UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY

**Fourierove rady v príkladoch**

BAKALÁRSKA PRÁCA

Bratislava 2011

Tomáš Tatara

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE

FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY

Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky

Kód práce: 3fe5b17a-670c-46ce-a1fc-d08e778041e6

**Fourierove rady v príkladoch**

BAKALÁRSKA PRÁCA

Tomáš Tatara

9.1.9 Aplikovaná matematika

Ekonomická a financná matematika

Vedúci práce:

RNDr. Ľubica Kossaczská, CsC.

Bratislava 2011

Univerzita Komenského v Bratislave
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

## ZADANIE ZÁVEREČNEJ PRÁCE

**Meno a priezvisko študenta:** Tomáš Tatara
**Študijný program:** ekonomická a finančná matematika (Jednoodborové štúdium, bakalársky I. st., denná forma)
**Študijný odbor:** 9.1.9. aplikovaná matematika
**Typ záverečnej práce:** bakalárska
**Jazyk záverečnej práce:** slovenský

**Názov :** Fourierove rady

**Cieľ :** Prehlbenie vedomostí z teórie Fourierových radov , výpočet niektorých cvičení z teorie Fourierových radov. rešerž aplikácie Fourierových radov.

**Literatúra :** Tolstow:Fourierreihen, Mark Cartwright Fourier methods for mathematicians, scientists and engineers.

**Vedúci :** RNDr. Ľubica Kossaczká, CSc.

**Dátum zadania:** 27.10.2010

**Dátum schválenia:** 08.11.2010

doc. RNDr. Margaréta Halická, CSc.
garant študijného programu

Tomáš Tatara
študent

Kossaczká
vedúci práce

Dátum potvrdenia finálnej verzie práce, súhlas s jej odovzdaním (vrátane spôsobu sprístupnenia)

2.6.2011. Kossaczká
vedúci práce

**Čestné prehlásenie**

Vyhlasujem, že bakalársku prácu som vypracoval samostatne s použitím uvedenej odbornej literatúry.

Bratislava, jún 2011

..........................

Vlastnoručný podpis

**Poďakovanie**

Rád by som poďakoval mojej vedúcej práce RNDr. Ľubici Kossaczskej CsC. za čas, ktorý mi venovala, ale aj za odbornú pomoc, ktorú mi veľmi ochotne venovala.

**Abstrakt**

Tatara, Tomáš: Fourierove rady v príkladoch. Univerzita Komenského, Bratislava. Fakulta matematiky,fyziky a informatiky. Vedúci: RNDr. Ľubica Kossaczská, CsC. Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky. Bratislava : FMFI UK, 2011, počet strán : 39.

V tejto bakálarskej práci sa budem venovať Fourierovým radom. Mal som zadaný trigonometrický rad a zisťoval som jeho súčet. Pomocou Abelovskej lemmy a teórie z komplexnej analýzy som počítal tieto súčty. Podľa teórie sú tieto rady Fourierovými radmi.

**Abstract**

Tatara, Tomáš: Fourier series in problems. Comenius University, Bratislava. Faculty of Mathematics, Physics and Informatics. Supervisor: RNDr. Ľubica Kossaczská, CsC. Department od Applied Mathematics and Statistics. Bratislava. FMFI UK, 2011. Number of pages : 39.

In this bachelor thesis i will talk about Fourier series. I will have trigonometric series and i have to find out its sum. Abel theorem and theory of complex analysis will help me to solve these series. Theory says that these series are the Fourier series.

# Obsah

# 1 Úvod

Cieľom mojej bakalárskej práce je urobiť rešerš Fourierových radov a vypočítať príklady zo 4. kapitoly knihy Fourierove rady od autora Georgi P.Tolstov. Najprv som spísal tériou a rôzne vety z knihy a tieto vedomosti som použil na vypočítanie príkladov. Teóriu som spísal z prvých štyroch kapitol knihy. Príkladov je 11 a v druhej polovici príkladov som musel použit aj vedomosti o analytickej funkcii komplexnej premennej zo skrípt Vybrané kapitoly z analýzy (Neubrun, Smítal). Často sa v mojej bakalárskej práce objavujú komplexné čísla, logaritmy, goniometrické funkcie a integrály. V druhom ročníku na predmete matematická analýza 3 sme sa venovali Fourerovým radom a ja som sa rozhodol, že sa budem venovať týmto Fourierovým radom troška hlbšie. Klasický Fourierov rad vyzerá nasledovne:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

a od tohto sa všetko odvíja.

# 2 Teória

Nech $f(x)$ je funkcia z intervalu $(-\pi, \pi)$ z $R$. Nech je daný trigonometrický systém $(1, \cos x, ...)$. Potom postupnosťou Fouerierového radu rozumieme

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$$

a označujeme

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x) \cos nx dx (n = 0, 1, 2...),$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x) \sin nx dx (n = 1, 2, ...).$$

Označme $L_1(a, b)$ priestor Lebesgueovsky integrovateľných funkcií na intervale $< a, b >$.

### Integrovateľné funkcie s druhými mocninami

Nech $f(x)$ je merateľná na $< a, b >$ a $\exists$ integrál:

Priestor týchto funkcií je priestor so skalárnym súčinom

$$\int_a^b |f^2(x)| dx < \infty$$

$$(f, g) = \int_a^b f(x)g(x)dx$$

Označujeme $L_2(a,b)$

Cauchy-Schwarzova nerovnosť v priestore so skalárnym súčinom:

$$|(a,b)| \leq |a|.|b|$$

$$\int_a^b |f(x)g(x)|dx \leq (\int_a^b |f^2(x)|dx)^{\frac{1}{2}}.(\int_a^b g^2(x)dx)^{\frac{1}{2}}$$

**Príklad**

$$L_2(a,b) \subset L_1(a,b)$$

$\frac{1}{\sqrt{x}} \in L_1(0,1)$, $\frac{1}{\sqrt{x}}$nie je z$L_2(0,1)$, lebo $\int_0^1 \frac{1}{x}dx = \infty$

V priestore $L_2(-\pi,\pi)$ definujeme skalárny súčin nasledovným predpisom:

$$(f,g) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx$$

Aký zmysel majú nasledovné vety:

Ak je funkcia súčet trigonometrického radu, tak tento trigonometrický rad je Fourierov rad.

**Veta 1** ([1] str. 14)

Ak funkcia $f$ s periódou $2\pi$ je súčtom trigonometrického radu, ktorý rovnomerne konverguje na celej reálnej osi, potom tento rad je Fourierov rad funkcie $f(x)$.

**Veta 2** ([1] str. 15)

Ak absolútne integrovateľná ($\exists \int_0^{2\pi} |f(x)|dx < \infty$) $2\pi$ periodická funkcia $f(x) \in L_1 \in (-\pi,\pi)$ môže byť rozšírená do trigonometrického radu ($f = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos nx + d_n \sin nx$), ktorý konverguje k $f(x)$ všade okrem konečného počtu bodov, potom tieto koeficinety sú koeficientami Fouerierovho radu. Čiže:

$$c_n = a_n$$

$$d_n = b_n$$

**Definícia hladkej funkcie** na $< a,b >$ :

$f(x)$ je hladká na $< a,b >$ práve vtedy, keď $f'(x)$ je spojitá a priestor spojitých funkcií so spojitými deriváciami označíme $C^1 < a,b >$.

**Definícia po častiach hladkej funkcie**

Interval $< a,b >$ sa dá rozdeliť na konečne veľa intervalov

$< a_0, a_1 >$ , $< a_1, a_2 >$ , ... , $< a_{n-1}, b >$ a na každom je táto funkcia hladká.

**Kritérium 1** ([1] str. 19)

Fourierov rad (spojitý alebo nespojitý) po častiach hladkej funkcie $f(x)$ s periódou $2\pi$ konverguje pre všetky hodnoty $x$. Suma radov sa rovná $f(x)$ v každom bode spojitosti a rovná sa číslu:

$$\frac{1}{2}[f(x+0) + f(x-0)]$$

Čiže aritmetickému priemeru pravo strannej a ľavo strannej limity v každom bode nespojitosti. Ak je $f(x)$ spojitá všade, potom rady konvergujú absolútne a rovnomerne.

## 2.1 Komplexná forma Fourierovho radu

Majme funkciu $f :< -l, l >\to R$ (ale platí aj do $C$). Ďalej majme členy $a_n, b_n$ Fouerierového radu dané nasledovným predpisom:

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) cos\frac{n\pi x}{l}$$

$$b_n = \frac{1}{l}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) sin\frac{n\pi x}{l}$$

Funkciu $f$ aproximujeme Fourierovým radom:

$$f \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n cos\frac{n\pi x}{l} + b_n sin\frac{n\pi x}{l}$$

Označme $c_n = \frac{a_n - ib_n}{2}$ pre $n > 0$

$c_{-n} = \frac{a_n + ib_n}{2}$ pre $n > 0$

Vidíme, že:

$$a_n = c_n + c_{-n}$$

$$b_n = \frac{c_{-n} - c_n}{i} = (c_{-n} - c_n)(-i) = c_n i - c_{-n} i$$

$$f \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n cos\frac{n\pi x}{l} + b_n sin\frac{n\pi x}{l} =$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (c_n + c_{-n}) cos\frac{n\pi x}{l} + (c_n - c_{-n}).i.sin\frac{n\pi x}{l} =$$

$$= \frac{c_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{\frac{in\pi x}{l}} + \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}(cos\frac{n\pi x}{l} - isin\frac{n\pi x}{l}) =$$

$$\frac{c_0}{2} + \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{\frac{ik\pi x}{l}}$$

Pritom platí:

$$c_n = \frac{a_n - ib_n}{2} = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} cos\frac{n\pi x}{l} f(x)dx - \frac{i}{2l}\int_{-l}^{l} sin\frac{n\pi x}{l} f(x)dx = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x).e^{\frac{-in\pi x}{l}}dx$$

$$c_{-n} = \frac{a_n + ib_n}{2} = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(x)cos\frac{n\pi x}{l}dx + \frac{i}{2l}\int_{-l}^{l} f(x)sin\frac{n\pi x}{l}dx$$

$$= \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(x)(cos\frac{n\pi x}{l} + isin\frac{n\pi x}{l})dx = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(x)e^{\frac{n\pi xi}{l}}dx$$

A teda pre všetky $k \in Z$ platí:

$$c_k = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(x)e^{\frac{-ik\pi x}{l}}$$

$$f \sim \frac{c_0}{2} + \int_{-l}^{l} \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{\frac{ik\pi x}{l}}$$

## 2.2 Ortogonálne systémy

1) definícia ortogonálneho systému :

Nech

$$\varphi_0(x), ..., \varphi_n(x) \in L_2(-\pi, \pi)$$

Nech $\forall i \neq j$ :

$$\int_0^{2\pi} \varphi_i(x)\varphi_j(x)dx = 0$$

Potom

$$\varphi_0(x), ..., \varphi_n(x)$$

tvoria ortogonálny systém funkcií.

2) Fourierov rad daného ortogonálneho systému :

Definujme koeficient:

$$c_n = \frac{\int_a^b f(x)\varphi_n(x)}{\int_a^b \varphi_n^2(x)}dx$$

**Veta 3** ([1] str. 43)
Ak funkcie systému $(\varphi_0, \varphi_1, ..., \varphi_n)$ sú spojité a rozšírenie radu

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} c_i\varphi_i(x) \tag{1}$$

a konvergencia radu je rovnomerná, tak (1) je Fourierovým radom funkcie $f(x)$.

$\sum_{i=1}^{n} c_n\varphi_n$ rovnomerne konverguje k $f(x) \Rightarrow c_n$ je Fourierov rad.

**Poznámka o najlepšej aproximácií Fourierovými radmi**

Uvažujme nasledujúcu funkciu $F : R^n \to R$ :

$$F(\gamma_0, \gamma_1, ..., \gamma_n) \leq \int_a^b |f(x) - \sigma_n(x)|^2 dx$$

kde

$$\sigma_n(x) = \gamma_0\varphi_0(x) + ... + \gamma_n\varphi_n(x)$$

Potom hľadajme minimum $F(\gamma_0, ..., \gamma_n)$ Zistí sa, že minimum sa nadobúda vo Fourierových koeficientoch.

$$|f(x) - \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(x), f(x) - \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(x)| =$$

$$\int f^2(x)dx - 2\sum_{i=1}^{n}(f, \varphi_i) + \sum_{i=1}^{n} \|\varphi_i\|^2 =$$

$$\int f^2(x)dx - 2\sum_{i=1}^{n} c_k.\|\varphi_i\|^2 + \sum_{i=1}^{n} \|\varphi_i\|^2 = \int f^2(x) + \sum_{i=1}^{n} \|\varphi_i\|^2$$

## 2.3 Konvergencia v strede

**Definícia**

Ortogonálny systém $\varphi_0, \varphi_1, ..., \varphi_n, ...$ je úplný ak $\forall f \in L_2(a, b)$ :

$$\int_a^b f^2(x)dx = \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 \|\varphi_n\|^2$$

**Veta 4** ([1] str. 54)

Nech $f(x)$ je integrovateľná funkcia s druhou mocninou, pre ktorú platí:

$$f(x) \sim c_0\varphi_0(x) + c_1\varphi_1(x) + ...,$$

$$F(x) \sim C_0\varphi_0(x) + C_1\varphi_1(x) + ...,$$

a nech systém $\varphi_0(x)...\varphi_n(x) \in < a, b >$ je úplný. Potom:

$$\int_a^b f(x)F(x)dx = \sum_{k=0}^{\infty} c_k C_k \|\varphi_k\|^2.$$

**Veta 5** ([1] str. 55)

Nutná a postačujúca podmienka pre systém $\varphi_0(x)...\varphi_n(x)$ aby bol úplný je vzťah:

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b (f(x)-\sum_{k=0}^{n} c_k\varphi_k(x))^2 dx = 0$$

platný pre všetky funkcie $f(x) \in L_2(-\pi,\pi)$, kde $c_k$ (k=0,1,2,...) sú Fourierovými koeficientami funkcie $f(x)$ s ohľadom na systém $\varphi_0(x)...\varphi_n(x)$. Funkcia $f(x)$ je z triedy $L_2$.

**Veta 6** ([1] str. 56)
Ak je systém $\varphi_0(x)...\varphi_n(x)$ úplný, tak každá funkcia $f(x) \in L_2(-\pi,\pi)$ je úplne určená (okrem jej hodnôt v konečnch počtoch bodov) jej Fourierovým radom, či rad konverguje alebo nekonverguje.

### 2.4 Vlastnosti Fourierovho radu

**Veta 7** ([1] str. 57)
Nech je systém $\varphi_0(x)...\varphi_n(x)$ úplný, potom každá spojitá funkcia $f(x)$, ktorá je ortogonálna na všetky funkcie systému musí byť 0.

**Veta 8** ([1] str. 57) Ak je systém $\varphi_0, \varphi_1, ..., \varphi_n$ úplný, a ak funkcie systému sú spojité a Fourierov rad spojitej funkcie $f(x)$ je rovnomerne konvergentný, potom suma radu je rovná $f(x)$

$f_n$ rovnomerne konverguje k $q \Rightarrow f = q$

Dôkaz:

Vieme, že $f_n \to f$ v strede

$f_n$ rovnomerne konverguje k $g$

$f_n \to g$ v strede

$f = g$

**Veta 9** ([1] str. 58)
Ak je systém $\varphi_0, \varphi_1, ..., \varphi_n$ úplný na $(-\pi,\pi)$, potom Fourierov rad každej funkcie $f(x) \in L_2(-\pi,\pi)$ môže byť po častiach integrovateľný bez ohľadu na to, či rad konverguje alebo nie. Teda ak $f_n$ je n-ty čiastočný súčet Fourierovho radu

$f_n(x) \to f(x)$ v $L_2(-\pi,\pi)$

$$|\int_{-\pi}^{\pi}(f_n(x)-f(x))dx| \leq \int_{-\pi}^{\pi}|f_n(x)-f(x)|dx \leq |\int_{-\pi}^{\pi}(f_n(x)-f(x))^2|$$

## 2.5 Besselova nerovnosť

Nech funkcie

$$\cos x, \sin x, ..., \cos nx, \sin nx$$

Tvoria ortogonálny systém v $L_2(-\pi,\pi)$

$$\varphi_0, \varphi_1, ..., \varphi_n$$

$$f \sim \sum_{k=1}^{\infty} c_k \varphi_k$$

$$f \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k coskx + b_k sinkx$$

Bessel :

$$\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|^2 dx \geq \sum_{k=1}^{\infty}|c_k|^2 \|\varphi_k\|^2$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) \geq \frac{a_0^2}{4}.\|1\|^2 + \sum_{n=1}^{\infty} a_k^2.\|coskx\|^2 + b_k^2\|sinkx\|^2$$

$$\|1\|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} 1^2 dx = 2\pi$$

$$\|coskx\|^2 = \|sinkx\|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} cos^2 kx dx = \frac{1}{2}.\pi = \pi \Rightarrow$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) \geq \frac{a_0^2}{4}.2\pi + \sum a_k^2.\pi + b_k^2.\pi \Rightarrow$$

Besselova neronvosť v trigonometrickom systéme pre $f \in L_2(-\pi,\pi)$

$L_2(-\pi,\pi) \subset L_1(-\pi,\pi)$

a teda platí

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx \geq \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 + b_k^2$$

**Dôsledok Besselovej nerovnosti:**

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)cosnxdx = \lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

$\sum_{n=1}^{\infty} a_k^2 + b_k^2 \Rightarrow \lim_{k\to\infty} a_k = 0 = \lim_{k\to\infty} b_k \forall f(x) \in L_2(-\pi, \pi)$

$$g \in L_2 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} g(x) \cos nx dx$$

$$\lim_{n\to\infty} \int_{a}^{a+2\pi} g(x) \cos nx dx$$

$$\lim_{n\to\infty} \int_{a}^{a+2\pi} g(x) \sin nx dx$$

Teraz chceme, aby nemusela $g(x)$ byť v $L_2(-\pi, \pi)$ a aby $m$ nemuselo byť celé číslo

Ale v knihe Fourierove rady (Georgi P.Tolstov) je dokázané silnejšie tvrdenie

**Veta 10** (str. 70)

Pre každú absolútne integrovateľnú funkciu $f(x) \in L_1(-\pi, \pi)$ platí:

$$\lim_{m\to\infty} \int_a^b f(x) \cos mx dx = \lim_{m\to\infty} \int_a^b f(x) \sin mx dx = 0$$

pričom $m$ nemusí byť celé číslo.

Vidíme, že aj pre Fourierove koeficienty funkcie $f(x) \in L_1(a, b), a_n \to 0, b_n \to 0$

Dá sa ukázať, že

$$\frac{1}{2} + \cos nx + \cos 2nx + ... + \cos nnx = \frac{\sin(n + \frac{1}{2})n}{2 \sin \frac{n}{2}}$$

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos kx + b_k \sin kx$$

$$s_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos kx + b_k \sin kx$$

$$s_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos kt dt. \cos kx +$$

$$+ \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin kt dt. \sin kx =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) (\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} (\cos kt \cos kx + \sin kt \sin kx)) dt =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) (\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos k(t - x)) dt$$

$$s_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)(\frac{\sin(n+\frac{1}{2})(t-x)}{2\sin\frac{t-x}{2}})dt =$$

substitúcia $t - x = u$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi-x}^{\pi-x} f(x+u).\frac{sin(n+\frac{1}{2})u}{2sin\frac{u}{2}}du = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+u)\frac{sin(n+\frac{1}{2})u}{2sin\frac{u}{2}}du$$

$$s_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+u).\frac{sin(n+\frac{1}{2})u}{2sin\frac{u}{2}}du$$

pomocou tohto sa odvádza za akých postačujúcich podmienok na $f$

$S_n(x) \to f(x)$

**Tvrdenie**

Nech $f \in L_1(-\pi,\pi)$ , $2\pi$ periodická, v bode $x$ spojitá. Nech $f$ má ľavú a pravú vlastnú deriváciu v bode $x$. Potom:

tak $\lim_{n\to\infty} s_n(x) = f(x)$

Dôkaz:

$$s_n(x) - f(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[f(x+u) - f(x)]\frac{\sin(n+\frac{1}{2})u}{2sin\frac{u}{2}}du = 0$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\frac{2(x+u) - f(x)}{u}\frac{u}{2\sin\frac{u}{2}}\sin(n+\frac{1}{2})udu$$

Označme $\varphi(u) = \frac{f(x+u)-f(x)}{u}\frac{u}{\sin\frac{u}{2}}$

$\varphi(u)$ a spĺňa predpoklady stačí aby $\varphi(u)$ bola podmnožinou $L_1(-\pi,\pi)$

Zrejme $\varphi \in L_1(-\pi,\pi)$

A teda

$\lim_{n\to\infty} s_n(x) - f(x) = 0$ na základe vety 10.

$s_n(x) \to \frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$

**Veta 11** ([1] str 80)

Nech $f(x)$ je spojitá po častiach hladká funkcia s periódou $2\pi$. Potom derivácia $f'(x)$ existuje všade okrem konečného počtu bodov $f(x)$. Táto veta nám hovorí postačujúce podmienky za akých môžeme derivovať Rourierov rad ako aj tvar koeficientov $a'_n b'_n$ teda koeficientoch Fourierovho radu.

Môžeme robiť per partes, keďže:

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) cosnx dx$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx$$

$$a_n = -\frac{b'_n}{n}, b_n = \frac{a'_n}{n}$$

A teda

$$\frac{|a'_n|}{n} + \frac{|b'_n|}{n} \leq \frac{1}{2}(a_n^{'2} + b_n^{'2}) + \frac{1}{n^2}$$

lebo $f', g' \in L_2(-\pi, \pi)$ (lebo sú ohraničené)

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| + |b_n| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2}((a_n)^2 + (b_n))^2 + \frac{1}{n^2}$$

$$\int |a_n cosnx + b_n sinnx| \leq |a_n| + |b_n|$$

$\Rightarrow$ Fourierov rad absolutne a rovnomerne konverguje

**Veta 12** ([1] str 84)

Fourierove rady spojitej funkcie $f(x)$ s periódou $2\pi$ s absolútne integrovateľnou deriváciou, ktorá nemusí existovať vo všetkých bodoch, kovergujú rovnomerne k $f(x)$ pre všetky $x$.

Abelova lemma ([1] str 89):

Nech $u_0 + u_1 + u_2 + ...u_n + ...$ je numerický rad (s reálnymi alebo komplexnými členmi), ktorého parciálne sumy $\sigma_n$ spĺňajú podmienku $|\sigma_n| \leq M$, kde $M$ je konštanta. Potom ak kladné čísla $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n, ...$ klesajú k nule monotónne, rad $\alpha_0 u_0 + \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + ... + \alpha_n u_n + ...$ konverguje a suma $s$ spĺňa nerovnosť $|s| \leq M\alpha_0$

**Definícia** ([2] str. 137)

Nech je daná oblasť $G \subset C$ Kde $C$ je množina komplexných čísel, lineárny normovaný priestor s euklidovskou normou. Funkcia, ktorá je spojitá v nejakej oblasti $G$ komplexnej roviny a má v každom bode tejto oblasti konečnú deriváciu, sa nazýva analytická funkcia v oblasti $G$.

**Veta 13** ([2] str. 153)

Predpokladajme, že Laurentov rad:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(z-a)^k = ... + c_{-2}\frac{1}{(z-a^2)} + c_{-1}\frac{1}{z-a} + c_0 + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + ...$$

konverguje v medzikruží $r < |z-a| < R$ a nech $f(z)$ je jeho súčet. Potom $f$ je analytická funkcia v uvedenom medzikruží a deriváciu $f'(z)$ dostaneme derivovaním Laurentovho radu člen po člene.

**Príklad 4** ([2] str. 161)

Nech $g(z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + ...$ . ľahko vidíme, že uvedený rad konverguje v kruhu $D = z; |z| < 1$ , Polomer konvergencie vyrátame ako:

$$R = \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{|a_n|}}$$

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{\frac{1}{n}} \to 1$$

a teda

$$R = 1 \Rightarrow |z| < 1$$

A teda pre $|z| < 1$ horeuvedený rad konverguje.

$g$ je teda jednoznačná analytická funkcia v $D$. Ukážeme, že funkcia $g(z)$ sa zhoduje v $D$ s "nejednoznačnou funkciou"$ln(1+z)$ s jej hlavnou hodnotou Funkcia $ln(1+z)$ je na reálnom intervale $(-1,1) \subset D$ inverznou funkciou k reálnej funkcií $e^y - 1$ pre $y \in (-\infty, ln2)$ a keďže $ln(1+z) = g(z)$ pre $z \in (-1,1) \subset D$ aj $g(z)$ je inverznou funkciou k funkcií $e^z - 1$ v intervale $(-1,1)$. Teda $g(e^z - 1) = z$ aj $e^{g(z)} - 1 = z$ na nekonečnej množine $(-1, 1 \subset D)$, preto uvedené identity platia v celej oblasti $D$. Vidíme, že $g(z)$ je inverzná funkcia k funkcií $e^z - 1$ v $D$, a teda $g(z) = ln(1+z)$ v $D$. Analytickým predĺžením jednoznačnej funkcie $g(z)$ tak dostaneme "nejednoznačnú funkciu"$ln(1+z)$ definovanú v celej rovine $K$.

**Tvrdenie** ([1] str. 101)

Ak $z = \rho e^{i\theta}, -\pi < \theta < \pi$, potom pre hlavnú hodnotu logaritmov $lnz = ln\rho + i\theta$. V našom prípade $\rho = 2cos\frac{x}{2}, \theta = \frac{x}{2}$.

$F(z)$ je pre $|z| < 1$ je analytická, ale pre $|z| = 1$ Nevylučujeme singularitu v niektorých bodoch hranice

$F(z) = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + ... + c_n z^n + ...$ platí pre $|z| < 1$

Ako rozšíriť tento postup na $F(e^i)$ ?

**Tvrdenie** ([1] str. 99)

Nech funkcia $F(z)$ je analytická $|z| < 1$. Nech v bode $z$, pre ktorý platí $|z| = 1$ $z$ nie je singulárny bod funkcie $F(z)$ a nech rad:

$c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + ... + c_n z^n + ...$ je konvergentný

$\Rightarrow F(z) = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + ... + c_n z^n + ...$

**Pomocná veta**

Nech rad $u_0 + u_1 + u_2 + ... + u_n + ...$ je konvergentný

$\Rightarrow$ konverguje $u_0 + u_1 z + u_2 z^2 + ... + u_n z^n + ...$

pre $0 \leq z \leq 1$ a $\sigma(r) = u_0 + u_1 z + u_2 z^2 + ... + u_n z^n + ...$ je spojitá funkcia na tomto intervale

Dôkaz pomocou Abelovskej vety

Nech sú splnené predpoklady tvrdenia

Nech $c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + ... + c_n z^n + ...$ nech konverguje v bode $z$ na kraji komplexného jednotkového kruhu

$\Rightarrow r \rightarrow c_0 + c_1 z r + ... + c_n z^n r^n$ , $0 \leq r \leq 1$ je spojitá

$\lim_{r \to 1, r<1} F(rz) = F(z)$

lebo $z$ je nesingulárny (teda je v ňom $F$ spojitá)

$\lim_{r \to 1, r<1} F(rz) = \lim_{r \to 1, r<1} c_0 + c_1 r z + ... + c_n r^n z^n + ... = c_0 + c1_z + ... + c_n z^n + ...$ pre $r = 1$

$F(z) = c_0 + c_1 z + ... + c_n z^n + ...$ aj pre $|z| = 1$

**Príklad** ([1], str. 101)

$\ln(1 + z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + ...$

pre $|z| < 1$

ln je analytická funkcia pre $z \neq 1$

Pre $z = e^{ix}$ platí tvar

$$\ln(1+e^{ix}) = e^{ix} - \frac{e^{2ix}}{2} + \frac{e^{i3x}}{3} - \frac{e^{i4x}}{4} + ... =$$

$$= (\cos x - \frac{\cos 2x}{2} + \frac{\cos 3x}{3} - \frac{\cos 4x}{4} + ...) + i(\sin x - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \frac{\sin 4x}{4} + ...)$$

$$x \neq -\pi + 2k\pi$$

$$1 + \cos x - \frac{\cos 2x}{2} + \frac{\cos 3x}{3} - \frac{\cos 4x}{4} + ... =$$

$$\sin x - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \frac{\sin 4x}{4} + ... =$$

$$\ln(1+e^{ix}) = \ln(1+\cos x) + i\sin x) = \ln(\sqrt{(1+\cos x)^2 + \sin^2(x)}.\frac{1+\cos x}{\sqrt{2\cos x + 1}} + i.\frac{\sin x}{\sqrt{2+2\cos x}}) =$$

$$= \ln(\sqrt{2\cos x + 2}).(\frac{1+\cos x}{\sqrt{2(1+\cos x)}} + i\frac{\sin x}{\sqrt{2+2\cos x}}) =$$

$$= \ln(\sqrt{2\cos x + 2}).(\frac{1-\cos^2\frac{x}{2} + \sin^2\frac{x}{2}}{\sqrt{2.2\sin^2\frac{x}{2}}} + i\frac{\sin x}{\sqrt{2.2\sin^2\frac{x}{2}}}) =$$

$$= \ln(\sqrt{2(\cos x + 1}).(\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{\sqrt{\sin^2\frac{x}{2}}} + i\frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\sqrt{2\sin^2\frac{x}{2}}}) =$$

$$= \ln(\sqrt{2.2\sin^2\frac{x}{2}}).(\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{\sqrt{\sin^2\frac{x}{2}}} + i\frac{\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\sqrt{\sin^2\frac{x}{2}}}) =$$

$$= \ln(2\sqrt{\sin^2\frac{x}{2}}).\sin\frac{x}{2}(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\sqrt{\sin^2\frac{x}{2}}} + i\frac{\cos\frac{x}{2}}{\sqrt{\sin^2\frac{x}{2}}}) =$$

$$= \ln(2\sin\frac{x}{2}).(\sin\frac{x}{2} + i.\cos\frac{x}{2}) =$$

$$= \ln(2\sin\frac{x}{2}) + \ln e^{i\frac{x}{2}} = \ln 2\sin\frac{x}{2} + i\frac{x}{2}$$

$$\Rightarrow \ln(2\sin\frac{x}{2}) = 1 + \cos x - \frac{\cos 2x}{2}$$

pre $x \neq 2k + \pi T$

$$e^{i\frac{x}{2}} = \sin x - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \frac{\sin 4x}{4} + ...$$

# 3 Príklady

**Veta 14** ([1] str 100)

Ak koeficienty $a_n, b_n$ sú kladné a klesajú monotónne k nule pre $n \to \infty$ potom rad $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$ a $\sum_{n=1}^{\infty} \sin x$ konvergujú pre $\forall x$ okrem $x = 2k\pi$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, ...)$

**Príklad 1**

Pre ktoré hodnoty $x$ nasledujúce rady konvergujú:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{\sqrt{n}}$ ; b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{\sqrt{n}}$ ; c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx + \sin nx}{\sqrt{n}}$

**Riešenie**

a) Podľa vety 14 tento rad konverguje s eventuálnou výnimkou $x = 2k\pi$

V bode $x = 2k\pi$ vyzerá tento rad ako $\frac{1}{\sqrt{n}}$ a vieme, že tento rad diverguje.

Takže tento rad konverguje všade okrem $x = 2k\pi$

b) Tento rad konverguje všade. Konverguje aj v bode $x = 2k\pi$ , lebo je to rad samých núl.

c) Tento rad konverguje všade okrem $x = 2k\pi$. V týchto bodoch nekonverguje z tých istých dôvodov ako je uvedené v a)

**Veta 15** ([1] str. 101)

Ak koeficienty $a_n$ , $b_n$ sú kladné a klesajú monotónne k nule pre $n \to \infty$ potom rad $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin x$ konvergujú rovnomerne na intervale $< a, b >$ , ktorý neobsahuje body $x = 2k\pi$ $k = (0, \pm 1, \pm 2, ...)$

**Veta 16** ([1] str. 102)

Ak koeficienty $a_n$ , $b_n$ sú kladné a monotónne klesajú k nule pre $n \to \infty$ potom

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$$

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$$

s periódou $2\pi$ sú spojité pre $\forall x$ okrem $x = 2k\pi$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, ....)$

**Príklad 2**

Pre ktoré hodnoty $x$ sú sumy radov z príkladu 1 spojité? Sú tieto rady Fourierovými radmi kvadraticky integrovateľných funkcií?

**Riešenie**

Nie sú kvadraticky integrovateľné. Je to vidno z Besselovej nerovnosti:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx \geq \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 + b_n^2$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) \geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

ktorý diverguje. čiže nie sú kvadraticky integrovateľné

Z viet 14,15,16 vidíme, že pre všetky hodnoty $x$ okrem $x = 2k\pi$ sú sumy radov spojité.

**Veta 17** ([1] str. 103)

Ak koeficienty $a_n$, $b_n$ sú kladné a monotónne klesajú k nule pre $n \to \infty$ potom

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n \cos nx$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n b_n \sin mx$$

majú vlastnosti:

1) konvergujú pre $\forall x$ okrem $x = (2k+1)\pi$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, ...)$

2) konvergencia je rovnomerná na každom intervale $< a, b >$ okrem týchto bodov

3) sumy radov sú spojité okrem týchto bodov.

**Veta 18** ([1] str. 105)

Ak koeficienty $a_n$ , $b_n$ sú kladné a monotónne klesajú k nule pre $n \to \infty$ potom

$$a_1 \cos px + a_2 \cos(p+m)x + a_3 \cos(p+2m)x + ... + a_{n+1} \cos(p+nm)x + ...$$

$$b_1 \sin px + b_2 \sin(p+m)x + b_3 \sin(p+2m)x + ... + b_{n+1} \sin(p+nm)x + ...$$

má spojitú sumu pre $\forall x$ okrem $x = 2k\pi$ $k = (0, \pm 1, \pm 2, ...)$ a konvergencia radu je rovnomerná na každom takomto intervale, ktorý neobsahuje tieto body.

**Veta 19** ([1] str. 105 )

Ak koeficienty $a_n$ , $b_n$ sú kladné a monotónne klesajú k nule pre $n \to \infty$ potom

$$a_1 \cos px + a_2 \cos(p+m)x + a_3 \cos(p+2m)x + ... + a_{n+1} \cos(p+nm)x + ...$$

$$b_1 \sin px + b_2 \sin(p+m)x + b_3 \sin(p+2m)x + ... + b_{n+1} \sin(p+nm)x + ...$$

konvergujú a majú spojité sumy pre $\forall x$ okrem $x = \frac{2(k+1)\pi}{m}$ $k = (0, \pm 1, \pm 2, ...)$ a konvergujú absolútne na $< a, b >$ okrem týchto bodov.

**Príklad 3**

Pre ktoré hodnoty $x$ nasledujúce rady konvergujú:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos nx}{n+\sqrt{n}}$ ; b) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos nx + (-1)^n \sin nx}{lnn}$ ;

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 3nx}{n}$ ; d) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\cos(2n+3)x}{n+2}$ ?

**Riešenie**

a) Z vety 17 vidíme, že pre všetky hodnoty $x$ rady konvergujú okrem $x = (2k+1)\pi$ $k = (0, \pm 1, \pm 2, ...)$ Ale v bode $x = (2k+1)\pi$ $k = (0, \pm 1, \pm 2, ...)$ je tento rad rad samých núl a teda konverguje. Preto tento rad konverguje pre všetky hodnoty $x$.

b) Z vety 17 vidíme, že pre všetky hodnoty $x$ rady konvergujú okrem $x = (2k+1)\pi$ $k = (0, \pm 1, \pm 2, ...)$ V bode $x = (2k+1)\pi$ $k = (0, \pm 1, \pm 2, ...)$ vyzerá tento rad nasledovne:

$\frac{0+(-1)^n.(-1)^n}{lnn} = \frac{1}{lnn}$ ktorý diverguje. Takže rad konverguje všade okrem bodov $x = (2k+1)\pi$ $k = (0, \pm 1, \pm 2, ...)$

c) Z vety 18 vidíme, že pre všetky hodnoty $x$ rady konvergujú okrem $x = 2k\pi$ $k = (0, \pm 1, \pm 2, ...)$ Ale v bode $x = 2k\pi$ $k = (0, \pm 1, \pm 2, ...)$ je tento rad rad samých núl a teda konverguje. Preto tento rad konverguje pre všetky hodnoty $x$.

d) Z vety 19 vidíme, že pre všetky hodnoty $x$ rady konvergujú okrem $x = \frac{2(k+1)\pi}{m} k = (0, \pm 1, \pm 2, ...)$ V bode $x = \frac{2(k+1)\pi}{m} k = (0, \pm 1, \pm 2, ...)$ kde $p = 3$ a $m = 2$ vyzerá tento rad nasledovne:

$(-1)^{n+1} \frac{(\frac{1}{2})^n}{n+2}$ ktorý diverguje. Takže rad konverguje všade okrem bodov $x = \frac{2(k+1)\pi}{m} k = (0, \pm 1, \pm 2, ...)$

**Príklad 4**

Pre ktoré hodnoty $x$ sú sumy z príkladu 3 spojité? Zostrojte graf sumy radu c)

**Riešenie**

S výnimkou $(2k+1)\pi$ sú tieto sumy radov spojité z viet 17,18,19. Dosadím $(2k+1)\pi$ a zisťujem, či suma radu konverguje:

a) Konverguje pre všetky hodnoty $x$ takže tento rad je spojitý.

b) Nekonverguje pre všetky hodnoty $x$ takže tento rad nie je spojitý.

c) Konverguje pre všetky hodnoty $x$ takže tento rad je spojitý.

d) Nekonverguje pre všetky hodnoty $x$ takže tento rad nie je spojitý.

**Príklad 5**

Pre komplexné premenné $z = x + iy$ trigonometrické a hyperbolické funkcie sú definované radmi:

$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - ...,$

$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - ...,$

$\sinh z = z + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + ...$ (hyerbolický sínus)

$\cosh z = 1 + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + ...$ (hyperbolický kosínus)

používajúc vzorce:

$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta,$

$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta,$

ktoré sú takisto platné pre komplexné $\alpha$ a $\beta$ , dokážte, že:

$\sin(\alpha + i\beta) = \sin\alpha\cosh\beta + i\cos\alpha\sinh\beta,$

$\cos(\alpha + i\beta) = \cos\alpha\cosh\beta - i\sin\alpha\sinh\beta.$

**Riešenie**

Zo známeho vzťahu $\sin(r_1 + r_2) = \sin r_1 \cos r_2 + \cos r_1 \sin r_2$ ,ktorý platí aj pre komplexné $r_1, r_2$ .Z tohto vzťahu teda dostaneme:

$\sin(\alpha + \beta i) = \sin\alpha \cos i\beta + \cos\alpha \sin i\beta$

$\cos(\beta i) = 1 - \frac{\beta^2 i^2}{2!} + \frac{\beta^4 i^4}{4!} - \frac{\beta^6 i^6}{6!} = 1 + \frac{\beta^2}{2!} + \frac{\beta^4}{4!} + \frac{\beta^6}{6!} + ... = \cosh\beta$

$\sin(\beta i) = \beta i - \frac{\beta^3 i^3}{3!} + \frac{\beta^5 i^5}{5!} = i.(\beta + \frac{\beta^3}{3!} + \frac{\beta^5}{5!} + ... = i.\sinh\beta)$

Preto $\sin(\alpha + i\beta) = \sin\alpha \cosh\beta + i \cos\alpha \sinh\beta$.

$\cos(\alpha + \beta i) = \cos\alpha \cos\beta i - \sin\alpha \sin\beta i$

$\cos(\beta i) = 1 - \frac{\beta^2 i^2}{2!} + \frac{\beta^4 i^4}{4!} - \frac{\beta^6 i^6}{6!} + ... = 1 + \frac{\beta^2}{2!} + \frac{\beta^4}{4!} + \frac{\beta^6}{6!} + ... = \cosh\beta$

$\sin(\beta i) = \beta i - \frac{\beta^3 i^3}{3!} + \frac{\beta^5 i^5}{5!} = i.(\beta + \frac{\beta^3}{3!} + \frac{\beta^5}{5!} = i.\sinh\beta)$

Preto $\cos(\alpha + i\beta) = \cos\alpha \cosh\beta - i \sin\alpha \sinh\beta$.

**Príklad 6**

Nájdite sumy radov:

a) $\cos x - \frac{\cos 3x}{3!} + \frac{\cos 5x}{5!} - ...,$

b) $\sin x - \frac{\sin 3x}{3!} + \frac{\sin 5x}{5!} - ...$

**Riešenie**

Polomer konvergencie vyrátame ako:

$$R = \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{|a_n|}}$$

a) Zoberme $F(z)$ definovanú vzťahom:

$F(z) = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + ... = \sin z$

$\limsup \sqrt[n]{a_n} = \limsup \frac{1}{\sqrt[n]{(2n+1)!}} = 0$

$R = \infty$

Vidíme, že je to analytická funkcia s polomerom konvergencie $R = \infty$

$F(e^{ix}) = \cos x - \frac{\cos 3x}{3!} + ... + i(\sin x - \frac{\sin 3x}{3!} + ...)$

$F(e^{ix}) = \sin(e^{ix}) = \sin(\cos x + i \sin x)$

Podľa 5. cvičenia vieme, že:

$\sin(\alpha + i\beta) = \sin\alpha \cosh\beta + i \cos\alpha \sinh\beta$

$\sin(\cos x + i \sin x) = \sin(\cos x). \cosh(\sin x) + i \cos(\cos x). \sinh(\sin x)$

Pretože $F(z)$ je vlastne funkcia $\sin z$ a porovnaním

$F(e^{ix}) = \cos x - \frac{\cos 3x}{3!} + ... + i(\sin x - \frac{\sin 3x}{3!} + ...)$

$\sin(\cos x + i \sin x) = \sin(\cos x). \cosh(\sin x) + i \cos(\cos x). \sinh(\sin x)$

reálnych častí dostaneme:

$\sin(\cos x). \cosh(\sin x) = \cos x - \frac{\cos 3x}{3!} + \frac{\cos 5x}{5!} - ...,$

b)$F(z) = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + ... = \sin z$

$F(e^{ix}) = \cos x - \frac{\cos 3x}{3!} + ... + i(\sin x - \frac{\sin 3x}{3!} + ...)$

$F(e^{ix}) = \sin(e^{ix}) = \sin(\cos x + i \sin x)$

$\sin(\alpha + i\beta) = \sin\alpha \cosh\beta + i \cos\alpha \sinh\beta$

$\sin(\cos x + i \sin x) = \sin(\cos x). \cosh(\sin x) + i \cos(\cos x). \sinh(\sin x)$

Pretože $F(z)$ je vlastne funkcia $\sin z$ a porovnaním

$F(e^{ix}) = \cos x - \frac{\cos 3x}{3!} + ... + i(\sin x - \frac{\sin 3x}{3!} + ...)$

$\sin(\cos x + i \sin x) = \sin(\cos x). \cosh(\sin x) + i \cos(\cos x). \sinh(\sin x)$

imaginárnych častí dostaneme:

$\cos(\cos x). \sinh(\sin x) = \sin x - \frac{\sin 3x}{3!} + \frac{\sin 5x}{5!} - ...$

**Príklad 7**

Nájdite sumy radov:

a) $1 - \frac{\cos 2x}{2!} + \frac{\cos 4x}{4!} - ...,$

b) $\frac{\sin 2x}{2!} - \frac{\sin 4x}{4!} + \frac{\sin 6x}{6!} - ...$

**Riešenie**

a) Zoberme $F(z)$ definovanú vzťahom:

$F(z) = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - ... = \cos z$

$\limsup \sqrt[n]{a_n} = \limsup \frac{1}{\sqrt[n]{(2n)!}} = 0$

$R = \infty$

Vidíme, že je to analytická funkcia s polomerom $R = \infty$

$F(e^{ix}) = 1 - \frac{\cos 2x}{2!} + ... + i(1 - \frac{\sin 2x}{2!} + ...)$

$F(e^{ix}) = \cos(e^{ix}) = \cos(\cos x + i \sin x)$

Podľa 5. cvičenia vieme, že:

$\cos(\alpha + i\beta) = \cos\alpha \cosh\beta - i \sin\alpha \sinh\beta$

$\cos(\cos x + i \sin x) = \cos(\cos x)\cosh(\sin x) - i \sin(\cos x)\sinh(\sin x)$

Pretože $F(z)$ je vlastne funkcia $\cos z$ a porovnaním

$F(e^{ix}) = \cos x - \frac{\cos 2x}{2!} + ... + i(\sin x - \frac{\sin 2x}{2!} + ...)$

$\cos(\cos x + i \sin x) = \cos(\cos x)\cosh(\sin x) - i \sin(\cos x)\sinh(\sin x)$

reálnych častí dostaneme:

$\cos(\cos x)\cosh(\sin x) = 1 - \frac{\cos 2x}{2!} + \frac{\cos 4x}{4!} - ...,$

b) Zoberme $F(z)$ definovanú vzťahom:

$F(z) = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - ... = \cos z$

$\limsup \sqrt[n]{a_n} = \limsup \frac{1}{\sqrt[n]{(2n)!}} = 0$

$R = \infty$

Vidíme, že je to analytická funkcia s polomerom konvergencie $R = \infty$

$F(e^{ix}) = 1 - \frac{\cos 2x}{2!} + ... + i(\sin x - \frac{\sin 2x}{2!} + ...)$

$F(e^{ix}) = \cos(e^{ix}) = \cos(\cos x + i \sin x)$

Podľa 5. cvičenia vieme, že:

$\cos(\alpha + i\beta) = \cos\alpha \cosh\beta - i \sin\alpha \sinh\beta$

$\cos(\cos x + i\sin x) = \cos(\cos x)\cosh(\sin x) - i\sin(\cos x)\sinh(\sin x)$

Pretože $F(z)$ je vlastne funkcia $\cos z$ a porovnaním

$F(e^{ix}) = \cos x - \frac{\cos 2x}{2!} + ... + i(\sin x - \frac{\sin 2x}{2!} + ...)$

$\cos(\cos x + i\sin x) = \cos(\cos x)\cosh(\sin x) - i\sin(\cos x)\sinh(\sin x)$

imaginárnych častí dostaneme:

$\sin(\cos x)\sinh(\sin x) = \frac{\sin 2x}{2!} - \frac{\sin 4x}{4!} + \frac{\sin 6x}{6!} - ...$

**Príklad 8**

Nájdite sumy radov:

a) $1 + \frac{\cos x}{1.2} - \frac{\cos 2x}{2.3} + \frac{\cos 3x}{3.4} - ...,$

b) $\frac{\sin x}{1.2} - \frac{\sin 2x}{2.3} + \frac{\sin 3x}{3.4} - ...$

**Riešenie**

Zoberme funkcie $F(z) = 1 + \frac{z}{1.2} - \frac{z^2}{2.3} + ...$ Polomer konvergencie v a) aj b) vyrátame ako:

$$R = \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{|a_n|}}$$

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{\sqrt[n]{n(n+1)}} \to 1$$

$$R = 1$$

$$F(z) = 1 + (1 - \tfrac{1}{2})z - (\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{3})z^2 + (\tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4})z^3 - (\tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{5})z^4 + (\tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{6})z^5 - ... =$$

$= 1 + (z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + ...) - \frac{1}{2}z + \frac{1}{3}z^2 - \frac{1}{4}z^3 + \frac{1}{5}z^4 - \frac{1}{6}z^5 =$

$= (z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + ...) + (1 - \frac{1}{2}z + \frac{1}{3}z^2 - \frac{1}{4}z^3 + ...) =$

$(z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + ...) + \frac{1}{z}(z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4}) =$

$(1 + \frac{1}{z})(\ln(1+z)) = \ln(1+z) + \frac{1}{z}\ln(1+z)$

$F(z) = \ln(1+z) + \frac{1}{z}\ln(1+z)$

$F(e^{ix}) = \ln(1+e^{ix}) + \frac{1}{e^{ix}}\ln(1+e^{ix}) =$

$= \ln((1+\cos x) + i\sin x) + \frac{1}{\cos^2 x + \sin^2 x}(\cos x - i\sin x)\ln(1+e^{ix})$

Keďže

$\ln(1+e^{ix}) = \ln(2\cos\frac{x}{2}) + i\frac{x}{2}$ pre $-\pi < x < \pi$ tak

$F(e^{ix}) = \ln(2\cos\frac{x}{2}) + i\frac{x}{2} + \frac{1}{e^{ix}}(\ln(2\cos\frac{x}{2}) + i\frac{x}{2}) =$

$= \ln(2\cos\frac{x}{2}) + i\frac{x}{2} + (\cos x - i\sin x)(\ln(2\cos\frac{x}{2}) + i\frac{x}{2}) =$

$= \ln(2\cos\frac{x}{2}) + \cos x\ln(2\cos\frac{x}{2}) + \frac{x}{2}\sin x + i\frac{x}{2} - i\sin x\ln(2\cos\frac{x}{2}) + i\frac{x}{2}\cos x =$

Porovnaním reálnych, imaginárnych častí a použitím tvrdenia dostaneme:

a) $1 + \frac{\cos x}{1.2} - \frac{\cos 2x}{2.3} + \frac{\cos 3x}{3.4} - ..., =$

$= \ln(2\cos\frac{x}{2}) + \cos x\ln(2\cos\frac{x}{2}) + \frac{x}{2}\sin x$

b) $\frac{\sin x}{1.2} - \frac{\sin 2x}{2.3} + \frac{\sin 3x}{3.4} - ... =$

$= \frac{x}{2} + \frac{x}{2}\cos x - \sin x\ln(2\cos\frac{x}{2})$

**Príklad 9**

Nájdite sumy radov:

a) $\frac{\cos 2x}{3} - \frac{\cos 3x}{8} + ... + (-1)^n \frac{\cos nx}{n^2-1} + ...,$

b) $\frac{\sin 2x}{3} - \frac{\sin 3x}{8} + ... + (-1)^n \frac{\sin nx}{n^2-1} + ...$

**Riešenie**

Vezmime funkciu $F(z) = \frac{z^2}{3} - \frac{z^3}{8} + ... + (-1)^n \frac{z^n}{n^2-1}$

Polomer konvergencie v a) aj b) vyrátame ako:

$$R = \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{|a_n|}}$$

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{\sqrt[n]{n^2-1)}} \to 1$$

$$R = 1$$

Rad môžeme prepísať do podoby:

$F(z) = \frac{z^2}{3} - \frac{z^3}{8} + ... + (-1)^n \frac{z^n}{n^2-1} =$

$= \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{z^n}{n^2-1} = \frac{1}{2} \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n (\frac{z^n}{n-1} - \frac{z^n}{n+1}) =$

$= \frac{1}{2}(z^2(\frac{1}{1} - \frac{1}{3}) - (\frac{1}{2} - \frac{1}{4})z^3 + (\frac{1}{3} - \frac{1}{5})z^4 - ...) =$

$= \frac{1}{2}((z^2 - \frac{1}{2}z^3 + \frac{1}{3}z^4 - \frac{1}{4}z^5 + ...) - (\frac{z^2}{3} - \frac{z^3}{4} + \frac{z^4}{5} - ...)) =$

$= \frac{1}{2}(z(z - \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{3}z^3 - \frac{1}{4}z^4 + ...) - \frac{1}{z}(-\frac{z^3}{3} + \frac{z^4}{4} - \frac{z^5}{5} + ...)) =$

$\frac{1}{2}z. \ln(1+z) - \frac{1}{2z}(z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + ...) + \frac{1}{2z}(z - \frac{z^2}{2}) =$

$= \frac{1}{2}z. \ln(1+z) - \frac{1}{2z}(\ln(1+z) + \frac{1}{2z}(z - \frac{z^2}{2})) =$

$= \ln(1+z)\frac{1}{2}(z - \frac{1}{z}) + \frac{1}{2} - \frac{z}{4} = F(z)$

Pretože platí:

$F(e^{ix}) = (\ln(2\cos\frac{x}{2}) + i\frac{x}{2}).\frac{1}{2}.(2i\sin x + \frac{1}{2} - \frac{e^{ix}}{4}) =$

$= i\sin x \ln(2\cos\frac{x}{2}) - \frac{x}{2}\sin x + \frac{1}{2} - \frac{\cos x}{4} - \frac{i\sin x}{4} =$

$= (-\frac{x}{2}\sin x + \frac{1}{2} - \frac{\cos x}{4}) + i(\sin x \ln(2\cos\frac{x}{2}) - \frac{\sin x}{4})$

Porovnaním reálnych a imaginárnych častí dostaneme:

a) $\frac{\cos 2x}{3} - \frac{\cos 3x}{8} + ... + (-1)^n \frac{\cos nx}{n^2-1} + ... =$

$= -\frac{x}{2}\sin x + \frac{1}{2} - \frac{\cos x}{4}$

b) $\frac{\sin 2x}{3} - \frac{\sin 3x}{8} + ... + (-1)^n \frac{\sin nx}{n^2-1} + ... =$

$= \sin x \ln 2\cos\frac{x}{2} - \frac{\sin x}{4}$

**Príklad 10**

Nájdite sumy radov:

a) $\frac{2\cos 2x}{3} - \frac{3\cos 3x}{8} + ... + (-1)^n \frac{n\cos nx}{n^2-1} + ...,$

b) $\frac{2\sin 2x}{3} - \frac{3\sin 3x}{8} + ... + (-1)^n \frac{n\sin nx}{n^2-1} + ...$

**Riešenie**

Vezmime $F(z) = \frac{1}{2}(\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n.(\frac{1}{n-1} + \frac{1}{n+1})z^n)$

Polomer konvergencie v a) aj b) vyrátame ako:

$$R = \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{|a_n|}}$$

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{\sqrt[n]{n^2-1)}} \to 1$$

$$R = 1$$

$F(z) = \frac{1}{2}(\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n.(\frac{1}{n-1} + \frac{1}{n+1})z^n) =$

$= \frac{1}{2}((\frac{z^2}{1} + \frac{z^2}{3}) - (\frac{z^3}{2} + \frac{z^3}{4}) + (\frac{z^4}{3} + \frac{z^4}{5}) - ...) =$

$= \frac{1}{2}((\frac{z^2}{1} - \frac{z^3}{2} + \frac{z^4}{3} - \frac{z^5}{4} + ...) + (\frac{z^2}{3} - \frac{z^3}{4} + \frac{z^4}{5} - \frac{z^5}{6} - ...)) =$

$= \frac{z}{2}((\frac{z}{1} - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + ...) + \frac{1}{2z}(\frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + \frac{z^5}{5} - ...)) =$

$= \frac{z}{2}\ln(1+z) + \frac{1}{2z}(z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + ...) - \frac{1}{2z}(z - \frac{z^2}{2}) =$

$\frac{z}{2}\ln(1+z) + \frac{1}{2z}\ln(1+z) - \frac{1}{2} + \frac{z}{4} =$

$= \frac{1}{2}\ln(1+z)(z+\frac{1}{z}) - \frac{1}{2} + \frac{z}{4} =$

Pomocný výpočet $z = e^{ix}$

$z + \frac{1}{z} = e^{ix} + e^{-ix} = 2\cos x$ a teda

$F(e^{ix}) = \cos x \ln(1+e^{ix}) - \frac{1}{2} + \frac{\cos x}{4} + i\frac{\sin x}{4} =$

$= \cos x(\ln(2\cos\frac{x}{2}) + i\frac{x}{2}) - \frac{1}{2} + \frac{\cos x}{4} + i\frac{\sin x}{4} =$

$= \cos\ln(\cos\frac{x}{2}) - \frac{1}{2} + \frac{\cos x}{4} + i(\cos x\frac{x}{2} + i\frac{\sin x}{4})$

Porovnaním reálnych a imaginárnych častí dostaneme:

a) $\frac{2\cos 2x}{3} - \frac{3\cos 3x}{8} + ... + (-1)^n\frac{n\cos nx}{n^2-1} + ... =$

$= \cos\ln(\cos\frac{x}{2}) - \frac{1}{2} + \frac{\cos x}{4}$

b) $\frac{2\sin 2x}{3} - \frac{3\sin 3x}{8} + ... + (-1)^n\frac{n\sin nx}{n^2-1} + ... =$

$= \cos x\frac{x}{2} + i\frac{\sin x}{4}$

**Príklad 11**

Nájdite sumy radov:

a) $\frac{\cos x}{1+p} + \frac{\cos 2x}{2+p} + ... + \frac{\cos nx}{n+p} + ...,$

b) $\frac{\sin x}{1+p} + \frac{\sin 2x}{2+p} + ... + \frac{\sin nx}{n+p} + ...$

**Riešenie**

Definujme $F(z) = (\frac{z}{1+p} + \frac{z^2}{2+p} + ... + \frac{z^n}{n+p} + ...) = \frac{1}{z^p}(\frac{z^{p+1}}{p+1} + \frac{z^{p+2}}{p+2} + ... + \frac{z^{n+p}}{n+p} + ...)$

Polomer konvergencie v a) aj b) vyrátame ako:

$$R = \frac{1}{\limsup\sqrt[n]{|a_n|}}$$

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{\sqrt[n]{n+p)}} \to 1$$

$$R = 1$$

$\frac{\cos x}{1+p} + \frac{\cos 2x}{2+p} + ... + \frac{\cos nx}{n+p} + i(\frac{\sin x}{1+p} + \frac{\sin 2x}{2+p} + ...) =$

$= (\frac{\cos x}{1+p} + i\frac{\sin x}{1+p} + ...) + (\frac{\cos 2x}{2+p} + i\frac{\sin 2x}{2+p}) + ... =$

$= \frac{e^{ix}}{1+p} + \frac{e^{2ix}}{2+p} + ...$

$F(z) = (\frac{z}{1+p} + \frac{z^2}{2+p} + ... + \frac{z^n}{n+p} + ...) = \frac{1}{z^p}(\frac{z^{p+1}}{p+1} + \frac{z^{p+2}}{p+2} + ... + \frac{z^{n+p}}{n+p} + ...) =$

$= \frac{1}{z^p}(z + \frac{z^2}{2} + ... + \frac{z^{p+1}}{p+1} + ...) - \frac{1}{z^p}(z + \frac{z^2}{2} ... + \frac{z^p}{p}) =$

$= \frac{1}{z^p}(-\ln(1-z)) - \frac{1}{z^p}(z + \frac{z^2}{2} + ... + \frac{z^p}{p}) \Rightarrow$

$0 < x < 2\pi$

$F(e^{ix}) = e^{-ixp}.(\ln(2\sin\frac{x}{2}) + i\frac{\pi-x}{2}) - e^{-ixp}((\cos x + i\sin x) + ... + \frac{\cos px + i\sin px}{p}) =$

$= (\cos px - i\sin px)(-\ln(2\sin\frac{x}{2}) + i\frac{\pi-x}{2}) - (\cos px - i\sin px)((\cos x + i\sin x) + ... + \frac{\cos px + i\sin px}{p}) =$

$= -\ln(2\sin\frac{x}{2}).\cos px + \frac{\pi-x}{2}\sin px - \cos px(\sum_{k=1}^{p}\frac{\cos kx}{k}) - \sin px(\sum_{k=1}^{p}\frac{\sin kx}{k}) =$

$= \cos px(-\ln(2\sin\frac{x}{2}) - \sum_{k=1}^{p}\frac{\cos kx}{k}) + \sin px(-\sum_{k=1}^{p}\frac{\sin kx}{k} + \frac{\pi-x}{2}) +$

$+ i(-\frac{\pi-x}{2}\cos px - i\sin px\ln(2\sin\frac{x}{2}) - \cos px\sum_{k=1}^{p}\frac{\sin kx}{k} + \sin px\sum_{k=1}^{p}\frac{\cos kx}{k}) =$

$= \sin px(-\ln 2\sin\frac{x}{2}) + \sum_{k=1}^{p}\frac{\cos kx}{}) + i(\cos px.(-\frac{\pi-x}{2}) - \sum_{k=1}^{p}\frac{\sin kx}{k}) + i\sin px$

Porovnaním reálnych a imaginárnych častí dostaneme:

a) $\frac{\cos x}{1+p} + \frac{\cos 2x}{2+p} + ... + \frac{\cos nx}{n+p} + ... =$

$= \sin px(-\ln(2\sin\frac{x}{2}) + \sum_{k=1}^{p}\frac{\cos kx}{k})$

b) $\frac{\sin x}{1+p} + \frac{\sin 2x}{2+p} + ... + \frac{\sin nx}{n+p} + ... =$

$= \cos px.(-\frac{\pi-x}{2}) - \sum_{k=1}^{p}\frac{\sin kx}{k}) + \sin px$

## 4 Záver

Vypracovaním tejto bakalárskej práce som sa naučil veľa užitočných informácií o Fourierových radoch. Fourierove rady sú využiteľné aj v bežnom živote. Tým, že sa skladajú zo sínusov a kosínusov nám slúžia napríklad ako vlnenia v mobilných telefónoch. Fourierove rady sa takisto používaju v biochémií a rôznych prírodovedných smeroch. Na vypočítanie zadaných 11 príkladov mi nestačili poznatky z knihy Fouerierove rady, ale musel som využívať aj poznatky o analytickej funkcií z knihy Vybrané kapitoly z analýzy (Neubrun, Smítal).

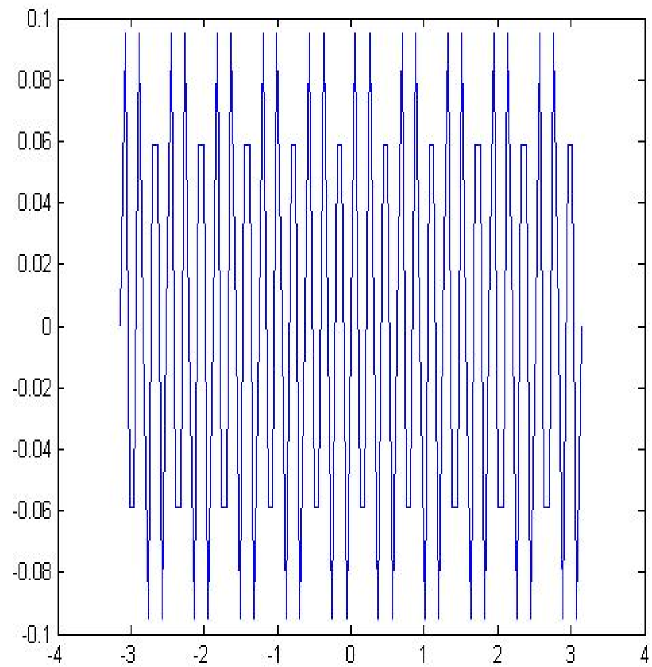
## Literatúra


[1] Georgi P. Tolstov: Prentice-Hall, Inc.,Englewood Cliffs, New Jersey: Fourier series 1962.

[2] T. Neubrun, J. Smítal: Univerzita Komenského, Bratislava: Vybrané kapitoly z analýzy 1985.

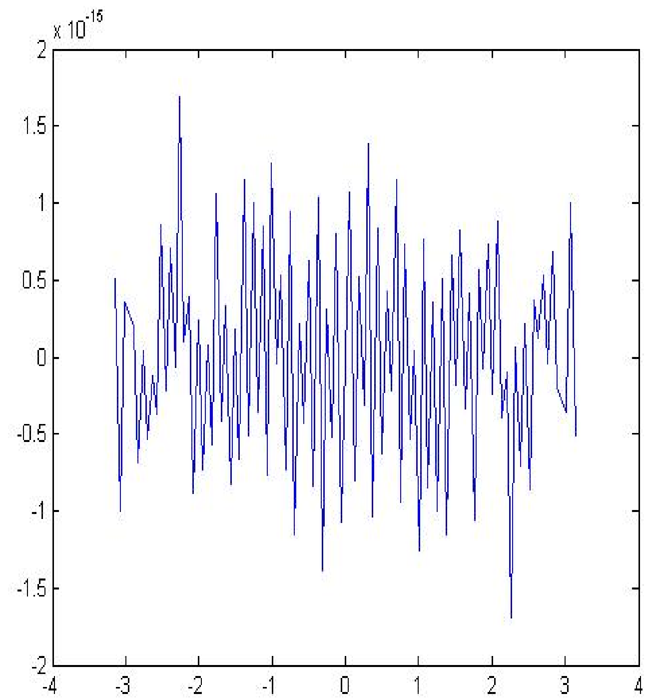
**Príloha: graficky znázornená suma radu z príkladu 4**

Obr. 1: $\sum_{n=1}^{10} \frac{\sin 3nx}{n}$



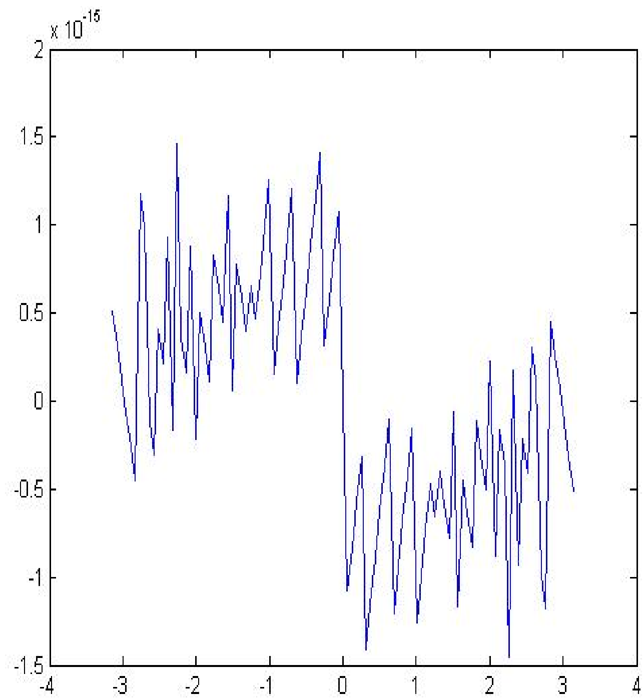

10.jpg

Obr. 2: $\sum_{n=1}^{50} \frac{\sin 3nx}{n}$



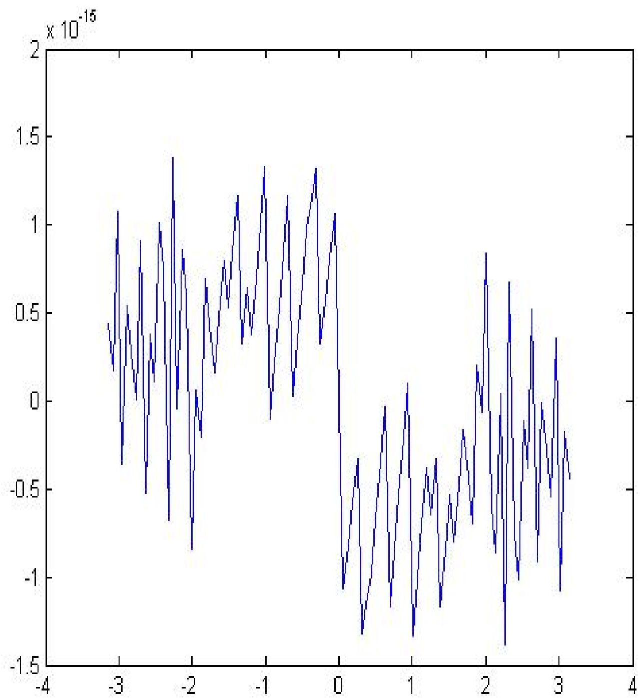

50.jpg

Obr. 3: $\sum_{n=1}^{500} \frac{\sin 3nx}{n}$




500.jpg

Obr. 4: $\sum_{n=1}^{100000} \frac{\sin 3nx}{n}$




100000.jpg