\}$$

$$R = \{r \in R^n \mid r_i \geq r_0 \wedge a_i \leq r_i \leq b_i \ \ \forall i = 1, \ldots, n\}$$

V záujme čo najjednoduchšieho riešenia tejto úlohy nám poslúži nasledovné pomocné tvrdenie (uvedené bez dôkazu v článku [3], pôvodný výsledok z článku [16]):

Lemma 1.2 *Nech X je neprázdna množina, Y je neprázdny a kompaktný priestor a funkcia f :* $X \times Y \longrightarrow R$ *je zľava spojitá na Y. Nech f je konkávna na X a konvexná na Y. Potom platí:*

$$\min_{y \in Y} \sup_{x \in X} f(x,y) = \sup_{x \in X} \min_{y \in Y} f(x,y)$$

Dôsledok: Ak si v našom prípade označíme $X = W$, $Y = R$, platí, že Y je kompaktná, f je spojitá, konvexná na Y a konkávna na X. Preto platí:

$$\max_w \min_r f(w,r) = \min_r \max_w f(w,r)$$

Tento dôsledok vedie k dôležitému záveru, a síce, že pri riešení našej optimalizačnej úlohy môžeme vymeniť poradie maximalizácie a minimalizácie. Najprv teda môžeme vyriešiť maximalizáciu účelovej funkcie cez w, ktorá sa dá vyriešiť analyticky, a až v druhom kroku vykonáme minimalizáciu cez r, ktorá môže byť komplikovanejšia.

Aplikovaním Lemmy 1.2 na úlohu (3) dospeli autori článku [3] k nasledovnej úlohe typu minimax, ktorú nazývame *Robustný model voľby portfólia:*

$$
\begin{aligned}
&\min_{r} \max_{w,w_0} (1-\alpha)(w_0 r_0 + w^T r) - \alpha w^T \Sigma w \\
&\quad w_0 + w^T \mathbf{1} = 1 \\
&\quad r_i \geq r_0 \;\; \forall i = 1, \ldots, n \\
&\quad a_i \leq r_i \leq b_i \;\; \forall i = 1, \ldots, n
\end{aligned}
\tag{4}
$$

Všimnime si podmienky ohraničení týkajúce sa očakávaných výnosov rizikových aktív:

$$
\begin{aligned}
&r_i \geq r_0 \;\; \forall i = 1, \ldots, n \\
&a_i \leq r_i \leq b_i \;\; \forall i = 1, \ldots, n
\end{aligned}
$$

Tieto podmienky nevylučujú prípad $a_i < r_0$. V takom prípade by očakávaný výnos aktíva i bol ohraničený intervalom $\langle r_0, b_i \rangle$. My však v záujme zjednodušenia záverov získaných v nasledujúcej kapitole budeme vždy uvažovať, že platí:

$$
a_i \geq r_0 \;\; \forall i = 1, \ldots, n
$$

Inými slovami, dolné ohraničenia očakávaných výnosov rizikových aktív sú vždy nad hodnotou výnosu bezrizikového aktíva. Táto podmienka nie je nijakým spôsobom obmedzujúca, nakoľko ohraničiť výnos rizikového aktíva menšou hodnotou ako je výnos bezrizikového aktíva nemá zmysel.

V takomto prípade môžeme ohraničenie $r_i \geq r_0 \;\; \forall i = 1, \ldots, n$ vychechať, pretože priamo vyplýva z podmienok:

$$
\begin{aligned}
&a_i \geq r_0 \;\; \forall i = 1, \ldots, n \\
&a_i \leq r_i \leq b_i \;\; \forall i = 1, \ldots, n
\end{aligned}
$$

Tým sa nám robustný model zjednoduší nasledovne:

$$
\begin{aligned}
&\min_{r} \max_{w,w_0} (1-\alpha)(w_0 r_0 + w^T r) - \alpha w^T \Sigma w \\
&\quad w_0 + w^T \mathbf{1} = 1 \\
&\quad a_i \leq r_i \leq b_i \;\; \forall i = 1, \ldots, n
\end{aligned}
\tag{5}
$$

Podobne ako v Markowitzovom modeli, aj v tomto prípade sa dá zaviesť pojem *efektívnej hranice* ako množiny najlepších stratégií v závislosti od riziko averzného parametra a *trhového portfólia* ako portfólia obsahujúceho všetky rizikové aktíva na trhu s váhami zodpovedajúcimi ich podielu na trhu. Jej definícia je v oboch modeloch identická.

Z uvedeného zápisu si takisto môžeme všimnúť ďalšiu významnú vlastnosť Robustného modelu. Treba si uvedomiť, že minimalizácia cez r sa odohráva až po vyriešení maximalizačnej úlohy cez w, ktorá je v podstate Markowtizovou úlohou. Minimalizujeme teda riešenie Markowitzovho modelu cez prípustné hodnoty r. Preto platí, že výsledné Robustné portfólio zodpovedá Markowitzovmu portfóliu pre nejaké (nám zatiaľ neznáme) hodnoty r. Tento záver je podstatný vzhľadom na nasledujúcu kapitolu.

Autori článku [3] upozorňujú na niektoré dôsledky Robustného modelu:

- Je nájdený tzv. rovnovážny systém cien, čiže predpis pre také ceny jednotlivých aktív, že celkový trh je vyrovnaný. To znamená, že celková ponuka každého aktíva sa rovná celkovému dopytu po tomto aktíve. Rovnovážna cena aktíva j je:

$$p_j = \frac{1}{1-\gamma} \frac{z_j}{x_j^0} \sum_{i=1}^{m} \frac{1-\alpha_i}{2\alpha_i} x_{i,n+1}^0, \qquad j = 1, 2, \ldots, n$$

  kde x_i^0 je celkový počet akcií aktíva i, na trhu je m investorov a každý investor má počiatočný počet akcií aktíva j rovný $x_{i,j}^0$, z_j je j-ty prvok vektora $\Sigma^{-1}(r^* - r_0\mathbf{1})$ a $\gamma = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \frac{1-\alpha_i}{2\alpha_i} \frac{x_{i,j}^0}{x_j^0} z_j$.

- pri rovnovážnom systéme cien každý investor vlastní isté množstvo bezrizikového aktíva a nezáporný násobok λ_i počiatočnej trhovej ponuky aktív, pričom $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 1$, čiže investori si podelia kompletnú ponuku aktív na trhu.

- sú uvedené niektoré ďalšie zaujímavé vlastnosti trhu, pokiaľ je tento v rovnovážnom stave.

- v [3, s. 289] je ďalej spomenutá tzv. "CAPM-like property", ktorá konkretizuje ďalšiu vlastnosť Robustného modelu, analogickú s CAPM-modelom vychádzajúcim z Markowitzovho modelu.

Robustný model teda ponúka zaujímavé a plnohodnotné (najmä vďaka CAPM-vlastnosti) rozšírenie Markowitzovho modelu, ktoré je vhodné na ďalšiu analýzu. Uvedené dva modely v nasledujúcej kapitole porovnáme v rôznych situáciách a podmienkach.

Hoci [3] sa venuje aj ďalším implikáciám Robustného modelu, nás bude konkrétne zaujímať základná charakteristika výstupu, a tou je kompozícia výsledného portfólia. Budeme teda skúmať, ako sa líšia váhy výsledných optimálnych portfólií. Vzhľadom na jeho osobitý význam sa budeme venovať najmä trhovému portfóliu.

2 Analýza Robustného modelu

V tejto kapitole nás bude zaujímať správanie uvedených dvoch modelov v rôznych situáciách. Keďže sme už zistili, že Robustný model v podstate rieši základnú Markowitzovu úlohu pre nejaké odhady očakávaných výnosov $r_i^* \in \langle a_i, b_i \rangle$, bude nás najmä zaujímať, pre aké hodnoty vrátia oba modely rovnaké výsledné portfólio. V predchádzajúcej kapitole sme takisto zdôraznili špeciálny význam trhového portfólia oproti ostatným portfóliám nachádzajúcim sa na efektívnej hranici. Práve preto nás zakaždým bude zaujímať práve kompozícia výsledného trhového portfólia.

Takisto pripomeňme, že v prípade Robustného modelu v záujme zjednodušenia výsledkov budeme bez ujmy na všeobecnosti zakaždým automaticky uvažovať nasledovnú podmienku ako splnenú: $a_i \geq r_0 \ \ \forall i = 1, \ldots, n$

2.1 Trhové portfólio pre 2 nezávislé rizikové aktíva

Na začiatku sa pozrieme na najjednoduchší prípad - budeme uvažovať situáciu, kedy sú na trhu k dispozícii dve nezávislé rizikové aktíva s očakávanými výnosmi r_1, r_2 a varianciami σ_1^2, σ_2^2, spolu s jedným bezrizikovým aktívom ponúkajúcim výnos r_0. Ak sú aktíva nezávislé, znamená to, že kovariancia ich výnosov je nulová, čiže platí:

$$\sigma_{12} = E[(\overline{r_1} - r_1)(\overline{r_1} - r_1)] = 0.$$

Znamená to, že korelačný koeficient výnosov aktív 1 a 2 je nulový:

$$\sigma_{12} = \sigma_1 \sigma_2 \rho_{12} = 0 \Leftrightarrow \rho_{12} = 0$$

Navyše, v robustnom prípade budeme mať neurčito odhadnutý výnos len jedného rizikového aktíva, druhé aktívum bude odhadnuté presne. Našou úlohou bude spočítať trhové portfólio, čiže portfólio s váhou bezrizikového aktíva $w_0 = 0$, pričom použijeme Markowitzov aj Robustný model voľby portfólia.

2.1.1 Markowitzov model

V tomto modeli poznáme presné hodnoty očakávaných výnosov rizikových aktív. Na vstupe teda máme hodnoty:

$$r_0, r = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix}, \Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 \end{pmatrix}$$

Vidíme, že predpoklad nezávislosti rizikových aktív nám spôsobil to, že kovariančná matica je diagonálna. [6] Intuíciou je, že tento fakt nám uľahčí ďalšie výpočty. Výstupom budú hodnoty:

$$w = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}, w_0$$

Veta 2.1 *Trhové portfólio Markowitzovho modelu je nasledovné:*

$$w_1^M = \frac{\sigma_2^2(r_1 - r_0)}{\sigma_2^2(r_1 - r_0) + \sigma_1^2(r_2 - r_0)}$$

[6] Samozrejme stále platí, že Σ je symetrická a kladne definitná.

$$w_2^M = \frac{\sigma_1^2(r_2 - r_0)}{\sigma_2^2(r_1 - r_0) + \sigma_1^2(r_2 - r_0)}$$

Dôkaz: Riešime teda Markowitzovu úlohu:

$$\max_{w,w_0}(1-\alpha)(w_0 r_0 + w^T r) - \alpha w^T \Sigma w = (1-\alpha)(w_0 r_0 + w_1 r_1 + w_2 r_2) - \alpha(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)$$
$$w_0 + w^T \mathbf{1} = 1$$

Pomocou vzťahu $w_0 = 1 - w^T \mathbf{1}$ môžeme túto úlohu vyriešiť ako úlohu na voľný extrém tvaru:

$$\max_w \quad (1-\alpha)[(1 - w^T\mathbf{1})r_0 + w^T r] - \alpha w^T \Sigma w = (1-\alpha)[r_0 - w^T\mathbf{1}r_0 + w^T r] - \alpha w^T \Sigma w =$$
$$= (1-\alpha)(r_0 + w^T(r - r_0\mathbf{1})) - \alpha w^T \Sigma w$$

Hľadáme teda globálne minimum tejto funkcie. Nutná podmienka prvého rádu:

$$\frac{\partial g}{\partial w} = (1-\alpha)(r - r_0\mathbf{1}) - 2\alpha\Sigma w = 0 \Leftrightarrow w = \frac{1-\alpha}{2\alpha}\Sigma^{-1}(r - r_0\mathbf{1})$$

Je zároveň aj postačujúcou podmienkou maxima, keďže pomocou podmienky druhého rádu:

$$\frac{\partial^2 g}{\partial w^2} = -2\alpha\Sigma$$

a využitím kladnej definitnosti matice Σ zisťujeme, že účelová funkcia je na celej množine R^2 ostro konkávna a teda má jediné, jednoznačne určené globálne minimum. Dostali sme riešenie optimalizačného problému, čiže množinu efektívnych portfólií parametrizovanú hodnotou α:

$$w = \frac{1-\alpha}{2\alpha}\Sigma^{-1}(r - r_0\mathbf{1})$$
$$w_0 = 1 - w^T\mathbf{1} = 1 - \frac{1-\alpha}{2\alpha}(r - r_0\mathbf{1})^T\Sigma^{-1}\mathbf{1}$$

Inými slovami, uvedený vzťah je zároveň predpisom pre efektívnu hranicu, pričom $\alpha \in (0, 1\rangle$. Pre každú hodnotu riziko averzného parametra teda existuje iné optimálne portfólio, zohľadňujúce averznosť konkrétneho investora voči riziku. Keďže nás zaujíma trhové portfólio, pri ktorom je podiel bezrizikového aktíva nulový, musí platiť

$$w_0 = 0 \Leftrightarrow \frac{1-\alpha}{2\alpha} = \frac{1}{(r - r_0\mathbf{1})^T\Sigma^{-1}\mathbf{1}}$$

To znamená, že investor s averziou voči riziku takou, že jeho parameter α bude mať hodnotu vyhovujúcu tejto podmienke, investuje výlučne len do trhového portfólia a bezrizikové aktívum ho nezaujíma. Po dosadení do w dostávame:

$$w = \frac{\Sigma^{-1}(r - r_0\mathbf{1})}{(r - r_0\mathbf{1})^T\Sigma^{-1}\mathbf{1}} = \frac{\begin{pmatrix} \frac{1}{\sigma_1^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sigma_2^2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r_1 - r_0 \\ r_2 - r_0 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} r_1 - r_0 \\ r_2 - r_0 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \frac{1}{\sigma_1^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sigma_2^2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}} = \frac{\begin{pmatrix} \frac{r_1 - r_0}{\sigma_1^2} \\ \frac{r_2 - r_0}{\sigma_2^2} \end{pmatrix}}{\frac{r_1 - r_0}{\sigma_1^2} + \frac{r_2 - r_0}{\sigma_2^2}}$$

Keďže $w = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$, po rozpísaní tohoto výsledku po jednotlivých zložkách dostávame nami dokazované tvrdenie.

$\blacksquare$

2.1.2 Robustný model

Robustný model sa od Markowitzovho odlišuje v tom, že v tomto prípade nemusíme poznať presné hodnoty očakávaných výnosov, môžeme ich mať odhadnuté len nejakým intervalom. Vstup sa nám teda zmení nasledovne:

$$r_0, a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}, \Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 \end{pmatrix}$$

Veta 2.2 *Trhové portfólio Robustného modelu je nasledovné:*

$$w_1^R = \frac{\sigma_2^2(a_1 - r_0)}{\sigma_2^2(a_1 - r_0) + \sigma_1^2(a_2 - r_0)}$$

$$w_2^R = \frac{\sigma_1^2(a_2 - r_0)}{\sigma_2^2(a_1 - r_0) + \sigma_1^2(a_2 - r_0)}$$

Dôkaz: Budeme teda riešiť základnú úlohu Robustného modelu:

$$\min_r \max_w f(w,r) = (1-\alpha)(w_0 r_0 + w^T r) - \alpha w^T \Sigma w = (1-\alpha)(r_0 w_0 + r_1 w_1 + r_2 w_2) - \alpha(w_1^2\sigma_1^2 + w_2^2\sigma_2^2)$$

$$w_0 + w^T \mathbf{1} = 1$$

$$a \le r \le b$$

Prvým krokom je vyriešiť maximalizačnú časť úlohy:

$$\max_w f(w,r) = (1-\alpha)(w_0 r_0 + w^T r) - \alpha w^T \Sigma w$$

$$w_0 + w^T \mathbf{1} = 11$$

Rovnakým spôsobom ako v prípade Markowitzovho modelu (čiže využitím podmienky $w_0 = 1 - w^T\mathbf{1}$, riešením úlohy na voľný extrém funkcie:

$$g(w_1, w_2) = (1-\alpha)(r_0 + w^T(r - r_0\mathbf{1})) - \alpha w^T \Sigma w,$$

zderivovaním podľa w a následným rozpísaním po zložkách) dostávame optimálne váhy:

$$w_1 = \frac{1-\alpha}{2\alpha}\left(\frac{r_1 - r_0}{\sigma_1^2}\right)$$

$$w_2 = \frac{1-\alpha}{2\alpha}\left(\frac{r_2 - r_0}{\sigma_2^2}\right)$$

$$w_0 = 1 - \frac{1-\alpha}{2\alpha}\left(\frac{r_1 - r_0}{\sigma_1^2} + \frac{r_2 - r_0}{\sigma_2^2}\right)$$

Tieto hodnoty však ešte presne nepoznáme, pretože narozdiel od Markowitzovho modelu nám v ich predpise zostaly dve premenné, a tými sú hodnoty r_1, r_2. Dosadíme ich do $g(w_1, w_2)$:

$$\begin{aligned} g(w_1, w_2) &= (1-\alpha)\left[(r_1 - r_0)\left(\frac{1-\alpha}{2\alpha}\left(\frac{r_1 - r_0}{\sigma_1^2}\right)\right) + (r_2 - r_0)\left(\frac{1-\alpha}{2\alpha}\left(\frac{r_2 - r_0}{\sigma_2^2}\right)\right)\right] - \\ &- \alpha\left[\left(\frac{1-\alpha}{2\alpha}\right)^2\left[\left(\frac{r_1 - r_0}{\sigma_1}\right)^2 + \left(\frac{r_2 - r_0}{\sigma_2}\right)^2\right]\right] = \\ &= \ldots = \frac{(1-\alpha)^2}{4\alpha}\left[\left(\frac{r_2 - r_0}{\sigma_2}\right)^2 + \left(\frac{r_1 - r_0}{\sigma_1}\right)^2\right] + (1-\alpha)r_0 \end{aligned}$$

Minimalizačná časť úlohy teda vyzerá nasledovne:

$$\min_{r_1,r_2}(1-\alpha)r_0 + \frac{(1-\alpha)^2}{4\alpha}\left[\left(\frac{r_2-r_0}{\sigma_2}\right)^2 + \left(\frac{r_1-r_0}{\sigma_1}\right)^2\right]$$

$$a_1 \leq r_1 \leq b_1$$

$$a_2 \leq r_2 \leq b_2$$

Keďže $(1-\alpha)r_0$, $\frac{(1-\alpha)^2}{4\alpha}$ sú nezáporné konštanty, minimum tejto účelovej funkcie bude rovnaké ako riešenie úlohy:

$$\min_{r_1,r_2}\left[\left(\frac{r_2-r_0}{\sigma_2}\right)^2 + \left(\frac{r_1-r_0}{\sigma_1}\right)^2\right]$$

$$a_1 \leq r_1 \leq b_1$$

$$a_2 \leq r_2 \leq b_2$$

Z predpisu účelovej funkcie hneď vidno, že jej najmenšiu hodnotu dostaneme, ak za obe premenné zvolíme ich dolné ohraničenia, keďže účelová funkcia rastie v premennej r_1 aj r_2. Riešením teda bude:

$$r_1^* = a_1$$

$$r_2^* = a_2$$

Za r_1, r_2 tým pádom zvolíme "najhorší možný odhad". Po dosadení do optimálnych váh dostávame výslednú efektívnu hranicu parametrizovanú parametrom α:

$$w_1 = \frac{1-\alpha}{2\alpha}\left(\frac{a_1-r_0}{\sigma_1^2}\right)$$

$$w_2 = \frac{1-\alpha}{2\alpha}\left(\frac{a_2-r_0}{\sigma_2^2}\right)$$

$$w_0 = 1 - \frac{1-\alpha}{2\alpha}\left(\frac{a_1-r_0}{\sigma_1^2} + \frac{a_2-r_0}{\sigma_2^2}\right)$$

Hodnotu zlomku $\frac{1-\alpha}{2\alpha}$ zodpovedajúcu trhovému portfóliu vypočítame nasledovne:

$$w_0 = 0 \Leftrightarrow \frac{1-\alpha}{2\alpha} = \frac{\sigma_1^2\sigma_2^2}{(a_1-r_0)\sigma_2^2 + (a_2-r_0)\sigma_1^2}$$

Po dosadení do w_1, resp. w_2 dostávame výsledok uvedený v znení vety.

■

2.1.3 Porovnanie

Porovnajme teraz váhy aktíva 1 v našom portfóliu. Jednotlivými modelmi sme získali optimálne hodnoty:

$$w_1^M = \frac{\sigma_2^2(r_1-r_0)}{\sigma_2^2(r_1-r_0) + \sigma_1^2(r_2-r_0)}$$

$$w_1^R = \frac{\sigma_2^2(a_1-r_0)}{\sigma_2^2(a_1-r_0) + \sigma_1^2(a_2-r_0)}$$

Váha w_1^M vo svojom predpise obsahuje hodnoty r_1, r_2. Sú to presné odhady výnosov aktív v Markowitzovom modeli. Vidíme teda, že Markowitzov model nám vráti rôzne hodnoty w_1^M pre rôzne odhady výnosov r_1, r_2. Zaujíma nás, pre aké konkrétne hodnoty r_1, r_2 z intervalu $\langle a_1, b_1 \rangle$, resp. $\langle a_2, b_2 \rangle$ nám oba modely vrátia rovnaké portfólio, čiže rovnakú váhu aktíva 1 (váhu aktíva 2 potom ľahko vypočítame zo vzťahu $w_2 = 1 - w_1$). Takisto by sme radi zistili, akým spôsobom sa tieto váhy budú vyvíjať pre rôzne hodnoty z $\langle a_i, b_i \rangle$.

Riešenie tohoto problému nie je zložité. Z predpisov týchto premenných totiž hneď vidíme, že platí:

$$w_1^M = w_1^R \Leftrightarrow r_1 = a_1 \wedge r_2 = a_2$$

Podobný výsledok platí aj pre váhu druhého aktíva. Vidíme, že ak v Markowitzovom modeli zvolíme za očakávané výnosy hodnoty dolných ohraničení výnosov v Robustnom modeli, výsledné portfólio bude v oboch prípadoch rovnaké. Môžeme tvrdiť, že Robustný model v prípade dvoch nezávislých aktív nerobí nič iné, len zvolí dolné ohraničenia výnosov a ďalej pokračuje riešením klasickej Markowitzovej úlohy. Jeho význam sa teda v tomto prípade stráca.

Zároveň pre deriváciu funkcie $w_1^M(r_2)$ podľa r_2 platí:

$$\frac{\partial w_1^M}{\partial r_2} = -\frac{2\sigma_1\sigma_2^2 r_2(r_1 - r_0)}{(\sigma_2^2(r_1 - r_0) + \sigma_1^2(r_2 - r_0))^2} \leq 0$$

teda funkcia $w_1^M(r_2)$ klesá s rastúcim r_2. Z toho vyplýva, že uvedené modely vrátia rovnaké hodnoty váhy prvého aktíva, ak za r_2 zvolíme v prípade Markowitzovho modelu vstup a_2. Pre každé $b_2 > r_2 > a_2$ dostaneme menšiu váhu prvého aktíva, resp. väčšiu váhu druhého aktíva.

2.2 Trhové portfólio pre n-nezávislých rizikových aktív

Predchádzajúca, v podstate najjednoduchšia (a takisto v reálnom svete najmenej použiteľná) situácia na trhu a jej triviálne riešenie v prípade Robustného modelu nás motivuje k nasledujúcemu zovšeobecneniu: pokúsime sa nájsť trhové portfólio pre oba modely, pričom na trhu bude figurovať jedno bezrizikové aktívum a všeobecný počet n-rizikových aktív, pričom ich výnosy budú aj naďalej nezávislé, t.j. nekorelované. Keďže ide iba o n-rozmerný prípad predchádzajúcej situácie, intuíciou je, že aj získané závery budú podobné.

2.2.1 Markowitzov model

Na vstupe v tomto prípade máme nasledovné hodnoty:

$$r_0, r = \begin{pmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_n \end{pmatrix}, \Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sigma_n^2 \end{pmatrix}$$

Veta 2.3 *Trhové portfólio Markowitzovho modelu je nasledovné:*

$$w^M(i) = \frac{r_i - r_0}{\sigma_i^2 \sum_{j=1}^n \left(\frac{r_j - r_0}{\sigma_j^2}\right)} \quad \forall i = 1, \dots, n$$

Dôkaz: Hľadáme vektor $w = (w_1, \dots, w_n)^T$ a hodnotu w_0, ktoré sú riešením optimalizačnej úlohy:

$$\max_w (1-\alpha)(w_0 r_0 + w^T r) - \alpha w^T \Sigma w$$
$$w_0 + w^T \mathbf{1} = 1$$

Pomocou $w_0 = 1 - w^T\mathbf{1}$ riešime úlohu na voľný extrém:

$$\max_w (1-\alpha)(w^T r + w_0 - r_0 w^T \mathbf{1}) - \alpha w^T \Sigma w$$

$$\frac{\delta}{\delta w} = (1-\alpha)(r - r_0\mathbf{1}) - 2\alpha\Sigma w = 0 \Leftrightarrow w = \frac{1-\alpha}{2\alpha}\Sigma^{-1}(r - r_0\mathbf{1})$$

Keďže hľadáme trhové portfólio, musí platiť:

$$w_0 = 1 - w^T\mathbf{1} = 1 - \frac{1-\alpha}{2\alpha}(r - r_0\mathbf{1})^T\Sigma^{-1}\mathbf{1} = 0 \Leftrightarrow \frac{1-\alpha}{2\alpha} = \frac{1}{(r - r_0\mathbf{1})^T\Sigma^{-1}\mathbf{1}}$$

pričom sme využili vzťah $\left(\Sigma^{-1}\right)^T = \Sigma^{-1}$. Po dosadení do w dostávame trhové portfólio:

$$w^M = \frac{\Sigma^{-1}(r - r_0\mathbf{1})}{(r - r_0\mathbf{1})^T\Sigma^{-1}\mathbf{1}} = \frac{\begin{pmatrix} \frac{1}{\sigma_1^2} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \frac{1}{\sigma_n^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (r_1 - r_0) \\ \vdots \\ (r_n - r_0) \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} (r_1 - r_0) \\ \vdots \\ (r_n - r_0) \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \frac{1}{\sigma_1^2} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \frac{1}{\sigma_n^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}}$$

Pre i-tu zložku vektora w, teda pre váhu akcie i v trhovom portfóliu teda platí:

$$w^M(i) = \frac{r_i - r_0}{\sigma_i^2 \sum_{j=1}^n \left(\frac{r_j - r_0}{\sigma_j^2}\right)}$$

Pre tieto hodnoty skutočne platí $\sum w_i^M = 1$.

■

2.2.2 Robustný model

V robustnom modeli máme namiesto vektora očakávaných výnosov r na vstupe vektory a a b, ktoré sú odhadmi týchto výnosov a platí $a_i \leq r_i \leq b_i$.

Veta 2.4 *Trhové portfólio Robustného modelu je nasledovné:*

$$w^R(i) = \frac{a_i - r_0}{\sigma_i^2 \sum_{j=1}^n \left(\frac{a_j - r_0}{\sigma_j^2}\right)} \quad \forall i = 1, \ldots, n$$

Dôkaz: Základnou úlohou, ktorú riešime je úloha:

$$\min_r \max_w f(w, r) = (1-\alpha)(w^T r + w_0 r_0) - \alpha w^T \Sigma w$$
$$w^T\mathbf{1} + w_0 = 1$$
$$a_i \leq r_i \leq b_i \qquad i = 1, ..., n$$

Riešenie maximalizačnej časti úlohy je navlas rovnaké s predchádzajúcou kapitolou týkajúcou sa Markowitzovho modelu. Riešením úlohy na voľný extrém pomocou ohraničenia $w^T\mathbf{1} + w_0 = 1$ a použitím podmienky prvého rádu dostávame optimálny vektor w:

$$w^R = \frac{1-\alpha}{2\alpha}\Sigma^{-1}(r - r_0\mathbf{1})$$

Maximum účelovej funkcie v tomto bode má hodnotu:

$$(1-\alpha)r_0 + \frac{(1-\alpha)^2}{2\alpha}(r - r_0\mathbf{1})^T\Sigma^{-1}(r - r_0\mathbf{1})$$

Keďže hodnoty $(1-\alpha)r_0$, $\frac{(1-\alpha)^2}{2\alpha}$ sú nezáporné konštanty, v minimalizačnej časti úlohy nám stačí riešiť úlohu:

$$\min_r (r - r_0\mathbf{1})^T\Sigma^{-1}(r - r_0\mathbf{1})$$
$$a_i \leq r_i \leq b_i \qquad\qquad i = 1, ..., n$$

Účelová funkcia tejto úlohy vyzerá nasledovne:

$$\begin{pmatrix} r_1 - r_0 \\ \vdots \\ r_n - r_0 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \frac{1}{\sigma_1^2} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \frac{1}{\sigma_n^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 - r_0 \\ \vdots \\ r_n - r_0 \end{pmatrix} = \frac{(r_1 - r_0)^2}{\sigma_1^2} + \ldots + \frac{(r_n - r_0)^2}{\sigma_n^2}$$

Pre deriváciu tejto funkcie podľa r_i platí:

$$\frac{\partial}{\partial r_i} = \frac{2(r_i - r_0)}{\sigma_i^2} > 0$$

Účelová funkcia teda podľa každej premennej ostro rastie, jej minimum na množine prípustných riešení sa teda nachádza v bode:

$$r_i^* = a_i \ \ \forall i = 1, \ldots, n$$

Dosadením tejto hodnoty do vektora w^R, nájdením hodnoty parametra α zodpovedajúcej trhovému portfóliu (je rovnaká, ako v Markowitzovom modeli) a rozpísaním po zložkách dostávame tvrdenie vety.

■

2.2.3 Porovnanie

Pozrime sa bližšie na vypočítané hodnoty w_i^M, resp. w_i^R:

$$w_i^M = \frac{r_i - r_0}{\sigma_i^2 \sum_{j=1}^n \left(\frac{r_j - r_0}{\sigma_j^2}\right)} \qquad w_i^R = \frac{a_i - r_0}{\sigma_i^2 \sum_{j=1}^n \left(\frac{a_j - r_0}{\sigma_j^2}\right)} \qquad \forall i = 1, \ldots, n$$

- Kedy sa tieto hodnoty rovnajú? Z predpisov oboch portfólií je hneď zrejmé, že oba modely vrátia rovnaké hodnoty váh aktív, ak v Markowitzovom modeli ako odhady očakávaných výnosov rizikových aktív na vstupe zvolíme hodnoty: $r_i = a_i \ \forall i = 1, \ldots, n$. Spejeme tým k záveru, že Robustný model "nespraví nič iné" , len za očakávané výnosy zvolí ich najhoršie možné odhady v rámci prípustných ohraničení. Tento záver už nevnímame ako šokujúci, nakoľko niečo podobné sme dostali aj v prípade dvoch nezávislých rizikových aktív. Táto kapitola je v podstate jej zovšeobecnením pre n rizikových aktív. Napriek tomu opäť poznamenajme, že Robustný model nevykazuje v týchto prípadoch príliš veľkú užitočnosť, keďže jeho účinok sa nestratí jednoduchou zmenou na vstupe a následným použitím Markowitzovho modelu. Neistota ohľadom odhadnutých očakávaných výnosov, ktorej sme chceli použitím Robustného modelu zabrániť, sa preniesla na rovnakú neistotu ohľadom ich dolných ohraničení v Robustnom modeli.

- Z pohľadu na predpisy portfólií a využitím predpokladu

  $$r_0 \leq a_i \leq r_i \leq b_i \;\; \forall i = 1, \ldots, n$$

  takisto zisťujeme, že platí:

  $$w_i^M \geq 0, w_i^R \geq 0 \;\; \forall i = 1, \ldots, n$$

  Inými slovami, ak sú aktíva navzájom nezávislé, vo výslednom optimálnom trhovom portfóliu nejdeme ani s jedným aktívom do krátkej pozície, čiže prípadná doplňujúca požiadavka $w_i \geq 0 \;\; \forall i = 1, \ldots, n$ by v tomto prípade nebola aktívna a teda ani potrebná.

2.3 Trhové portfólio pre n-závislých rizikových aktív s obmedzením krátkej pozície

V predchádzajúcich kapitolách sme požadovali, aby jednotlivé rizikové aktíva boli nezávislé. Táto požiadavka nám potom implikovala diagonalitu kovariančnej matice Σ a uľahčovala mnohé úvahy a výsledky. Nakoniec sme vďaka získaným hodnotám výsledných trhových portfólií dospeli ku dvom významným záverom:

- Strácala sa užitočnosť Robustného modelu v porovnaní s Markowitzovým modelom, pretože Robustný model zakaždým volil optimálne hodnoty očakávaných výnosov ako $r_i = a_i \;\; \forall i = 1, \ldots, n$.

- Výsledné váhy aktív v trhovom portfóliu boli zakaždým nezáporné. Táto nezápornosť sa vyskytovala prirodzene, pretože žiadna doplnková požiadavka tvaru $w_i \geq 0$ sa v nami riešených úlohách nevyskytovala. V skutočnosti sa o túto vlastnosť portfólií "postarala" diagonalita kovariančnej matice.

Tieto vlastnosti však v praxi nie sú príliš použiteľné, pretože v drvivej väčšine prípadov rizikové aktíva navzájom do istej miery korelované sú. [2] Istá korelácia sa totiž väčšinou vyskytuje aj medzi nesúvisiacimi aktívami. Naopak pri aktívach firiem pôsobiacich v tom istom priemyselnom odvetví môžeme očakávať pomerne významnú koreláciu, pretože rozličné faktory súvisiace s týmto odvetvím (ceny komodít, investície v danom odvetví, ale aj počasie) môžu zvýšiť pravdepodobnosť toho, že jednotlivé pozorované výnosy aktív sa budú pohybovať nahor, resp. nadol spoločne. [2, s. 5] Vlastnosti, vyplývajúce z predchádzajúcich kapitol majú teda skôr teoretický význam.

Preto v tejto kapitole upravíme naše požiadavky vzhľadom na situáciu na trhu nasledovne: budeme predpokladať, že očakávané výnosy rizikových aktív nemusia byť navzájom nezávislé, t. j. môže platiť:

$$\sigma_{ij} \neq 0 \ \ \forall i, j$$

Čo tento fakt znamená pre matematickú stránku jednotlivých optimalizačných úloh? Keďže kovariancia aktív môže byť nenulová, kovariančná matica Σ nemusí byť diagonálna. Budeme teda predpokladať, že vyzerá nasledovne:

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & \dots & \sigma_{1n} \\ \sigma_{12} & \sigma_2^2 & \dots & \sigma_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{1n} & \sigma_{2n} & \dots & \sigma_n^2 \end{pmatrix}$$

Ďalším pridaným predpokladom bude trhový zákaz krátkych pozícií, čiže zákaz praktiky zvanej short-selling. Ide o predaj aktív (väčšinou akcií firiem), ktoré si investor požičal od tretej strany (väčšinou od brokera), pričom investor má záujem neskôr tieto akcie odkúpiť naspäť a vrátiť tretej strane. Short selleri z tejto aktivity profitujú vtedy, ak počas obdobia pôžičky cena aktíva na trhu klesne. [18] Keďže ide o predaj aktív, matematicky je táto praktika vyjadrená nasledovne: Ak investor ide s aktívom i do krátkej pozície, potom v investorovom portfóliu platí:

$$w_i < 0$$

Investor teda vlastní záporné množstvo daného aktíva.

Short selling spôsobuje medzi investormi dlhodobé kontroverzie datujúce sa až do začiatku 17. storočia. V USA bola táto praktika v určitých obdobiach zakázaná. Mnoho expertov ju považuje za príčinu kolabsov trhov, vysokej volatility trhov a pod. [18] Short selling je v mnohých krajinách zakázanou praktikou. Preto predstavuje nezanedbateľné percento prípadov práve pridané ohraničenie: $w_i \geq 0 \ \forall i$. V tejto kapitole budeme predpokladať, že sa investor nachádza na trhu, v ktorom platí zákaz krátkych pozícií.

Keďže v tomto prípade je riešenie oboch modelov netriviálne, neposkytneme explicitný predpis optimálneho trhového portfólia.

2.3.1 Markowitzov model

Na vstupe Markowitzovho modelu máme:

$$r_0, r = \begin{pmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_n \end{pmatrix}, \Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & \dots & \sigma_{1n} \\ \sigma_{12} & \sigma_2^2 & \dots & \sigma_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{1n} & \sigma_{2n} & \dots & \sigma_n^2 \end{pmatrix}$$

Riešime úlohu:

$$\max_{w, w_0} (1-\alpha)(w_0 r_0 + w^T r) - \alpha w^T \Sigma w$$

$$w_0 + w^T \mathbf{1} = 1$$

$$w_i \geq 0 \ \ \forall i = 1, \dots, n$$

Tá je vďaka väzbe $w_0 + w^T\mathbf{1} = 1$ ekvivalentná s úlohou:

$$\max_{w\geq 0} f(w,r) = (1-\alpha)(r_0 + w^T(r - r_0\mathbf{1})) - \alpha w^T\Sigma w \tag{6}$$

Účelová funkcia $f(w,r)$ je (vďaka ostrej konvexnosti matice Σ) ostro konkávna, množina prípustných riešení je kompaktná. V tomto prípade úlohu nebudeme riešiť, postačí tvrdenie, že úloha (6) má jednoznačné riešenie. Toto riešenie samozrejme závisí od voľby vstupných parametrov. Jedným z nich je vektor očakávaných výnosov. Preto optimálne riešenie tejto úlohy w^M budeme chápať ako funkciu vektora r:

$$w^M(r) := \arg\max_{w\geq 0} f(w,r)$$

2.3.2 Robustný model

Ako už vieme, na vstupe Robustného modelu máme namiesto vektora r vektory a, b a riešime úlohu:

$$\begin{aligned}\min_r \max_w & (1-\alpha)(w_0 r_0 + w^T r) - \alpha w^T\Sigma w \\ & w_0 + w^T\mathbf{1} = 1 \\ & w_i \geq 0 \;\; \forall i = 1,\dots,n \\ & a \leq r \leq b\end{aligned}$$

Zmenou poradia maximalizácie a minimalizácie a využitím vzťahu $w_0 + w^T\mathbf{1} = 1$ dostaneme ekvivalentnú úlohu:

$$\max_{w\geq 0} \min_{a\leq r\leq b} f(w,r) = (1-\alpha)(r_0 + w^T(r - r_0\mathbf{1})) - \alpha w^T\Sigma w \tag{7}$$

Riešenie tejto úlohy takisto existuje, označme ho nasledovne:

$$w^R := \arg\max_{w\geq 0} \min_{a\leq r\leq b} f(w,r) = \arg\min_{a\leq r\leq b} \max_{w\geq 0} f(w,r)$$

Veta 2.5 *Pre optimálne portfóliá Markowitzovho a Robustného modelu platí:*

$$w^R = w^M(a)$$

Dôkaz:

$$w^M(a) = \arg\max_{w\geq 0} f(w,a) = \arg\max_{w\geq 0} (1-\alpha)(r_0 + w^T(a - r_0\mathbf{1})) - \alpha w^T\Sigma w$$

$$w^R = \arg\max_{w\geq 0} \min_{a\leq r\leq b} f(w,r) = \arg\max_{w\geq 0} \min_{a\leq r\leq b} (1-\alpha)(r_0 + w^T(r - r_0\mathbf{1})) - \alpha w^T\Sigma w$$

Predpokladajme teraz, že $w \geq 0$. Potom pre úlohu $\min_{a\leq r\leq b} f(w,r)$ platí:

$$\frac{\partial f(w,r)}{\partial r_i} = (1-\alpha) w_i \geq 0 \;\; \forall i = 1,\dots,n$$

Pričom:

- Ak $w_i = 0 \Rightarrow \frac{\partial f(w,r)}{\partial r_i} = 0 \Rightarrow \min_{r_i} f(w,r) = f(w,a)$

- Ak $w_i > 0 \Rightarrow \frac{\partial f(w,r)}{\partial r_i} > 0 \Rightarrow \min_{r_i} f(w,r) = f(w,a)$

V oboch prípadoch môžeme za optimálnu hodnotu r_i zvoliť $r_i^* = a_i$. Pri nezápornom vektore váh teda vždy platí:

$$\min_{a \leq r \leq b} f(w,r) = f(w,a)$$

Z toho nám vyplýva:

$$w^R = \arg\max_{w \geq 0} \min_{a \leq r \leq b} f(w,r) = \arg\max_{w \geq 0} f(w,a) = w^M(a)$$

■

Podľa dokázanej vety sa teda optimálne portfólio Markowitzovho modelu rovná tomu získanému pomocou Robustného modelu vtedy, ak za očakávané výnosy zvolíme hodnoty a_i. Táto "neužitočnosť" Robustného modelu sa teda prejavuje nielen v prípade nezávislých aktív, ale aj v prípade korelovaných aktív, ak na trhu platí zákaz krátkych pozícií. Ako sme už povedali, tákéto situácie sa na rôznych trhoch vyskytujú pomerne bežne, preto je tento záver prakticky podstatne významnejší oproti záverom, ku ktorým sme dospeli v predchádzajúcich kapitolách.

2.4 Protipríklad - Trhové portfólio pre 2 korelované aktíva

Zatiaľ sa nám užitočnosť Robustného modelu veľmi nepotvrdila: vo všetkých predchádzajúcich uvažovaných situáciách sme museli konštatovať, že Robustný model nerobí nič iné, len v minimalizačnej časti optimalizácie volí $r_i^* = a_i$ a ďalej rieši klasickú Markowitzovu úlohu pre tieto hodnoty očakávaných výnosov. Ponúka sa nám teda otázka, či vôbec existujú situácie, v ktorých Robustný model zvolí za optimálne očakávané výnosy nejake iné hodnoty ako ich dolné ohraničenia.

Odpoveď na túto otázku je kladná. Jeden z prípadov budeme ilustrovať v tejto kapitole. Situácia na trhu bude nasledovná: Budeme mať k dispozícii jedno bezrizikové a dve rizikové aktíva, ktoré budú korelované, t.j. v tomto prípade platí:

$$\sigma_{12} \neq 0$$

Znamená to, že pre rizikové aktíva $1,2$ existuje nejaký nenulový *koeficient korelácie* ρ_{12}, pre ktorý platí:

$$\rho_{12} = \frac{Var(r_1, r_2)}{\sqrt{(\sigma_1^2)}\sqrt{(\sigma_2^2)}} = \frac{\sigma_{12}}{\sqrt{(\sigma_1^2)}\sqrt{(\sigma_2^2)}}, \quad \rho_{12} \in \langle -1, 1 \rangle$$

Na tomto mieste upozorníme na jednu skutočnosť: pre korelačný koeficient v skutočnosti nemôže platiť $\rho_{12} \in \langle -1, 1 \rangle$. Musíme z našich úvah vylúčiť možnosť, že rizikové aktíva sú perfektne kladne alebo záporne korelované, čiže musí platiť:

$$\rho_{12} \neq \pm 1 \Rightarrow \rho_{12} \in (-1, 1)$$

Toto je len dôsledok jedného z predpokladov našich modelov, a síce kladnej definitnosti matice Σ. Aby tento predpoklad zostal zachovaný, musí platiť:[7]

$$\det(\Sigma) = \sigma_1^2\sigma_2^2 - \sigma_1^2\sigma_2^2\rho_{12}^2 > 0 \Leftrightarrow \rho_{12} \in (-1, 1)$$

[7] V skutočnosti by prípad $\rho_{ij} \in \{-1, 1\}$ implikoval existenciu arbitráže, teda možnosti získať nenulový zisk pri nulovom riziku.

Navyše v tomto prípade povolíme na trhu možnosť ísť do krátkych pozícií. Jedná sa teda o dvojrozmerný prípad predchádzajúcej situácie, navyše s povolenými zápornými váhami vo výslednom portfóliu. Opäť použijeme oba modely, pričom opäť nás bude zaujímať kompozícia výsledného trhového portfólia.

2.4.1 Markowitzov model

V Markowitzovom modeli na vstupe máme:

$$r_0, r = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix}, \Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_2^2 \end{pmatrix}$$

Veta 2.6 *Trhové portfólio zložené z dvoch korelovaných aktív získané pomocou Markowitzovho modelu je nasledovné:*

$$w_1^M = \frac{(r_2 - r_0)\sigma_{12} - (r_1 - r_0)\sigma_2^2}{(r_2 - r_0)(\sigma_{12} - \sigma_1^2) + (r_1 - r_0)(\sigma_{12} - \sigma_2^2)}$$
$$w_2^M = \frac{(r_1 - r_0)\sigma_{12} - (r_2 - r_0)\sigma_1^2}{(r_2 - r_0)(\sigma_{12} - \sigma_1^2) + (r_1 - r_0)(\sigma_{12} - \sigma_2^2)}$$

Dôkaz: Riešime Markowitzovu úlohu:

$$\max_w (1-\alpha)(w_0 r_0 + w^T r) - \alpha w^T \Sigma w = (1-\alpha)(r_0 w_0 + r_1 w_1 + r_2 w_2) - \alpha(w_1^2\sigma_1^2 + 2w_1 w_2 \sigma_1 \sigma_2 \rho_{12} + w_2^2 \sigma_2^2)$$
$$w_0 + w^T \mathbf{1} = 1$$

Po substitúcii $w_0 = 1 - w^T\mathbf{1}$ riešime úlohu na voľný extrém:

$$\max_w (1-\alpha)(r_0 + w^T(r - r_0\mathbf{1})) - \alpha w^T \Sigma w$$

Platí (nutné podmienky prvého rádu):

$$\frac{\delta}{\delta w} = (1-\alpha)(r - r_0\mathbf{1}) - 2\alpha\Sigma w = 0 \Leftrightarrow w = \frac{1-\alpha}{2\alpha}\Sigma^{-1}(r - r_0\mathbf{1})$$

Efektívna hranica parametrizovaná hodnotou α potom vyzerá nasledovne:

$$w = \frac{1-\alpha}{2\alpha}\Sigma^{-1}(r - r_0\mathbf{1})$$
$$w_0 = 1 - \frac{1-\alpha}{2\alpha}(r - r_0\mathbf{1})^T\Sigma^{-1}\mathbf{1}$$

Hodnota zlomku $\frac{1-\alpha}{2\alpha}$ zodpovedajúca trhovému portfóliu je $\frac{1}{(r - r_0\mathbf{1})^T\Sigma^{-1}\mathbf{1}}$.

Inverznú maticu Σ^{-1} ľahko vypočítame pomocou Cramerovho pravidla:

$$\Sigma^{-1} = \frac{1}{\det(\Sigma)}\begin{pmatrix} \sigma_2^2 & -\sigma_1\sigma_2\rho_{12} \\ -\sigma_1\sigma_2\rho_{12} & \sigma_1^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2\sigma_2^2 - \sigma_1^2\sigma_2^2\rho_{12}^2} & -\frac{\sigma_1\sigma_2\rho_{12}}{\sigma_1^2\sigma_2^2 - \sigma_1^2\sigma_2^2\rho_{12}^2} \\ -\frac{\sigma_1\sigma_2\rho_{12}}{\sigma_1^2\sigma_2^2 - \sigma_1^2\sigma_2^2\rho_{12}^2} & \frac{\sigma_1^2}{\sigma_1^2\sigma_2^2 - \sigma_1^2\sigma_2^2\rho_{12}^2} \end{pmatrix}$$

Trhové portfólio Markowitzovho modelu je teda:

$$w^M = \begin{pmatrix} w_1^M \\ w_2^M \end{pmatrix} = \frac{\begin{pmatrix} \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2\sigma_2^2 - \sigma_1^2\sigma_2^2\rho_{12}^2} & -\frac{\sigma_1\sigma_2\rho_{12}}{\sigma_1^2\sigma_2^2 - \sigma_1^2\sigma_2^2\rho_{12}^2} \\ -\frac{\sigma_1\sigma_2\rho_{12}}{\sigma_1^2\sigma_2^2 - \sigma_1^2\sigma_2^2\rho_{12}^2} & \frac{\sigma_1^2}{\sigma_1^2\sigma_2^2 - \sigma_1^2\sigma_2^2\rho_{12}^2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r_1 - r_0 \\ r_2 - r_0 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} r_1 - r_0 \\ r_2 - r_0 \end{pmatrix}^T\begin{pmatrix} \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2\sigma_2^2 - \sigma_1^2\sigma_2^2\rho_{12}^2} & -\frac{\sigma_1\sigma_2\rho_{12}}{\sigma_1^2\sigma_2^2 - \sigma_1^2\sigma_2^2\rho_{12}^2} \\ -\frac{\sigma_1\sigma_2\rho_{12}}{\sigma_1^2\sigma_2^2 - \sigma_1^2\sigma_2^2\rho_{12}^2} & \frac{\sigma_1^2}{\sigma_1^2\sigma_2^2 - \sigma_1^2\sigma_2^2\rho_{12}^2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

Po roznásobení, upravení a rozpísaní tohoto vzťahu po zložkách dostaneme portfólio zhodujúce sa s tvrdením tejto vety.

■

2.4.2 Robustný model

Tentokrát už predpokladáme, že výnosy oboch rizikových aktív máme odhadnuté intervalom. Na vstupe Robustného modelu potom figurujú nasledovné hodnoty:

$$r_0, a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}, \Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_2^2 \end{pmatrix}$$

Najprv sformulujeme nasledovné pomocné tvrdenie:

Lemma 2.1 *Úloha:*

$$\min_{r_1,r_2} \begin{pmatrix} r_1 - r_0 \\ r_2 - r_0 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \sigma_2^2 & -\sigma_1\sigma_2\rho_{12} \\ -\sigma_1\sigma_2\rho_{12} & \sigma_1^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 - r_0 \\ r_2 - r_0 \end{pmatrix}$$

$$a_1 \leq r_1 \leq b_1$$

$$a_2 \leq r_2 \leq b_2$$

má nasledovné riešenie:

$$r^* = (r_1^*, r_2^*)^T = \begin{cases} \left(a_1, \frac{r_0(\sigma_1^2 - \sigma_{12}) + \sigma_{12}a_1}{\sigma_1^2}\right)^T & ak\ \frac{\sigma_1(a_2-r_0)}{\sigma_2(a_1-r_0)} \leq \rho_{12} \leq \frac{\sigma_1(b_2-r_0)}{\sigma_2(a_1-r_0)} \\ (a_1, b_2)^T & ak\ \frac{\sigma_1(a_2-r_0)}{\sigma_2(a_1-r_0)} \leq \rho_{12} \nleq \frac{\sigma_1(b_2-r_0)}{\sigma_2(a_1-r_0)} \\ \left(\frac{r_0(\sigma_2^2 - \sigma_{12}) + \sigma_{12}a_2}{\sigma_2^2}, a_2\right)^T & ak\ \frac{\sigma_2(a_1-r_0)}{\sigma_1(a_2-r_0)} \leq \rho_{12} \leq \frac{\sigma_2(b_1-r_0)}{\sigma_1(a_2-r_0)} \\ (b_1, a_2)^T & ak\ \frac{\sigma_2(a_1-r_0)}{\sigma_1(a_2-r_0)} \leq \rho_{12} \nleq \frac{\sigma_2(b_1-r_0)}{\sigma_1(a_2-r_0)} \\ (a_1, a_2)^T & inak \end{cases}$$

Dôkaz: Matica $A = \begin{pmatrix} \sigma_2^2 & -\sigma_1\sigma_2\rho_{12} \\ -\sigma_1\sigma_2\rho_{12} & \sigma_1^2 \end{pmatrix}$ je kovariančnou maticou. Jej determinant je zároveň kladný:

$$\det(A) = \sigma_1^2\sigma_2^2 - \sigma_1^2\sigma_2^2\rho_{12}^2 > 0$$

Preto môžeme tvrdiť, že matica A je symetrická a kladne definitná. Účelová funkcia, ktorú minimalizujeme, je teda kvadratickou formou $f(z) = z^T Az$, kde vektor $z = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_1 - r_0 \\ r_2 - r_0 \end{pmatrix}$, ktorá má na množine R^2 práve jedno, jednoznačne určené, lokálne aj globálne minimum, ktorým je (s využitím podmienok prvého a druhého rádu) vektor:

$$z = 0 \Leftrightarrow r_1 = r_0 \wedge r_2 = r_0$$

Pripomeňme, že funkciu f minimalizujeme na množine:

$$a_1 \leq r_1 \leq b_1$$

$$a_2 \leq r_2 \leq b_2$$

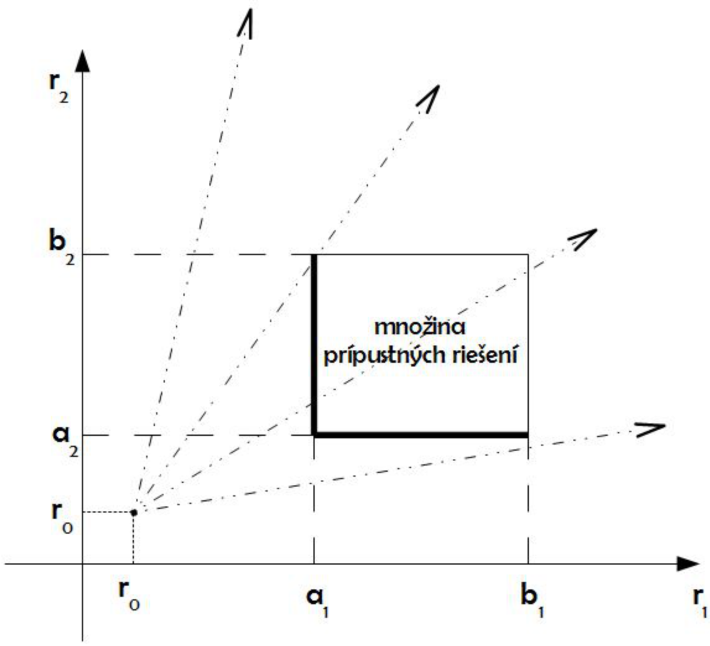
Ak by nám to ohraničenia našej úlohy dovoľovali, t.j. ak by platilo $a_1 \le r_0 \le b_1 \wedge a_2 \le r_0 \le b_2$, za optimálne hodnoty by sme zvolili práve globálne minimum, t.j. výnos bezrizikového aktíva.

My ale uvažujeme prípad $r_0 \le a_1 \wedge r_0 \le a_2$. Ak platí $r_0 = a_1 = a_2$, tak situácia je jasná, čiže optimálne riešenie je:

$$r_1^* = a_1, r_2^* = a_2$$

V opačnom prípade využijeme nasledovnú vlastnosť účelovej funkcie: Účelová funkcia $f(z)$ na množine $\langle r_0, \infty) \times \langle r_0, \infty)$ *rastie v ľubovoľnom smere* (keďže plocha generovaná funkciou f je paraboloid). Teda minimum na množine prípustných riešení sa môže nachádzať na ľubovoľnom prvku z tejto množiny (viď obrázok):

$$\{(r_1, r_2) \mid (r_1 = a_1 \vee r_2 = a_2) \wedge (a_1 \le r_1 \le b_1 \wedge a_2 \le r_2 \le b_2)\}$$



Obr. 2: Funkcia $f(z)$ rastie v každom smere z globálneho minima (r_0, r_0). Hrubou čiarou je vyznačená množina bodov, ktoré môžu byť lokálnym minimom na množine prípustných riešení.

Pozrime sa bližšie na prípad $r_1 = a_1, r_2 \in \langle a_2, b_2 \rangle$. V tomto prípade riešime úlohu:

$$\begin{aligned} &\min_{r_2} \sigma_1^2 (r_2 - r_0)^2 - 2\sigma_{12}(r_2 - r_0)(a_1 - r_0) \\ &a_2 \le r_2 \le b_2 \end{aligned} \tag{8}$$

Nutná podmienka prvého rádu je vďaka konvexnosti účelovej funkcie zároveň postačujúcou podmienkou na existenciu minima:

$$\frac{\partial}{\partial r_2} = 2\sigma_1^2(r_2 - r_0) - 2\sigma_{12}(a_1 - r_0) = 0 \Leftrightarrow r_2 = \frac{r_0(\sigma_1^2 - \sigma_{12}) + \sigma_{12} a_1}{\sigma_1^2}$$

Pričom musia platiť nasledovné ohraničenia:

$$r_2 \ge a_2 \Leftrightarrow \frac{r_0(\sigma_1^2 - \sigma_{12}) + \sigma_{12} a_1}{\sigma_1^2} \ge a_2 \Leftrightarrow \rho_{12} \ge \frac{\sigma_1(a_2 - r_0)}{\sigma_2(a_1 - r_0)}$$

$$r_2 \leq b_2 \Leftrightarrow \frac{r_0(\sigma_1^2 - \sigma_{12}) + \sigma_{12}a_1}{\sigma_1^2} \leq b_2 \Leftrightarrow \rho_{12} \leq \frac{\sigma_1(b_2 - r_0)}{\sigma_2(a_1 - r_0)}$$

V prípade, že druhá nerovnosť neplatí, sa minimum nachádza v krajnom bode množiny prípustných riešení úlohy (8), ktorým je b_2. Tým sme v podstate dokázali prvú dvojicu vetiev *Lemmy 2.1.* Dôkaz zvyšných "vetiev" je analogický.

■

Veta 2.7 *Trhové portfólio zložené z dvoch korelovaných aktív získané pomocou Robustného modelu je nasledovné:*

$$w^R = \begin{pmatrix} w_1^R \\ w_2^R \end{pmatrix} = \begin{cases} (1,0)^T & ak\ \frac{\sigma_1(a_2-r_0)}{\sigma_2(a_1-r_0)} \leq \rho_{12} \leq \frac{\sigma_1(b_2-r_0)}{\sigma_2(a_1-r_0)} \\ \begin{pmatrix} \frac{(b_2-r_0)\sigma_{12}-(a_1-r_0)\sigma_2^2}{(b_2-r_0)(\sigma_{12}-\sigma_1^2)+(a_1-r_0)(\sigma_{12}-\sigma_2^2)} \\ \frac{(a_1-r_0)\sigma_{12}-(b_2-r_0)\sigma_1^2}{(b_2-r_0)(\sigma_{12}-\sigma_1^2)+(a_1-r_0)(\sigma_{12}-\sigma_2^2)} \end{pmatrix} & ak\ \frac{\sigma_1(a_2-r_0)}{\sigma_2(a_1-r_0)} \leq \rho_{12} \nleq \frac{\sigma_1(b_2-r_0)}{\sigma_2(a_1-r_0)} \\ (0,1)^T & ak\ \frac{\sigma_2(a_1-r_0)}{\sigma_1(a_2-r_0)} \leq \rho_{12} \leq \frac{\sigma_2(b_1-r_0)}{\sigma_1(a_2-r_0)} \\ \begin{pmatrix} \frac{(a_2-r_0)\sigma_{12}-(b_1-r_0)\sigma_2^2}{(a_2-r_0)(\sigma_{12}-\sigma_1^2)+(b_1-r_0)(\sigma_{12}-\sigma_2^2)} \\ \frac{(b_1-r_0)\sigma_{12}-(a_2-r_0)\sigma_1^2}{(a_2-r_0)(\sigma_{12}-\sigma_1^2)+(b_1-r_0)(\sigma_{12}-\sigma_2^2)} \end{pmatrix} & ak\ \frac{\sigma_2(a_1-r_0)}{\sigma_1(a_2-r_0)} \leq \rho_{12} \nleq \frac{\sigma_2(b_1-r_0)}{\sigma_1(a_2-r_0)} \\ \begin{pmatrix} \frac{(a_2-r_0)\sigma_{12}-(a_1-r_0)\sigma_2^2}{(a_2-r_0)(\sigma_{12}-\sigma_1^2)+(a_1-r_0)(\sigma_{12}-\sigma_2^2)} \\ \frac{(a_1-r_0)\sigma_{12}-(a_2-r_0)\sigma_1^2}{(a_2-r_0)(\sigma_{12}-\sigma_1^2)+(a_1-r_0)(\sigma_{12}-\sigma_2^2)} \end{pmatrix} & inak \end{cases}$$

Dôkaz: Vo vektorovej forme má riešená úloha tvar:

$$\min_r \max_w (1-\alpha)(r_0 w_0 + w^T r) - \alpha(w^T \Sigma w)$$
$$w_0 + w^T \mathbf{1} = 1$$
$$a \leq r \leq b$$

Na začiatku riešime maximalizačnú časť úlohy cez w. Tou je úloha:

$$\max_w (1-\alpha)(r_0 w_0 + w^T r) - \alpha(w^T \Sigma w)$$
$$w_0 + w^T \mathbf{1} = 1$$

Táto úloha je zhodná s tou, ktorú sme riešili v Markowitzovom modeli, jej riešením je vektor váh:

$$w = \frac{1-\alpha}{2\alpha}\Sigma^{-1}(r - r_0\mathbf{1}) \tag{9}$$

Zostáva nám nájsť optimálne hodnoty r. Vidíme, že tento vektor je parametrizovaný riziko averzným parametrom α. Nás síce momentálne zaujíma len trhové portfólio, napriek tomu pokračujeme dosadením tejto parametrizovanej hodnoty do účelovej funkcie:

$$(1-\alpha)(r_0 w_0 + w^T r) - \alpha(w^T \Sigma w) = (1-\alpha)(r_0 w_0 + \left(\tfrac{1-\alpha}{2\alpha}\Sigma^{-1}(r - r_0\mathbf{1})\right)^T r) -$$
$$-\alpha(\left(\tfrac{1-\alpha}{2\alpha}\Sigma^{-1}(r - r_0\mathbf{1})\right)^T \Sigma \left(\tfrac{1-\alpha}{2\alpha}\Sigma^{-1}(r - r_0\mathbf{1})\right)) =$$
$$= (1-\alpha)r_0 + \tfrac{(1-\alpha)^2}{4\alpha}(r - r_0\mathbf{1})^T \Sigma^{-1}(r - r_0\mathbf{1}) =$$
$$= (1-\alpha)r_0 + \tfrac{(1-\alpha)^2}{4\alpha}\begin{pmatrix} r_1 - r_0 \\ r_2 - r_0 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_1\sigma_2\rho_{12} \\ \sigma_1\sigma_2\rho_{12} & \sigma_2^2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} r_1 - r_0 \\ r_2 - r_0 \end{pmatrix}$$

V druhom kroku optimalizácie pomocou robustného modelu teda minimalizujeme túto hodnotu cez r_1, r_2, pri príslušných ohraničeniach. Keďže hodnoty $(1-\alpha)r_0$ a $\frac{(1-\alpha)^2}{4\alpha}$ sú nám známe a nezáporné konštanty, stačí nám riešiť minimalizačnú úlohu:

$$\min_{r_1,r_2} \begin{pmatrix} r_1 - r_0 \\ r_2 - r_0 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_1\sigma_2\rho_{12} \\ \sigma_1\sigma_2\rho_{12} & \sigma_2^2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} r_1 - r_0 \\ r_2 - r_0 \end{pmatrix}$$

$$a_1 \le r_1 \le b_1$$

$$a_2 \le r_2 \le b_2$$

$$r_1, r_2 \ge r_0$$

Inverzná matica k matici Σ je prirodzene rovnaká ako tá, ktorú sme už vypočítali v Markowitzovom modeli. Za predpokladu, že platí $\rho_{12} \neq \pm 1$, môžeme riešiť úlohu:

$$\min_{r_1,r_2} \begin{pmatrix} r_1 - r_0 \\ r_2 - r_0 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \sigma_2^2 & -\sigma_1\sigma_2\rho_{12} \\ -\sigma_1\sigma_2\rho_{12} & \sigma_1^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 - r_0 \\ r_2 - r_0 \end{pmatrix}$$

$$a_1 \le r_1 \le b_1$$

$$a_2 \le r_2 \le b_2$$

V *lemme 2.1* sme už ukázali, aké má táto úloha riešenie. Pozrime sa bližšie na prvý prípad, t.j.:

$$r^* = \left(a_1, \frac{r_0(\sigma_1^2 - \sigma_{12}) + \sigma_{12}a_1}{\sigma_1^2}\right)^T \text{ak } \frac{\sigma_1(a_2 - r_0)}{\sigma_2(a_1 - r_0)} \le \rho_{12} \le \frac{\sigma_1(b_2 - r_0)}{\sigma_2(a_1 - r_0)}$$

Dosadením tohoto optimálneho vektora výnosov do (9) dostaneme:

$$w^R = \tfrac{1-\alpha}{2\alpha}\Sigma^{-1}(r^* - r_0\mathbf{1}) = \tfrac{1-\alpha}{2\alpha}\tfrac{1}{\sigma_1^2\sigma_2^2 - \sigma_{12}^2} \begin{pmatrix} \sigma_2^2 & -\sigma_{12} \\ -\sigma_{12} & \sigma_1^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 - r_0 \\ \frac{\sigma_{12}(a_1 - r_0)}{\sigma_1^2} \end{pmatrix} = \ldots =$$
$$= \tfrac{1-\alpha}{2\alpha} \begin{pmatrix} \frac{a_1 - r_0}{\sigma_1^2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Optimálne portfólio parametrizované α je teda nasledovné:

$$w_1^R = \frac{1-\alpha}{2\alpha}\frac{a_1 - r_0}{\sigma_1^2}, w_2^R = 0, w_0^R = 1 - w_1^R$$

Z tohoto predpisu nám pre trhové portfólio vyplýva:

$$w_0^R = 0 \Leftrightarrow w^R = \begin{pmatrix} w_1^R \\ w_2^R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \frac{1-\alpha}{2\alpha} = \frac{\sigma_1^2}{a_1 - r_0}$$

Tento výsledok je zhodný s prvým prípadom uvedenom v znení tejto vety. Investor s takým riziko averzným parametrom, že jeho hodnota spĺňa práve uvedenú podmienku, investuje všetko svoje imanie do prvého aktíva. Každý iný investor investuje časť do prvého aktíva a zvyšok do bezrizikového aktíva. Racionálny investor však v tomto prípade nikdy nevloží peniaze do druhého aktíva.

Toto platilo, ak bola splnená podmienka $\frac{\sigma_1(a_2-r_0)}{\sigma_2(a_1-r_0)} \le \rho_{12} \le \frac{\sigma_1(b_2-r_0)}{\sigma_2(a_1-r_0)}$. Ostatné prípady (nasledujúc podmienky v *Lemme 2.1*) sa dajú dokázať analogicky.

■

2.4.3 Porovnanie

V prípade korelovaných rizikových aktív neobmedzených vzhľadom na krátke pozície sme po prvý krát natrafili na situáciu, kedy sa Robustný model nespráva celkom predvídateľne. Z uvedených dôkazov vidíme, že minimalizačná časť úlohy v závislosti od vzťahov medzi jednotlivými vstupnými parametrami (prvkami kovariančnej matice, hodnotou bezrizikového výnosu, odhadmi očakávaných výnosov rizikových aktív) vracia rôzne hodnoty r_i^*. Jednotlivé možnosti kompozície výsledného portfólia spolu s optimálnymi hodnotami očakávaných výnosov, ktoré Robustný model v danom prípade určil, sú uvedené v tabuľke. Poznamenajme, že jednotlivé prípady sú uvedené v poradí, ktoré zodpovedá podmienkam uvedeným v *Lemme 2.1* a *Vete 2.7*.

w_1^R	w_2^R	r_1^*	r_2^*
1	0	a_1	$\frac{r_0(\sigma_1^2-\sigma_{12})+\sigma_{12}a_1}{\sigma_1^2}$
$\frac{(b_2-r_0)\sigma_{12}-(a_1-r_0)\sigma_2^2}{(b_2-r_0)(\sigma_{12}-\sigma_1^2)+(a_1-r_0)(\sigma_{12}-\sigma_2^2)}$	$\frac{(a_1-r_0)\sigma_{12}-(b_2-r_0)\sigma_1^2}{(b_2-r_0)(\sigma_{12}-\sigma_1^2)+(a_1-r_0)(\sigma_{12}-\sigma_2^2)}$	a_1	b_2
0	1	$\frac{r_0(\sigma_2^2-\sigma_{12})+\sigma_{12}a_2}{\sigma_2^2}$	a_2
$\frac{(a_2-r_0)\sigma_{12}-(b_1-r_0)\sigma_2^2}{(a_2-r_0)(\sigma_{12}-\sigma_1^2)+(b_1-r_0)(\sigma_{12}-\sigma_2^2)}$	$\frac{(b_1-r_0)\sigma_{12}-(a_2-r_0)\sigma_1^2}{(a_2-r_0)(\sigma_{12}-\sigma_1^2)+(b_1-r_0)(\sigma_{12}-\sigma_2^2)}$	b_1	a_2
$\frac{(a_2-r_0)\sigma_{12}-(a_1-r_0)\sigma_2^2}{(a_2-r_0)(\sigma_{12}-\sigma_1^2)+(a_1-r_0)(\sigma_{12}-\sigma_2^2)}$	$\frac{(a_1-r_0)\sigma_{12}-(a_2-r_0)\sigma_1^2}{(a_2-r_0)(\sigma_{12}-\sigma_1^2)+(a_1-r_0)(\sigma_{12}-\sigma_2^2)}$	a_1	a_2

Pri určitých podmienkach nastáva teda situácia, kedy Robustný model zvolí za optimálne hodnoty $r_i^* = a_i$, teda správa sa "Markowitzovsky". Naopak, inokedy volí pre jedno aktívum hodnotu dolného ohraničenia a_i, zatiaľ čo pre druhé hodnotu horného ohraničenia b_i. Vyskytujú sa takisto situácie, kedy vo výslednom (trhovom) portfóliu investujeme výlučne do jedného aktíva.

Všimnime si, že práve vtedy, keď Robustný model nezvolí za optimálnu hodnotu r_i nejaký krajný bod jeho odhadu (čiže a_i alebo b_i), nastáva prípad, že zodpovedajúce aktívum má vo výslednom portfóliu váhu rovnú nule. Naopak vždy, keď je ako optimálny zvolený krajný bod vidíme, že výsledná váha presne zodpovedá tej, ktorú získame z Markowitzovho modelu, avšak práve s takým výnosom, ktorý zodpovedá danému krajnému bodu.

Je zrejmé, že aj pri zovšeobecnení tejto situácie na trhu pre n-aktív by Robustný model fungoval o niečo komplexnejšie ako Markowitzov model. Otázkou však zostáva, či sa výsledné portfóliá správajú presne rovnako aj v prípade $n > 2$, alebo či v zložitejšej situácii môže nastať prípad, kedy Robustný model nezvolí ako optimálny krajný bod a zároveň váha prislúchajúceho aktíva bude nenulová.

3 Záver

Prvú časť tejto bakalárskej práce sme venovali predstaveniu dvoch modelov, ktorých základnou úlohou je optimalizovať portfólio investora, pričom prvým z nich bol klasický Markowitzov mean-variance model. Poukázali sme takisto na jeho nedostatky, jedným z nich bola veľká citlivosť na nepresnosti vo vstupných parametroch, konkrétne vo vektore očakávaných výnosov. Druhým modelom bola preto jeho modifikácia, tzv. Robustný model voľby portfólia. V oboch prípadoch sme dospeli k riešeniu, ktoré je reprezentovateľné efektívnou hranicou ako množinou najlepších stratégií investora. Takisto sme zaviedli a bližšie priblížili pojem trhového portfólia.

Kľúčovým predpokladom na to, aby vôbec mala táto modifikácia Markowitzovho modelu zmysel, bolo očakávanie, že výstup získaný jej použitím poskytne akúsi robustnosť výsledného portfólia vzhľadom na odchýlky na vstupe. V druhej časti práce sme preto tento predpoklad testovali. Postupne sme prezentovali nasledovné situácie na trhu: dostupnosť dvoch rizikových aktív s nulovou kovarianciou, jej zovšeobecnenie na n rizikových aktív a nakoniec predpoklad n korelovaných rizikových aktív, navyše s obmedzením možnosti ísť do krátkej pozície. Najmä táto posledná situácia predstavuje podstatnú časť rôznych trhov skutočne existujúcich v praxi. Vo všetkých troch prípadoch sme však dospeli k záveru, že Robustný model v takýchto situáciách volí ako "najrobustnejšie" práve dolné ohraničenia odhadov výnosov rizikových aktív. Jeho správanie je teda na takýchto trhoch celkom predvídateľné a umožňuje nám optimalizáciu portfólia rovnako efektívne riešiť základným Markowitzovým modelom. Výsledná robustnosť takýchto modelov je pritom rovnaká, pretože neistota ohľadom vstupov do Markowitzovho modelu sa nestratila. Nastalo totiž iba jej presunutie na neistotu ohľadom voľby spodnej hranice výnosov v Robustnom modeli.

Nakoniec sme však v druhej časti práce uviedli ešte jednu trhovú situáciu - dve korelované rizikové aktíva, tentokrát s možnosťou krátkej pozície. V tomto prípade sme konečne dospeli k celej množine výstupov dosiahnuteľných použitím Robustného modelu. Predpokladáme, že podobný záver by sme dostali aj po rozšírení na n aktív. Keďže aj takáto situácia je v praxi pravdepodobná, Robustný model ponúka skutočne zmysluplné zefektívnenie Markowitzovho modelu. Naviac sme zistili, že ak Robustný model v prípade dvoch rizikových aktív zvolí za optimálnu hodnotu očakávaného výnosu bod iný ako je krajný bod intervalu, v rámci ktorého výnosy odhadujeme, výsledná váha aktíva bude v optimálnom portfóliu nulová. Túto skutočnosť sme však nezovšeobecnili na n-rozmerný prípad.

Ak pokladáme nezávislosť rizikových aktív za nepravdepodobnú (priam až nereálnu), spejeme teda k záveru, že Robustný model je efektívnejší ako Markowitzov v prípade, že na trhu sú povolené krátke pozície. V opačnom prípade je avšak Markowitzovým modelom plne nahraditeľný.

4 Literatúra

[1] Markowitz, H. 1952 Portfolio selection. In *The Journal of Finance*, 1952, roč. 7, s. 77-91

[2] Markowitz, H. 1959 *Portfolio Selection*: Efficient Diversification of Investments. 2. vydanie - 1991 New York: Basil Blackwell, 1959, 344 s.

[3] Deng, X.T. a kol., 2004 A minimax portfolio selection strategy with equilibrium. In *European Journal of Operational Research 166*, 2005, s. 278-292. Dostupné na internete:

`http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.86.8942&rep=rep1&type=pdf`

[4] Melicherčík, I. a kol., 2005 *Kapitoly z finančnej matematiky.* Bratislava: Ing. Miroslav Mračko - EPOS, 2005. ISBN 8080576513

[5] Murphy, J.M., 1997 Efficient Markets, Index Funds, Illusion, and Reality. In *Journal of Portfolio Management*, Fall 1977, s. 5-20

[6] Taleb, N. N., 2007 *The Black Swan*: The Impact of the Highly Improbable, 2007 Random House, ISBN 978-1-4000-6351-2

[7] Best, M.J., Grauer, R.R., 1991 Sensitivity analysis for mean–variance portfolio problems. In *Management Science*, 37, 1991, s. 981–989

[8] Best, M.J., Grauer, R.R., 1991 On the sensitivity of mean–variance-efficient portfolios to changes in asset means: Some analytical and computational results. In *Review of Financial Studies*, 4, 1991, s. 315–342

[9] Best, M.J., Grauer, R.R., 1992 Positively weighted minimum-variance portfolios and the structure of asset expected returns. In *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 27, 1992, s. 513–537

[10] Sharpe, W.F., 1964 Capital asset prices: A theory of market equilibirium under conditions of risk. In *The Journal of Finance*, 19, 1964, s. 425–442

[11] Lintner, J., 1965 The valuation of risk assets and the selection of risky investments in stock portfolios and capital budgets. In *Review of Economics and Statistics*, 47, 1965, s. 13–37

[12] Mossin, J., 1966 Equilibrium in capital asset market. In *Econometrica*, 34, 1966, s. 768–783

[13] Rom, B.M., Ferguson, K.W., 1993 Post-Modern Portfolio Theory Comes of Age. In *The Journal of Investing*, Winter, 1993

[14] Xia, Y., a kol., 2000 A model for portfolio selection with order of expected returns. In *Computers and Operations Research*, 27, 2000, s. 409–422

[15] Zvára, K. Štěpán, J., 1997 *Pravděpodobnost a matematická statistika*, Praha, Matfyzpress, 1997

[16] Fan, K., 1953 Minimax theorems. In *Proceedings of the National Academy of Sciences USA*, 39, 1953, s. 42–47.

[17] Ross, Westerfield, Jaffe, 2003 *Corporate finance, 6th edition* USA, McGraw-Hill Primis Online, 2003, ISBN:0-390-32000-5

[18] Charoenrook, A., Daouk, H., 2005 A Study of Market-Wide Short-Selling Restrictions Department of Applied Economics and Management, Cornell University, Ithaca, New York 14853-7801 USA. Dostupné na internete:

`http://dyson.cornell.edu/research/researchpdf/wp/2009/Cornell_Dyson_wp0921.pdf`