

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY

TEÓRIA
FOURIEROVÝCH RADOV

Bratislava 2011

Martin Varínsky

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY

TEÓRIA FOURIEROVÝCH RADOV

Evidenčné číslo: 308d345c-a97e-4573-b063-aa3c0a84d1da

Študijný program: Ekonomická a finančná matematika

Pracovisko: Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky

Vedúci záverečnej práce: RNDr. Ľubica Kossaczká, CSc.

Bratislava 2011

Martin Varínsky



Univerzita Komenského v Bratislave
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

ZADANIE ZÁVEREČNEJ PRÁCE

Meno a priezvisko študenta: Martin Varínsky
Študijný program: ekonomická a finančná matematika (Jednoodborové štúdium, bakalársky I. st., denná forma)
Študijný odbor: 9.1.9. aplikovaná matematika
Typ záverečnej práce: bakalárska
Jazyk záverečnej práce: slovenský

Názov : Teória fourierových radov

Cieľ : Prehľad teórie z Fourierových radov, riešenie cvičení a aplikácia teórie.

Vedúci : RNDr. Ľubica Kossaczká, CSc.

Dátum zadania: 09.11.2009

Dátum schválenia: 31.05.2011

.....
doc. RNDr. Margaréta Halická, CSc.
garant študijného programu

Varínsky Martin
.....
študent

Kossaczká
.....
vedúci práce

Dátum potvrdenia finálnej verzie práce, súhlas s jej odovzdaním (vrátane spôsobu sprístupnenia)

Kossaczká, 1.6.2011.
.....
vedúci práce

Prehlásenie

Čestne prehlasujem, že som predloženú bakalársku prácu spracoval samostatne s použitím uvedenej literatúry a ďalších informačných zdrojov.

V Bratislave, 10. 5. 2011

.....
podpis autora práce

Moje poďakovanie patrí RNDr. Ľubici Kossaczkej, CSc. za odborné konzultácie a jej odbornú pomoc pri realizácii mojej bakalárskej práce.

ABSTRAKT

VARÍNSKY, Martin: [Bakalárska práca]. *Teória Fourierových radov*. Univerzita Komenského. Fakulta matematiky, fyziky a informatiky, Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky. Vedúci: RNDr. Ľubica Kossaczká, CSc. Bratislava: FMFI UK, 2011. počet s.

Táto bakalárska práca stručne a výstižne sumarizuje základne teoretické poznatky o teórii Fourierových radov, ako aj základné poznatky z matematickej analýzy potrebné na ujasnenie pojmov a súvislostí v tejto tematike. Ďalej sú v práci uvedené riešenia vzorových príkladov, pri výpočte ktorých sa využíva teória Fourierových radov, ako aj príklady aplikácie Fourierových radov v rôznych oblastiach matematiky a fyziky.

ABSTRACT

VARINSKY, Martin: [Bachelor thesis]. *Fourier Series*. Univerzita Komenského. Faculty of mathematics, physics and informatics, Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky. Supervisor: RNDr. Ľubica Kossaczká, CSc. Bratislava: FMFI UK, 2011. počet s.

This bachelor thesis concisely summarizes the basic theoretical knowledge about the theory of Fourier Series and also the basic knowledge from mathematical analysis required for explanation of concepts and contexts in this theme. Furthermore, there are solutions of model examples, which use the theory of Fourier Series for calculating and also examples of applications of Fourier Series in various areas of mathematics and physics.

OBSAH

1. Úvod.....	8
2. Trigonometrické Fourierove rady	
• Periodické funkcie.....	9
• Harmonické funkcie.....	9
• Trigonometrické polynómy a rady.....	10
• Vety o konvergenciách radov.....	13
• Trigonometrický fundamentálny systém.....	14
• Fourierov rad funkcie periódy 2π	15
• Konvergencia Fourierových radov.....	17
• Kosínusové a sínusové rady.....	20
• Besselova nerovnosť.....	23
• Parsevalova rovnosť.....	24
3. Príklady.....	26
4. Aplikácie Fourierových radov	
• Fourierove rady v hudbe.....	34
• Izoperimeetrický problém.....	35
5. Záver.....	39
6. Použitá literatúra.....	40

1. ÚVOD

Teória Fourierových radov je jasným dokladom toho, že vývoj nových matematických teórií je často krát dôsledkom potrieb praxe a iných prírodných vied. Samotný rozvoj teórie Fourierových radov ovplyvnil tak ako ďalší rozvoj matematických metód v praxi, tak aj rozvoj teoretických základov matematickej analýzy, hlavne prehĺbenie a precizovanie pojmov funkcia a integrál.

Inšpiráciou pre moju bakalársku prácu boli prednášky Matematickej analýzy(4) na Fakulte matematiky, fyziky a informatiky.

Moja bakalárska práca sa zaoberá teóriou Fourierových radov a jej aplikáciou na výpočet rôznych praktických príkladov.

Prvá kapitola predstavuje stručný rešerž základných pojmov a vedomostí z matematickej analýzy, ktoré úzko súvisia s teóriou Fourierových radov, ako aj samotných poznatkov o Fourierových radoch, a v konečnom dôsledku Besselovej nerovnosti a Parsevalovej rovnosti.

V druhej kapitole uvádzam konkrétne riešenia príkladov, pri riešení ktorých vychádzame hlavne z Parsevalovej rovnosti a tabuľky trigonometrických rozvojev, spomenutej v 1. kapitole.

Tretia kapitola je zameraná na využitie teórie Fourierových radov v praxi a zaoberá sa popisáním základnej myšlienky pri mnou zvolených aplikáciách Fourierových radov.

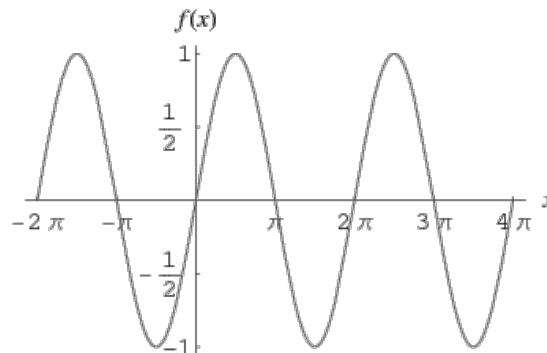
2. Trigonometrické Fourierove rady

Periodické funkcie

Funkcia $f(x)$ je periodická, ak existuje nenulová konštanta $T \neq 0$, že pre každé x platí:

$$f(x+T) = f(x)$$

Číslo T nazývame periódou funkcie. Výsledkom elementárnych operácií ako súčet, rozdiel, násobenie a delenie funkcií s periódou T je zvyčajne tiež funkcia s touto periódou.



Príklad grafu periodickej funkcie

Súčasne aj ľubovoľné násobky $k.T$ ($k \in \mathbf{R}, k \neq 0$) periódy T sú periódami vyššie uvedenej funkcie $f(x)$. Uvažujme teraz $T > 0$. Potom pre každú funkciu $f(x)$ s periódou T platí:

Ak $f(x)$ je integrovateľná na ľubovoľnom intervale dĺžky T , potom je integrovateľná na každom intervale takejto dĺžky, pričom hodnota integrálu zostáva nezmenená.

Pre ľubovoľné a, b platí:

$$\int_a^{a+T} f(x) dx = \int_b^{b+T} f(x) dx$$

Harmonické funkcie

Periodické funkcie tvaru $y(x) = A \cdot \sin(\omega \cdot x + \varphi)$ nazývame harmonickými funkciami

s periódou $T = \frac{2\pi}{\omega}$, kde $|A|$ je jej amplitúdou, ω -frekvencia, φ -fáza. Pre ľubovoľné x

platí:

$$A \cdot \sin\left[\omega \left(x + \frac{2\pi}{\omega}\right) + \varphi\right] = A \cdot \sin[\omega \cdot x + 2\pi + \varphi] = A \cdot \sin[\omega \cdot x + \varphi]$$

Na základe trigonometrickej formuly / $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha \cos\beta \pm \cos\alpha \sin\beta$ / :

$$A \cdot \sin(\omega \cdot x + \varphi) = A \cdot (\cos\omega \cdot x \sin\varphi + \sin\omega \cdot x \cos\varphi)$$

Nech $a = A \cdot \sin\varphi$, $b = A \cdot \cos\varphi$, potom každá harmonická funkcia môže byť zapísaná v tvare:

$$a \cdot \cos\omega x + b \cdot \sin\omega x$$

Príklad: $2 \cdot \sin(3x + \frac{\pi}{3}) = \sqrt{3} \cos 3x + \sin 3x$

Ukazuje sa však praktické zadať periódu T priamo rovnú $2l$.

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2l \quad , \quad \omega = \frac{\pi}{l}$$

Harmonická funkcia s periódou $T = 2l$ má teda tvar:

$$a \cdot \cos \frac{\pi x}{l} + b \cdot \sin \frac{\pi x}{l}$$

Trigonometrické polynómy a rady

Uvažujme harmonické funkcie

$$a_k \cdot \cos \frac{\pi \cdot kx}{l} + b_k \cdot \sin \frac{\pi \cdot kx}{l} \quad (\text{pre } k = 1, 2, 3, \dots)$$

s frekvenciami $\omega_k = \frac{\pi \cdot k}{l}$ a periódami $T_k = \frac{2\pi}{\omega_k} = \frac{2l}{k}$

Teda výraz

$$s_n(x) = A + \sum_{k=1}^n (a_k \cdot \cos \frac{\pi \cdot kx}{l} + b_k \cdot \sin \frac{\pi \cdot kx}{l})$$

kde $A =$ konštanta, je ako súčet funkcií s periódou $2l$ tiež funkcia s periódou $2l$.

Funkcia $s_n(x)$ sa nazýva trigonometrický polynóm n – tého rádu.

Definujme funkciu $f(x)$ vzťahom:

$$f(x) = A + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cdot \cos \frac{\pi \cdot kx}{l} + b_k \cdot \sin \frac{\pi \cdot kx}{l})$$

Nech $\frac{\pi \cdot x}{l} = T$ (alebo $x = \frac{t \cdot l}{\pi}$). Potom pre funkciu $\varphi(t) = f(\frac{t \cdot l}{\pi})$ platí:

$$\varphi(t) = A + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cdot \cos k \cdot t + b_k \sin k \cdot t)$$

Definícia absolútne integrovateľnej funkcie

Nech funkcia $f(x)$ je merateľná na $\langle a, b \rangle$. Hovoríme, že funkcia $f(x)$ je absolútne integrovateľná na $\langle a, b \rangle$, keď funkcia $|f(x)|$ je integrovateľná na $\langle a, b \rangle$.

Existencia integrálu $\int_a^b |f(x)| dx$ zaručuje aj existenciu integrálu $\int_a^b f(x)$.

Veta1¹

Nech je funkcia $f(x)$ na intervale $\langle a, b \rangle$ všade diferencovateľná, s výnimkou konečne veľa bodov $x_1, x_2, x_3, \dots, x_m$, takých, že $a < x_1 < x_2 < x_3 < \dots < x_m < b$ a existuje $f'(x)$ integrovateľná na $\langle a, b \rangle$. Potom platí:

$$f(b) - f(a) = \int_a^b f'(x) dx$$

Veta2²

Majme funkcie $f(x)$ a $\varphi(x)$, spojité a diferencovateľné (až na konečne veľa bodov) na $\langle a, b \rangle$. Navyše nech derivácie $f'(x)$ a $\varphi'(x)$ sú absolútne integrovateľné. Potom platí:

$$\int_a^b f(x) \varphi'(x) dx = [f(x) \varphi(x)]_{x=a}^{x=b} - \int_a^b f'(x) \varphi(x) dx$$

Ak uvažujeme funkcie $f_1(x), f_2(x), f_3(x), \dots, f_n(x)$ integrovateľné na $\langle a, b \rangle$, potom aj súčet týchto funkcií je integrovateľný a platí:

$$\int_a^b \left[\sum_{k=1}^n f_k(x) \right] dx = \sum_{k=1}^n \int_a^b f_k(x) dx$$

¹Podľa: Fourierreihen, Tolstow, I. Kapitola, §4, strana 7

²Podľa: Fourierreihen, Tolstow, I. Kapitola, §4, strana 8

Vety o konvergenciách radov

Skúmame teraz nekonečný rad funkcií: $f_1(x) + f_2(x) + f_3(x) + \dots + f_k(x) + \dots =$

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x).$$

Ten sa nazýva konvergentný, ak existuje limita $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n(x)$ postupnosti jeho čiastočných

(parciálnych) súčtov $s_n(x) = \sum_{k=1}^n f_k(x)$ a má konečnú hodnotu $s(x)$, ktorá sa nazýva súčtom

(konvergentného) radu $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$.

Rad $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ konverguje rovnomerne na intervale $\langle a, b \rangle$ k funkcii $s(x)$, ak

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \quad \forall n > N \quad \text{a} \quad \forall x \in \langle a, b \rangle : |s(x) - s_n(x)| \leq \varepsilon.$$

Na základe teórie konvergentnosti a rovnomernej konvergentnosti radov majú veľký význam nasledujúce vety:

I. Ak sú členy funkcionálneho radu spojité na $\langle a, b \rangle$ a $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ na danom intervale rovnomerne konverguje, potom:

- je súčet radu je tiež spojitá funkcia
- rad je po častiach integrovateľný,

$$\int_a^b \left[\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) \right] dx = \int_a^b s(x) dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_a^b f_k(x) dx$$

II. Ak rad $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ konverguje, jeho členy sú diferencovateľné a rad

$$f_1'(x) + f_2'(x) + f_3'(x) + \dots + f_k'(x) + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} f_k'(x)$$

rovnomerne konverguje na $\langle a, b \rangle$, potom $\left(\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) \right)' = s'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k'(x)$.

V ďalšom sa budeme zaoberať pre zjednodušenie funkciami s periódou 2π .

Trigonometrický fundamentálny systém

Pod pojmom trigonometrický fundamentálny systém rozumieme systém nasledovných funkcií:

$$1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \cos 3x, \dots, \cos nx, \sin nx, \dots$$

pričom všetky tieto funkcie majú spoločnú periódu 2π . Pre ľubovoľné celé čísla n a m ($n \neq m$) potom platia nasledujúce vzťahy:

- $\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cdot \cos mx dx = 0$
- $\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cdot \sin mx dx = 0$
- $\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cdot \cos mx dx = 0$

Teda integrál násobku dvoch ľubovoľných rôznych funkcií nášho systému

na intervale $\langle -\pi, \pi \rangle$ je rovný nule. Z definície ortogonalít máme, že 2 funkcie $\varphi(x)$ a $\psi(x)$

na intervale $\langle a, b \rangle$ sa nazývajú ortogonálne, ak $\int_a^b \varphi(x)\psi(x)dx = 0$.

Na základe tejto definície nám vyplýva, že aj funkcie predchádzajúceho trigonometrického systému sú navzájom (párovo) ortogonálne, teda aj systém je ortogonálny (na každom ľubovoľnom intervale $\langle a, a+2\pi \rangle$).

Tieto ortogonálne vzťahy funkcií sínus a kosínus využíva aj teória fourierových radov, nakoľko fourierov rad sa chápe ako rozvoj periodickej funkcie $f(x)$ z hľadiska konečného súčtu funkcií sínus a kosínus.

Fourierove rady

Začiatkové úvahy o myšlienke fourierových radov sa črtajú v Eulerových a Bernoulli-ho prácach, Ale teória fourierových radov sa reálne začala formovať až s podrobnou prácou Fouriera o tepelnej vodivosti začiatkom 19. storočia.

Fourier si všimol, že periodické funkcie nie je rozumné rozvíjať do Taylorovho radu mocninových funkcií typu $1, x, x^2, x^3, \dots, x^m, \dots$. Pretože nie sú periodické. A rozvíja (2π -) periodické funkcie do funkcionálneho radu, ktorého bázové funkcie sú periodické funkcie $\sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x, \dots$.

Fourierov rad funkcie periódy 2π

Funkcia $f(x)$ periódy 2π sa dá teda napísať v tvare funkcionálneho radu, ktorého bázové funkcie sú práve spomínané periodické funkcie, a teda:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cdot \cos kx + b_k \cdot \sin kx) \quad (*)$$

Na základe jednoznačnosti určenia funkcie $f(x)$ si ďalej stavíme úlohu výpočtu jednotlivých koeficientov a_0, a_k a b_k pre $k = 1, 2, \dots$. Za týmto cieľom predpokladáme, že náš rozvoj funkcie $f(x)$ do funkcionálneho radu je po častiach integrovateľný, ako aj rady, ktoré dostaneme nasledujúcimi výpočtami.

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{a_0}{2} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} dx + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cdot \int_{-\pi}^{\pi} \cos kx dx + b_k \cdot \int_{-\pi}^{\pi} \sin kx dx \right)$$

Práve na základe už spomínanej ortogonalít dostávame vzťah:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \pi \cdot a_0$$

Vyjadrime ďalej vzťah pre ďalší koeficient a_n :

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cdot \cos kx + b_k \cdot \sin kx)$$
$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \cos nxdx = \frac{a_0}{2} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} \cos nxdx + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cdot \int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \cdot \cos nxdx + b_k \cdot \int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \cdot \cos nxdx \right)$$

Pre $k \neq n$ je pravá strana rovná nule (opäť z vlastnosti trigonometrického fundamentálneho systému), teda

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \cos nx dx = a_n \cdot \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx dx,$$

Kde na pravej strane je integrál prislúchajúci koeficientu a_n .

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \cos nx dx = a_n \cdot \pi$$

Analogicky dostávame vzťah pre koeficient b_n úpravou výrazu: $\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \sin nx dx$:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \sin nx dx = b_n \cdot \pi \quad \text{pre } n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Ak je teda $f(x)$ integrovateľná a dá sa rozvíť do trigonometrického radu, pričom predpokladáme, že tento rad a rady, ktoré z neho vznikli násobením s $\cos nx$ a $\sin nx$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) sú po častiach integrovateľné, sme schopní vypočítať hodnoty a_n a b_n zo vzťahu (*).

Tieto koeficienty a_n a b_n sa nazývajú Fourierove koeficienty funkcie $f(x)$. Príslušný trigonometrický rad s týmito koeficientami sa nazýva Fourierov rad.

Treba tiež poukázať, že sme rozoberali prípad integrovateľnej funkcie $f(x)$ s periódou 2π . Teda môžeme uvažovať ľubovoľný interval dĺžky 2π , na ktorom budeme funkciu integrovať. Teda všeobecne:

$$a_n = \frac{1}{\pi} \cdot \int_a^{a+2\pi} f(x) \cdot \cos nx dx \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \cdot \int_a^{a+2\pi} f(x) \cdot \sin nx dx \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Konvergencia Fourierových radov

Zásadnou otázkou v teórii Fourierových radov je problém konvergence týchto radov. Vráťme sa teda späť do teoretických poznatkov z matematickej analýzy, aby sme mohli neskôr popísať 2 základné vety, ktoré zhŕňajú základné výsledky skúmania problematiky.

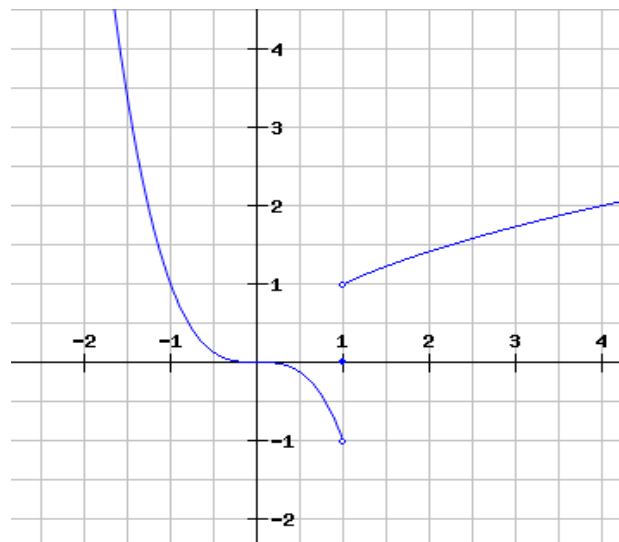
1. Zdefinujme si pojem nespojitosť 1. druhu.

Definícia 1. Bod x_0 , v ktorom existujú vzájomne rôzne vlastné limity funkcie $y = f(x)$ zprava a zľava, tj. $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$, sa nazýva bodom nespojitosti 1. druhu funkcie $f(x)$.

Číslo $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) - \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$ sa nazýva skok funkcie $f(x)$ v bode x_0 .

Ako príklad môžeme uvažovať funkciu $f(x) = \begin{cases} -x^3 & \text{pre } x < 1 \\ 0 & \text{pre } x = 1 \\ \sqrt{x} & \text{pre } x > 1 \end{cases}$

, kde bod $x = 1$ je bodom nespojitosti 1. druhu.



Graf funkcie $f(x)$ ³

³ Vykreslené cez <http://rechneronline.de/function-graphs/>

2. Hladké a po častiach hladké funkcie

Definícia 1⁴: Funkcia $f(x)$ sa nazýva hladká (spojite diferencovateľná) na intervale $\langle a, b \rangle$, ak má na danom intervale spojitú deriváciu. Graficky to znamená, že „sa smer dotyčnice v bodoch v priebehu krivky mení plynulo“. Teda grafom hladkej funkcie je nepretržitá krivka bez zlomov.

Definícia 2⁵: Spojitá funkcia $f(x)$ sa nazýva po častiach hladká na intervale $\langle a, b \rangle$, keď tento interval vieme rozdeliť na menšie pod-intervaly tak, že funkcia $f(x)$ je na každom z nich - v zmysle predchádzajúcej definície – hladká.

Aj nespojitú funkciu $f(x)$ nazývame po častiach hladkou na $\langle a, b \rangle$ v prípade, ak funkcia $f(x)$ má na tomto intervale body nespojitosti 1. druhu, a to len konečne veľa takých bodov.

Po krátkom výťahu z analýzy sa teraz môžeme ďalej venovať konvergencii Fourierových radov.

Ak bod x je bodom hladkosti funkcie $f(x)$, tak potom jej Fourierov rad bodovo konverguje

$$\text{k } f(x) \text{ v bode } x, \text{ tj. } f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cdot \cos \frac{2\pi}{T} kx + b_k \cdot \sin \frac{2\pi}{T} kx \right).$$

Tvrdenie1⁶:

Ak bod x je bodom nespojitosti 1. druhu po častiach hladkej funkcie f s periódou 2π , pričom existujú limity zprava a zľava, tj. $\exists f(x^-), f(x^+)$, potom Fourierov rad konverguje k aritmetickému priemeru medzi $f(x^-)$ a $f(x^+)$, tj.

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cdot \cos kx + b_k \cdot \sin kx) \longrightarrow \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2}$$

Tvrdenie2⁷:

Nech f je spojitá na $(-\infty, +\infty)$ a periodická s periódou 2π . Nech $|f|$ je absolútne integrovateľná na $\langle 0, 2\pi \rangle$. Potom Fourierov rad príslušný k funkcii f rovnomerne konverguje k f na intervale $(-\infty, +\infty)$.

⁴ Podľa: Fourierreihen, Tolstow, I. Kapitola, §9, strana 17

⁵ Podľa: Fourierreihen, Tolstow, I. Kapitola, §9, strana 17

⁶ Podľa: Fourierreihen, Tolstow, I. Kapitola, §10, strana 18

⁷ Malá encyklopédia matematiky, Obzor-Bratislava, 1978, Fourierove rady, Veta 53, strana 167

V praxi sa však zvyčajne stretávame so situáciou, že funkcia f , ktorú chceme rozvíť pomocou Fourierovho radu, je definovaná iba na intervale $\langle 0, 2\pi \rangle$, resp. $(0, \pi)$. V takom prípade musíme najprv zostrojiť periodické pokračovanie f^* funkcie f . Ukážme to na príklade⁸:

“Nech $f(x) = x$ na intervale $(0, \pi)$. Pre $x \in (-\pi, 0)$ položíme $f^*(x) = f(-x)$; $f^*(\pi) = f^*(-\pi) = \pi$, $f^*(0) = 0$

Pre $x \in \langle (2k-1)\pi, (2k+1)\pi \rangle$ ($k = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$), položíme $f^*(x) = f^*(x - 2k\pi)$. Ak teraz vypočítame čísla a_n, b_n , ktoré nazývame aj Fourierovými koeficientmi funkcie f^* , dostaneme:

$$f^*(x) \sim \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \left(\cos x + \frac{1}{3^2} \cos 3x + \dots + \frac{1}{(2n-1)^2} \cos(2n-1)x + \dots \right). “$$

Teda podľa predošlého tvrdenia nám vyplýva rovnosť medzi pravou stranou výrazu a hodnotou x z intervalu $\langle 0, \pi \rangle$.

⁸ Z Malá encyklopédia matematiky, Obzor-Bratislava, 1978, Fourierove rady, strana 167

Kosínusové a sínusové rady

Majme danú párnou funkciu $f(x)$ na intervale $\langle -\pi, \pi \rangle$ (alebo tiež párnou periodickú funkciu).

Keďže funkcia $\cos nx$ ($n = 0, 1, 2, 3, \dots$) je zjavne párna funkcia, bude aj $f(x) \cdot \cos nx$ párna (Podľa vlastnosti: Súčin dvoch párných alebo dvoch nepárnych funkcií je párnou funkciou.)

Obdobne sa môžeme zaoberať súčinom $f(x) \cdot \sin nx$, ktorý je pre $n = 0, 1, 2, \dots$ nepárnou funkciou, nakoľko aj samotná funkcia $\sin nx$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) je nepárna. (Využijúc vlastnosť: Súčin párnej funkcie s nepárnou nám dáva nepárnou funkciu.)

Použime už vyššie odvodené vzorce pre výpočet Fourierových koeficientov funkcie $f(x)$.

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \cos nx dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cdot \cos nx dx \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \sin nx dx = 0 \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Teda vidíme, že Fourierov rad prislúchajúci k párnej funkcii $f(x)$ obsahuje len členy s funkciou kosínus v určitom tvare.

Obdobne, uvažujúc nepárnou funkciu $f(x)$ na intervale $\langle -\pi, \pi \rangle$ (alebo tiež nepárnou periodickú funkciu), majú jej Fourierove koeficienty nasledujúci tvar:

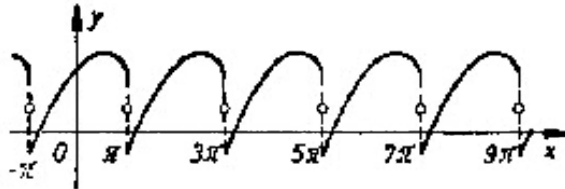
$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \cos nx dx = 0 \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \sin nx dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cdot \sin nx dx \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Teda Fourierov rad prislúchajúci k nepárnej funkcii $f(x)$ obsahuje členy s funkciou sínus v určitom tvare.

Príklad 1.

Rozložte funkciu tvaru $f(x) = A \cdot x^2 + B \cdot x + C$ pre $-\pi < 0 < \pi$ do Fourierovho radu, pričom nech A, B, C sú konštanty.



Príklad funkcie $f(x)$ pre pevne zvolené konštanty A, B, C

Počítajme teda Fourierove koeficienty a_0, a_n a b_n .

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (Ax^2 + Bx + C) dx = 2 \cdot \left[\frac{A\pi^2}{3} + C \right]$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \cos nxdx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (Ax^2 + Bx + C) \cos nxdx = //počas d'alšieho výpočtu$$

$$\text{využijeme 2 krát metódu per partes} // = \frac{4A}{n^2} \cdot (-1)^n$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \sin nxdx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (Ax^2 + Bx + C) \sin nxdx = //opäť pri výpočte využijeme$$

$$\text{metódu per partes} // = \frac{-2B}{n} \cdot (-1)^n$$

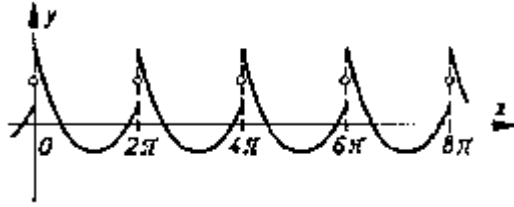
Výpočtom konkrétnych Fourierových koeficientov funkcie $f(x)$ a dosadením do predpisu pre Fourierovu radu funkcie sme dospeli k nasledujúcemu riešeniu:

$$\begin{aligned} f(x) = A \cdot x^2 + B \cdot x + C &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cdot \cos nx + b_n \cdot \sin nx) = \\ &= \frac{A\pi^2}{3} + C + 4A \cdot \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{\cos nx}{n^2} - 2B \cdot \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{\sin nx}{n} \end{aligned}$$

⁹ Z: Fourierreihen, Tolstow, I. Kapitola, §14, strana 28

Príklad 2.

Pozrime sa teraz na Fourierov rad funkcie $f(x) = A.x^2 + B.x + C$ pre $0 < x < 2\pi$.



Príklad funkcie $f(x)$ pre pevne zvolené konštanty A, B, C ¹⁰

Zmenením hraníc intervalu sa nám budú meniť aj hodnoty integrálov, v ktorých vystupujú funkcie sinus a kosínus, čo naše hodnoty Fourierových koeficientov ovplyvní nasledovne:

$$a_0 = 2 \cdot \left[\frac{4A\pi^2}{3} + B\pi + C \right] \qquad a_n = \frac{4A}{n^2} \qquad b_n = -\frac{2}{n} (2A\pi + B)$$

Teda po dosadení nových hodnôt dostávame nasledovný tvar Fourierovho radu funkcie $f(x)$:

$$\begin{aligned} f(x) = A.x^2 + B.x + C &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cdot \cos nx + b_n \cdot \sin nx) = \\ &= \frac{4A\pi^2}{3} + B\pi + C + 4A \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2} - (4A\pi + 2B) \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n} \end{aligned}$$

¹⁰ Z: Fourierreihen, Tolstow, I. Kapitola, §14, strana 28

Besselova nerovnosť

Označenie: $L_2(-\pi, \pi)$ - priestor funkcií integrovateľných s 2. mocninou na $(-\pi, \pi)$.

Definícia: Ak funkcie f, g sú integrovateľné s druhou mocninou na intervale $\langle a, b \rangle$, potom

$$(f, g) = \int_a^b f(x)g(x)dx$$

nazývame skalárnym súčinom týchto funkcií.

Z definície ortogonalít spomenutej v časti o trigonometrickom fundamentálnom systéme vyplýva, že skalárny súčin funkcie $f(x)$ so samou sebou, pričom funkcia f je integrovateľná na $\langle a, b \rangle$, je nezáporný. Teda: $(f, f) \geq 0$. (Pretože integrál z nezápornej funkcie je nezáporný).

Definícia: Normou funkcie f nazveme číslo $\|f\| = \sqrt{(f, f)}$, pričom funkcia f je normovaná práve vtedy, ak $\|f\| = 1$.

Definícia: Nech $\{\varphi_n\}$ je ortogonálna postupnosť na intervale $\langle a, b \rangle$, f je integrovateľná na $\langle a, b \rangle$. Potom čísla

$$c_n = \frac{(f, \varphi_n)}{(\varphi_n, \varphi_n)} = \frac{(f, \varphi_n)}{\|\varphi_n\|^2}$$

nazývame Fourierovými koeficientami funkcie f vzhľadom k postupnosti $\{\varphi_n\}$ a radu

$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n$ Fourierovým radom funkcie f vzhľadom k postupnosti $\{\varphi_n\}$.

Definícia: Nech f a g sú integrovateľné funkcie na intervale $\langle a, b \rangle$. Potom kvadratickou odchýlkou funkcií f, g nazveme číslo:

$$\|f - g\| = \sqrt{\int_a^b [f(x) - g(x)]^2 dx}.$$

Veta: Nech $\{\varphi_n\}$ je ortogonálna postupnosť na intervale $\langle a, b \rangle$ a f je integrovateľná na $\langle a, b \rangle$. Potom pre každé $n = 1, 2, 3, \dots$ má najmenšiu kvadratickú odchýlku od funkcie f tá zo všetkých lineárnych kombinácií funkcií $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$, ktorej koeficienty sú práve Fourierovými koeficientami funkcie f vzhľadom k postupnosti $\{\varphi_n\}$.

Pre každé takéto $n = 1, 2, 3, \dots$ platí pre príslušné Fourierové koeficienty c_k funkcie f tzv. Besselova indentita,

$$\left\| f - \sum_{k=1}^n c_k \varphi_k \right\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{k=1}^n c_k^2 \|\varphi_k\|^2$$

z ktorej s ohľadom na $\left\| f - \sum_{k=1}^n c_k \varphi_k \right\|^2 \geq 0$ vyplýva Besselova nerovnosť:

$$\sum_{k=1}^n c_k^2 \|\varphi_k\|^2 \leq \|f\|^2 \quad \text{pre ľubovoľné } n \in \mathbb{N}$$

Pre trigonometrický fundamentálny systém:

$$1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \cos 3x, \dots, \cos nx, \sin nx, \dots$$

dostávame:

$$\|1\| = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot dx} = \sqrt{2\pi}$$

$$\|\cos nx\| = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nxdx} = \sqrt{\pi} \quad n = (1, 2, 3, \dots)$$

$$\|\sin nx\| = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nxdx} = \sqrt{\pi} \quad n = (1, 2, 3, \dots)$$

Nech $f(x) \in L_2(-\pi, \pi)$ je daná funkcia.

Aplikovaním na trigonometrický fundament. systém nadobúda Besselova nerovnosť tvar:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx \geq \left(\frac{a_0}{2} \right)^2 \cdot \|1\|^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n^2 \|\cos nx\|^2 + b_n^2 \|\sin nx\|^2 \right)$$

alebo

$$\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx \geq \left(\frac{a_0}{2} \right)^2 \cdot 2\pi + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) \cdot \pi$$

Odkiaľ dostávame:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx \geq \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2)$$

teda tvar, ktorý Besselova nerovnosť nadobúda pre prípad trigonometrického fundamentálneho systému.

Parsevalova rovnosť

Nech je trigonometrický systém úplný, pričom funkcia $f: R \rightarrow R$ je periodická s periódou T a po častiach spojitá, $\in L_2(,)$ a

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cdot \cos \frac{2\pi}{T} kx + b_k \cdot \sin \frac{2\pi}{T} kx \right) \quad \text{je jej Fourierov rad.}$$

Potom Besselova nerovnosť sa zužuje na rovnosť, rad $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 + b_k^2$ je konvergentný a platí:

$$a_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 + b_k^2 = \frac{1}{T} \int_0^T f(x)^2 dx$$

Tabuľka trigonometrických rozvojev

Pre počítanie príkladov s tematikou Fourierových radov je pre nás viac než výhodné používať tabuľku trigonometrických rozvojev¹¹. Preto sú v nasledujúcej tabuľke sústredené niektoré vypočítané rozvoje, z ktorých budeme v ďalšom počítaní vychádzať.

$$1. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n} = -\log \left(2 \sin \frac{x}{2} \right) \quad (0 < x < 2\pi)$$

$$2. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n} = \frac{\pi - x}{2} \quad (0 < x < 2\pi)$$

$$3. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2} = \frac{3x^2 - 6\pi x + 2\pi^2}{12} \quad (0 \leq x \leq 2)$$

$$4. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2} = -\int_0^x \log \left(2 \sin \frac{y}{2} \right) dy \quad (0 \leq x \leq 2)$$

$$5. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\cos nx}{n} = \log \left(2 \cos \frac{x}{2} \right) \quad (-\pi < x < \pi)$$

$$6. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sin nx}{n} = \frac{x}{2} \quad (-\pi < x < \pi)$$

¹¹ Tolstow: Fourierreihen, IV. Kapitola, §12, strana 137

$$7. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\cos nx}{n^2} = \frac{\pi^2 - 3x^2}{12} \quad (-\pi \leq x \leq \pi)$$

$$8. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sin nx}{n^3} = \frac{\pi^2 x - x^3}{12} \quad (-\pi \leq x \leq \pi)$$

$$9. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(2n+1)x}{2n+1} = -\frac{1}{2} \log \operatorname{tg} \frac{x}{2} \quad (0 < x < \pi)$$

$$10. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(2n+1)x}{2n+1} = \frac{\pi}{4} \quad (0 < x < \pi)$$

$$11. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(2n+1)x}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2 - 2\pi x}{8} \quad (0 \leq x \leq \pi)$$

$$12. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(2n+1)x}{(2n+1)^3} = \frac{\pi^2 x - \pi x^2}{8} \quad (0 \leq x \leq \pi)$$

3. Príklady

Príklad 1

Spočítajte: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$

Riešenie:

Z tabuľky (vzťah 7.) vieme, že: $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\cos nx}{n^2} = \frac{\pi^2 - 3x^2}{12}$ ($-\pi \leq x \leq \pi$)

Teda ak pravú stranu rovnosti chápeme ako funkciu $f(x)$ a ľavú stranu ako jej Fourierov rad s Fourierovými koeficientami: $a_0 = 0$, $b_n = 0$, $a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$, môžeme použiť znenie

Parsevalovej rovnosti:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{(\pi^2 - 3x^2)^2}{12^2} dx = \frac{1}{72\pi} \int_0^{\pi} (\pi^2 - 3x^2)^2 dx = \frac{1}{72\pi} \cdot \left[\pi^4 x - 2\pi^2 x^3 + \frac{9x^5}{5} \right]_0^{\pi} = \frac{\pi^4}{90}$$

Príklad 2

Spočítajte: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^4}$

Riešenie:

Analogicky podľa príkladu jeden použijeme z tabuľky (vzťah 11).

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(2n+1)x}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2 - 2\pi x}{8} \quad (0 \leq x \leq \pi)$$

Pričom: $a_0 = 0$, $b_n = 0$, $a_n = \frac{1}{(2n+1)^2}$. Potom použitím Parsevalovej rovnosti dostávame:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^4} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{(\pi^2 - 2\pi x)^2}{8^2} dx = \frac{1}{32\pi} \int_0^{\pi} (\pi^4 - 4\pi^3 x + 4\pi^2 x^2) dx = \frac{1}{32\pi}$$

$$\left[\pi^4 x - 2\pi^3 x^2 + \frac{4}{3}\pi^2 x^3 \right]_0^{\pi} = \frac{\pi^4}{96}$$

Príklad 3

Spočítajte: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^4}$

Riešenie:

Tento výraz vieme nasledovne upraviť:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^4} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^4} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^4} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^4} - \frac{1}{16} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \\ &= \text{/použijúc riešenia z predchádzajúcich Príklad1 a Príklad2/} = \frac{\pi^4}{96} - \frac{1}{16} \cdot \frac{\pi^4}{90} = \frac{7}{720} \pi^4 \end{aligned}$$

Príklad4

Spočítajte: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6}$

Riešenie:

Postupujeme analogicky podľa riešenia Príkladu1. Z tabuľky (vzťah 8) vieme, že platí:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sin nx}{n^3} = \frac{\pi^2 x - x^3}{12} \quad (-\pi \leq x \leq \pi)$$

Aplikáciou Vety o Parsevalovej rovnosti na tento vzťah, pričom pre Fourierove koeficienty

platí: $a_0 = 0$, $a_n = 0$, $b_n = \frac{1}{n^6}$, sa dostávame k nasledujúcemu výpočtu.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \left(\frac{\pi^2 x - x^3}{12} \right)^2 dx = \frac{1}{72\pi} \int_0^{\pi} (\pi^4 x^2 - 2\pi^2 x^4 + x^6) dx = \frac{1}{72\pi}$$

$$\left[\frac{\pi^4 x^3}{3} - \frac{2}{5} \pi^2 x^5 + \frac{x^7}{7} \right]_0^{\pi} = \frac{\pi^6}{945}$$

Príklad5

Spočítajte: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^6}$

Riešenie:

Z tabuľky (vzťah 12): $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(2n+1)x}{(2n+1)^3} = \frac{\pi^2 x - \pi x^2}{8} \quad (0 \leq x \leq \pi)$

Pre Fourierove koeficienty dostávame: $a_0 = 0, a_n = 0, b_n = \frac{1}{(2n+1)^3}$, teda:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^6} &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \left(\frac{\pi^2 x - \pi x^2}{8} \right)^2 dx = \frac{1}{32\pi} \int_0^{\pi} (\pi^4 x^2 - 2\pi^3 x^3 + \pi^2 x^4) dx = \\ &= \frac{1}{32\pi} \left[\frac{\pi^4 x^3}{3} - \frac{\pi^3 x^4}{2} + \frac{\pi^2 x^5}{5} \right]_0^{\pi} = \frac{\pi^6}{960} \end{aligned}$$

Príklad6

Spočítajte: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^6}$

Riešenie:

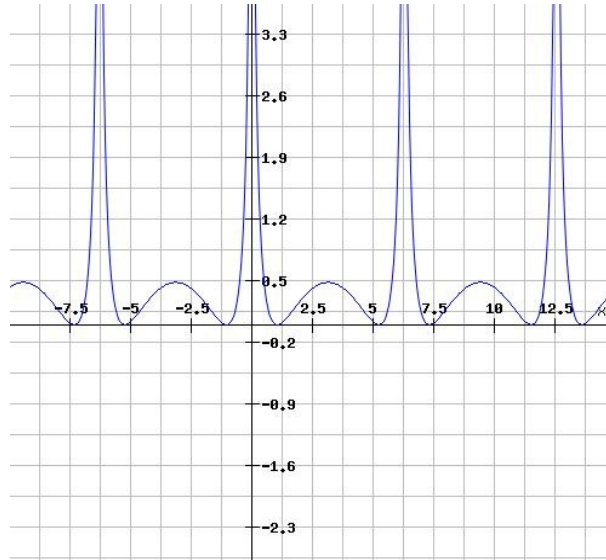
Tento výraz vieme nasledovne upraviť:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^6} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^6} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^6} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^6} - \frac{1}{64} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6} = \\ &= \text{/použijúc riešenia z predch. Príklad4 a Príklad5/} = \frac{\pi^6}{960} - \frac{1}{64} \frac{\pi^6}{945} = \frac{93}{90720} \pi^6 \end{aligned}$$

Príklad7

Nájdite hodnotu integrálu: $\int_0^{\pi} \log^2 \left| 2 \sin \frac{x}{2} \right| dx$

Riešenie:



Graf funkcie $\log^2 \left| 2 \sin \frac{x}{2} \right|^{12}$

Skôr, ako budeme počítať hodnotu tohto integrálu, ukážme existenciu nevlastného

integrálu $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \log^2 \left| 2 \sin \frac{x}{2} \right| dx$ a teda že existuje limita: $\int_{\varepsilon}^{\frac{\pi}{3}} \log^2 \left| 2 \sin \frac{x}{2} \right| dx$ pre $\varepsilon \rightarrow 0$:

$$\int_{\varepsilon}^{\frac{\pi}{3}} \log^2 \left| 2 \sin \frac{x}{2} \right| dx = \text{/per partes/} = \left[x \ln^2 \left(2 \sin \frac{x}{2} \right) \right]_{\varepsilon}^{\frac{\pi}{3}} - \frac{1}{2} \int_{\varepsilon}^{\frac{\pi}{3}} \frac{x \cdot \ln \left(2 \sin \frac{x}{2} \right)}{\sin \frac{x}{2}} \cdot \cos \frac{x}{2} dx$$

- $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon \cdot \ln^2 \left(2 \sin \frac{\varepsilon}{2} \right) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\varepsilon}{2 \sin \frac{\varepsilon}{2}} \cdot \ln^2 \left(\sin \frac{\varepsilon}{2} \right) \cdot \sin \frac{\varepsilon}{2} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \ln^2 \left(\sin \frac{\varepsilon}{2} \right) \cdot \sin \frac{\varepsilon}{2} =$

$$\lim_{t \rightarrow 0} t \cdot \ln^2 t = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln^2 t}{\frac{1}{t}} = \text{/L'Hospital/} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{2 \ln t \cdot \frac{1}{t}}{\frac{-1}{t^2}} \rightarrow 0$$

¹² Vykreslené cez <http://rechneronline.de/function-graphs/>

Teraz sa zaoberajme $\int_{\varepsilon}^{\frac{\pi}{3}} \frac{x \cdot \ln(2 \sin \frac{x}{2})}{\sin \frac{x}{2}} \cdot \cos \frac{x}{2} dx$ pre $\varepsilon \rightarrow 0$.

Máme dokázanú existenciu integrálu: $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \ln(2 \sin \frac{x}{2}) dx$

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \ln(2 \sin \frac{x}{2}) dx < \infty \text{ .}^{13}$$

Teda aj $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \ln(2 \sin \frac{x}{2}) \cdot g(x) dx$ existuje, kde $g(x)$ je ľubovoľná ohraničená, spojitá funkcia.

V našom prípade: $g(x) = \frac{x}{\sin \frac{x}{2}} \cdot \cos \frac{x}{2}$.

A preto $\log^2 \left| 2 \sin \frac{x}{2} \right| \in L_2 \left(0, \frac{\pi}{3} \right)$ (priestor funkcií integrovateľných s 2. mocninou)

Teda môžeme počítať aj Besselovou nerovnosťou aj s Parsevalovou rovnosťou.

Z tabuľky trigonometrických rozvojev (vzťah1):

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n} = -\log \left(2 \sin \frac{x}{2} \right) \quad (0 < x < 2\pi)$$

Teda vyplývajú z tejto rovnosti a využitím Parsevalovej rovnosti:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \log^2 \left| 2 \sin \frac{x}{2} \right| dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) / \text{pričom } a_0 = 0, b_n = 0, a_n = \frac{1}{n} / = 0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} =$$

$$= /z tabuľky (vzťah6)/ = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{x}{2} \right)^2 dx = \frac{\pi^2}{6}$$

$$\text{A teda: } \int_0^{2\pi} \log^2 \left| 2 \sin \frac{x}{2} \right| dx = \frac{\pi^2}{6} \cdot \pi = \frac{\pi^3}{6}$$

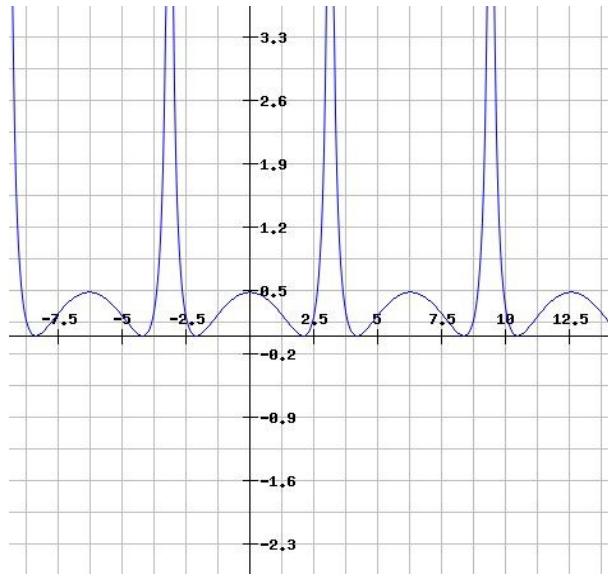
Lenže my máme rátať integrál len na intervale $<0, \pi >$, ale zo symetrie funkcie teda dostaneme:

$$\int_0^{\pi} \log^2 \left| 2 \sin \frac{x}{2} \right| dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi^3}{6} = \frac{\pi^3}{12}$$

¹³ Tolstow: Fourierreihen, III.Kapitola, §14, strana 84

Príklad8

Nájdite hodnotu integrálu: $\int_0^{\pi} \log^2 \left(2 \cos \frac{x}{2} \right) dx$



Graf funkcie $\log^2 \left| 2 \cos \frac{x}{2} \right|$ ¹⁴

Postupujeme obdobne ako pri príklade 7. Potrebujeme ukázať existenciu nevlastného

integrálu $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \log^2 \left| 2 \cos \frac{x}{2} \right| dx$ a teda že existuje limita: $\int_{\varepsilon}^{\frac{\pi}{3}} \log^2 \left| 2 \cos \frac{x}{2} \right| dx$ pre $\varepsilon \rightarrow 0$. Keďže

táto funkcia je len istým posunutím vzhľadom na funkciu v predchádzajúcom príklade,

bude tento integrál existovať ($\in L_2(0, \frac{\pi}{3})$).

Podľa tabuľky (vzťah5) a Parsevalovej rovnosti:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\cos nx}{n} = \log \left(2 \cos \frac{x}{2} \right) \quad (-\pi < x < \pi)$$

)

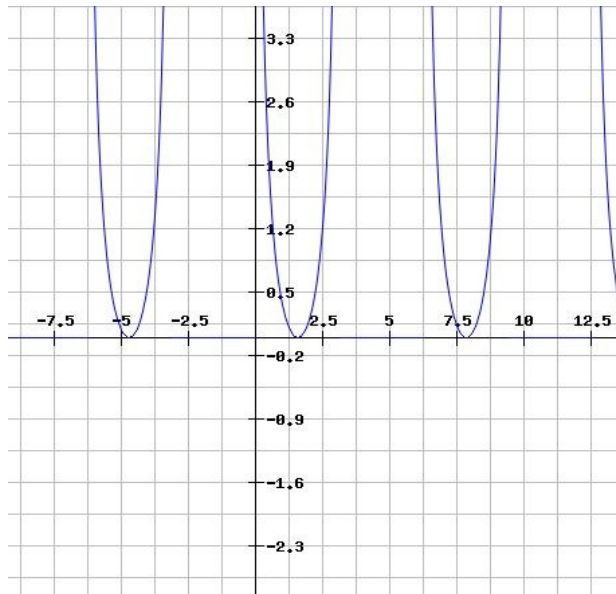
$$\int_{-\pi}^{\pi} \log^2 \left(2 \cos \frac{x}{2} \right) dx = 0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \text{/vid' príklad7/} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Teda tak ako v predošlom príklade je hodnota zadaného integrálu rovná $\frac{\pi^3}{12}$.

¹⁴ Vykreslené cez <http://rechneronline.de/function-graphs/>

Príklad9

Nájdite hodnotu integrálu: $\int_0^{\pi} \log^2 \operatorname{tg} \frac{x}{2} dx$



Graf funkcie $\log^2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}$ ¹⁵

Skôr, ako budeme počítat hodnotu tohto integrálu, ukážme existenciu nevlastného

integrálu $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \log^2 \operatorname{tg} \frac{x}{2} dx$.

Na základe vzorcov:

$$\ln \operatorname{tg} \frac{x}{2} = \ln \frac{2 \sin \frac{x}{2}}{2 \cos \frac{x}{2}} = \ln 2 \sin \frac{x}{2} - \ln 2 \cos \frac{x}{2}.$$

Nakoľko sme v príklade 7 a príklade 8 ukázali, že obe funkcie $\ln 2 \sin \frac{x}{2}$, aj $\ln 2 \cos \frac{x}{2}$ sú

integrovateľné s 2. mocninou, tak aj pre ich rozdiel platí: $\in L_2(0, \frac{\pi}{3})$, čo nám opäť umožňuje použiť Parsevalovu rovnosť.

¹⁵ Vykreslené cez <http://rechneronline.de/function-graphs/>

Z tabuľky (vzt'ah9):

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(2n+1)x}{2n+1} = -\frac{1}{2} \log \operatorname{tg} \frac{x}{2} \quad \text{pre } (0 < x < \pi)$$

Použitím Parsevalovej rovnosti dostávame: $\int_0^{\pi} \log^2 \operatorname{tg} \frac{x}{2} dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$.

Na výpočet súčtu dohoto radu využijeme opat' tabuľku trigonometrických rozvojev

$$\text{(vzt'ah10): } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(2n+1)x}{2n+1} = \frac{\pi}{4} \quad (0 < x < \pi)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \int_0^{\pi} \left(\frac{\pi}{4} \right)^2 dx = \frac{\pi^3}{4}$$

4. Aplikácia Fourierových radov

Jedným z najčastejších využití teórie Fourierových radov je riešenie problémov s hraničnou hodnotou v parciálnych diferenciálnych rovniciach, ako napríklad pri úlohách o tepelnej vodivosti a rôznych iných fyzikálnych úlohách.

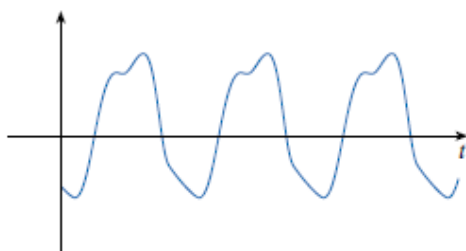
Venujme sa teraz bližšie využitiu Fourierových radov v hudbe, a to v analýze a syntéze hudobného tónu.

Fourierove rady v hudbe

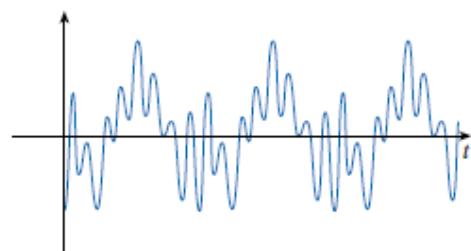
Akékoľvek zmeny tlaku v určitom prostredí (mechanické vlnenie), ktoré sú spôsobené periodickým, mechanickým kmitaním pružného telesa sa označujú výrazom „tón“. Ako je ale možné, že ľudské ucho vie rozlíšiť tón tej istej výšky zahraný na dvoch rozličných nástrojoch?

„Farba tónu fyzikálne závisí od tónového spektra“¹⁶

Rozličné hudobné nástroje majú odlišnú farbu tónu a teda majú rôzny tvar kmitania chvejúceho sa telesa a teda rôzne tzv. tónové spektrum, ktoré určuje práve to, ktoré čiastkové tóny znejú súčasne s tónom a v akom pomere. Nasledujúce grafy nám popisujú odchýlku od „stáleho“ tlaku zvuku pre flautu a violu (pri hraní rovnakého tónu) ako funkciu času.



(a) Flauta



(b) Viola

Vyjadrieme tieto krivky ako :

$$P(t) = a_0 + a_1 \cos\left(\frac{\pi t}{L}\right) + b_1 \sin\left(\frac{\pi t}{L}\right) + a_2 \left(\frac{2\pi t}{L}\right) + b_2 \sin\left(\frac{2\pi t}{L}\right) + \dots$$

¹⁶ Malá kniha o hudbe, 1.kapitola- Všeobecná hudobná náuka, strana 8

Takto sme tón vyjadrili ako súčet jednoduchých čiastkových tónov, ktoré nazývame alikvotnými a znejú súčasne so základným tónom a ktorých frekvencie sú postupne 2-, 3-, ..., n - násobkom frekvencie základného tónu. Rozdiel v počutí zvuku medzi dvoma nástrojmi môžeme teda pripísať rôznym veľkostiam Fourierových koeficientov príslušných kriviek.

Popri analyzovaní zvuku konvečných hudobných nástrojov, nám teória Fourierových radov umožňuje syntetizáciu zvukov. Myšlienka „za“ hudobnými syntetizátormi je v možnosti kombinácie rôznych alikvotných tónov na vytvorenie bohatšieho tónu cez zdôraznenie istých alikvótov určením väčšej hodnoty Fourierových koeficientov.

Izoperimetrický problém

Ktorá uzavretá krivka pri danom polomere ohraničuje najväčšiu plochu?

Týmto problémom sa Euklides a Archimedes zaoberali už v 3. storočí p.n.l., ale úloha nebola dôsledne doriešená až do roku 1841, kým Steiner nepublikoval viacero dôkazov. Odpoveďou na danú otázku izoperimetrického problému je kružnica a Fourierove metódy poskytujú jednoduché overenie tohto faktu.

Zadefinujme teraz krivku k v rovine funkciou p , ktorá každému reálnemu číslu t z intervalu J priradí práve jeden vektor $p(t)$. Teda funkcia má tvar: $p=p(t)$ pre $t \in J$.

Označme $p(t_0)$ a $p(t)$ body, odpovedajúce na krivke k pevnej hodnote t_0 a nejakej hodnote t z intervalu J .

Na intervale J definujme funkciu (všetky derivácie podľa všeobecného parametra označujeme bodkou):

$$s(t) = \int_{t_0}^t |p'(t)| dt = \int_{t_0}^t \sqrt{\dot{p}(t) \cdot \dot{p}(t)} dt$$

respektíve

$$s(t) = \int_{t_0}^t \sqrt{(\dot{x}(t))^2 + (\dot{y}(t))^2 + (\dot{z}(t))^2} dt$$

Každý hodnote parametra $t \in J$ môžeme priradiť číslo $|s(t)|$, ktoré vyjadruje dĺžku krivky medzi bodmi $P(t_0)$ a $P(t)$. Derivácia

$$\dot{s}(t) = \sqrt{(\dot{x}(t))^2 + (\dot{y}(t))^2 + (\dot{z}(t))^2} = \sqrt{\dot{p}(t) \cdot \dot{p}(t)} \neq 0$$

je pre všetky $t \in J$ rôzna od nuly. Funkcia $s=s(t)$, $t \in J$ je teda rýdzo monotónna a môžeme k nej zostrojiť inverznú funkciu: $t=t(s)$.

Pre deriváciu tejto inverznej funkcie platí:

$$\frac{dt}{ds} = \frac{1}{\dot{s}(t)} = \frac{1}{\sqrt{(\dot{x}(t))^2 + (\dot{y}(t))^2 + (\dot{z}(t))^2}} = \frac{1}{\sqrt{\dot{p}(t) \cdot \dot{p}(t)}} \neq 0$$

Pre všetky $t \in J$. Pomocou funkcie $t=t(s)$ môžeme spraviť transformáciu parametra.

Dostaneme tak novú rovnicu krivku:

$$P=p[t(s)]=p(s) \quad ,s \in I$$

v ktorej parametrom je dĺžka oblúka krivky od bodu $P(t_0)$ do bodu $P(t)$ a ktorú nazývame prirodzenou parametrizáciou krivky.

Všetky derivácie podľa oblúka

$$\frac{dp}{ds} = \frac{dp}{dt} \frac{dt}{ds}$$

budeme označovať čiarkou, t.j.

$$p' = \dot{p} \frac{dt}{ds}$$

Pre veľkosť vektora p' platí: $|p'| = \sqrt{p' \cdot p'} = \sqrt{\dot{p} \cdot \dot{p}} \left| \frac{dt}{ds} \right| = \sqrt{\dot{p} \cdot \dot{p}} \frac{1}{\sqrt{\dot{p} \cdot \dot{p}}} = 1$

Táto vlastnosť je nutnou a zároveň postačujúcou podmienkou na to, aby parametrizácia $p=p(s)$ bola prirodzenou parametrizáciou regulárnej krivky k .

Teda majme krivku danú dvojicami funkčných hodnôt $(x(t), y(t))$. Vezmime bod $O=(x_0, y_0)$ na krivke. Pre ľubovoľný bod X na krivke nech t je dĺžka oblúka krivky od bodu O do bodu X . Ďalej, nech $x(t)$ a $y(t)$ sú x-ová a y-ová súradnica bodu X .

Ak obvod krivky je rovný 1, potom platí rovnosť:

$$(x(t+1), y(t+1)) = (x(t), y(t)),$$

$$(x(0)=x_0, y(0)=y_0)$$

Predpokladajme, že je táto krivka hladká a teda, že existujú prvé derivácie dx/dt a dy/dt a obe sú spojité, čo výrazne uľahčí definíciu a výpočet obvodu krivky. Pričom pri „veľmi malom“ dt môžeme z Pythagorovej vety odvodiť rovnosť:

$$dx^2 + dy^2 = dt^2$$

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = 1$$

Obdobne:

$$1 = \int_0^1 dt = \int_0^1 \{(dx/dt)^2 + (dy/dt)^2\} dt$$

Pre našu oblasť ohraničenú krivkou začíname s delením tvaru na „tenké vertikálne pásy“, berúc do úvahy časť oblúka medzi t a dt . Oblasť ohraničená touto časťou oblúka, osou x a priamkami $y=y(t)$ a $y=y(t+dt)$ je potom:

$$dA \approx \{x(t) - x(t+dt)\} \cdot y(t) \approx -dx/dt \cdot y(t) dt$$

Celú plochu potom môžeme vyjadriť ako:

$$A = - \int_0^1 y(t) dx/dt dt$$

Teraz sme pripravení riešiť izoperimetrický problém. Funkcie $x(t)$ a $y(t)$ sú hladké periodické funkcie periódy 1, takže sa dajú rozvíť pomocou Fourierových radov:

$$x(t) = K + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(2n\pi t) + \sum_{m=1}^{\infty} B_m \sin(2m\pi t)$$

$$y(t) = L + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos(2n\pi t) + \sum_{n=1}^{\infty} D_n \sin(2n\pi t)$$

Derivovaním týchto výrazov dostávame:

$$\frac{dx}{dt} \rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} (-2n\pi A_n) \sin(2n\pi t) + \sum_{n=1}^{\infty} (2n\pi B_n) \cos(2n\pi t)$$

$$\frac{dy}{dt} \rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} (-2n\pi C_n) \sin(2n\pi t) + \sum_{n=1}^{\infty} (2n\pi D_n) \cos(2n\pi t)$$

Môžeme tiež tvrdiť, že daný tvar je umiestnený v strede súradnicovej osy tak, aby $K=L=0$.

Podľa predchádzajúcich výrazov pre x a y a použijúc Parsevalovu rovnosť:

$$1 = \int_0^1 \left\{ \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 \right\} dt = =$$

$$\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (2n\pi A_n)^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (2n\pi B_n)^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (2n\pi C_n)^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (2n\pi D_n)^2 =$$

$$= 2\pi^2 \sum_{n=1}^{\infty} n^2 [A_n^2 + B_n^2 + C_n^2 + D_n^2]$$

Pre oblasť dostávame:

$$A = - \int_0^1 y(t) \frac{dx}{dt} dt = - \sum_{n=1}^{\infty} [n\pi B_n C_n - n\pi A_n D_n] = \pi \sum_{n=1}^{\infty} n(A_n D_n - B_n C_n)$$

Kombinovaním týchto dvoch rovností:

$$(1/\pi)(1/(2\pi) - 2A) = \sum_{n=1}^{\infty} [n^2(A_n^2 + B_n^2 + C_n^2 + D_n^2) - 2n(A_n D_n - B_n C_n)] =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left[(nA_n - D_n)^2 + (nB_n + C_n)^2 + (n^2 - 1)(D_n^2 + C_n^2) \right]$$

Pravá strana výrazu je súčtom štvorcov, teda nemôže byť záporná, čo vedie k tomu, že ľavá strana je tiež nezáporná, preto plocha A ohraničená krivkou nemôže prevýšiť $1/4\pi$. Ale plocha kružnice obvodu 1 je rovná $1/4\pi$, teda žiadna krivka neohraničuje väčšiu oblasť ako kružnica toho istého obvodu.

5. ZÁVER

Vo svojej bakalárskej práci som sa zameril na rešerž teoretických poznatkov z teórie Fourierových radov doplnený o výpočet praktických príkladov a aplikácie Fourierových radov v praxi. V rámci svojej bakalárskej témy som si vedomý, že som nevyčerpал všetky informácie, ktoré sa vzťahujú k tejto téme, z dôvodu, že je veľmi obsiahla. Preto si myslím, že táto téma by sa dala širšie spracovať v diplomovej práci.

Realizácia bakalárskej práce bola pre mňa veľmi prínosná. Načerpал som množstvo hlbších informácií, nielen ohľadom Fourierových radov, ktoré mi rozšírili moje vedomosti.

Dúfam, že táto práca inšpiruje ďalších študentov, ktorí sa budú teóriou Fourierových radov zaoberať a bude pre nich aspoň sčasti poučná.

6. POUŽITÁ LITERATÚRA

- [1] Tolstow: Fourierreihen, Deutscher Verlag der Wissenschaften, 1950
- [2] Hans-Jochen Bartsch, Matematické vzorce, Praha 2000
- [3] Malá encyclopedia matematiky, Obzor-Bratislava, 1978
- [4] Encyclopedia of Physical Science and Technology, Fourier Series, James S. Walker
- [5] Malá kniha o hudbe, Peter Šidlík, Božena Dlháňová, 1994
- [6] Fourierovy řady, Bakalářská práce, Tomáš Krisl, 2006
- [7] prednásky: Matematická analýza 4, doc. RNDr. Daniel Ševčovič, CSc.
- [8] <http://www.stewartcalculus.com/>
- [9] <http://fstroj.uniza.sk/>
- [10] <http://rechneronline.de/function-graphs/>