

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY



Optimalita akciových indexov

BAKALÁRSKA PRÁCA

Bratislava 2011

Igor Vilček

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY

Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky

Kód práce: 3d689f89-5822-41b2-8bd2-ceb213aba3b2

Optimalita akciových indexov

BAKALÁRSKA PRÁCA

Igor Vilček

9.1.9 Aplikovaná matematika
Ekonomická a finančná matematika

Vedúci práce:
Katarína Boďová, Mgr., Phd.

Bratislava 2011

ZADANIE ZÁVEREČNEJ PRÁCE

Meno a priezvisko študenta: Igor Vilček
Študijný program: ekonomická a finančná matematika (Jednoodborové štúdium, bakalársky I. st., denná forma)
Študijný odbor: 9.1.9. aplikovaná matematika
Typ záverečnej práce: bakalárska
Jazyk záverečnej práce: slovenský

Názov: Optimalita akciových indexov

Cieľ: Akciové indexy ako S&P, NASDAQ či Dow Jones merajú stav jednotlivých sektorov akciového trhu. Cieľom práce je zistiť, ako sa líšia váhy jednotlivých akcií v týchto indexoch od optimálnych váh (CAPM teória). Budeme tiež skúmať, ako veľmi sú indexy senzitívne na jednotlivé akcie v ich portfóliu.

Vedúci: Mgr. Katarína Boďová, PhD.

Katedra: FMFI.KAMŠ - Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky

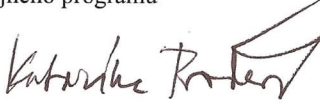
Dátum zadania: 27.10.2010

Dátum schválenia: 08.11.2010


doc. RNDr. Margaréta Halická, CSc.
garant študijného programu



študent



Vedúci

Čestné prehlásenie

Vyhlasujem, že bakalársku prácu som vypracoval samostatne s použitím uvedenej odbornej literatúry.

Bratislava, jún 2011

.....

Vlastnoručný podpis

PodĎakovanie

Touto cestou chcem poĎakovať mojej vedúcej práce Mgr., Phd. Kataríne BoĎovej za čas, ktorý mi pri vypracovávaní práce venovala, ako aj za odbornú pomoc, nápady, cenné rady a pripomienky.

Abstrakt

Vilček, Igor: Optimalita akciových indexov [bakalárska práca]. Univerzita Komenského, Bratislava. Fakulta matematiky, fyziky a informatiky; Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky. Vedúci diplomovej práce: Mgr., Phd. Katarína Boďová; Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky, Univerzita Komenského, Bratislava. Bratislava: FMFI UK, 2011. 66 strán.

Cieľom práce je hľadanie investičných príležitostí v akciových indexoch. Práca sa zameriava na dva problémy. Prvým je implementácia a použitie modifikovaného Markowitzovho modelu portfólia na zhodnotenie investorovho kapitálu. Model je revidovaný a upravený na použitie za súčasnej trhovej situácie, ako aj situácií zahŕňajúcich uplynulé krízové roky. Umožňuje investorovi alokovať jeho prostriedky medzi kôš akcií a bezrizikové aktívum, reprezentované vládny dlhopisom. Všetky modely, analýzy a testy sú v práci prezentované v kontexte s najtradičnejším európskym akciovým indexom EuroStoxx 50. Výsledky zahŕňajú monitorovanie výkonnosti portfólia zostrojeného na základe uvedeného modelu. Testované sú vplyvy rôznych vstupov do modelu, ako napr. rozličná perióda rebalancovania alebo dĺžka investičného horizontu.

Druhým cieľom práce je konštrukcia podportfólia akcií obsiahnutých v EuroStoxx 50, ktoré čo najvierohodnejšie replikuje vývoj originálneho indexu. Takto zostavené podportfólio predstavuje dobrú investičnú príležitosť najmä pre rizikovo averzných investorov, ktorí majú navyše záujem minimalizovať transakčné náklady. Konštrukcia prebieha pomocou clustrovej analýzy, konkrétne metódy partitioning around medoids. Práca tiež obsahuje analýzu citlivosti jednotlivých komponentov indexu.

Kľúčové slová: akciové indexy, EuroStoxx 50, optimalizácia portfólia, Markowitzov model s bezrizikovým aktívom, clustrová analýza, partitioning around medoids, replikácia indexu.

Abstract

Vilček, Igor: *On the optimality of stock indices* [bachelor thesis]. Comenius University, Bratislava. Faculty of Mathematics, Physics and Informatics. Department of Applied Mathematics and Statistics. Supervisor: Mgr., Phd. Katarína Boďová; Department of Applied Mathematics and Statistics, Comenius University, Bratislava. Bratislava: FMFI UK, 2011. 66 pages.

The aim of this paper is to study investment opportunities in stock indices. It focuses on two problems. First is the implementation and the use of a modified Markowitz model in personal financial asset management. Model is revised and modified to fit into current behavior of stock markets. It enables investors to allocate their funds among a combination of a stock basket and a risk free asset represented by a government bond. All models, analysis and back-tests throughout the work are presented in context with European's most traditional stock index EuroStoxx 50. Results contain monitoring of a portfolio performance constructed on a basis of proposed model. Furthermore, the effects of different model inputs are studied, including the period of rebalancing as well as the length of the investment horizon.

Second goal of this work is to construct a sub-portfolio of stocks included in EuroStoxx 50, which most credibly tracks the original index. Such a portfolio could be of a great utility, especially to a risk-averse investor interested in reducing transaction costs. This is achieved by cluster analysis, more specifically, the method known as partitioning around medoids. Moreover, close sensitivity analysis of index components is involved to solve this issue.

Keywords: stock indices, EuroStoxx 50, portfolio optimization, Markowitz risk-free asset model, cluster analysis, partitioning around medoids, index tracking.

Obsah

Úvod	1
1 Akciové indexy	3
1.1 EuroStoxx 50	4
2 Dáta	7
2.1 Typ	7
2.2 Bezrizikové aktívum	7
2.3 Predpoklady	8
3 Teória	9
3.1 Markowitzov model s bezrizikovým aktívom	9
3.1.1 Predpoklady	10
3.1.2 Jadro modelu	10
3.1.3 Problém I : Neexistencia dotýčnice k efektívnej hranici	12
3.1.4 Aplikácia modelu	13
3.1.5 Problém II : Nerovnosť medzi skutočným výnosom a výnosom vstupujúcim do modelu	19
3.1.6 Rebalancovanie investície	20
3.2 Clustrová analýza	21
3.2.1 Partitioning Around Medoids	22
3.2.2 Algoritmus PAM	23
3.3 Metodika konštrukcie podportfólia	26
3.3.1 Navažovanie podportfólia	26
3.3.2 Použité optimalizačné metódy	27
3.4 Charakteristiky výkonnosti portfólia	28
4 Výsledky	29
4.1 Metodika	29
4.2 Markowitzov modifikovaný model a investovanie	31
4.2.1 Vplyv rôzneho vstupného požadovaného výnosu	31
4.2.2 Vplyv rôznych historických období	34

4.2.3	Model za „pekného počasia”	37
4.3	Tvorba indexového podportfólia	40
4.3.1	Clustrová analýza a EuroStoxx 50	40
4.3.2	Štruktúra dát	42
4.3.3	Podportfólio v krátkodobom horizonte	43
4.3.4	Podportfólio v strednodobom horizonte	46
	Záver	49
	A. Prehľad komponentov indexu Eurostoxx 50	51
	B. Zdrojový kód	53

Úvod

Dnešný finančný svet ponúka nespočetné množstvo investičných možností. V nich je pre bežného človeka, ako aj pre profesionálneho investora, ktorého primárnym záujmom je zhodnotiť svoju investíciu lepšie ako nízko úročeným bankovým vkladom, čoraz náročnejšie sa zorientovať. Medzi obchodovateľné finančné inštrumenty nepatria len základné pojmy ako akcie, dlhopisy či komodity. Na trhu rastie množstvo uvádzaných derivátov (opcie, futures kontrakty, resp. rôzne certifikáty), teda produktov, ktorých hodnota závisí od vývoja podkladového aktíva. Ich počet dokonca preyšuje uvedené tri základné skupiny. Avšak všetky tieto deriváty majú niečo spoločné - mnohé sú naviazané práve na akcie, resp. na rozličné „koše“ akcií - akciové indexy.

Indexy sú konštruované za účelom vytvorenia reprezentatívnych ukazovateľov pre konkrétne trhy. Vo všeobecnosti teda nedosahujú takú vysokú návratnosť ako niektoré vhodne vybrané podportfóliá akcií indexu, a to aj pri porovnateľnom riziku (volatilitate), akou sa vyznačuje samotný index. Práve to sa stalo hlavnou motiváciou mojej bakalárskej práce. Objektom môjho skúmania je hlavný európsky akciový index - EuroStoxx 50. Zameriavam sa na hľadanie investičných príležitostí v zložkách tohto indexu, teda spôsob ako môže investor čo najviac zhodnotiť svoju investíciu nie priamo kúpou aktíva založeného na celom indexe, ale investovaním do jeho vhodne navážených jednotlivých zložiek.

V tejto práci sa venujem štúdiu dvoch pre investora fundamentálnych problémov:

- Hľadanie portfólia zloženého z tých istých akcií, ktoré sú obsiahnuté v akciovom indexe EuroStoxx 50, ale s lepším investičným potenciálom.
- Odhad senzitivity akciového indexu na jeho zložky - jednotlivé akcie.

V prvom probléme skúmam, ako je možné využitím rozličných investičných metód čo najlepšie zhodnotiť investovaný kapitál (v zmysle vysokej návratnosti a nízkej volatility) a či takéto investovanie dokáže stabilne prekonávať výnosnosť samotného indexu. Dôraz kladiem na Markowitzovu teóriu portfólia [Markowitz, 1952], ktorú aplikujem na vyriešenie uvedeného problému. Jedným z cieľov mojej práce je poukázať na slabiny a nedostatky analyzovaného Markowitzovho modelu portfólia. Rozoberám prípady, v ktorých model nemožno využiť a uvádzam návrhy jeho možných modifikácií pre použitie v každej trhovej situácii. Funkčnosť modifikovaného modelu ďalej testujem na historických burzových dátach.

V druhom probléme vyšetrujem zredukovanie množiny akcií obsiahnutých v EuroStoxx 50 na čo najreprezentatívnejšiu skupinu - podportfólio. Súčasne s diverzifikáciou zahŕňajúcou obchodovanie so všetkými 50 titulmi zastúpenými v indexe totiž dochádza u investora k strate finančných prostriedkov na transakčných nákladoch. Ďalším cieľom práce je teda odhadnutie vzájomných vzťahov medzi výnosmi jednotlivých akcií. Snažím sa rozpoznať štruktúru indexu a na základe tejto analýzy následne konštruujem reprezentatívne podportfólio. Pomocou „datamining“ techniky - *clustrovej analýzy* [Kaufman and Rousseeuw, 1990] zisťujem, aký počet akcií je potrebné vybrať, aby z nich zložené portfólio čo najpresnejšie replikovalo vývoj celého indexu.

Posledným, no jedným z najpodstatnejších cieľov práce je dôkladné testovanie zvolených investičných stratégií, ako aj nájdených podportfólií, na historických dátach a ich spätná analýza.

V 1. časti uvádzam základné informácie o skúmanom indexe EuroStoxx 50.

V 2. časti predstavujem v práci používané dáta, ich štruktúru a nutné predpoklady.

V 3., teoretickej časti, stručne vysvetľujem používané matematické modely a metódy - najmä Markowitzov model s bezrizikovým aktívom, problémy jeho aplikácie, clustrovú analýzu, ako aj metodiku konštrukcie podportfólia. Uvádzam všetky používané investičné stratégie a ich modifikácie v závislosti od rôznych trhových situácií. Modely a stratégie vysvetľujem v kontexte so skúmaným indexom EuroStoxx 50.

4. časť zahŕňa konkrétne výsledky a aplikácie stratégií na reálne burzové dáta. Pri testovaní stratégií vždy uvažujem dve základné obdobia - „známe“ podkladové (historické) obdobie, na základe ktorého je zostavený model a „budúce“ (*out of the sample*), investičné obdobie, na ktorom sú metódy a stratégie testované.

V záverečnej 5. časti sumarizujem konkrétne výsledky, ich možné interpretácie a praktickú využiteľnosť pre investora.

Kapitola 1

Akciové indexy

Akciové indexy sú umelo vytvorené portfóliá zložené z konkrétnych akciových titulov. Sú konštruované za účelom vytvorenia akýchsi ukazovateľov - indikátorov pohybov daného trhu, ku ktorému možno kompozičné akcie priradiť. Jednotlivé akcie majú v indexoch svoje vopred určené (kladné) váhy a samotný index teda odráža ich súhrnný vývoj.

Počet kótovaných akcií na finančných trhoch neustále rastie a ich variabilita je naozaj vysoká, no ich pohyby, výkyvy i výnosnosť sú si v mnohých prípadoch podobné. Práve toto podobné správanie akciových titulov zachytáva ich index, predstaviteľ tzv. trhového rizika - rizika spoločného pre všetky akciové komponenty. Index nám teda poskytuje prijateľnú predstavu o správaní sa trhu, resp. jeho časti.

Investor, ktorý nechce stroskotať na riziku spojenom s vysokou volatilitou jednotlivých akciových titulov, často siahne práve po investícii do indexu. Ten ho prostredníctvom diverzifikácie medzi viacero spoločností chráni pred krátkodobými výkyvmi samostatných akcií.

Diverzifikácia, t.j. rozloženie investičného rizika za pomoci alokácie prostriedkov do väčšieho počtu aktív, patrí už oddávna k základom investovania. Aj vďaka tomu rôzne certifikáty a deriváty naviazané na akciové indexy patria k najviac obchodovateľným cenným papierom na svetových burzách.

Váženie indexov

Rozlišujeme 3 základné druhy indexov podľa metodiky váženia jednotlivých komponentov:

- vážené na základe trhovej kapitalizácie spoločností,
- vážené na základe trhovej ceny akcií,
- vážené na základe fundamentálnych faktorov.

Pričom *trhová kapitalizácia* v danom čase t je definovaná ako:

$$MC_t = P_t \cdot n_t, \quad (1.1)$$

P_t - cena akcie,

n_t - počet akcií danej spoločnosti.

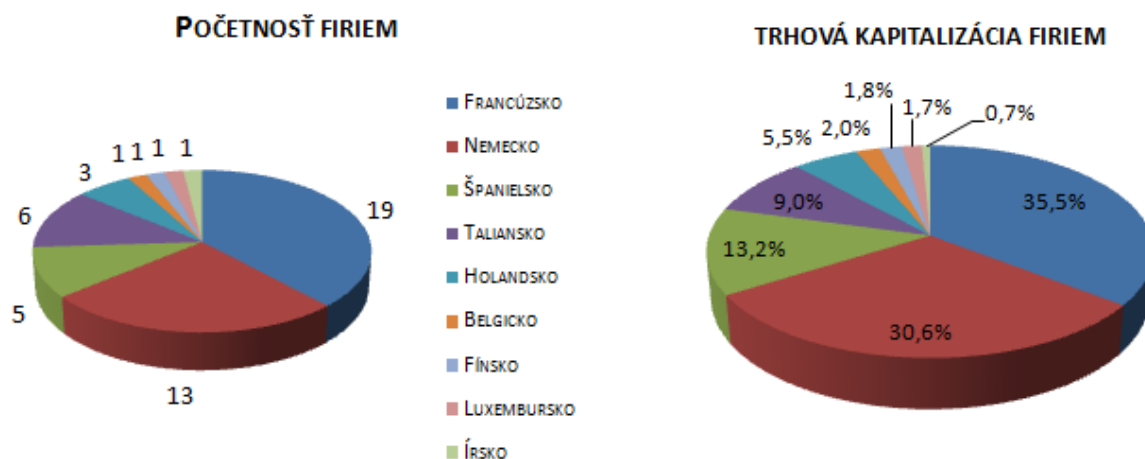
Následne, ak označíme ff percento z celkového počtu akcií, ktoré nie sú v držbe strategických investorov, *voľná trhová kapitalizácia* je definovaná:

$$FFMC_t = MC_t \cdot ff_t. \quad (1.2)$$

1.1 EuroStoxx 50

EuroStoxx 50 predstavuje hlavný a najpoužívanější európsky akciový index, najreprezentatívnejší index eurozóny, ako aj indikátor stavu ekonomík najvyspelejších štátov Európy.

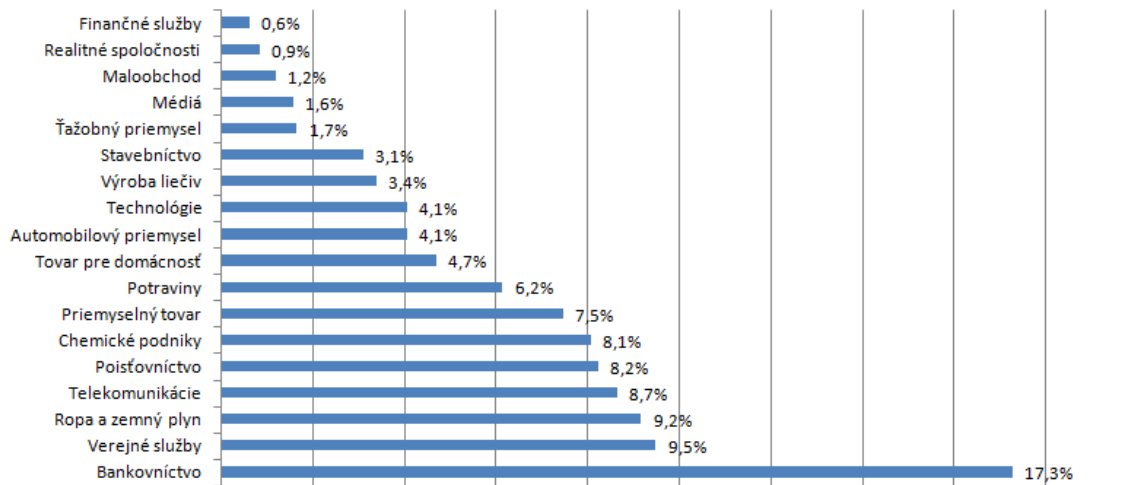
Vznikol v roku 1998, spravovaný je spoločnosťou Stoxx a zahŕňa päťdesiatku tzv. blue-chip spoločností, t.j. najväčších korporácií eurozóny čo sa trhovej kapitalizácie (MC) týka. Zastúpenie v ňom majú firmy z Nemecka, Francúzska, Španielska, Talianska, Holandska, Belgicka, Fínska, Luxemburska a Írska (percentuálne pozri Obr. 1.1). Oficiálne zahŕňa aj Grécko, Portugalsko a Rakúsko, no aktuálne v ňom žiadna spoločnosť zo spomínaných štátov reprezentanta nemá.



Obr. 1.1: Zastúpenie štátov v indexe

Sektorovo momentálne v indexe dominujú banky, nasledované verejnými službami, ropným priemyslom, telekomunikáciami, poisťovníctvom a ďalšími (Obr. 1.2). EuroStoxx 50 pokrýva približne 60% voľnej trhovej kapitalizácie ($FFMC$) Európy a v súčasnosti

dokonca takmer 95% voľnej trhovej kapitalizácie všetkých zahrnutých krajín.



Obr. 1.2: Trhová kapitalizácia odvetví v indexe

Index je prehodnocovaný a revidovaný raz ročne, vždy v septembri, pričom súčasťou tejto procedúry je zmena komponentov indexu na základe aktuálnej *FFMC* a prevažovanie podľa vzorca, ktorého nie všetky súčasti sú verejne dostupné, preto nie je možná jeho presná rekonštrukcia.

Zmeny, čo sa komponentov týka, však nastávajú aj mimo uvedeného rámca na mesačnej báze, a to v rôznych mimoriadnych prípadoch, akými sú fúzie, zániky, či významné akvizície spoločností. Váhy pre jednotlivé komponenty indexu sú počítané na základe už spomínanej *FFMC* a to spravidla raz ročne podľa vzorca:

$$\text{Index}_t = \frac{\sum_{i=1}^n (p_{it} \cdot s_{it} \cdot ff_{it} \cdot cf_{it} \cdot x_{it})}{D_t} = \frac{M_t}{D_t}, \quad (1.3)$$

- t - čas výpočtu,
- n - počet indexových komponentov,
- p_{it} - cena komponentu i v čase t ,
- s_{it} - počet akcií komponentu i v čase t ,
- ff_{it} - percento akcií komponentu i v čase t , ktoré nie sú v držbe strategických investorov,
- cf_{it} - „cap“, t.j. horné ohraničenie pre váhu komponentu i v čase t ,
- x_{it} - výmenný kurz z lokálnej meny do meny indexu komponentu i v čase t (v prípade EuroStoxxu $x_{it} = 1$),
- M_t - *FFMC* indexu v čase t ,
- ΔMC_{t+1} - neverejný, špecificky upravovaný rozdiel medzi zatváracou *MC* indexu a správcami upravenou *MC*,

a D_t - deliteľ v čase t , daný:

$$D_{t+1} = D_t \cdot \frac{\sum_{i=1}^n (p_{it} \cdot s_{it} \cdot ff_{it} \cdot cf_{it} \cdot x_{it}) \pm \Delta MC_{t+1}}{\sum_{i=1}^n (p_{it} \cdot s_{it} \cdot ff_{it} \cdot cf_{it} \cdot x_{it})} = \frac{M_t}{D_t}.$$



Obr. 1.3: Vývoj EuroStoxx 50 od vzniku¹

Poznámka: V sekcii zaoberajúcej sa hľadaním reprezentatívneho podportfólia budem práve kvôli nedostupnosti historických údajov pre všetky uvedené hodnoty skutočné naváženie a rozloženie komponentov len odhadovať a snažiť sa čo najviac priblížiť reálnemu.

¹<http://www.stoxx.com>

Kapitola 2

Dáta

2.1 Typ

V práci som ako podkladové historické dáta, rovnako ako aj dáta na testovanie stratégií, použil reálne burzové dáta - denné resp. týždenné zatváracie ceny jednotlivých akcií, získané z webu Yahoo Finance.¹ Akcie spoločností sú kótované na hlavných európskych burzách, konkrétne vo Frankfurte, Paríži, Miláne, Madride, Bruseli a Amsterdame. Vedené sú všetky v mene euro.

Pre odlišnosť v počte obchodných dní (napr. rôzne rozloženie sviatkov v jednotlivých štátoch) boli niektoré obchodné dni z dát vynechané. V práci som využíval dva typy dát, konkrétne denné a týždenné (resp. 5-denné) zatváracie ceny. Prvý typ pre krátkodobé i dlhodobé historické obdobie,² druhý typ najmä pre dlhodobé historické obdobie (popis uvedený pri jednotlivých výsledkoch).

2.2 Bezrizikové aktívum

Ako bezrizikový výnos som zvolil výnos do splatnosti (*YTM*) nemeckého bezkupónového štátneho dlhopisu.³ Ten predstavoval v čase písania práce

$r_f = 0.7\%$ p.a. pre dlhopis s ročnou maturitou, resp.

$r_f = 1.2\%$ p.a. pre dlhopis s 2-ročnou maturitou,

$r_f = 2\%$ p.a. pre 4-ročnú maturitu a

$r_f = 3\%$ p.a. pre 7-ročnú maturitu

(približné, zaokrúhlené hodnoty).

¹<http://www.uk.finance.yahoo.com>

²Pod „historickým” rozumiem obdobie, na základe ktorého je vytváraná investičná analýza na začiatku investičného procesu, t.j. obdobie, z ktorého prvotne spracovávam dáta. Následne „investičným” obdobím označujem obdobie v ktorom investíciu monitorujem, resp. rebalancujem a upravujem.

³www.bloomberg.com

2.3 Predpoklady

Pre nedostupnosť niektorých dát som bol z práce nútený vynechať spoločnosť BASF, ďalej z analýz zahŕňajúcich roky 2006-2008 tiež korporácie Arcelor Mittal, Unilever a kvôli rozdeleniu spoločnosti aj E.ON a Deutsche Börse. Z analýz využívajúcich dáta z rokov 2003-2007 som vynechal aj spoločnosti GDF Suez, Alstom a Telecom Italia, opäť pre nedostupnosť dát.

V modeloch pre roky 2009-2010 teda budem uvažovať index zložený z 49 akcií,⁴ pre obdobie 2006-2010 predpokladám 45 akciových titulov a pre 2003-2007 42 akcií.

Ďalej je dôležité uviesť, že som sa obmedzil len na tituly z aktuálneho (k decembru 2010) zloženia EuroStoxx 50, ktoré ďalej vystupujú vo všetkých modeloch. Reálny index je totiž dlhodobou ročne (s početnými výnimkami aj počas roka) revidovaný a prevažovaný. To v praxi znamená, že na základe momentálnej trhovej kapitalizácie z neho boli vždy určité tituly vyradené a nahradené inými. Tieto nahrádzania boli tiež sprevádzané nezverejnenými úpravami váh v indexe, aby sa zachovala jeho kontinuita. Nakoľko opäť ide o nedostupné údaje, bol som nútený obmedziť sa na konštantnú množinu akcií z aktuálneho indexu.

⁴Zoznam priložený v prílohe A.

Kapitola 3

Teória

3.1 Markowitzov model s bezrizikovým aktívom

Markowitzov model [Markowitz, 1952] slúži na nájdenie optimálnej množiny akcií, resp. optimálnych váh pre jednotlivé akcie, v investorovom portfóliu. K základnému nástroju, ktorý model využíva patrí *mean-variance* analýza, t.j. teória maximalizácie výnosu a minimalizácie rizika. Nakoľko si ale menované veličiny v reálnom svete spravidla protirečia (k vyššiemu výnosu patrí aj vyššie riziko), Markowitzova mean-variance analýza sa zameriava na maximalizáciu pomeru výnos/riziko.

Základný model bez bezrizikového aktíva umožňuje pomocou kvadratickej konvexnej optimalizácie vypočítať tzv. efektívnu hranicu - množinu efektívnych investičných stratégií. Investor si už len zvolí výšku očakávaného výnosu a k nemu sa podľa efektívnej hranice priradia optimálne váhy komponentov v portfóliu. Tento spôsob dokáže na základe historických dát minimalizovať riziko pri zadanom požadovanom výnose, avšak nezohľadňuje maximalizáciu pomeru výnos/riziko.

Rozšírený Markowitzov model s bezrizikovým aktívom však už práve spomínanú úlohu rieši. Investor v ňom alokuje svoje prostriedky do bezrizikového aktíva (ktoré obyčajne tvorí dlhopis alebo termínovaný bankový vklad) a do akciovej zložky. Akciová zložka sa volí ako bod z efektívnej hranice (t.j. určitá kombinácia jednotlivých akcií portfólia), ktorý v kombinácii s bezrizikovou investíciou poskytuje najvyšší pomer výnosu (očisteného o bezrizikový výnos) k riziku (volatilita). Bod sa nájde pomocou skonštruovania dotyčnice k efektívnej hranici z bodu výnosu bezrizikového aktíva.

Výnos, ktorý sa investor snaží maximalizovať predstavuje jeho zisk, kým *volatilita* je kľúčovým pojmom pri definovaní rizika. Predstavuje totiž hranice, v ktorých by sa mal budúci výnos s presne stanovenou pravdepodobnosťou (na základe historických dát) nachádzať. Logickou je teda snaha o jej minimalizáciu.

3.1.1 Predpoklady

- Existencia bezrizikového aktíva s fixným výnosom a množiny rizikových aktív,
- výnosy aktív sú lineárne nezávislé,
- existujú aspoň 2 aktíva pre ktoré sú očakávané výnosy rôzne veľké,
- je možné kúpiť/požičať si ľubovoľné množstvo bezrizikového, aj rizikových aktív,
- predaje na krátko (short sales) sú povolené,
- investor sleduje iba výnos a volatilitu investície
- investor svoju výplatu definuje ako súčet denných výnosov investície.

3.1.2 Jadro modelu

Ak definujeme P_t^i cenu akcie spoločnosti i v čase t , tak očakávané výnosy v modeli sú určené na základe bodových odhadov momentov¹ získaných z historických dát.

Historická návratnosť je výberová štatistika definovaná vzťahmi:

$$\bar{r}^i = \frac{\sum_{t=1}^n r_t^i}{n}, \quad \text{kde} \quad r_t^i = \frac{P_t^i - P_{t-1}^i}{P_{t-1}^i}, \quad (3.1)$$

pričom i , je i -ty cenný papier a t je daná časová jednotka.

Na základe nich odhady pre volatilitu a kovarianciu z historických dát: historická volatilita, t.j. výberová smerodajná odchýlka výnosov ($\hat{\sigma}_i$), výberová kovariancia výnosov aktív ($\hat{\sigma}_{ij}$) a Pearsonov výberový korelačný koeficient ($\hat{\rho}_{ij}$) sú definované ako:

$$\hat{\sigma}_i = \sqrt{\frac{\sum_{t=1}^n (r_t^i - \bar{r}^i)^2}{n-1}}, \quad (3.2)$$

$$\hat{\sigma}_{ij} = \frac{\sum_{t=1}^n (r_t^i - \bar{r}^i)(r_t^j - \bar{r}^j)}{n-1}, \quad (3.3)$$

$$\hat{\rho}_{ij} = \frac{\sum_{t=1}^n (r_t^i - \bar{r}^i)(r_t^j - \bar{r}^j)}{\sqrt{\sum_{t=1}^n (r_t^i - \bar{r}^i)^2} \sqrt{\sum_{t=1}^n (r_t^j - \bar{r}^j)^2}}. \quad (3.4)$$

¹Odhadmi parametrov pre vstupy do modelu v mojej práci sú aritmetický priemer pre výnosnosť a výberová disperzia (resp. smerodajná odchýlka) pre volatilitu. Pre iné odhady výnosov, disperzie a korelácie pozri napr. [Elton et al., 2010].

Z toho výberová variančno-kovariančná matica Σ , resp. výberová korelačná matica ϱ :

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \hat{\sigma}_{11} & \cdots & \hat{\sigma}_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \hat{\sigma}_{n1} & \cdots & \hat{\sigma}_{nn} \end{pmatrix}, \quad (3.5)$$

$$\varrho = \begin{pmatrix} \frac{\hat{\sigma}_{11}}{\sqrt{\hat{\sigma}_{11}}\sqrt{\hat{\sigma}_{11}}} & \cdots & \frac{\hat{\sigma}_{1n}}{\sqrt{\hat{\sigma}_{11}}\sqrt{\hat{\sigma}_{nn}}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\hat{\sigma}_{n1}}{\sqrt{\hat{\sigma}_{nn}}\sqrt{\hat{\sigma}_{11}}} & \cdots & \frac{\hat{\sigma}_{nn}}{\sqrt{\hat{\sigma}_{nn}}\sqrt{\hat{\sigma}_{nn}}} \end{pmatrix}. \quad (3.6)$$

Nech σ_P^2 predstavuje disperziu portfólia, σ_{ij} výberovú kovarianciu aktív, w_i váhu i -tej zložky, \bar{r}^i očakávaný výnos i -teho aktíva a r_E investorov očakávaný výnos portfólia. Rovnica efektívnej hranice je následne odvodená na základe úlohy kvadratickej konvexnej optimalizácie

$$\begin{aligned} \min \frac{1}{2} \sigma_P^2 &= \min_w \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_i w_j \sigma_{ij}, \\ \sum_{i=1}^n \bar{r}^i &= r_E, \\ \sum_{i=1}^n w_i &= 1. \end{aligned} \quad (3.7)$$

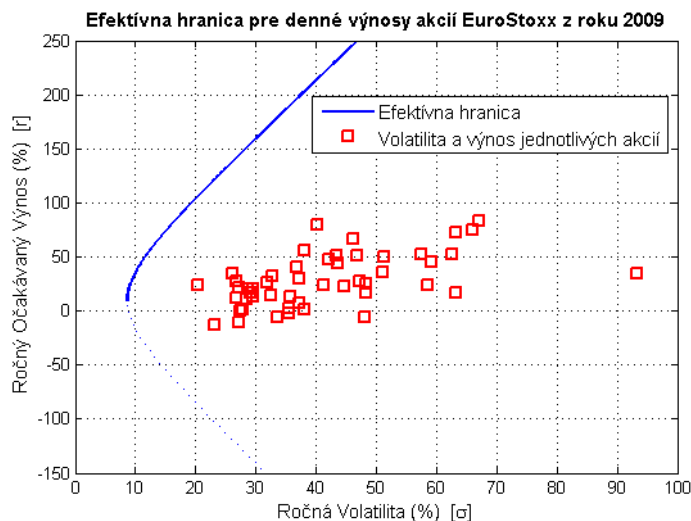
Riešením tohto problému je hyperbola daná vzťahom:²

$$\sigma = \sqrt{ar^2 + br + c}, \quad (3.8)$$

kde a, b, c sú jednoznačne určené očakávanými výnosmi akcií a prvkami inverznej variančno-kovariančnej matice (detaily v [Merton, 1970]).

Pričom pod efektívnou hranicou sa myslí „vrchná“ časť hyperboly (t.j. časť nad jej vrcholom, ilustrácia na Obr. 3.1 a Obr. 3.2).

²Podrobné odvodenie rovnice efektívnej hranice možno nájsť v [Merton, 1970]



Obr. 3.1: Graf efektívnej hranice pre súbor 49 akcií z indexu EuroStoxx 50. Historická návratnosť a volatilita sú počítané za obdobie 1.1.2009-31.12.2009. Údaje na grafe zodpovedajú Tabuľke 22 v prílohe A.

3.1.3 Problém I : Neexistencia dotýčnice k efektívnej hranici

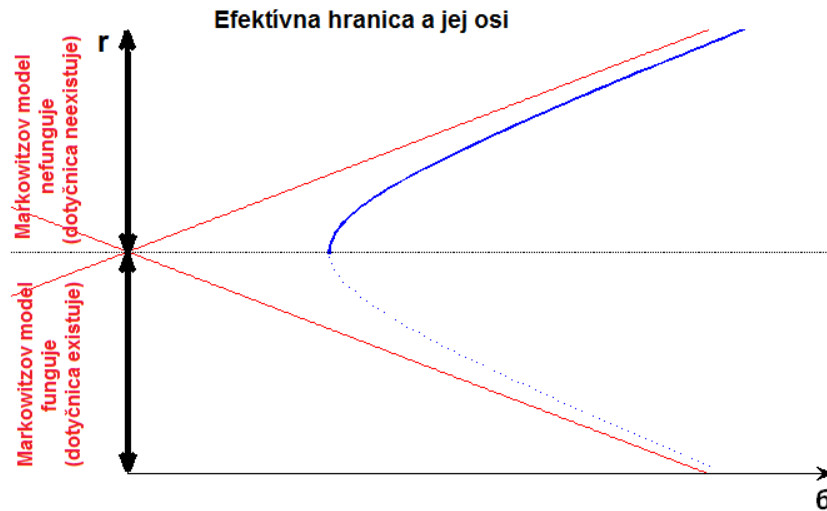
Osobitný rozbor je nutné venovať problému existencie dotýčnice k efektívnej hranici. V nasledujúcej časti rozoberiem prípady, za akých okolností možno zostrojiť k efektívnej hranici dotýčnicu z bodu bezrizikového aktíva.

Markowitzov model s bezrizikovým aktívom totiž umožňuje riešiť problém voľby optimálneho portfólia len ak dotýčnica existuje. Neošetruje prípad, v ktorom (napr. kvôli nedostatočnej výkonnosti jednotlivých aktív) nemožno dotýčnicu k efektívnej hranici skonštruovať, a teda nemožno jednoznačne nájsť najvýhodnejší (najvyšší) pomer $\frac{r-r_f}{\sigma}$.

Predpokladajme, že sa pohybujeme v rovine (σ, r) , kde σ korešponduje s horizontálnou osou a r s vertikálnou. Označme r_V vrchol hyperboly (3.8) a r_f výnos bezrizikového aktíva. Rozlišujeme 2 základné situácie:

1. **existencia** dotýčnice z bodu bezrizikového aktíva $(0, r_f)$ k efektívnej hranici danej (3.8),
2. **neexistencia** dotýčnice z bodu bezrizikového aktíva $(0, r_f)$ k efektívnej hranici danej (3.8).

Prípad existencie nastáva, ak $r_V > r_f$ (Obr. 3.2, pre r_f v dolnej polovine). Keďže vrchol hyperboly (3.8) je identický s bodom minima kvadratickej funkcie $ar^2 + br + c$, tak hodnota r_V je rovná $r_V = \frac{-b}{2a}$.



Obr. 3.2: Schematické vyobrazenie existencie dotýčnice k efektívnej hranici

V tomto prípade teda poznáme aj tvar rovnice dotýčnice:

$$r = k\sigma + r_f,$$

kde k je koeficient získaný z riešenia sústavy 3 rovníc o 3 neznámých (r_D, σ_D, k) a (r_D, σ_D) predstavujú súradnice dotykového bodu:

$$\begin{aligned} r_D &= \sqrt{\frac{\sigma_D^2 - c}{a} + \frac{-b^2}{4a^2}} - \frac{b}{2a}, \\ k &= \frac{\partial(\sqrt{\frac{\sigma_D^2 - c}{a} + \frac{-b^2}{4a^2}} - \frac{b}{2a})}{\partial\sigma_D}, \\ r_D &= k\sigma_D + r_f. \end{aligned} \tag{3.9}$$

Neexistencia nastáva v opačnom prípade, teda ak $\frac{-b}{2a} \leq r_f$ (Obr. 3.2, pre r_f v hornej polrovine). Pre tento prípad je nutné Markowitzov model s bezrizikovým aktívom špeciálne ošetriť (konkrétosti uvedené v ďalšej časti).

3.1.4 Aplikácia modelu

V tejto časti volím investičnú stratégiu v závislosti od rôznych trhových situácií. Pri praktickej aplikácii modelu som nútený vykonať niekoľko pozmeňujúcich úprav. Ako už bolo spomenuté, mojím investičným cieľom je dosiahnuť čo možno najvyššie zhodnotenie investovaného kapitálu, pri najmenšom možnom riziku s využitím Markowitzovho

modelu. Model nám tento najvyšší možný pomer $\frac{r-r_f}{\sigma}$ v kombinácii spolu s bezrizikovým aktívom aj zabezpečí. Investor si stanoví požadovaný výnos a my nájdeme určenému výnosu ekvivalentný alokačný pomer (váhy) pre investíciu do dlhopisu a do dotykového bodu. Avšak v reálnom svete nemusí byť najvyšší pomer $\frac{r-r_f}{\sigma}$ (teda náš dotyčnicový dotykový bod) vždy explicitne vypočítateľný. Dôvodom je už spomínaná neexistencia dotykovej k efektívnej hranici. Pre tento prípad je nutné nájsť alternatívny spôsob voľby akciovej zložky. V práci preto zavádzam koncept stropu pre volatilitu, na základe ktorého sa volí optimálny bod, ak dotykový bod neexistuje.

V modifikovanom modeli môžu nastať 2 situácie:

- je možné zostrojiť dotyčnicu k efektívnej hranici na základe historických trhových dát (scenár 1),
- nie je možné zostrojiť dotyčnicu k efektívnej hranici na základe historických trhových dát (scenár 2).

Scenár 1

V tomto prípade volíme akciovú zložku portfólia podľa (3.9), ako portfólio (r_D, σ_D) , zodpovedajúce nájdenu dotykovému bodu k efektívnej hranici. Investor teda podľa ním stanovenej výšky požadovaného výnosu alokuje svoje prostriedky v rámci akciovej zložky portfólia do akcií s váhami prislúchajúcimi dotykovému bodu.

Scenár 2

Ak nemožno zostrojiť dotyčnicu, nevieme nájsť bod s najvyšším pomerom $\frac{r-r_f}{\sigma}$. Je teda rýdzo na voľbe investora, resp. zostavovateľa modelu, akú stratégiu zvolí. Uvedená situácia sa zvykne modelovať napr. použitím funkcie užitočnosti. Avšak istým variantom práve pre funkciu užitočnosti je mnou použitý princíp maximálnej volatility (zvolenej investorom). V práci som daný prípad ošetril nasledovne:

- stanoví sa hranica maximálnej možnej volatility dotykového bodu, tzv. *volatility cap* - σ_{VC} ,
- hodnota výnosu a volatilita prislúchajúca volatility cap na efektívnej hranici sa použije v modeli ako akciová zložka namiesto neexistujúceho dotykového bodu.

Súradnice optimálneho bodu (pre a, b z (3.8) a r_f z odseku 3.1.3):

$$\sigma^* = \begin{cases} \sigma_D, \text{ t.j. riešenie sústavy (3.9),} & \text{ak } \frac{-b}{2a} > r_f, \\ \sigma_{VC}, & \text{ak } \frac{-b}{2a} \leq r_f, \end{cases} \quad (3.10)$$

$$r^* = \begin{cases} r_D, \text{ t.j. riešenie sústavy (3.9),} & \text{ak } \frac{-b}{2a} > r_f, \\ \sqrt{\frac{\sigma_{VC}^2 - c}{a} + \frac{-b^2}{4a^2}} - \frac{b}{2a}, & \text{ak } \frac{-b}{2a} \leq r_f. \end{cases} \quad (3.11)$$

Výpočet váh pre akcie v optimálnom bode na efektívnej hranici

Ak definujeme w_k váhu k -teho aktíva v rámci efektívneho portfólia, ďalej označíme $\alpha = r^*$ (t.j. očakávaný výnos akciovej zložky portfólia vypočítaný zo vzťahu (3.11)), $\alpha_j = \bar{r}^j$ z (3.1) a ν_{kj} príslušný prvok inverznej matice ku kovariančnej matici z (3.5), tak v modeli vypočítame váhu aktíva w_k (v zvolenom optimálnom bode (3.10), (3.11)) zo vzťahu:

$$w_k = \frac{\alpha \cdot \sum_{j=1}^m \nu_{kj} \cdot (C \cdot \alpha_j - A) + \sum_{j=1}^m \nu_{kj} \cdot (B - A \cdot \alpha_j)}{D}, \quad (3.12)$$

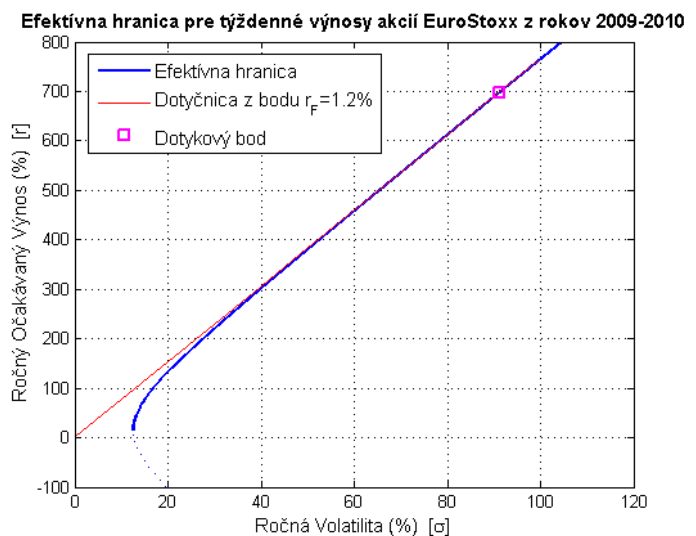
kde A, B, C, D sú opäť jednoznačne determinované hodnotami ν_{kj} a α_j (podrobné odvedenie v [Merton, 1970]).

Obmedzenie rizika

V praxi je ale nevyhnutné obmedziť riziko, ktorému bude investor vystavený. Váhy vypočítané z (3.12) totiž nie sú ničím ohraničené. Ľahko tak môže nastať situácia (napr. v prípade príliš „prísnych“ optimalizačných ohraničení), že váhy vystupujúce z modelu budú implikovať výraznú *dlhú pozíciu* (nákup) v jednej podskupine akcií a výraznú *krátku pozíciu* (zápornú, predaj) v inej podskupine akcií, pričom váhy zvyšných titulov budú oproti uvedeným dvom zanedbateľné. Tým je investor v prípade trhových výkyvov vystavený obrovskému riziku, nakoľko jeho diverzifikácia sa vlastne obmedzila hlavne na malú podmnožinu komponentov. Vysokými hodnotami akciových váh tiež investor stráca peňažné prostriedky na transakčných nákladoch. Uvedený prípad nastáva najmä ak sa dotkový bod nachádza na veľmi vysokých úrovniach volatility, ako vidno na Obr. 3.3.

Ukážka časti matice váh pre akcie vo vzdialenom dotykovom bode

	1. váženie	2. váženie	3. váženie	...
Akcia č. 1	-0.65397	-47.32796	-15.49219	...
Akcia č. 2	0.34370	38.18170	2.18355	...
Akcia č. 3	0.73640	25.50747	3.76955	...
Akcia č. 4	0.88526	56.21521	13.83507	...
Akcia č. 5	0.21584	10.66930	6.85202	...
Akcia č. 6	0.15251	21.74807	4.52214	...
Akcia č. 7	0.40768	0.83833	1.16928	...
Akcia č. 8	-0.13715	-6.06188	2.11019	...
Akcia č. 9	-0.07486	-12.43418	0.81413	...
...



Obr. 3.3: Graf efektívnej hranice a „extrémneho“ dotkového bodu

Tento príklad mi bol motiváciou k ohraničeniu váh pre akciové komponenty, ktoré realizujem pomocou kvadratického programovania, a to nasledovným algoritmom:

Optimálny bod na efektívnej hranici je už vypočítaný z (3.10), (3.11), zostáva teda ohraničiť váhy. Je možné zvoliť 2 rôzne postupy:

- zafixovať nájdenú volatilitu σ^* z (3.10) a riešiť úlohu maximalizácie r pri zvolených váhových ohraničeniach,
- zafixovať nájdené optimálne r^* z (3.11) a minimalizovať σ pri daných ohraničeniach.

V práci volím druhý postup. Takto sa síce zvýši volatilita investície oproti nájdenému optimálnemu bodu z efektívnej hranice, resp. oproti volatility cap (záleží od (3.10)), avšak získame požadované váhové ohraničenie. Navyše, ako ukazujú konkrétne experimenty s dátami, po zavedení ohraničení typicky dochádza iba k nebadateľnej zmene vo veľkosti σ^* . Uvedený postup teda má zmysel ďalej testovať.

Konečné riešenie pre optimálny vektor váh w (akciovej zložky), ktorého prvkami sú w_k , je teda v zmysle nášho problému ekvivalentné riešenie kvadratickej optimalizačnej úlohy (ak toto riešenie existuje):³

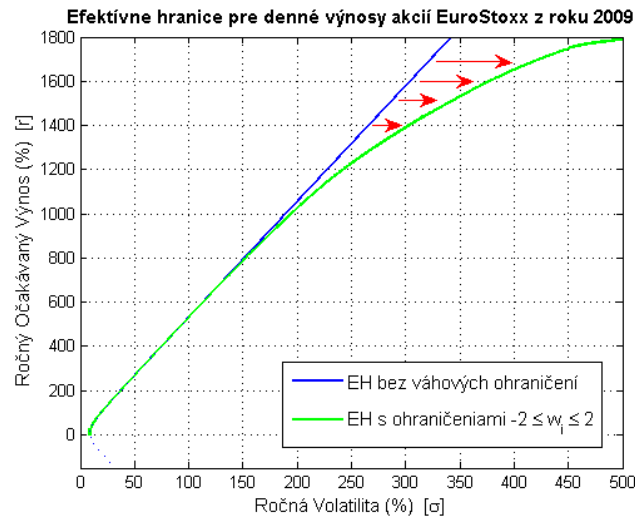
$$\begin{aligned} \min_w f(\hat{\sigma}) &= \min_w \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_i w_j \hat{\sigma}_{ij}, \\ \sum_{i=1}^n \bar{r}^i &= r^*, \\ \sum_{i=1}^n w_i &= 1, \\ w_L &\leq w_i \leq w_U, \end{aligned} \tag{3.13}$$

- $\hat{\sigma}_{ij}$ - výberová kovariancia aktív z (3.5),
- \bar{r}^i - očakávaný výnos i-teho aktíva z (3.1),
- r^* - prostredníctvom (3.11) nájdený bod optimálneho výnosu,
- w_L, w_U - dolné a horné váhové ohraničenie.

Efektívna hranica s ohraničeniami na váhy má mierne deformovaný tvar oproti pôvodnej, avšak jej najpodstatnejšia časť (pre reálne používané hodnoty σ , r) sa takmer zhoduje s efektívnou hranicou bez ohraničení. Líši sa len pre extrémne hodnoty σ , r - ako vidno na Obr. 3.4.

³V prípade, že je uvedená optimalizačná úloha neprípustná, v práci volím váhy bez ohraničení.

V konečnom dôsledku sa teda historická volatilita investície, a aj to iba pre prípady extrémne vysokého výnosu, o málo zhorší, avšak investor bude lepšie chránený pred prípadnými budúcimi výraznými fluktuáciami hodnoty investície (znázornenými napr. na Obr. 3.3) a ušetrí na transakčných nákladoch.



Obr. 3.4: Porovnanie efektívnej hranice s váhovými ohraničeniami s efektívnou hranicou bez váhových ohraničení

Konečné rozloženie investície

Vyriešením (3.13) sa teda získali váhy pre jednotlivé akcie v akciovej zložke portfólia, zodpovedajúce optimálnemu výnosu odvodenému vo vzťahu (3.11). Tento optimálny výnos ale nemá nič spoločné s investorom požadovaným výnosom. Rozloženie investície však možno ľahko prispôbiť práve veľkosti požadovaného výnosu.

Nech x je váha v bezrizikovej aktíve, r_f nech predstavuje jeho výnos, r_P investorom požadovaný výnos a r^* optimálny výnos z (3.13), potom

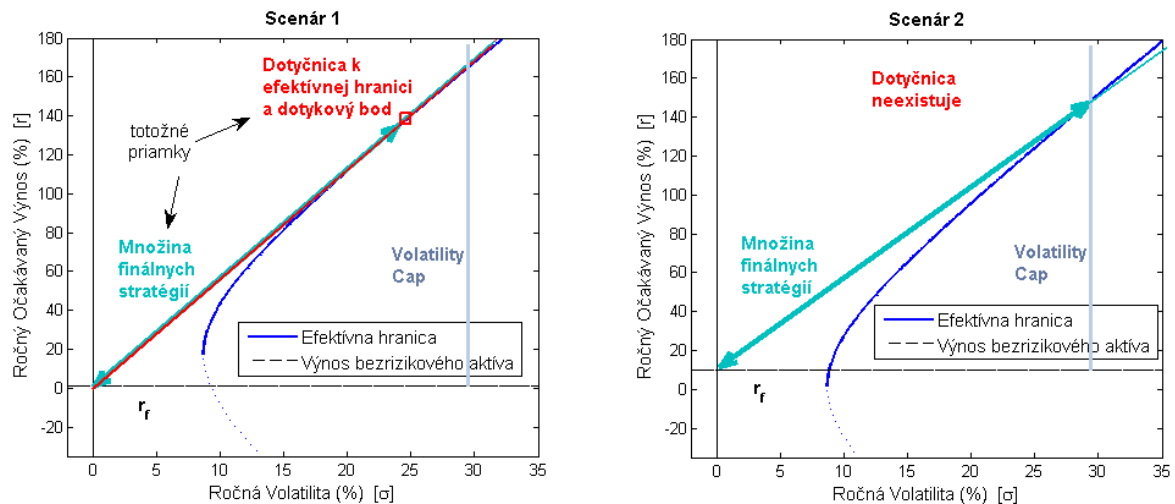
$$x \cdot r_f + (1 - x) \cdot r^* = r_P. \quad (3.14)$$

Investor teda volí stratégie z polpriamky vedenej z koncového bodu $(0, r_f)$ cez bod (σ^*, r^*) - kombinuje bezrizikové aktívum s akciovou zložkou (viď ilustračný Obr. 3.5), pričom váha v bezrizikovej aktíve:

$$x = \frac{r_P - r_f}{r_f - r^*}, \quad (3.15)$$

a váha v rizikovej aktíve predstavuje $(1 - x)$.

Investor má alokované prostriedky medzi bezrizikové aktívum a akciovú zložku tak, aby výsledný historický výnos takto zloženého portfólia zodpovedal výnosu požadovanému investorom. V časti 3.1.5 ešte ale poukážem na druhý problém Markowitzovho modelu, t.j., že investorom požadovaný výnos v klasickom ponímaní (skutočný kumulovaný výnos) sa nezhoduje so vstupným výnosom do modelu (súčet n-denných výnosov).



Obr. 3.5: Schéma modifikovaného modelu

Zhrnutie aplikácie modifikovaného modelu

1. Na základe vstupných historických dát sa vypočíta rovnica efektívnej hranice.
2. Zistí sa, či je možná konštrukcia dotyčnice z bodu daného bezrizikového výnosu k nájdenej efektívnej hranici.
 - (a) Ak áno, ako akciová zložka sa stanoví dotykový bod (σ^*, r^*) z efektívnej hranice.
 - (b) Ak nie, ako výsledný sa stanoví bod (σ^*, r^*) z efektívnej hranice prislúchajúci maximálnej prípustnej volatilite.
3. Pomocou kvadratického programovania s ohraničením na váhy sa vypočítajú akciové váhy pre portfólio prislúchajúce stanovenému bodu (σ^*, r^*) (minimalizácia σ pre dané r^*). Ak úloha nemá riešenie, ohraničenie neuskutočníme. Ak má riešenie, výrazná zmena oproti východiskovému bodu (σ^*, r^*) nastane iba v prípade, že dotykový bod je extrémne vzdialený od počiatku, ako je znázornené na Obr. 3.4.
4. Na základe investorom požadovaného výnosu sa rozloží investícia medzi bezrizikové aktívum a akciovú zložku, t.j. portfólio reprezentujúce akcie EuroStoxx 50, nájdené v predošlom bode.

3.1.5 Problém II : Nerovnosť medzi skutočným výnosom a výnosom vstupujúcim do modelu

Uvažujme hypotetický, zjednodušený príklad. Investujeme jednorázovo 100 € na dobu 4 dní do akcie A. Akciu nakupujeme v deň 0 a počas ďalších dní sa vyvíja rôzne. Tabuľky 3.1 a 3.2 popisujú vývoj investície z pohľadu investora a tiež zhodnotenie, ako ho vníma model.

Očakávaný denný výnos akcie sa v prvom príklade rovná ($\bar{r} = \frac{\sum_{t=1}^4 r_t}{4} = \frac{15}{4} = 3.75\%$). Naproti tomu sa ale v skutočnosti akcia zhodnotila počas 4 dní len o 10.7%, čo zodpovedá kumulovanému dennému výnosu 2.58%. Ak by si teda investor stanovil požadovaný 4-denný výnos investície na úrovni 15%, výstupom z modelu by bola alokácia všetkých prostriedkov do akcie A a žiadnych prostriedkov do dlhopisu. Súčet denných výnosov by dosiahol požadovanú hodnotu 15%, tá sa ale líši od skutočného zhodnotenia investície. Opačná nerovnosť nastáva, ak skutočný výnos prevýši súčet denných výnosov, ako je znázornené v Tabuľke 3.2.

Očakávané výnosy akcií vstupujúce do (3.7) sú v (3.1) počítané na základe denných výnosov. Požadovaný výnos vstupujúci do modelu preto treba brať iba informatívne. Jeho výšku je možné prispôbiť skutočnému výnosu napríklad na základe mnohonásobných historických testov (kalibrácie).

Deň	Cena akcie A	Hodnota investície	Denný výnos	Skutočný výnos ⁴
0	10	100	-	-
1	12	120	+20%	+20%
2	11	110	-8.33%	+10%
3	13	130	+18.18%	+30%
4	10.7	110.7	-14.85%	+10.7%
Spolu	10.7	110.7	+15%	+10.7%

Tabuľka 3.1: Príklad skutočného výnosu nižšieho ako súčty denných výnosov

Deň	Cena akcie A	Hodnota investície	Denný výnos	Skutočný výnos
0	10	100	-	-
1	13	130	+30%	+30%
2	17	170	+30.77%	+70%
3	18	180	+5.88%	+80%
4	18.603	186.03	+3.35%	+86.03%
Spolu	18.603	186.03	+70%	+86.03%

Tabuľka 3.2: Príklad skutočného výnosu vyššieho ako súčty denných výnosov

⁴T.j. výnos, ktorý sleduje investor ako skutočné zhodnotenie jeho investície.

Nevýhody tohto investičného prístupu:

- Investorom požadovaný výnos sa zhoduje s reálnym výnosom investície, len ak by sme ako mieru zhodnotenia investície použili súčet denných výnosov. V praxi je ale najbežnejšou mierou zhodnotenia investície kumulovaný výnos (definovaný neskôr v časti 3.3). Požadovaný výnos teda možno použiť na kalibráciu modelu, avšak nemožno ho brať ako výsledný výnos v pravom slova zmysle.
- V modernej investičnej praxi sa na výpočet očakávaných návratností akcií, ako aj kovariančnej matice, používajú samostatné modely, a nie historická návratnosť, resp. historická volatilita.

3.1.6 Rebalancovanie investície

V práci uvažujem a skúmam aj vplyv rôzneho rebalancovania, t.j. prevažovania, investičného portfólia na výnos a volatilitu investície na sledovanom investičnom horizonte.

Algoritmus rebalancovania prebieha nasledovne:

- Na začiatku sa stanoví celkový počet rebalancovaní (z ktorého je následne odvodená rebalančná perióda) v rámci investičného horizontu. Minimálny počet je 1, t.j. váženie iba na začiatku, tesne pred vstúpením do investičného horizontu (prípád korešpondujúci so situáciou bez rebalancovania).
- V každom bode (časovom okamihu) prevažovania prebieha celý proces tvorby efektívnej hranice a rozloženia investície medzi jednotlivé akcie EuroStoxxu a bezrizikový cenný papier, popísaný v sekcii 3.1.4.
- Historickými dátami vstupujúcimi do Markowitzovho modelu pri každom rebalancovaní sú vždy najaktuálnejšie dostupné dáta, teda historické dátové okno sa vždy posúva až po posledný známy deň pred novým rebalancovaním.

Historické dátové okno ceny akcie i :

na začiatku: $P_{t_0-k}^i, P_{t_0-k+1}^i, \dots, P_{t_0-2}^i, P_{t_0-1}^i$,

priebežne: $P_{t_0-k+px}^i, P_{t_0-k+px+1}^i, \dots, P_{t_0+px-2}^i, P_{t_0+px-1}^i$,

t_0 - deň začiatku investičného horizontu,

k - veľkosť historického dátového okna (počet obchodných dní/týždňov),

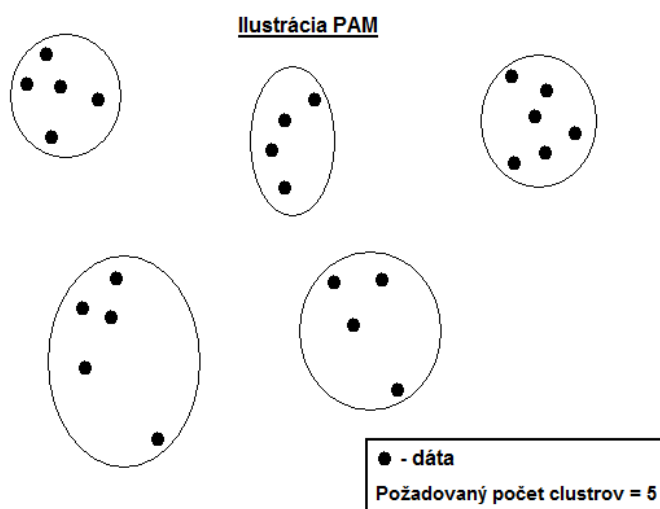
p - perióda, po ktorej dochádza k rebalancovaniu (počet dní/týždňov),

x - číslo rebalancovania ($x = 0$ na začiatku investovania, $x = 1$ pri prvom rebalancovaní, atď.).

3.2 Clustrová analýza

Jedným z cieľov mojej práce je nájsť čo najmenší počet akcií z indexu EuroStoxx 50, ktoré by vierohodne replikovali vývoj celého indexu. Štatisticky sa dá tento problém formulovať ako hľadanie vhodných podmnožín - skupín, do ktorých je možné zadeliť jednotlivé akcie indexu, a pre každú skupinu zvoliť komponent (konkrétnu akciu), ktorý najviac reprezentuje všetky ostatné prvky podmnožiny (najviac s nimi koreluje). Týmto spôsobom je možné zredukovať počet akcií v skutočnom indexe tak, aby nový index čo najvernejšie kopíroval vývoj reálneho, neredukovaného indexu. Novovytvorený index tak predstavuje pre rizikovo averzného investora so záujmom investovať prostriedky do reálneho indexu značné ušetrenie na transakčných nákladoch, a pritom volatilitu aj výnosy veľmi podobné pôvodnému indexu.

Základným účelom *clustrovej* (zhlukovej) analýzy je roztriedenie veľkého množstva dát do skupín na základe spoločných črt, a tým zníženie dimenzie úlohy. Existuje viacero algoritmov riešiacich daný problém, pričom každý z nich má iné praktické využitie. V práci s mojimi dátami využívam tzv. deliacu metódu *PAM - Partitioning Around Medoids* (odvodenú v [Kaufman and Rousseeuw, 1990]). V kontexte môjho problému totiž potrebujem zhlukovú analýzu použiť nielen na zadelenie dát (akcií) do menších skupín, ale aj na nájdenie reprezentantov pre výsledné skupiny.



Obr. 3.6: Ilustrácia fungovania PAM pre vstupný počet 5 skupín (clustrov)

Metóda Clustrovej analýzy PAM umožňuje získať práve hľadané podskupiny akcií, vrátane reprezentatívnych titulov. Roztriedi dáta do vopred určeného počtu clustrov tak, aby si prvky v rámci clustra boli čo najpodobnejšie, a naopak, aby clustre navzájom boli čo najodlišnejšie. A najmä, každému clustru priradí vedúci prvok, tzv. centroid, resp. *medoid*.

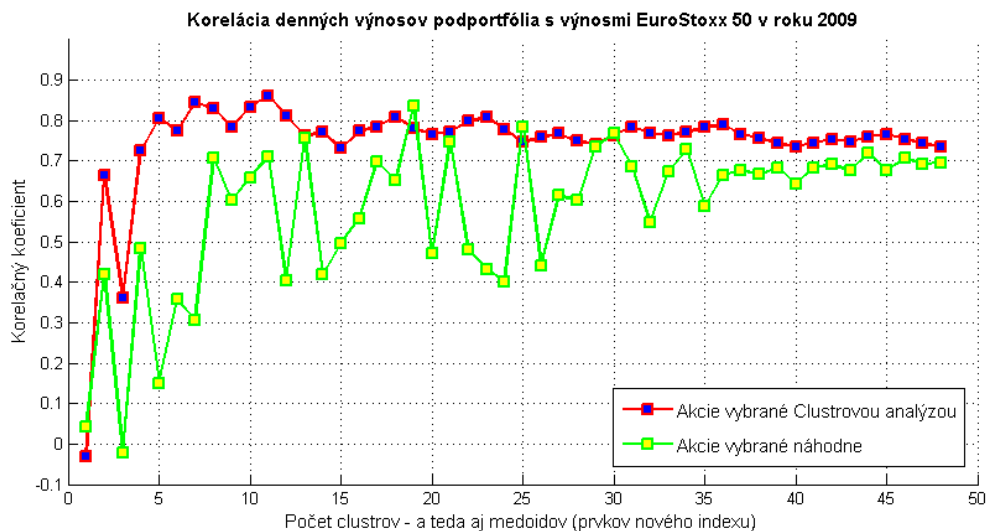
3.2.1 Partitioning Around Medoids

Vstupom pre PAM algoritmus sú v mojom prípade časové rady denných, resp. týždenných výnosov akcií indexu EuroStoxx 50, vypočítané z (3.1). Nakoľko sa jedná o výnosy a nie o samotné ceny, ich prípadné normovanie a škálovanie už nie je potrebné.

Ďalším dôležitým bodom je voľba počtu želaných finálnych clustrov - tomu sa totiž prispôsobuje chod celého algoritmu. Konečný počet clustrov (ktoré majú čo najlepšie reprezentovať celý index, avšak má ich byť čo najmenej) ale nie je vopred známy, a je práve jedným z objektov môjho skúmania. Preto volím ako vstupy do PAM rôzne počty clustrov a aplikujem analýzu senzitivity novovytvoreného podportfólia (viď Obr. 3.7, metodiku voľby pozri ďalej v texte).

Dole uvedený graf znázorňuje korelácie výnosov podportfólia (podmnožiny) akcií EuroStoxx 50 s výnosmi skutočného indexu pre 2 prípady:

1. podportfólio vybrané na základe clustrovej analýzy (je tvorené ekvivalentne naváženými akciami, ktoré predstavujú medoidy jednotlivých clustrov),
2. podportfólio zložené z ekvivalentne navážených akcií vybraných náhodne.



Obr. 3.7: Porovnanie náhodne a systematicky navoleného podportfólia, čo sa týka korelácie výnosov podportfólia s výnosmi EuroStoxx 50, pre rôzne počty clustrov

Obrázok č. 3.7 ukazuje, že clustrová analýza dokáže už pri počte 5 akcií vytvoriť vysoko korelujúce (a teda vierohodné) podportfólio. Náhodne vytvorené podportfólio koreluje vo väčšine prípadov menej.

Je zaujímavé, že korelačný koeficient nekonverguje k 1 pri veľkom počte clustrov, nakoľko využívam zjednodušujúce predpoklady (z analýzy vyradené BASF pre ktorú

chýbali údaje, resp. akcie v podportfóliu vážené ekvivalentne a nie podľa reálnych, verejne nedostupných váh). V časti 3.3.1 však predstavím metódu váženia akcií, ktorá koreláciu vylepšuje.

Konvergencia korelačného koeficientu tiež nemusí byť monotónna. Clustrová analýza totiž nemusí nutne vybrať akcie, ktoré budú v spojení viac korelovať s reálnym indexom. Ako medoidy vyberá „najcentrálnejšie“ umiestnené prvky v rámci clustrov, môže sa teda stať, že niekedy je aj menší počet clustrov vhodnejší a zvýšenie tohto počtu výsledok naopak zdeformuje.

3.2.2 Algoritmus PAM

Algoritmus metódy PAM (pri zadanom počte k clustrov) možno stručne popísať nasledovne:

- „BUILD“ fáza:
 - Na začiatku sa zvolí k medoidov - reprezentatívnych prvkov.
 - Medoidy sú volené na základe *odlišností* (miera odlišnosti závisí od zvolenej metriky, môže ňou byť napr. euklidovská vzdialenosť) jednotlivých prvkov medzi sebou.
 - Každý prvok sa priradí k tomu medoidu, od ktorého je jeho odlišnosť minimálna.
- „SWAP“ fáza:
 - Snaha o vylepšenie prvotných k medoidov v zmysle minimalizácie súčtu priemerných odlišností.
 - Naraz sa vždy mení maximálne jeden medoid a proces sa opakuje, až do kľiaľ nie je dosiahnutá najmenšia možná odlišnosť zvolených medoidov od všetkých prvkov v rámci clustra.

Exaktný výpočet:

Nech ρ_{ij} je Pearsonov výberový korelačný koeficient medzi prvkami i, j definovaný v (3.4). Potom odlišnosť d medzi prvkami i a j definujeme ako:

$$d(i, j) = \frac{(1 - \rho_{ij})}{2} \quad (3.16)$$

„BUILD“ fáza algoritmu

(Volia sa počiatkové clustre a ich reprezentanti.)

Cyklus $n=1, \dots, p$ (kde p je želaný počet clustrov)

Prvý zvolený objekt - reprezentant (označme r^1) je argument optimalizačnej úlohy

$$r^1 = \arg \min_i \left\{ \sum_{j=1, j \neq i}^m d(i, j) \right\},$$

kde i, j sú dvojice rôznych prvkov (dát) a m je počet prvkov.

Z toho vyplýva, že r^1 je objekt, ktorého súčet odlišností od všetkých ostatných prvkov je najmenší - centrálny objekt.

Každý ďalší objekt r^n ($n=1, \dots, p$) je zvolený na základe postupu:

1. Uvažujme ľubovoľný objekt i , ktorý dosiaľ nebol zvolený, t.j. $i \neq r^k, \forall k = 1, \dots, n-1$.
2. Uvažujme ľubovoľný dosiaľ nezvolený objekt j , kde $i \neq j, j \neq r^k$, a spočítajme

$$C_{ji} = \max \{D_j - d(i, j); 0\},$$

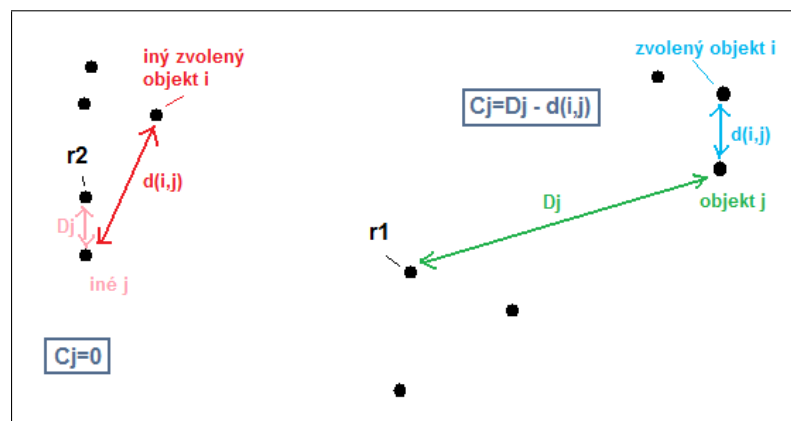
kde $D_j = \min_k \{d(j, r^k)\}, \forall k = 1, \dots, n-1$ a $d(i, j)$ je definované v (3.16).

D_j teda predstavuje hodnotu odlišnosti prvku j od jemu najpodobnejšieho dosiaľ zvoleného reprezentanta - objektu r^k .

3. Následne riešime úlohu

$$r^n = \arg \max_i \left\{ \sum_{j=1, j \neq i, j \neq r^k}^m C_{ji} \right\}, \quad \forall i = 1, \dots, m; \quad i \neq r^k,$$

čím nájdeme požadovaný reprezentatívny prvok r^n .



Obr. 3.8: Ilustrácia 2. a 3. kroku BUILD fázy

„SWAP” fáza algoritmu

(Vylepšovanie množiny reprezentatívnych objektov.)

V tejto fáze je posudzovaný efekt zámény reprezentatívneho objektu r^i (ozn. i) za nereprezentatívny objekt h , pri nezmenených zvyšných objektoch r^n . Uvažujú sa teda všetky dvojice prvkov (i, h) , kde $h \neq i, \forall i = 1, \dots, p$.

1. Zvolíme objekt j , kde $j \neq i, \forall i = 1, \dots, p$ a $j \neq h$ a spočítame

$$A = D_j - d(i, j); \quad B = D_j - d(h, j), \quad \text{kde } D_j \text{ je definovaná v (BUILD, 3.)}$$

Následne:

- (a) Ak $A < 0, B < 0$ potom $C_{jih} = 0$.
- (b) Ak $A = 0$ tak ak označíme

$$j^* = \arg \min_{k=1, \dots, p} \{d(j, r^k)\} \quad \text{najbližší medoid ,}$$

$$E_j = \min_{k=1, \dots, p, k \neq j^*} \{d(j, r^k)\} \quad \text{2. najbližší medoid .}$$

- i. Ak $d(h, j) < E_j$, potom $C_{jih} = d(h, j) - d(i, j)$.
 - ii. Ak $d(h, j) \geq E_j$, potom $C_{jih} = E_j - D_j$.
- (c) Ak $A < 0, B > 0$ potom $C_{jih} = d(h, j) - D_j$.

2. Vypočítame celkový efekt výmeny:

$$T_{ih} = \sum_j C_{jih}$$

- (a) Ak $\min_{i,h} \{T_{ih}\} < 0$, vykoná sa výmena reprezentatívneho objektu r^{i^*} za objekt h^* , kde $(i^*, h^*) = \arg \min_{i,h} \{T_{ih}\}$
Algoritmus sa vracia naspäť do bodu (1.) v SWAP fáze.
- (b) Ak $\min_{i,h} \{T_{ih}\} \geq 0$, pomocou výmeny už nie je možné dosiahnuť zmenšenie sumy odlišností a algoritmus sa končí.

Výstupom z PAM algoritmu je teda želaný počet k clustrov (skupín) obsahujúcich jednotlivé prvky spolu s k medoidmi - reprezentantmi. Výsledné medoidy sú definované ako objekty clustra, ktorých priemerná odlišnosť od všetkých ostatných prvkov v rámci clustra je najmenšia.

3.3 Metodika konštrukcie podportfólia

Nakoľko metóda clustrovej analýzy partitioning around medoids neposkytuje ako výstup optimálny počet clustrov, záleží na konštruktérovi podportfólia, aký počet si na základe empirickej, resp. korelačnej, analýzy zvolí. V práci sa obmedzujem na podportfólia o veľkosti 5-15 titulov. Spodná hranica predstavuje zámer udržať aspoň čiastočnú diverzifikáciu, vrchná naopak kladie dôraz na zníženie transakčných nákladov a sémantický význam pojmu *podportfólio*.

Pre heuristicky zvolený počet clustrov je teda výstupom z PAM ekvivalentný počet medoidov. Tieto medoidy je v rámci konštruovaného podportfólia možné navážiť tromi základnými spôsobmi a jedným viac sofistikovaným:

- Ekvivalentne.
- Na základe voľnej trhovej kapitalizácie *FFMC* medoidu (pozri (1.2)).
- Na základe voľnej trhovej kapitalizácie *FFMC* celého clustra.
- Optimalizáciou na základe historických dát.

V mojich analýzach porovnávam všetky 4 spôsoby, pričom druhý a tretí (*FFMC* medoidu alebo clustra) realizujem na základe aktuálnych dát *FFMC*, ktorú predpokladám ako konštantnú počas celej doby existencie portfólia. Optimalizáciu vykonávam na základe historického obdobia a úspešnosť testujem na investičnom (out of the sample) období, pričom vychádzam z článku [Dose and Cincotti, 2005].

3.3.1 Navažovanie podportfólia

Ak označíme w_{eq} váhy v ekvivalentne váženom portfóliu, w_{FFMC} váhy v portfóliu na základe trhovej kapitalizácie, w_{LS} váhy získané optimalizáciou, k počet clustrov a m počet akcií, tak výsledné váženie pre i -ty prvkov portfólia možno zapísať ako

$$w_{eq}^i = \frac{1}{k}, \quad (3.17)$$

$$w_{FFMC}^i = \frac{FFMC^i}{\sum_{i=1}^m FFMC^i}, \quad (3.18)$$

kde $FFMC^i$ predstavuje buď kapitalizáciu i -teho medoidu alebo celého clustra spadajúceho pod medoid.

Ak však chceme dosiahnuť čo najpresnejšiu replikáciu vývoja indexu podportfóliom, musíme na základe histórie nájsť taký vektor váh, ktorý minimalizuje odchýlky výnosov podportfólia od výnosov indexu. To umožňuje metóda najmenších štvorcov:

$$w_{LS} = \arg \min_{w \in W} \left\{ \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\sum_{t=1}^n (R_t^T \cdot w - I_t)^2} \right\},$$

$$W = \{w \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^m w_i = 1 \wedge 0 \leq w_i \leq u\}, \quad (3.19)$$

kde:

- n - dĺžka historického obdobia,
- u - horné ohraničenie pre váhy (v záujme zachovania diverzifikácie),
- $I_{n \times 1}$ - vektor, časový rad výnosov indexu, $I = (r_1^I, r_2^I, \dots, r_n^I)$, r^I definované v (3.1),
- $R_{t \times m}^T$ - t -ty riadok matice R , ktorej riadky tvoria časové rady výnosov zvolených akcií a stĺpce predstavujú dáta pre jednotlivé akcie:

$$R = \begin{pmatrix} r_1^1 & r_1^2 & \dots & r_1^m \\ r_2^1 & r_2^2 & \dots & r_2^m \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_n^1 & r_n^2 & \dots & r_n^m \end{pmatrix}.$$

Tentokrát som zvolil obmedzenie nezápornosti pre váhy, a to v zmysle korešpondencie s konštrukciou reálneho indexu a redukciou nákladov spojených s predajmi na krátko. Hodnota horného váhového ohraničenia je v ďalších výpočtoch na úrovni $u = 1$.

3.3.2 Použité optimalizačné metódy

V práci som využíval nasledovné metódy:

- Optimalizáciu metódou najmenších štvorcov som realizoval s využitím funkcie LSQIN, ktorá je súčasťou softvéru MATLAB.
- Kvadratickú optimalizáciu som realizoval cez funkciu QUADPROG v tom istom softvéri.
- Na výpočty metódy partitioning around medoids som využil funkciu PAM zakomponovanú v softvéri R.
- Vývoj investičných stratégií som sledoval prostredníctvom vlastných, naprogramovaných funkcií v softvéri MATLAB.

3.4 Charakteristiky výkonnosti portfólia

Označme:

- NAV_i - čistá hodnota aktív (investície) v čase i ,
- y - dĺžka investičného horizontu v rokoch,
- \bar{r}^P - stredná hodnota výnosov portfólia odhadnutá aritmetickým priemerom,
- r_f - p.a. výnos bezrizikového aktíva.

Kumulovaný výnos investície (portfólia) za celý investičný horizont dĺžky t v %:

$$r_t^P = 100 \cdot [(1 + r_1^P)(1 + r_2^P) \dots (1 + r_t^P) - 1], \quad \text{kde } r_i^P = \frac{NAV_i - NAV_{i-1}}{NAV_{i-1}}.$$

Kumulovaný výnos investície (portfólia) za celý investičný horizont dĺžky t v % p.a.:

$$r_P^* = \frac{r_t^P}{y}.$$

Výberová volatilita výnosov investície počas celého investičného horizontu v % p.a.:

$$\sigma_P = 100 \cdot \sqrt{n-1} \cdot \sqrt{\frac{1}{y}} \left(\sqrt{\frac{\sum_{t=1}^n (r_t^P - \bar{r}^P)^2}{n-1}} \right).$$

Sharpe ratio („Sharpeov pomer“ - viac v [Sharpe, 1994]) - pomerný ukazovateľ výnosnosti k volatilita:⁵

$$S_P = \frac{r_P^* - r_f}{\sigma_P}.$$

Maximum drawdown - MDD_P (maximálny percentuálny pokles investície) počas investičného horizontu dĺžky t :

$$V_t = (1 + r_1^P)(1 + r_2^P) \dots (1 + r_t^P),$$

$$M_t = \max_{i \in [1, t]} V_i,$$

$$DD_t = \frac{M_t - V_t}{M_t},$$

$$MDD_P = 100 \cdot \left(\max_{i \in [1, t]} DD_i \right).$$

⁵Všetky hodnoty musia byť počítané na rovnakej časovej báze, t.j. všetky sú prepočítané na hodnoty p.a.

Kapitola 4

Výsledky

4.1 Metodika

Značenie

- HO - historické obdobie (obdobie, z ktorého je počítaná historická návratnosť a volatilita, resp. obdobie, z ktorého využívame historické dáta pre clustrovú analýzu),
- IH - investičný horizont (budúce obdobie, na ktorom sa testuje úspešnosť modelov),
- Dáta - typ vstupných dát (denné, resp. 5-denné, t.j. týždenné výnosy),
- r_f - výnos bezrizikového aktíva,
- r_E - investorom požadovaný vstupný výnos do modelu,
- σ_{VC} - maximálna povolená volatilita akciovej zložky.

Váhové ohraničenia pre jednotlivé akcie $w_L = -2$, $w_U = 2$, definované v (3.13).

Prepočet vývoja investície

Výnos bezrizikového aktíva je k hodnote investície pripisovaný rovnomerne v každý obchodný deň. Predpokladám rovnomerné a nie zložené pripisovanie výnosov, nakoľko sa jedná len o technickú záležitosť. Pri investícií do bezkupónového dlhopisu totiž investor nadobudne uvedený výnos *YTM* v deň splatnosti. Pri grafickom vyobrazení by takto nadobudnutý výnos spôsobil nespojitosť krivky hodnoty portfólia, preto pre zjednodušenie volím rovnomerné rozloženie výnosu. Výnosy nadobudnuté z bezrizikového aktíva sú tým pádom reinvestované vždy pri rebalancovaní, t.j. napr. pri stratégii buy & hold ziskava investor výnosy iba zo sumy na začiatku vlozenej do daného aktíva). Pre účely výpočtu je r_f p.a. prepočítaný na dennú bázu.

U investície bez rebalancovania sa zhoduje výnos z investície do bezrizikového aktíva s r_f p.a. Pri viacerých rebalancovaniach sa výnos kumuluje v závislosti od počtu rebalancovaní (zjednodušene povedané - pri každom rebalancovaní sa „nanovo“ nakúpi dlhopisy).

Celková hodnota investície (NAV) v čase $i \leq t$ je zložená z hodnoty akciovej zložky (NAV_i^S) a hodnoty dlhopisov, resp. výnosu z nich získaného od posledného rebalancovania (NAV_i^B). V každom bode preváženia portfólia tak investor zmení pomer svojich prostriedkov investovaných do akciovej a do dlhopisovej (bezrizikovej) zložky, t.j. predá/nakúpi akcie a odpredá/dokúpi dlhopisy. Investuje vždy celú výšku svojho momentálneho kapitálu.¹

Keď je investičný horizont dĺžky t , počet obchodných dní za rok je n , p_{i_1} je čas posledného rebalancovania portfólia a p_{i_2} je čas najbližšie nasledujúceho rebalancovania, potom samostatná hodnota len bezrizikového aktíva v čase i , kde $p_{i_1} \leq i \leq p_{i_2} \leq t$, činí:

$$NAV_i^B = NAV_{p_{i_1}}^B \cdot \left(1 + \frac{r_f}{n} \cdot (i - p_{i_1})\right), \quad (4.1)$$

kde

$$NAV_{p_{i_1}}^B = x_{p_{i_1}} \cdot NAV_{p_{i_1}},$$

x_p - váha v bezrizikovom aktíve stanovená v čase p_{i_1} ,

r_f - výnos p.a. z bezrizikovej investície.

Hodnota sa teda vypočítava rekurentne, resp. priebežne počas zhodnocovania portfólia. Napr. v čase i pred prvým rebalancovaním je hodnota dlhopisovej zložky rovná:

$$NAV_0^B = x_0 \cdot NAV_0,$$

$$NAV_i^B = NAV_0^B \cdot \left(1 + \frac{r_f}{n} \cdot i\right),$$

x_0 - počiatočná váha v dlhopise,

NAV_0 - počiatočná investovaná suma.

¹Pre zjednodušenie predpokladám konštantné ceny dlhopisov a nezahŕňam transakčné náklady, t.j. poplatky a *spready* (rozdiel medzi nákupnou a predajnou cenou)

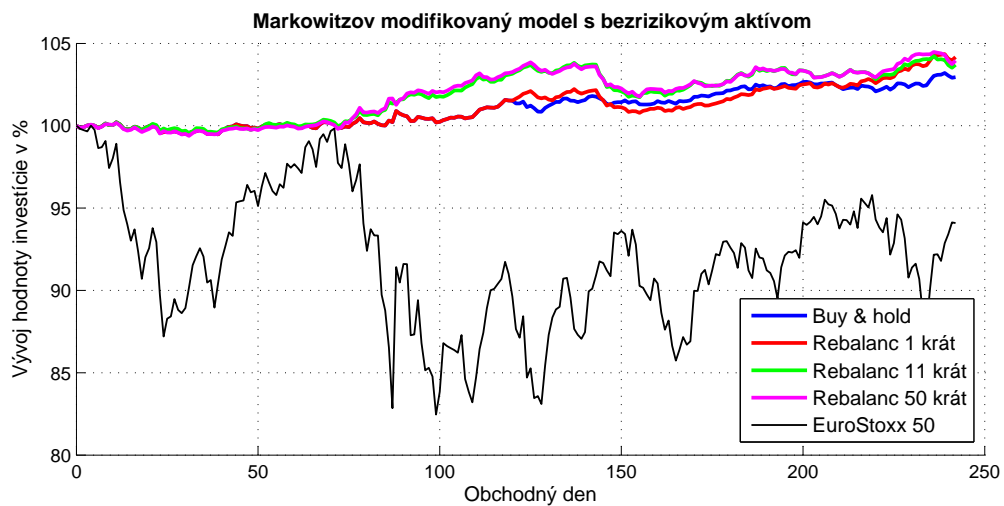
4.2 Markowitzov modifikovaný model a investovanie

4.2.1 Vplyv rôzneho vstupného požadovaného výnosu

Prípad č. 1

Model	HO	IH	Dáta	r_f (p.a.)	r_E (p.a.)	σ_{VC} (p.a.)
Markowitz	2009	2010	denné	0.7%	10%	100%

Tabuľka 4.1: Vstupy 1



Obr. 4.1: Vývoj 1-ročnej investície pre vstupný požadovaný výnos 10% p.a.

	r_P	σ_P (p.a.)	S_P	MDD_P
EuroStoxx 50	-5.91%	23.12%	-0.29	17.54%
Buy & hold	2.95%	1.95%	1.15	0.73%
1 x rebalanc	4.17%	2.03%	1.71	1.41%
11 x rebalanc	3.70%	2.13%	1.41	2.02%
50 x rebalanc	3.96%	2.16%	1.51	2.00%

Tabuľka 4.2: Výstupy 1

Ukázalo sa, že požadovaný výnos vo výške 10% je pre model na tomto horizonte zrejme nízky. Nakoľko zostrojenie dotčnice k efektívnej hranici nebolo vždy možné, algoritmus často volil ako akciovú zložku bod zodpovedajúci volatility cap. Tiež v prípade

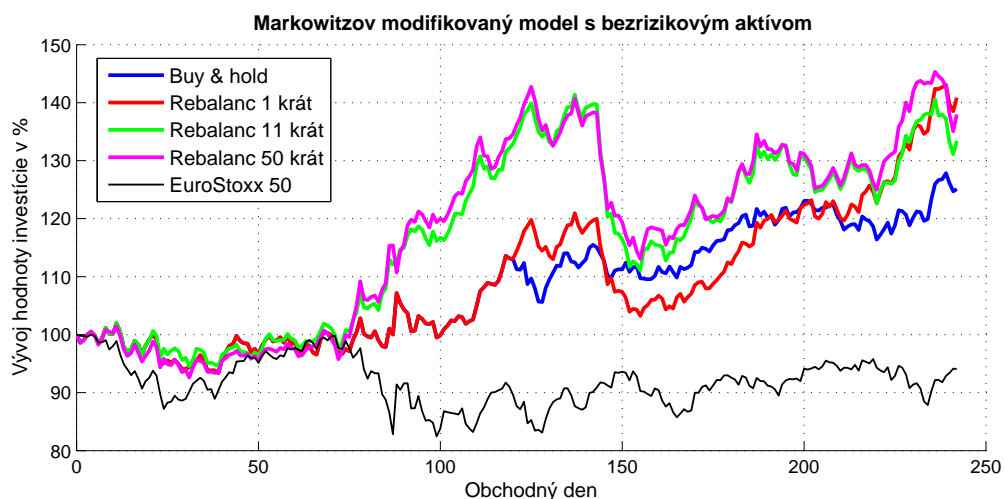
existencie dotykový bod dosahuje tak vysoký výnos, že model napokon často vkladá vysoké váhy práve do bezrizikového aktíva. Tým je vysvetlená nízka volatilita ale i nízky výnos investícií dosiahnutých modelom.

Na druhej strane všetky prípady prekonalí výnos reálneho indexu, a to dokonca s oveľa menšou volatilitou. Ukazovatele MDD a S sú takisto suverénne najhoršie pre skutočný index.

Prípad č. 2

Model	HO	IH	Dáta	r_f (p.a.)	r_E (p.a.)	σ_{VC} (p.a.)
Markowitz	2009	2010	denné	0.7%	100%	100%

Tabuľka 4.3: Vstupy 2



Obr. 4.2: Vývoj 1-ročnej investície pre vstupný požadovaný výnos 100% p.a.

	r_P	σ_P (p.a.)	S_P	MDD_P
EuroStoxx 50	-5.91%	23.12%	-0.29	17.54%
Buy & hold	25.09%	19.85%	1.23	8.41%
1 x rebalanc	40.85%	21.12%	1.90	14.64%
11 x rebalanc	33.39%	22.51%	1.45	21.42%
50 x rebalanc	37.97%	23.01%	1.62	20.79%

Tabuľka 4.4: Výstupy 2

Ľahko si možno všimnúť, že pri zvolenom vstupnom požadovanom výnose 100% sú si grafy tvarovo veľmi podobné, ako v prípade č. 1 - vývoj investície je teda takmer totožný, iba omnoho volatilnejší. Modelom zvolená akciová zložka portfólia totiž na danom investičnom horizonte zostáva rovnaká (konkrétne buď bod prislúchajúci volatilita cap alebo dotykový bod k efektívnej hranici). Rozdiel je však vo veľkosti expozície v rizikových aktívach. Tá sa zvýšením požadovaného výnosu zväčšila, a tým výrazne zvýšila volatilitu.

Pri porovnateľných hodnotách volatility ale opäť všetky 4 rebalančné Markowitzove stratégie prekonávajú zhodnotenie pôvodného indexu, a tentokrát veľmi výrazne počas celého investičného horizontu.

Zaujímavým výsledkom mierne popierajúcim logiku je tiež napr. najvyššie zhodnotenie stratégie 1 rebalancovania (realizovaného uprostred investičného horizontu). Zvyšné stratégie, ktoré častejšie modifikovali váhy počas investičného horizontu na základe priebežného vývoja, dopadli naopak horšie. Úkaz je vysvetliteľný nevyspytateľnosťou trhových výkyvov, keď sa napr. pre buy & hold ukázali byť historické dáta vstupujúce do modelu vcelku smerodajné, a s ich pomocou bol dosiahnutý priaznivý výnos, nie výrazne nižší ako pre 50-násobné prevažovanie. Po započítaní transakčných nákladov by sa tak s najväčšou pravdepodobnosťou k sebe zhodnotenia pomocou spomínaných stratégií ešte viac priblížili.

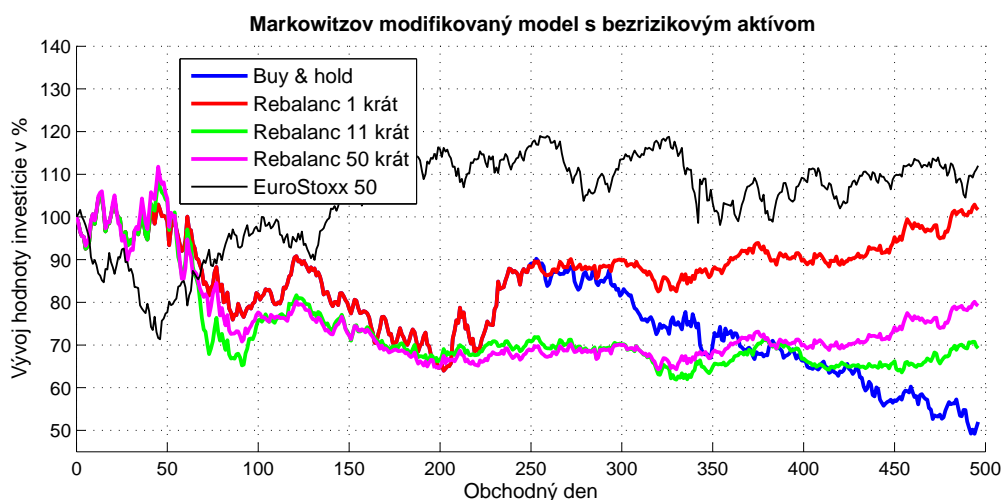
V období rokov 2009 a 2010 sa častejšie rebalancovanie neukázalo byť výrazne efektívnejšie. Vidno napr. minimálny rozdiel medzi 11-násobným a 50-násobným prevažovaním, čo značí, že na zefektívnenie procesu zrejme stačí rebalancovať na mesačnej úrovni a výsledky sú porovnateľné s mnohonásobným prevažovaním.

4.2.2 Vplyv rôznych historických období

Prípád č. 3

Model	HO	IH	Dáta	r_f (p.a.)	r_E (p.a.)	σ_{VC} (p.a.)
Markowitz	2006-2008	2009-2010	týždenné	1.2%	35% ²	100%

Tabuľka 4.5: Vstupy 3



Obr. 4.3: Vývoj investície na základe 3-ročného historického dátového obdobia

	r_P	σ_P (p.a.)	S_P	MDD_P
EuroStoxx 50	11.99%	25.87%	0.19	29.80%
Buy & hold	-48.03%	31.02%	-0.81	53.08%
1 x rebalanc	1.69%	26.71%	-0.01	38.97%
11 x rebalanc	-30.74%	25.00%	-0.66	42.99%
50 x rebalanc	-20.80%	23.78%	-0.49	42.49%

Tabuľka 4.6: Výstupy 3

²Požadovaný ročný výnos bol na základe experimentov „ad hoc” zvolený tak, aby mala investícia porovnateľnú volatilitu denných výnosov ako pozorovaný index EuroStoxx 50, a teda pri podobnej volatilitě bolo možné porovnávať ich výnosy.

Model	HO	IH	Dáta	r_f (p.a.)	r_E (p.a.)	σ_{VC} (p.a.)
Markowitz	2007-2008	2009-2010	týždenné	1.2%	35%	100%

Tabuľka 4.7: Vstupy 4



Obr. 4.4: Vývoj investície na základe 2-ročného historického dátového obdobia

	r_P	σ_P (p.a.)	S_P	MDD_P
EuroStoxx 50	11.99%	25.87%	0.19	29.80%
Buy & hold	-34.77%	26.99%	-0.69	41.28%
1 x rebalanc	-14.19%	23.79%	-0.35	36.68%
11 x rebalanc	-20.02%	21.06%	-0.53	35.58%
50 x rebalanc	-21.29%	21.20%	-0.56	33.57%

Tabuľka 4.8: Výstupy 4

Model	HO	IH	Dáta	r_f (p.a.)	r_E (p.a.)	σ_{VC} (p.a.)
Markowitz	2008	2009-2010	týždenné	1.2%	35%	100%

Tabuľka 4.9: Vstupy 5



Obr. 4.5: Vývoj investície na základe 1-ročného historického dátového obdobia

	r_P	σ_P (p.a.)	S_P	MDD_P
EuroStoxx 50	11.99%	25.87%	0.19	29.80%
Buy & hold	33.25%	22.81%	0.68	24.94%
1 x rebalanc	29.69%	22.03%	0.62	24.94%
11 x rebalanc	-14.95%	18.07%	-0.48	34.50%
50 x rebalanc	-3.79%	14.54%	-0.21	24.35%

Tabuľka 4.10: Výstupy 5

Prípad historického obdobia zvoleného ako 2006-2008 som vybral ako názornú ukážku toho, aké dôležité je správne vybrať horizont, z ktorého používame historické dáta. Na prvý pohľad sa môže javiť, že zahrnutím väčšieho počtu dát by sme mali dosiahnuť lepšiu aproximáciu trhu. V tomto prípade sa ale 3-ročné historické obdobie ukazuje byť menej vhodné a málo pružné v porovnaní napríklad s ročným historickým obdobím. Ani jedna zo stratégií sa nedokázala prispôbiť „trhovému obratu“ a neprekonal benchmark.

Tiež ide o dobrý príklad situácie, keď model zlyháva a dosahuje výrazne horšie výsledky oproti reálnemu indexu. Pre 2-ročné historické obdobie sú už straty jednotlivých

stratégií menšie, avšak stále ani jedna nedokáže výnosom prekonať EuroStoxx 50. To sa darí až na 1-ročnom období stratégiám buy & hold a 1 rebalancovaniu. Spôsobené to je už spomínanou menšou schopnosťou modelu adaptovať sa na obdobie výrazných trhových výkyvov, ktorými boli trhy postihnuté v období finančnej krízy.

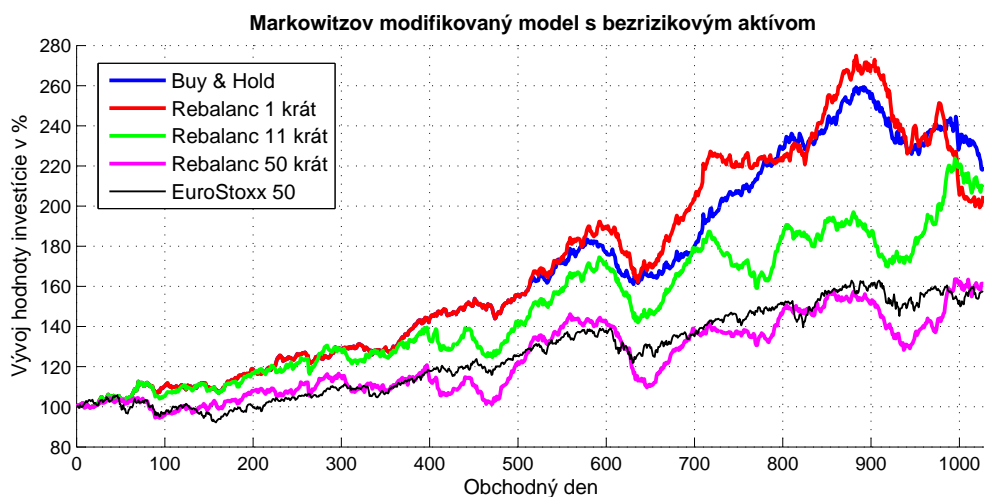
Z grafov a tabuliek tiež možno vyčítať, že so zmenšujúcim sa historickým obdobím klesá volatilita portfólia. Tento fenomén je spôsobený zvyšujúcou sa váhou bezrizikového aktíva v rámci portfólia. Pre kratšie historické obdobie sa často dotýčnica k efektívnej hranici vôbec nedala zostrojiť (viď odsek 3.1.3) a model priraďoval nižšie váhy akciovej zložke.

4.2.3 Model za „pekného počasia“

Prípad č. 6

Model	HO	IH	Dáta	r_f (p.a.)	r_E (p.a.) ³	σ_{VC} (p.a.)
Markowitz	2003	2004-2007	denné	2%	75%	100%

Tabuľka 4.11: Vstupy 6



Obr. 4.6: Vývoj investície na trendovom trhu

³Pre vstupný výnos do modelu platí to isté, čo pre výnos zo str. 34.

	r_P	σ_P (p.a.)	S_P	MDD_P
EuroStoxx 50	57.27%	14.00%	0.88	12.83%
Buy & hold	119.49%	11.27%	2.47	15.91%
1 x rebalanc	105.05%	12.38%	1.96	27.53%
11 x rebalanc	109.36%	14.05%	1.80	18.62%
50 x rebalanc	61.35%	14.36%	0.93	24.99%

Tabuľka 4.12: Výstupy 6

V predošlom prípade som sa presvedčil, že Markowitzov model môže v turbulentných obdobiach výrazne zlyhávať. Významnou súčasťou investičnej výbavy sú ale aj tzv. „trendové modely“, t.j. modely fungujúce len na trendových trhoch. Rozhodol som sa preto otestovať úspešnosť Markowitzovho modelu počas obdobia jednoznačného rastového trendu rokov 2003-2007.

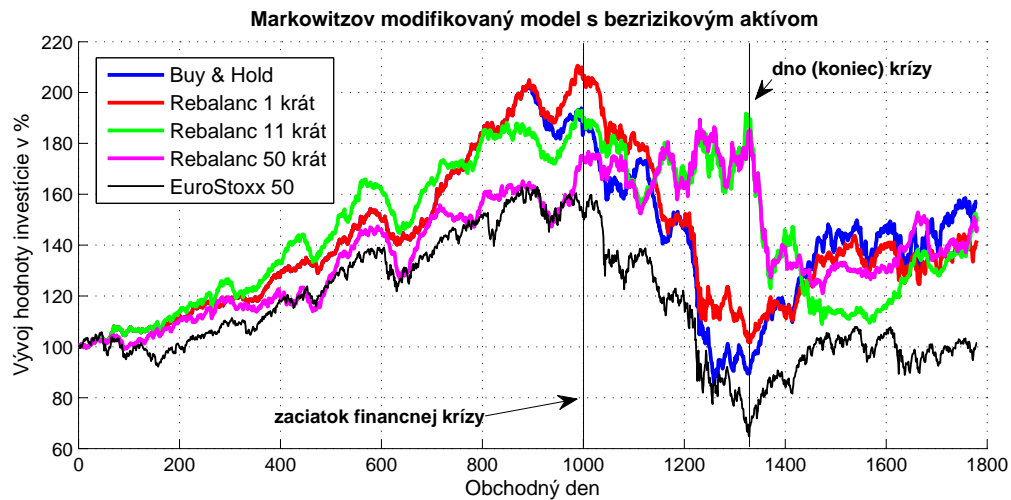
Z výsledkov vidno, že na trendovom trhu dokáže model pri porovnateľnej výške volatility výrazne prekonať výnosnosť indexu. Potvrdila sa tiež anomália najnižšieho zhodnotenia v prípade 50-násobného rebalancovania a najvyššieho pre stratégiu buy & hold. Jav je opäť vysvetliteľný dobrým načasovaním pre voľbu akciových váh v prípade buy & hold, a na druhej strane možno príliš častým zmenám investície v prípade 50-násobného rebalancovania.

Prípad č. 7

Pre zaujímavosť ešte uvádzam ako by vyzeralo zhodnotenie investície využitím Markowitzovho modelu založeného na denných dátach, s 1-ročným historickým oknom, počas 7 rokov:

Model	HO	IH	Dáta	r_f (p.a.)	r_E (p.a.)	σ_{VC} (p.a.)
Markowitz	2003	2004-2010	denné	3%	50%	100%

Tabuľka 4.13: Vstupy 7



Obr. 4.7: Vývoj investície počas 7-ročného horizontu

	r_P	σ_P (p.a.)	S_P	MDD_P
EuroStoxx 50	1.50%	30.43%	-0.09	60.29%
Buy & hold	57.10%	22.09%	0.51	57.82%
1 x rebalanc	41.79%	19.40%	0.38	51.68%
11 x rebalanc	51.31%	18.12%	0.54	43.61%
50 x rebalanc	47.47%	16.95%	0.52	36.11%

Tabuľka 4.14: Výstupy 7

V tomto prípade je veľmi zaujímavé sledovať správanie sa modelu. Po vypuknutí krízy sa logicky najviac prepadla stratégia bez rebalancovania, prispôbená niekoľko rokov starým dátam. Naopak najlepšie obstáli čerstvo pred krízou rebalancované portfóliá (stratégie 11-násobných a 50-násobných rebalancovaní). Model teda čiastočne zohľadnil trhovú situáciu a dokázal zabrániť prvotnému výraznému prepadu. Ten napokon ale aj tak prišiel, v momente opätovného trhového obratu k rastu.

Je takisto pozoruhodné, že stratégie častého rebalancovania dokázali kolaps finančných trhov úplne „odignorovať“ a udržali si stabilnú výkonnosť aj počas pádu ekonomík. Problém prišiel až počas zvratu trhového vývoja smerom k rastu, ktorý naopak spôsobil dokonca približne 40% pokles uvedených 11- a 50-násobných rebalancných stratégií. To sa dá opäť pripísať slabšej schopnosti modelu prispôsobiť sa náhlemu zvratu, ktorý však, ako vidno z vyššie uvedeného príkladu, model v niektorých prípadoch zvláda.

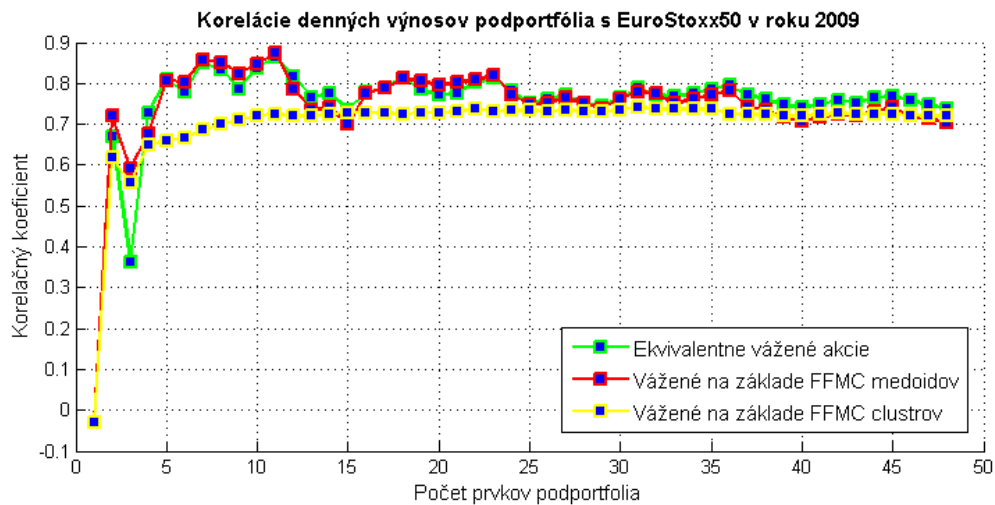
Nepopierateľným výsledkom je ale vo všetkých prípadoch dosiahnuté výrazné zhodnotenie investície a vysoká nadhodnota oproti indexu pri nižších hodnotách volatility.

4.3 Tvorba indexového podportfólia

4.3.1 Clustrová analýza a EuroStoxx 50

	HO	IH ⁴	Dáta
Partitioning around medoids	2009	2009	denné

Tabuľka 4.15: Vstupy 1



Obr. 4.8: Korelácia EuroStoxx 50 s navoleným podportfóliom pre rôzne počty clustrov, v prípade ekvivalentne navážených akcií a akcií navážených na základe FFMC. Vstupné dáta pre clustrovú analýzu, ako aj obdobie počas ktorého boli sledované korelácie, sú z 1.1.2009-31.12.2009

Ako som už spomenul pri ukážke fungovania metódy v časti 3.2.1, už pre podportfólio zložené z 5 akcií je korelácia jeho denných výnosov s reálnym indexom na úrovni 0.8, teda značne vysoká. Koreláciu som sa pokúsil ešte zväčšiť pomocou naváženia akcií v rámci podportfólia na základe ich aktuálnej FFMC (teda priblížiť sa reálnemu naváženiu indexu). Ako vidno z grafu (Obr. 4.8), zmena vo vážení spôsobila len minoritné zmeny vo výslednej korelácií. Tento rozdiel nepokladám za signifikantný.

Podportfólio vážené na základe FFMC celkových clustrov dokonca korelovalo o niečo horšie. Na druhej strane, oproti prvým dvom váženiam, je rast korelačného koeficientu oveľa výraznejšie blízky monotónnemu priebehu.

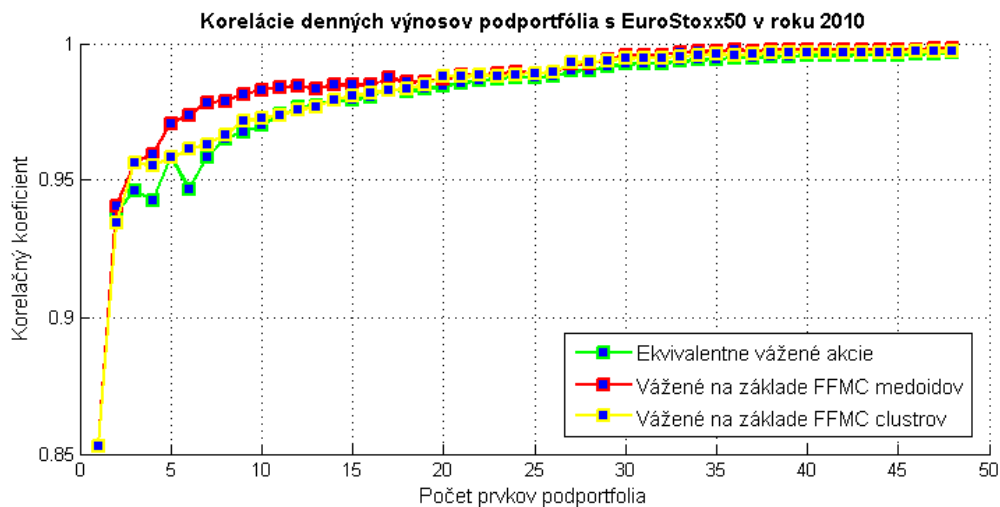
⁴Pre lepšiu zrozumiteľnosť opakujem, že pri clustrovej analýze „HO” predstavuje obdobie z ktorého máme zozbierané dáta a na základe ktorého vykonávame analýzu. Následne „IH” označuje obdobie, počas ktorého sú pozorované konkrétne dosiahnuté výsledky.

	HO	IH	Dáta
Partitioning around medoids	2009	2010	denné

Tabuľka 4.16: Vstupy 2

Rok 2010 sa vyznačoval silnou koreláciou (Obr. 4.9) vývoja cien jednotlivých akciových titulov navzájom, čo možno spozorovať aj na grafe (je treba si všimnúť, že korelačný koeficient pre portfólio zložené z 1 jedinej akcie začína na hodnote $\rho = 0.85$, resp. $\rho = 0.94$ pre 2 akcie!).

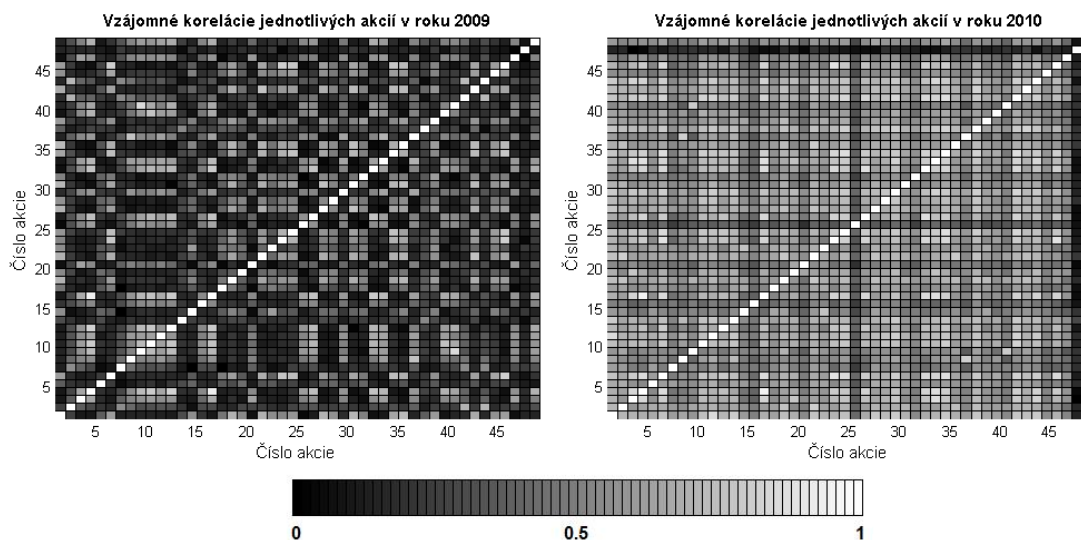
V dôsledku dlhovej krízy eurozóny viac ovplyvňovali vývoj európskeho akciového trhu fundamentálne makroekonomické dáta oproti výsledkom či hospodáreniu jednotlivých spoločností. Korelácia výnosov podportfólia s reálnym indexom je veľmi výrazná, napr. portfólio zložené z tak nízkeho počet akcií ako 5 dosahuje koreláciu vyše 0.95, teda temer identický vývoj portfólia a indexu. Pre investora zainteresovaného do indexovej investície preto v takomto období rozhodne má zmysel uvažovať nad výberom podportfólia v záujme značnej redukcie transakčných nákladov.



Obr. 4.9: Korelácia EuroStoxx 50 s navoleným podportfóliom pre rôzne počty clustrov, v prípade ekvivalentne navážených akcií a akcií navážených na základe FFMC. Vstupné dáta pre clustrovú analýzu, ako aj obdobie počas ktorého boli sledované korelácie, sú z 1.1.2010-10.12.2010

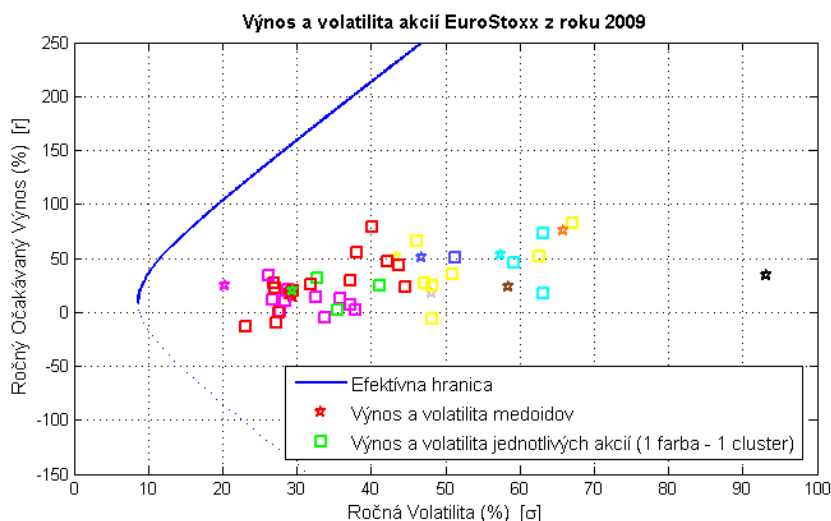
Rozdiel medzi vážením na základe FFMC, či už celkových clustrov, alebo jednotlivých akcií, a ekvivalentným vážením je opäť minimálny.

4.3.2 Štruktúra dát



Obr. 4.10: Korelačné matice výnosov akcií v EuroStoxx 50

Korelačné matice na obrázkoch (Obr. 4.10) predstavujú grafické vyobrazenie korelácií medzi jednotlivými akciami (t.j. korelačné koeficienty), pričom platí: čím tmavšia farba, tým menšia korelácia, a naopak, čím svetlejšia farba, tým výraznejšia závislosť. Obrázky opäť potvrdzujú hypotézu, že rok 2010 sa niesol v znamení masívneho spoločného vývoja akcií. Na porovnanie, rok 2009 priniesol oveľa väčšiu variabilitu, čo sa vývoja jednotlivých akcií týka.



Obr. 4.11: Akcie zatriedené do 10 clustrov spolu s ich medoidmi. Analýza bola vykonaná na denných výnosoch akcií v roku 2009 a jej výsledok bol použitý v časti 4.3.3

Obr. 4.11 vyobrazuje výnos a volatilitu jednotlivých akcií v roku 2009, rovnako ako Obr. 3.1. Znázorňuje však aj výstup clustrovej analýzy pre počet 10 clustrov. Medoidy (reprezentatívne prvky) sú znázornené pentagramom a akcie prislúchajúce do clustra obdĺžnikom tej istej farby. Z grafu možno pozorovať segmentáciu akcií podľa výnosu a volatility.

Nakoľko graf vyobrazuje celkový ročný výnos a volatilitu akcií (vypočítaných ako súčty denných hodnôt definovaných v (3.1), a v (3.2)), a segmentácia pomocou clustrovej analýzy je vykonávaná na základe korelácií medzi dennými výnosmi akcií - akcie na grafe nemusia byť lineárne separovateľné. Rovnako nemusia byť „rovnaké farby pri rovnakých farbách” práve kvôli faktu, že graf nezobrazuje segmentáciu tak, ako ju vykonávala clustrová analýza. Napriek tomu je vidno, že celkový výnos a denné výnosy spolu súvisia a na grafe sa vytvorili dobre pozorovateľné regióny.

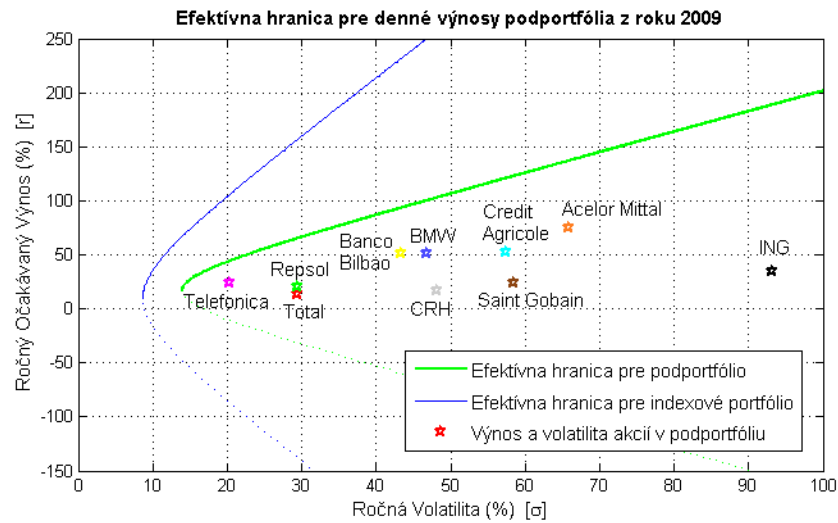
Cluster	Akcie			
1	Total	Louis Vuitton	Phillips	Unilever
	Carrefour	Danone	Vivendi	Vinci
	Air Liquide	Unibail	Anheuser Bosch	L'Oreal
	Alstom	France Telecom	Schneider Electric	
2	Repsol	Siemens	Bayer	Generali
3	Telefonica	Enel	Iberdrola	ENI
	Telecom Italia	Deutsche Telekom	SAP	E.ON
	Münchener Rückver	GDF Suez	Sanofi Aventis	RWE
4	Banco Bilbao	Santander	Intesa	Nokia
	Deutsche Bank	Deutsche Börse	Unicredit	Allianz
5	Credit Agricole	BNP Paribas	Societe Generale	Axa
6	BMW	Daimler		
7	ING			
8	Acelor Mittal			
9	Saint Gobain			
10	CRH			

Tabuľka 4.17: Clustre korešpondujúce s Obr. 4.11 a s odsekom 4.3.3

4.3.3 Podportfólio v krátkodobom horizonte

Ako testovacie podportfólio som na základe vyššie uvedených analýz vykonaných pre rok 2009 zvolil portfólio zložené z 10 akcií. Výstupom z PAM pre denné dáta výnosov roku 2009 a pre daný počet 10 clustrov (korelácie podportfólia pre rôzne počty clustrov v roku 2009, viď Obr. 4.8) boli tieto medoidy:

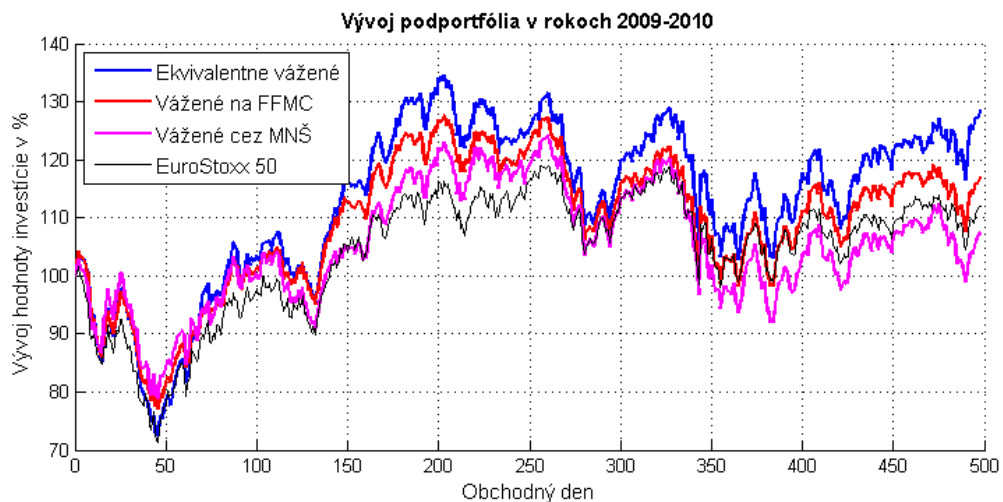
Total, Telefonica, Banco Bilbao, ING, Acelor Mittal, BMW, Saint Gobain, Repsol, Credit Agricole a CRH.



Obr. 4.12: Podportfólio 10 akcií a jeho efektívna hranica

Na otestovanie vierohodnosti skonštruovaného podportfólia som vypočítal koreláciu denných výnosov podportfólia v sledovanom období rokov 2009-2010 (ρ_{eq} pre ekvivalentne navážené akcie, ρ_{ff} pre akcie vážené na základe FFMC jednotlivých akcií a ρ_{LS} pre váhy získané metódou najmenších štvorcov, pozri (3.18)) a tiež graficky vyobrazil jeho vývoj v porovnaní so sledovaným indexom:

$$\rho_{eq} = 0.88, \quad \rho_{ff} = 0.9, \quad \rho_{LS} = 0.95.$$

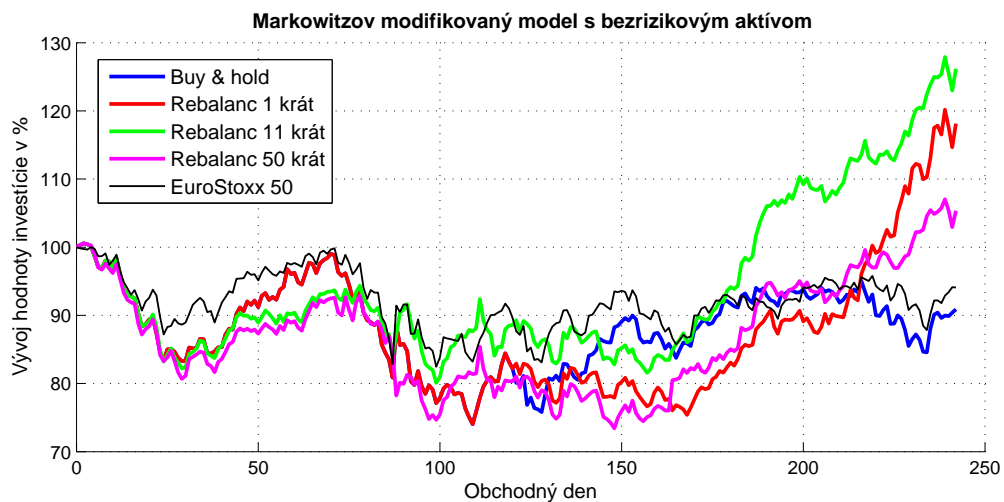


Obr. 4.13: Podportfólio 10 akcií a jeho vývoj v porovnaní s EuroStoxx 50

Ako posledné som testoval investičné stratégie odvodené v sekcii (3.1) aplikované na podportfólio. Konkrétne pre parametre zvolené nasledovne:

Model	HO	IH	Dáta	r_f (p.a.)	r_E (p.a.)	σ_{VC} (p.a.)
Markowitz	2009	2010	denné	0.7%	50%	100%

Tabuľka 4.18: Vstupy 1



Obr. 4.14: Vývoj investície

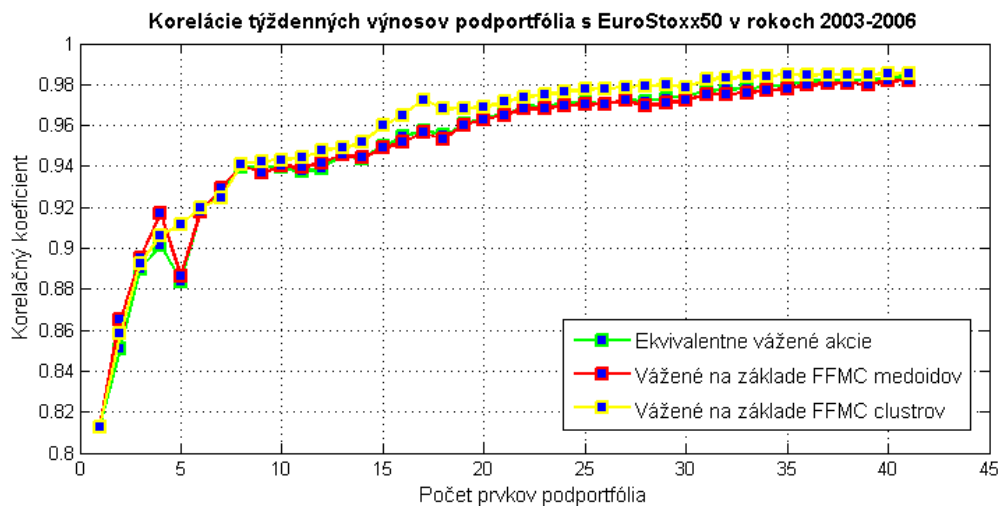
	r_P	σ_P (p.a.)	S_P	MDD_P
EuroStoxx 50	-5.91%	23.12%	-0.29	17.54%
Buy & hold	-9.11%	24.95%	-0.39	26.38%
1 x rebalanc	18.14%	25.95%	0.67	26.38%
11 x rebalanc	26.18%	22.43%	1.14	20.34%
50 x rebalanc	5.34%	23.93%	0.19	26.98%

Tabuľka 4.19: Výstupy 1

Ak porovnáme výsledné hodnoty s Tabuľkou 4.4 a grafom na Obr. 4.2 (t.j. s investíciou do všetkých zložiek indexu), možno ľahko nahliadnuť, že podportfólio poskytuje vo všetkých prípadoch rebalancovania horší pomer výnosu a volatility, ako pôvodné, kompletne portfólio. Zredukovaním množiny akcií na päťtinový počet teda čiastočne utrpela schopnosť modelu vytvárať nadhodnotu nad index (stratou variability investičných možností). Nepochybnou výhodou ale zostáva ušetrenie na transakčných nákladoch.

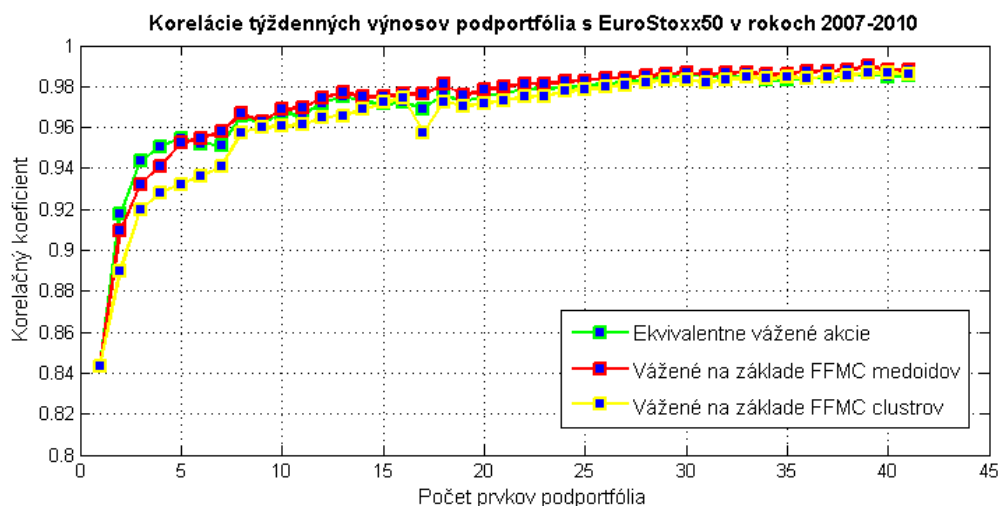
4.3.4 Podportfólio v strednodobom horizonte

Clustrová analýza je vykonávaná na základe týždenných dát z rokov 2003-2006. Výsledky analýzy sú prezentované na horizonte rokov 2003-2010.



Obr. 4.15: Korelácia EuroStoxx 50 s navoleným podportfóliom v rokoch 2003-2006 pre rôzne počty clustrov

Korelácie týždenných výnosov sú už pre malý počet medoidov veľmi vysoké, zvolením počtu 10 akcií sa v obidvoch pozorovaných obdobiach blížime až k hodnote $\rho = 0.95$.



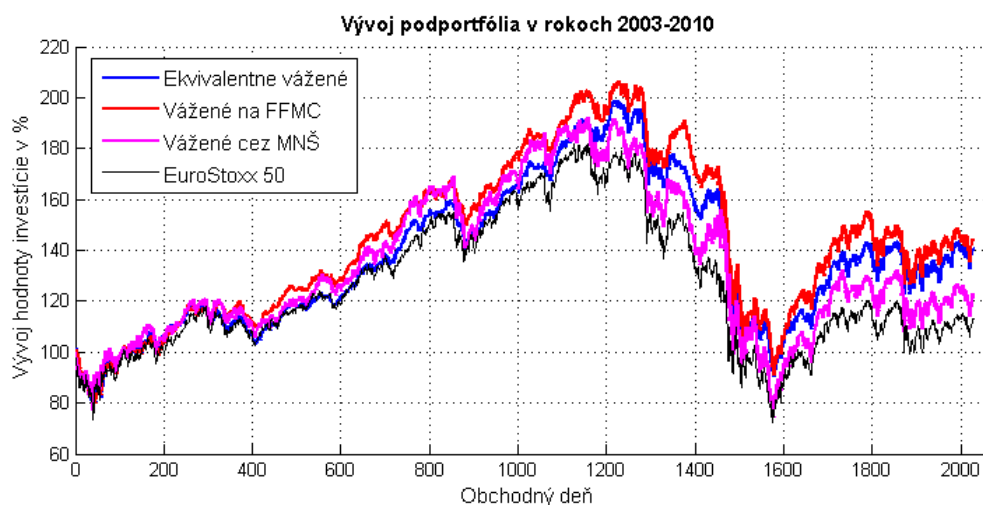
Obr. 4.16: Korelácia EuroStoxx 50 s navoleným podportfóliom v rokoch 2007-2010 pre rôzne počty clustrov

Zloženie podportfólia pre 10 clustrov:

Eni, SAP, France Telecom, Air Liquide, Bayer, Münchener Rückver, Santander, Nokia, Axa a Anheuser Bosch.

Denné (ρ^D) / týždenné (ρ^T) výnosy podportfólia a ich korelácie s výnosmi EuroStoxx 50:

$$\begin{aligned} \rho_{eq}^D &= 0.61, & \rho_{ff}^D &= 0.43, & \rho_{LS}^D &= 0.9, \\ \rho_{eq}^T &= 0.95, & \rho_{ff}^T &= 0.95, & \rho_{LS}^T &= 0.94. \end{aligned}$$



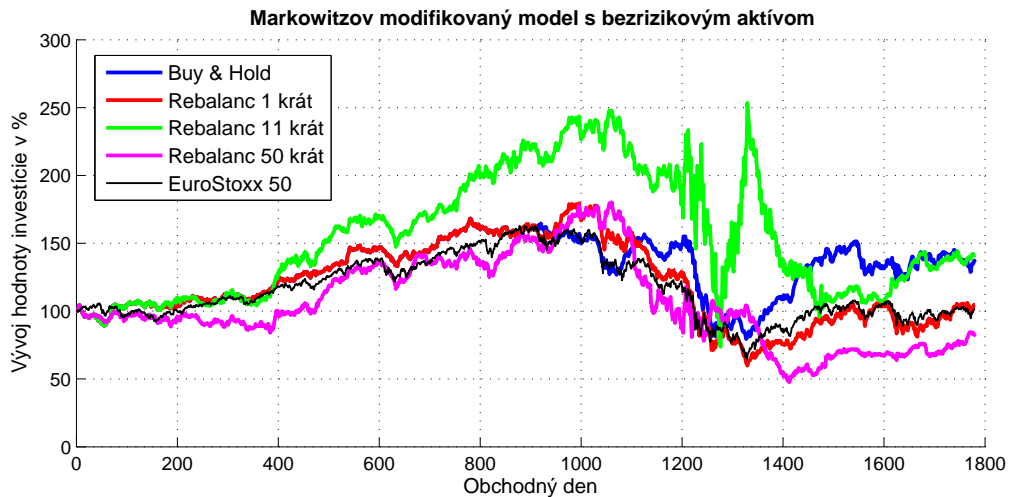
Obr. 4.17: Podportfólio 10 akcií a jeho vývoj v porovnaní s EuroStoxx 50

Korelácia denných výnosov ilustruje úspešnosť metódy najmenších štvorcov pri replikácii indexu. Ostatné 2 stratégie korelovali na dennej báze nevýrazne, nakoľko sa jedná o veľmi dlhé obdobie - avšak na báze týždennej dosiahli dobré výsledky.

Investičné stratégie odvodené v sekcii 3.1 aplikované na podportfólio:

Model	HO	IH	Dáta	r_f (p.a.)	r_E (p.a.)	σ_{VC} (p.a.)
Markowitz	2003	2004-2010	denné	3%	50%	100%

Tabuľka 4.20: Vstupy 2



Obr. 4.18: Vývoj investície pozostávajúcej z 10 akcií v rokoch 2004-2010

	r_P	σ_P (p.a.)	S_P	MDD_P
EuroStoxx 50	1.50%	30.43%	-0.09	60.29%
Buy & hold	36.27%	24.71%	0.25	52.81%
1 x rebalanc	4.59%	30.88%	-0.06	66.69%
11 x rebalanc	41.32%	56.24%	0.13	70.31%
50 x rebalanc	-16.78%	36.75%	-0.20	73.44%

Tabuľka 4.21: Výstupy 2

Markowitzova investičná stratégia aplikovaná na podportfólio tentokrát dosiahla značne horšie výsledky (oproti kompletnému portfóliu, viď Tabuľka 4.14 a graf na Obr. 4.7) - vo výsledku nižšie výnosy a oveľa volatilnejšia investícia. V tomto prípade sa teda ako lepšia voľba ukazuje zrejme možnosť investovať do všetkých zložiek indexu. Zvýšená volatilita, najmä počas pádu trhov v roku 2008 je spôsobená nízkym počtom akcií v podportfóliu, ktoré sa tak stalo veľmi senzitivným na trhové výkyvy (úloha ohraničenia váh bola často neprístupná, a preto ohraničenie nebolo realizované). 50-násobné rebalancovanie tiež dokonca zhoršilo výkonnosť podportfólia.

Záver

V práci som sa venoval analýze investičných príležitostí v akciovom indexe EuroStoxx 50. Ukázal som, ako možno využiť Markowitzov model portfólia, clustrovú analýzu a optimalizáciu metódou najmenších štvorcov, na vytvorenie portfólia, ktoré dokáže prekonať výnosnosť indexu i zredukovať investorove transakčné náklady.

Poukázal som na nedostatky Markowitzovho modelu s bezrizikovým aktívom a navrhol ich možné riešenia. Model som upravil tak, aby bol použiteľný za každej trhovej situácie a umožnil znížiť riziko volatility investície, ktorej je investor vystavený. Zistil som, že model výrazne závisí od druhu vstupných dát, ako aj od aktuálneho stavu trhov, za ktorého je použitý. Na základe historických dát a testov sa ukazuje, že mnou upravený model dokáže stabilne prekonávať výkonnosť indexu najmä na trendových trhoch. Modifikovaný model sa tiež javí byť najefektívnejší pre stratégie nezahŕňajúce rebalancovanie. Použitie modelu počas období výrazných burzových prepádov, ako aj zahrnutie niekoľkonásobného rebalancovania investície, sa zdá byť menej vhodné.

Pomocou clustrovej analýzy a metódy najmenších štvorcov sa mi podarilo skonštruovať podportfólio akcií, ktoré aj pri výrazne zredukovanom počte zložiek oproti originálnemu indexu výrazne koreluje so svojím benchmarkom a úspešne ho replikuje. Skúmaním techniky clustrovania pre rôzne počty clustrov som zistil, že už pri počte 5 clustrov takto zredukované portfólio vysoko koreluje s pôvodným indexom. Použitím metódy partitioning around medoids som našiel reprezentatívnu množinu akcií, ktorých súhrnný vývoj najlepšie aproximuje vývoj indexu EuroStoxx 50.

Nakoľko počas rozsiahleho investičného horizontu sa zjednodušenie v podobe ekvivalentného naváženia akcií v rámci portfólia ukázalo byť nepostačujúcim pre potreby replikácie indexu, rozhodol som sa váhy optimalizovať. Optimalizáciu som vykonal prostredníctvom minimalizácie odchýliek výnosov podportfólia od výnosov indexu, využitím metódy najmenších štvorcov. Takto zostavené podportfólio sa ukázalo byť výborným replikátorom benchmarku aj počas dlhého investičného obdobia.

Pre zdokonalenie modelu je v budúcnosti možné zapracovať na získaní vierohodnejších odhadov pre očakávané výnosy a riziko vstupujúcich do modelu, ako aj na prispôbení modelu pre kumulatívny vývoj investície. Stratégie zahŕňajúce rebalancovanie je zrejme nutné ďalej modifikovať, resp. zvoliť pre tento typ investovania vhodnejší model.

Literatúra

- [Dose and Cincotti, 2005] Dose, C. and Cincotti, S. (2005). Clustering of financial time series with application to index and enhanced-index tracking portfolio. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 355(1):145–151.
- [Elton et al., 2010] Elton, E. J., Gruber, M. J., Brown, S. J., and Goetzmann, W. (2010). *Modern portfolio theory and investment analysis*. John Wiley & Sons, New Jersey. ISBN 0-470-38832-3.
- [Kaufman and Rousseeuw, 1990] Kaufman, L. and Rousseeuw, P. (1990). *Finding Groups in Data: An Introduction to Cluster Analysis*. John Wiley & Sons, New Jersey. ISBN 0-471-73578-7.
- [Markowitz, 1952] Markowitz, H. (1952). Portfolio selection. *The Journal of Finance*, 7(1):77–91.
- [Melicherčík et al., 2005] Melicherčík, I., Olšarová, L., and Úradníček, V. (2005). *Kapitoly z finančnej matematiky*. Epos. ISBN 80-8057-651-3.
- [Merton, 1970] Merton, R. (1970). An analytic derivation of the efficient portfolio frontier. (Working paper 493-70). Massachusetts Institute of Technology.
- [Sharpe, 1994] Sharpe, W. F. (1994). The sharpe ratio. *The Journal of Portfolio Management*, 21(1):49–58.
- [Vecer, 2006] Vecer, J. (2006). Maximum drawdown and directional trading. *Risk*, 19(12):88–92.
- [Š. Horáček, 2010] Š. Horáček (2010). Hodnotenie výkonnosti portfólia. Master’s thesis, Univerzita Komenského, Bratislava.

Príloha A: Prehľad komponentov indexu Eurostoxx 50

2009

Číslo	Akcia	r_K	r_S	σ	Váha
1	Total	9.78	13.66	29.44	-0.65
2	Siemens	16.94	24.18	41.22	0.34
3	Telefonica	24.73	24.18	20.40	0.74
4	Banco Santander	75.00	66.54	46.06	0.89
5	Sanofi Aventis	17.93	20.64	28.73	0.22
6	BNP Paribas	70.95	73.08	63.18	0.15
7	Bayer	30.63	32.09	32.79	0.41
8	E.ON	6.76	12.94	35.80	-0.14
9	Daimler	45.32	50.35	51.23	-0.07
10	Allianz	17.14	26.93	47.22	-0.53
11	Eni	9.20	14.12	32.50	0.01
12	Deutsche Bank	83.51	82.84	67.06	0.09
13	GDF Suez	-10.36	-5.26	33.68	-0.03
14	Unilever	26.46	27.06	26.84	0.53
15	SAP	36.31	34.44	26.20	0.55
16	Banco Bilbao	51.19	50.75	43.38	-0.30
17	Anheuser Bosch	104.04	79.45	40.13	0.41
18	Louis Vuitton	61.94	55.42	38.02	0.40
19	France Telecom	-14.77	-13.29	23.13	-0.28
20	Deutsche Telekom	-2.56	1.27	27.73	-0.42
21	Schneider Electric	46.95	47.37	42.18	0.27
22	Danone	-3.95	-0.23	27.50	-0.58
23	Societe Generale	31.98	45.30	59.18	0.09
24	ING	-9.21	34.14	93.29	-0.22
25	Nokia	-16.18	-5.96	48.13	-0.34
26	Unicredit	38.46	52.01	62.60	0.13
27	Air Liquide	23.01	25.75	31.79	-0.08

28	Vivendi	-12.97	-10.18	27.19	-0.45
29	Enel	-8.16	-2.09	35.57	-0.45
30	Acelor Mittal	71.35	75.49	65.93	0.41
31	Carrefour	13.80	17.16	29.16	-0.03
32	Intesa SanPaolo	25.50	35.77	51.01	0.15
33	Iberdrola	6.72	10.57	28.47	0.16
34	AXA	-2.88	16.94	63.15	-0.14
35	Royal Phillips	40.49	43.55	43.65	0.04
36	RWE	8.46	11.72	26.70	0.03
37	Vinci	25.82	29.81	37.12	0.13
38	L'Oreal	19.93	21.84	27.10	0.18
39	Münchener Rückver	0.27	7.18	37.12	-0.10
40	BMW	49.30	50.95	46.87	0.13
41	Generali	-3.68	2.56	35.48	-0.36
42	Saint Gobain	6.70	23.71	58.51	-0.25
43	Repsol	16.84	19.94	29.49	0.07
44	Unibail Rodamco	40.26	40.58	36.73	0.31
45	Credit Agricole	43.72	52.69	57.42	0.08
46	Telecom Italia	-5.22	1.87	37.96	-0.08
47	CRH	5.49	17.01	48.20	-0.02
48	Deutsche Börse	14.15	24.84	48.23	-0.21
49	Alstom	14.17	23.09	44.58	-0.21
50	BASF	-	-	-	-
-	EuroStoxx 50	16.89	19.48	27.80	-

Tabuľka 22: Zoznam akcií indexu EuroStoxx 50

Tabuľka zahŕňa prehľad výnosnosti a volatility pre jednotlivé akcie za obdobie 1.1.2009-31.12.2009. V 3. stĺpci (r_K) sa nachádza kumulovaný výnos za dané obdobie, v 4. stĺpci (r_S) súčet denných výnosov a v 5. stĺpci (σ) smerodajná odchýlka denných výnosov. Všetky hodnoty sú uvádzané v % p.a.

V 6. stĺpci sú uvedené váhy akcií v rámci portfólia vypočítané pomocou modifikovaného Markowitzovho modelu popísaného v odseku 3.1. Váhy sú počítané pre investičnú stratégiu buy & hold s nasledovnými vstupmi: denné výnosy za obdobie 1.1.2009-31.12.2009, požadovaný ročný výnos 100% p.a., volatility cap 100% p.a. a bezrizikové aktívum s výnosom 0.7% p.a. Vývoj takto zostaveného portfólia je vyobrazený na Obr. 4.2.

Príloha B: Zdrojový kód

Algoritmus rebalancovania portfólia na základe modifikovaného Markowitzovho modelu:

```
%%ALGORITMUS REBALANCOVANIA PORTFOLIA%%

%%Vstupy%%
ceny;           %ceny akcii v historickom období
ceny2;          %ceny akcii v investicnom "Out of the sample" období
volatCAP;       %hodnota Volatility Cap v % p.a.
pozadovany_rocny_vynos; %hodnota PRV v % p.a.
f;              %YTM bezrizikoveho aktiva v % p.a.
perioda;        %pocet rebalancovani
pocet;          %pocet dni po ktorých sa rebalancuje
suma;          %pociatocna investicna suma - (pociatocnych 100%)

n=size(ceny,1); %pocet dat (riadkov)
m=size(ceny,2); %pocet akcii
n2=size(ceny2,1);

f=f/(100*n);

PRV=pozadovany_rocny_vynos;

volatCAP=volatCAP/(sqrt(n-1)*100);

epsilon=0.00001;

lb=-2*ones(m,1); %ohranicenie vah
ub=2*ones(m,1); A=ones(1,m); bb=1;

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
```

```

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
vynosy=zeros(n-1,m); pocet=floor(n2/perioda); suma=100; y=[];

for k=1:perioda

    n=size(ceny,1);

    if k~=1
        if ( ( min( (pocet+(k-2)*pocet),n2 )-(1+((k-2)*pocet)) ) ) >n
            od=min( (pocet+(k-2)*pocet),n2 )-n;
        else
            od=1+(k-2)*pocet;
        end

        ceny=[ ceny( (pocet+1):n,: ) ;
              ceny2( od : min( (pocet+(k-2)*pocet),n2 ) , : ) ];
    end

    for j=1:m
        for i=1:(length(ceny)-1)
            vynosy(i,j)=(ceny(i+1,j)-ceny(i,j))/ceny(i,j);
        end
    end

    end

%% Vypocet efektivnej hranice %%

H=vynosy;
V=cov(vynosy);
n=size(H,1); %pocet dat (riadkov)
m=size(H,2); %pocet akcii
r=mean(H(:,1:m));
V=V(1:m,1:m);
V1=inv(V);
r=r(1:m)';

jedna=ones(m,1);
AA=jedna'*V1*r;
BB=r'*V1*r;
CC=jedna'*V1*jedna;
DD=BB*CC-AA*AA;

```

```

g=(1/DD)*( BB*(V1*jedna)-AA*(V1*r) );
h=(1/DD)*( CC*(V1*r)-AA*(V1*jedna) );

c=g'*V*g;
b=h'*V*g + g'*V*h;
a=h'*V*h;

%% Vynos prisluchajuci hodnote volatility cap %%
D2=(b^2)-(4*a*(c-volatCAP^2));
r2=(-b+sqrt(D2))/(2*a);

Aeq=[A; r'];

if (f<(-b/(2*a))) %zvoli za vstupne r do modelu dotycnicovy bod

    D=(b^2)-(4*a*c);
    sigma0=sqrt( ( ( D^2)/( 16*(a^4)*
                    ( f +( b/(2*a) ) )^2))) -D/(4*(a^2)) ) *a );
    sigma02=sigma0^2;
    smernica=(sigma0/a)/(sqrt(((sigma02)-c)/a +((b^2)/(4*a^2)) ) );
    r0=smernica*sigma0 + f;
    rp=r0;
    volat=sigma0;

    %%%quadprog%%%

    %%chceme aby sucet jednotlivych rE dal r0 = r-dotycnicoveho
                                                                    bodu
    beq=[bb; r0];
    [Vahy,~,ExitFlag] = quadprog(V, [], [], [], Aeq,beq,lb,ub);

    %%%quadprog%%%

    if (ExitFlag==-2)
        Vahy=g+h*rp;
    end

else
    rp=r2; %zvoli za vstupne r vynos prisluchajuci max volatilitu
    beq=[bb; rp];

```



```

[Vahy,~,ExitFlag] = quadprog(V,[],[],[],Aeq,beq,lb,ub);

if (ExitFlag==-2)
    Vahy=g+h*rp;
end

end

%% Vypocet vahy v bezrizikovom aktive %%

VahaF=(rp - PRV/(n*100))/(rp-f);

w=Vahy;

%% Modelovanie vyvoja portfolia %%

kapital=suma*w';

if k==1
    kusy=kapital./ceny2(1,:);
else
    kusy=kapital./ceny2((k-1)*pocet,:);
end

if k==perioda
    y=[y; ceny2( (1+(k-1)*pocet): n2 , : )*kusy'];
else
    y=[y; ceny2( (1+(k-1)*pocet): (k*pocet) , : )*kusy'];
end

index=length(y);

if k~=perioda
    suma=y(index);
end

end

x=[0:1:(n2-1)];

```

```

komplement=(1-VahaF);

if komplement<epsilon
    komplement=0;
end

dlhopis=suma*VahaF;

    for i=(index_stary+1):index
        dlhopis=dlhopis+VahaF*suma*f;
        z(i)=dlhopis + komplement*y(i);
    end

    indexZ=length(z);
    if k~=perioda
        suma=z(indexZ);
    end

    index_stary=index;

end

x=[0:1:(n2-1)];

hold on
    plot(x,z,'r','LineWidth',2);
hold on

Zhodnotenie=z(index)-100;

for i=1:(length(z)-1)
    INVESTICNEvynosy(i)=(z(i+1)-z(i))/z(i);
end

Volatilita=var(INVESTICNEvynosy);
MDD=maxDD(z);

```