

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE

Fakulta Matematiky, Fyziky a Informatiky



Minimálny polynóm matice

Bakalárska práca

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
Fakulta Matematiky, Fyziky a Informatiky

Minimálny polynóm matice

Bakalárska práca

Študijný program: Ekonomická a finančná matematika
Študijný odbor: 9.1.9 aplikovaná matematika
Školiace pracovisko: Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky
Školiteľ: RNDr. Dušan Krajčovič, CSc.
Evidenčné číslo: a9821cb2-cb2e-43b0-b192-7636eb57acb1



Univerzita Komenského v Bratislave
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

ZADANIE ZÁVEREČNEJ PRÁCE

Meno a priezvisko študenta: Jozef Vlársky
Študijný program: ekonomická a finančná matematika (Jednoodborové štúdium, bakalársky I. st., denná forma)
Študijný odbor: 9.1.9. aplikovaná matematika
Typ záverečnej práce: bakalárska
Jazyk záverečnej práce: slovenský

Názov : Minimálny polynóm matice
Cieľ : Nájsť metódy výpočtu minimálneho polynómu a zostrojiť program na výpočet pre reálne matice ľubovoľného rozmeru.
Literatúra : [1] Meyer C.D. Matrix analysis and applied linear algebra
Anotácia : Nájsť rôzne metódy výpočtu minimálneho polynómu reálnej matice, zostaviť program na základe jednej vybranej metódy.

Vedúci : RNDr. Dušan Krajčovič, CSc.

Dátum zadania: 04.11.2010

Dátum schválenia: 08.11.2010

.....
doc. RNDr. Margaréta Halická, CSc.
garant študijného programu

.....
študent

.....
vedúci práce

Dátum potvrdenia finálnej verzie práce, súhlas s jej odovzdaním (vrátane spôsobu sprístupnenia)

2.1.2011
vedúci práce

Čestne prehlasujem, že som svoju bakalársku prácu vypracoval samostatne s použitím uvedenej literatúry.

V Bratislave, 1.6.2011

Chcel by som sa poďakovať vedúcemu mojej bakalárskej práce RNDr. Dušanovi Krajčovičovi, CSc. za jeho pozitívny a priateľský prístup a taktiež za jeho rady a trpezlivosť.

Abstrakt

VLÁRSKY, Jozef: *Minimálny polynóm matice* [bakalárska práca]. Univerzita Komenského v Bratislave. Fakulta matematiky, fyziky a informatiky. Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky. Vedúci bakalárskej práce: RNDr. Dušan Krajčovič, CSc. Stupeň odbornej kvalifikácie: Bakalár v študijnom programe Ekonomická a finančná matematika. Bratislava: FMFI UK, 2011. 43 s.

Bakalárska práca obsahuje vzpracovanie problematiky minimálneho polynómu a metód na jeho vypočítanie. Úvodná kapitola obsahuje definície vlastných čísel. Ďalšia kapitola popisuje minimálny polynóm diagonalizovateľných, nilpotentných a iných matíc. A prezentuje príklady na výpočet minimálneho polynómu. V závere práce je vytvorený program v matematickom softvéri MATLAB, ktorý hľadá minimálny polynóm reálnych matíc.

Kľúčové slová: vlastné čísla, charakteristický polynóm, minimálny polynóm, diagonalizovateľné matice, nilpotentné matice

Abstract

VLÁRSKY, Jozef: *The Minimal Polynomial of a Matrix* [Bachelor's thesis]. Comenius University in Bratislava. Faculty of Mathematics, Physics and Informatics. Department of Applied Mathematics and Statistics. Supervisor: RNDr. Dušan Krajčovič, CSc. Degree of qualification: Bachelor in the study programme Economic and Financial Mathematics. Bratislava: FMFI UK, 2011. 43 p.

The Bachelor's thesis includes drawing up the issue of minimal polynomial and its computing methods. The introductory chapter contains the definitions of eigen values. The next chapter describes minimal polynomial of diagonalizable, nilpotent and other kinds of matrices. This chapter also shows examples of computing minimal polynomial. Last chapter contains programme created in mathematical software MATLAB, which finds the minimal polynomial of some real square matrix.

Key words: eigen values, characteristic polynomial, minimal polynomial, diagonalizable matrices, nilpotent matrices

Obsah

Úvod	8
1 Vlastné čísla a vlastné vektory	9
2 Minimálny polynóm a niektoré aplikácie	14
2.1 Úvod do diagonálnych matíc	14
2.2 Diagonalizovateľné matice	15
2.2.1 Príklady diagonalizácie nad číselnými poľami $\mathbb{R}$ a $\mathbb{C}$	16
2.3 Rôzne vlastné hodnoty a diagonalizácia	18
2.4 Minimálny polynóm	20
2.5 Simultánna diagonalizácia	26
2.6 Nilpotentné zobrazenia(matice)	27
2.7 Výpočet minimálneho polynómu	30
3 Program na výpočet minimálneho polynómu	35
Záver	42
Literatúra	43

Úvod

Minimálny polynóm matice zohráva veľmi dôležitú úlohu najmä v teórii matíc. Má širokú škálu aplikácií pri rozklade vektorových priestorov či pri diagonalizácii matice. No nájsť minimálny polynóm danej matice nie je až také ľahké. Algoritmy na jeho výpočet sa študovali už dávno.

Cieľom mojej bakalárskej práce je priblížiť pojem minimálny polynóm. Ukázať rôzne metódy výpočtu minimálneho polynómu reálnej matice a zostaviť program na výpočet minimálneho polynómu na základe jednej vybranej metódy.

V prvej kapitole sme si zadefinovali vlastné čísla, ktoré potrebujeme na základné pochopenie minimálneho polynómu.

V druhej kapitole sa pozrieme na špeciálne druhy matíc (nilpotentné, diagonalizovateľné...) z hľadiska ich minimálnych polynómov. Ukážeme si rôzne príklady ako získať minimálny polynóm.

A nakoniec v tretej kapitole zostavíme program v matematickom softvéri, ktorý počíta minimálny polynóm ľubovoľnej štvorcovej reálnej matice.

Kapitola 1

Vlastné čísla a vlastné vektory

Definícia 1.1. Hovoríme, že skalár $\lambda \in F$, kde F je číselné pole, je *charakteristická* alebo tiež *vlastná hodnota* matice $A : V(F) \rightarrow V(F)$, ak existuje vektor $\mathbf{v} (\mathbf{v} \in V(F), \mathbf{v} \neq \mathbf{0})$, pre ktorý platí $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$. V prípade vektorových priestorov nad číselnými polami, ako napríklad $\mathbb{R}$ alebo $\mathbb{C}$, zvykneme hovoriť o *vlastnom čísle* matice.

Definícia 1.2. Hovoríme, že $\mathbf{0} \neq \mathbf{v} \in V(\mathbb{C})$ je *vlastný* alebo tiež *charakteristický vektor* matice $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, ak existuje skalár $\lambda \in \mathbb{C}$, pre ktorý platí $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$.

Spojením týchto definícií získavame tvrdenie, že $\mathbf{v}$ je *vlastný vektor prislúchajúci vlastnému číslu* λ , resp. že λ je *vlastné číslo prislúchajúce k vlastnému vektoru* $\mathbf{v}$.

Definícia 1.3. Vlastným číslom, resp. vlastným vektorom štvorcovej matice $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ nazývame vlastné číslo, resp. vlastný vektor lineárneho zobrazenia $\mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ dané predpisom $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$. Vlastné číslo $\lambda \in \mathbb{C}$ a k nemu prislúchajúci vlastný vektor $\mathbf{0} \neq \mathbf{v} \in \mathbb{C}^n$ matice A sú tak viazané vzťahom $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$.

Ešte si všimnime, že vlastné číslo prislúchajúce k danému vlastnému vektoru je určené jednoznačne, zatiaľ čo k danému vlastnému číslu môže prislúchať viacero vlastných vektorov ako si ukážeme na nasledujúcom príklade hľadania vlastných čísel a vektorov matice.

Nech

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Z predchádzajúcich kapitol vieme, že vektor $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ sa zobrazí podľa $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$ na $A\mathbf{x} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ platí:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

respektíve:

$$\begin{aligned} y_1 &= a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \dots + a_{n1}x_n \\ y_2 &= a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{n2}x_n \\ &\vdots \\ y_n &= a_{1n}x_1 + a_{2n}x_2 + \dots + a_{nn}x_n \end{aligned}$$

Z vyššie uvedených definícií vieme, že nenulový vektor $\mathbf{x}$ bude teda vlastným vektorom matice A , ak existuje $\lambda \in \mathbb{C}$ také, že

$$A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x},$$

teda $y_i = \lambda x_i$, pre $i = 1, \dots, n$, potom $\mathbf{x}$ je netriviálnym riešením systému

$$\begin{aligned} \lambda x_1 &= a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \dots + a_{n1}x_n & (a_{11} - \lambda)x_1 + a_{21}x_2 + \dots + a_{n1}x_n &= 0 \\ \lambda x_2 &= a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{n2}x_n & \Rightarrow a_{12}x_1 + (a_{22} - \lambda)x_2 + \dots + a_{n2}x_n &= 0 \\ &\vdots & &\vdots \\ \lambda x_n &= a_{1n}x_1 + a_{2n}x_2 + \dots + a_{nn}x_n & a_{1n}x_1 + a_{2n}x_2 + \dots + (a_{nn} - \lambda)x_n &= 0 \end{aligned}$$

Toto netriviálne riešenie sústavy existuje práve vtedy, keď:

$$\begin{vmatrix} (a_{11} - \lambda) & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & (a_{22} - \lambda) & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & (a_{nn} - \lambda) \end{vmatrix} = 0,$$

a teda skalár $\lambda \in \mathbb{C}$ je vlastným číslom matice A práve vtedy keď determinant matice A je rovný 0.

Ku každému vlastnému číslu λ matice A existuje aspoň jeden vlastný vektor.

Veta 1.4. Číslo $\lambda \in \mathbb{C}$ je vlastným číslom matice A (stupňa n) nad poľom $\mathbb{C}$ práve vtedy, keď matica $(A - \lambda I)$ je singulárna, čiže $h(A) < n$.

Dôkaz. " $\Rightarrow$ " Nech λ je vlastné číslo matice A . Potom existuje vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{V}(\mathbb{C})$ taký, že

$$A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}.$$

Vynásobením pravej strany rovnosti jednotkovou maticou dostávame

$$A\mathbf{x} = \lambda I\mathbf{x},$$

čo sa dá upraviť na tvar

$$(A - \lambda I)\mathbf{x} = \mathbf{0}.$$

Z čoho vyplýva, že matica $(A - \lambda I)$ je singulárna.

" $\Leftarrow$ " Ak matica $(A - \lambda I)$ je singulárna, potom existuje nenulový vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{V}(\mathbb{C})$ taký, že

$$(A - \lambda I)\mathbf{x} = \mathbf{0}.$$

Z toho už vidíme, že $A\mathbf{x} = \lambda I\mathbf{x}$ alebo $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ a teda λ je vlastným číslom matice A . $\square$

Veta 1.5. Nech $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ sú navzájom rôzne vlastné čísla matice $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$. Potom k nim prislúchajúce vlastné vektory $v_1, \dots, v_k$ sú lineárne nezávislé.

Dôkaz. Predpokladajme, že $v_1, \dots, v_k$ sú lineárne závislé. Potom existuje $j \leq k$ také, že vektor v_j je lineárnou kombináciou predchádzajúcich; zvoľme najmenšie také j . Keďže $v_1 \neq \mathbf{0}$, $j \geq 2$ a žiaden z vektorov $v_1, \dots, v_{j-1}$ nie je lineárnou kombináciou predchádzajúcich, sú to lineárne nezávislé vektory. Pre nejaké skaláry $c_1, \dots, c_{j-1}$ platí $v_j = c_1 v_1 + \dots + c_{j-1} v_{j-1}$. Nakoľko $v_j \neq \mathbf{0}$ aspoň jeden z týchto skalárov je $\neq 0$. Vektor Av_j si vyjadríme dvoma spôsobmi:

$$Av_j = c_1 Av_1 + \dots + c_{j-1} Av_{j-1} = c_1 \lambda_1 v_1 + \dots + c_{j-1} \lambda_{j-1} v_{j-1},$$

$$Av_j = \lambda_j v_j = \lambda_j (c_1 v_1 + \dots + c_{j-1} v_{j-1}) = c_1 \lambda_j v_1 + \dots + c_{j-1} \lambda_j v_{j-1}.$$

V dôsledku toho

$$c_1(\lambda_1 - \lambda_j)v_1 + \dots + c_{j-1}(\lambda_{j-1} - \lambda_j)v_{j-1} = \mathbf{0},$$

a keďže $\lambda_i \neq \lambda_j$ pre všetky $i \leq j-1$, aspoň jeden z koeficientov $c_i(\lambda_i - \lambda_j)$ je rôzny od nuly. To je však spor s nezávislosťou vektorov $v_1, \dots, v_{j-1}$. $\square$

Definícia 1.6. Štvorcovú maticu A stupňa n nazývame *symetrickou*, ak $A=A^T$, resp. $a_{ij} = a_{ji} \forall i, j \in \{1, \dots, n\}$.

Veta 1.7. Vlastné čísla symetrickej matice nad poľom $\mathbb{R}$ sú reálne čísla.

Dôkaz. Nech A je symetrická matica typu $n \times n$ nad poľom $\mathbb{R}$, $\mathbf{x}$ je jej vlastný vektor prislúchajúci vlastnému číslu λ , čiže platí

$$A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}.$$

Predpokladajme, že vlastná hodnota λ je komplexné číslo, tak

$$\lambda = a + ib.$$

Kedže λ je komplexné číslo, potom k nej prislúchajúci vlastný vektor je komplexná n -tica, teda

$$\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) + i(y_1, \dots, y_n)$$

Označme $\mathbf{x}_1 \equiv (x_1, \dots, x_n)$ a $\mathbf{x}_2 \equiv (y_1, \dots, y_n)$

Potom

$$A\mathbf{x} = A\mathbf{x}_1 + Ai\mathbf{x}_2 = a\mathbf{x}_1 + ib\mathbf{x}_1 + ia\mathbf{x}_2 + i^2b\mathbf{x}_2$$

To znamená, že

$$A\mathbf{x}_1 = a\mathbf{x}_1 - b\mathbf{x}_2$$

$$Ai\mathbf{x}_2 = ia\mathbf{x}_2 + ib\mathbf{x}_1$$

Vynásobením prvej rovnosti zľava $\mathbf{x}_2^T$ a druhej rovnosti zľava $\mathbf{x}_1^T$ dostávame

$$\mathbf{x}_2^T A\mathbf{x}_1 = a\mathbf{x}_2^T \mathbf{x}_1 - b\mathbf{x}_2^T \mathbf{x}_2$$

$$\mathbf{x}_1^T A\mathbf{x}_2 = a\mathbf{x}_1^T \mathbf{x}_2 + b\mathbf{x}_1^T \mathbf{x}_1$$

Kedže ľavé strany oboch rovníc sa rovnajú, tak aj pravé strany sa musia rovnať, preto

$$a\mathbf{x}_2^T \mathbf{x}_1 - b\mathbf{x}_2^T \mathbf{x}_2 = a\mathbf{x}_1^T \mathbf{x}_2 + b\mathbf{x}_1^T \mathbf{x}_1$$

Výrazy $a\mathbf{x}_2^T \mathbf{x}_1$, $a\mathbf{x}_1^T \mathbf{x}_2$ sa rovnajú, preto dostávame vzťah

$$-b\mathbf{x}_2^T \mathbf{x}_2 = b\mathbf{x}_1^T \mathbf{x}_1$$

z čoho $\mathbf{x}_2^T \mathbf{x}_2$, $\mathbf{x}_1^T \mathbf{x}_1$ sú nezáporné čísla a aspoň jedno z nich je nenulové, teda kladné, pretože vlastný vektor $\mathbf{x}$ je nenulový.

Z toho vyplýva, že $b = 0$, takže $\lambda = a \in \mathbb{R}$. □

Definícia 1.8. Maticu $A - \lambda I$ nazveme charakteristickou maticou matice $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, jej charakteristickým polynómom nazveme determinant charakteristickej matice, t. j. polynóm

$$\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix}$$

v premennej λ s koeficientami z poľa $\mathbb{C}$. Charakteristický polynóm je zrejme polynóm stupňa n s koeficientom $(-1)^n$ pri najvyššej mocnine λ^n . *Charakteristickou rovnicou* matice A nazývame rovnicu $\chi_A(\lambda) = 0$, t.j.

$$\det(A - \lambda I) = 0.$$

Veta 1.9. Majme $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$. Potom skalár $\lambda \in \mathbb{C}$ bude vlastným číslom matice A práve vtedy, keď

$$\det(A - \lambda I) = 0,$$

t.j., keď λ vyhovuje charakteristickej rovnici matice A .

Dôkaz. Skalár λ je vlastným číslom matice A vtedy, keď $Av = \lambda v$ pre nejaký vektor $0 \neq v \in \mathbb{C}^n$. Teda práve vtedy, keď homogénna sústava lineárnych rovníc $(A - \lambda I)v = 0$ má aspoň jedno nenulové riešenie $v \in \mathbb{C}^n$. To bude vtedy, keď matica $A - \lambda I$ je singulárna, teda $\det(A - \lambda I) = 0$. $\square$

Kapitola 2

Minimálny polynóm a niektoré aplikácie

2.1 Úvod do diagonálnych matíc

Najjednoduchšie výpočty realizujeme s diagonálnymi maticami. Ich súčet a súčin počítame tak, že sčítame resp. vynásobíme jej diagonálne prvky. Napríklad

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \times 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 \times 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \times 3 \end{pmatrix}.$$

alebo

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+3 & 0 & 0 \\ 0 & 2+3 & 0 \\ 0 & 0 & 2+3 \end{pmatrix}.$$

Pri počítaní s diagonálnymi maticami sa zbavujeme všetkých komplikácií, ktoré môžu nastať pri počítaní s inými maticami. Ak matica A nie je diagonálna, ale vieme ju previesť na diagonálnu, nech $D = PAP^{-1}$ je diagonálna matica, potom $A = P^{-1}DP$ a $A^k = P^{-1}D^kP$ pre všetky $k \in \mathbb{Z}$, čo znamená, že stačí umocniť znova diagonálnu maticu. V mnoho aplikáciach lineárnej algebry (napr. dynamické systémy, diferenciálne rovnice, Markovove reťazce, rekurzívne postupnosti) sa často stretávame s mocninami matíc.

Napríklad k -ta mocnina diagonálnej 3×3 matice: Nech

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, A^k = \begin{pmatrix} 2^k & 0 & 0 \\ 0 & 2^k & 0 \\ 0 & 0 & 2^k \end{pmatrix}$$

Chceli by sme vedieť kedy je daná matica diagonálna a kedy nie je. Existuje špeciálny polynóm, tzv. minimálny polynóm (vo všeobecnosti sa nerovná charakteristickému polynómu), ktorý nám presne povie kedy je daná matica diagonalizovateľná.

2.2 Diagonalizovateľné matice

Definícia 2.2.1. Hovoríme, že matica $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ je diagonalizovateľná ak existuje regulárna matica P taká, že $P^{-1}AP = D$, kde D je diagonálna. Nech $\varphi : V \rightarrow V$ je lineárne zobrazenie a nech A_α je jeho maticová reprezentácia v báze α vektorového priestoru V , potom lineárne zobrazenie φ resp. matica A_α je diagonalizovateľná práve vtedy ak existuje taká báza β z V , že matica A_β je diagonálna.

Veta 2.2.2 *Lineárne zobrazenie $\varphi : V \rightarrow V$ je diagonalizovateľné iba ak báza priestoru V je tvorená vlastnými vektormi matice A .*

Dôkaz. Nech $\beta = \{e_1, \dots, e_n\}$ je bázou V , v ktorej A_β je diagonálna:

$$A_\beta = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_n \end{pmatrix},$$

teda $Ae_i = a_i e_i$ pre všetky i , preto každé e_i je vlastný vektor matice A . □

Báza vlastných vektorov sa nazýva *vlastná báza*.

Príkladom matice, ktorá nie je diagonalizovateľná je matica

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

z $\mathbb{R}^{2 \times 2}$. Jediný vlastný vektor je napríklad vektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Ďalší vlastný vektor neexistuje, preto nemôžeme vytvoriť bázu v $\mathbb{R}^2$, preto matica

$$A \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

na $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ nie je diagonalizovateľná.

Aj keď matice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

majú rovnaký charakteristický polynóm a matica B je diagonalizovateľná, z toho vyplýva, že na základe charakteristického polynómu nemôžeme usudzovať, či je matica diagonalizovateľná.

Zhrnieme vyššie uvedené údaje:

1. Existuje spôsob, na základe ktorého vieme určiť, či je lineárne zobrazenie resp. jeho maticová reprezentácia diagonalizovateľná bez toho aby sme sa počítali jej vlastné vektory.
2. Ak F je uzavreté, tak skoro všetky zobrazenia na konečnorozmernom F -vektorovom priestore sú diagonalizovateľné.
3. Existuje polynóm, ktorý nazývame minimálny polynóm lineárneho zobrazenia alebo jeho matice, na základe ktorého vieme povedať, či je lineárne zobrazenie resp. jeho maticová reprezentácia diagonalizovateľná.
4. Môže sa stať, že môžeme súčasne diagonalizovať dve lineárne zobrazenia resp. ich matice, ak tieto zobrazenia *komutujú*. To znamená, že $AB = BA$.

Rozoberieme príklady, diagonalizácie matice nad $\mathbb{R}$ a $\mathbb{C}$.

2.2.1 Príklady diagonalizácie nad číselnými poľami $\mathbb{R}$ a $\mathbb{C}$

Príklad 2.2.1.1 Nech

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

je matica otočenia o 90 stupňov na $\mathbb{R}^2$. Táto matica nie je diagonalizovateľná pretože nemá žiadne vlastné vektory: otočenie v $\mathbb{R}^2$ nezobrazí žiadny nenulový vektor na svoj skalárny násobok. Geometrické pozorovanie doplníme algebraickým výpočtom: charakteristický polynóm $\lambda^2 + 1$ matice A nemá žiadne korene v $\mathbb{R}$ a neexistujú žiadne reálne vlastné čísla a teda ani vlastné vektory v $\mathbb{R}^2$. Avšak, polynóm $\lambda^2 + 1$ má korene $\pm i$ v $\mathbb{C}$ a teda existujú vlastné vektory matice A v priestore $\mathbb{C}^2$. Tieto vlastné vektory prislúchajúce vlastným číslam i a $-i$ sú

$$\begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix},$$

v uvedenom poradí. V báze

$$\beta = \left\{ \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix} \right\},$$

matica A je

$$A_\beta = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$$

kde prvá diagonálna zložka je vlastné číslo prvého báзовého vektora a druhá diagonálna zložka je vlastné číslo prislúchajúce druhému báзовému vektoru. Aby sme sa dostali k reprezentácii novej matice zobrazenia, potrebujeme vyjadrenie pôvodnej bázy v novej báze. Máme

$$\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} = PAP^{-1}, \text{ kde dostaneme } P = \begin{pmatrix} -i/2 & 1/2 \\ i/2 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Matica P transformuje maticu A na maticu $\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$ v $\mathbb{C}^2$. Všimnime si, že stĺpce

matice $P^{-1} = \begin{pmatrix} i & -i \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ sú tvorené vlastnými vektormi matice A v štandardnej báze $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ v $\mathbb{C}_2$.

Príklad 2.2.1.2 Každá matica $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ spĺňajúca $A = A^\top$ môže byť diagonalizovateľná na $\mathbb{R}$, toto je príznačný výsledok, ktorý sa volá reálna spektrálna veta. (Každá veta, ktorá nám dáva dostatok informácií o diagonalizácii, sa volá spektrálna veta, lebo vlastné čísla matice sú jej spektrum.)

Príklad 2.2.1.3 Každá matica $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ spĺňajúca $A\bar{A}^\top = \bar{A}^\top A$ je diagonalizovateľná v $\mathbb{C}^{n \times n}$, kde $\bar{A}$ je matica komplexne združená k matici A . Nazývame ju komplexná centrálna veta. V skutočnosti je táto veta ešte silnejšia: diagonalizácia matice $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ je ekvivalentná vzťahu: $A\bar{A}^\top = \bar{A}^\top A$.¹ Keď A je reálna, teda $\bar{A}^\top = A^\top$ potom táto veta má slabšie predpoklady než reálna spektrálna veta (povedať, že A a $A^\top$ komutujú je slabšie ako keď povieme, že $A = A^\top$). Nakoniec, ak aplikujeme komplexnú spektrálnu vetu na $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, zistíme, že A je diagonalizovateľná nad $\mathbb{C}$, ale pretože pre túto maticu neplatí reálna spektrálna veta, a preto táto matica nie je diagonalizovateľná nad $\mathbb{R}$ (výpočtom sa presvedčíme, že matica A nemá žiadne reálne vlastné čísla).

¹Komplexná štvorcová matica A spĺňajúca $A\bar{A}^\top = \bar{A}^\top A$ sa nazýva *normálna*.

2.3 Rôzne vlastné hodnoty a diagonalizácia

Ak lineárne zobrazenie nad F je diagonalizovateľné, tak všetky jeho vlastné čísla ležia na F , a diagonálna matica, ktorá reprezentuje toto lineárne zobrazenie, má tieto vlastné čísla na diagonále. (Vid' dôkaz vety 2.2.2) Opačne to ale neplatí: ak sú všetky vlastné čísla matice z F , tak to ešte nezaručuje, že matica je diagonalizovateľná. Napríklad matica $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, má jediné vlastné číslo $= 1$. Je to "viacnásobná vlastná hodnota" v zmysle, že charakteristický polynóm $(\lambda - 1)^2$ má číslo 1 ako jediný dvojnásobný koreň. Ak pridáme podmienku, že všetky vlastné čísla matice ležia v F a zároveň sú rôznymi koreňmi charakteristického polynómu, tak potom sa vieme vyjadriť o diagonalizácii matice A .

Preformulujeme Vetu 1.6 do maticovej reči:

Lemma 2.3.1. Vlastné vektory prislúchajúce rôznym vlastným číslam sú lineárne nezávislé. Presnejšie, ak $\varphi : V \rightarrow V$ je lineárne zobrazenie a $v_1, \dots, v_r$ sú vlastné vektory lineárneho zobrazenia φ resp. matice A , ktorá je jeho reprezentáciou s rôznymi vlastnými číslami $\lambda_1, \dots, \lambda_r$, tak vektory v_i sú lineárne nezávislé.

Dôkaz. Indukcia. Prípad $r = 1$ je zrejmý. Ak $r > 1$, potom predpokladajme lineárny vzťah,

$$(2.3.1) \quad c_1 v_1 + \dots + c_{r-1} v_{r-1} + c_r v_r = 0$$

kde $c_i \in F$. Aplikujme maticu A na obidve strany: z v_i sa stane $A v_i = \lambda_i v_i$, teda

$$(2.3.2) \quad c_1 \lambda_1 v_1 + \dots + c_{r-1} \lambda_{r-1} v_{r-1} + c_r \lambda_r v_r = 0.$$

Vynásobme lineárny vzťah (3.1) λ_r :

$$(2.3.3) \quad c_1 \lambda_r v_1 + \dots + c_{r-1} \lambda_r v_{r-1} + c_r \lambda_r v_r = 0.$$

Odčítaním (3.3) od (3.2) dostávame:

$$c_1(\lambda_1 - \lambda_r)v_1 + \dots + c_{r-1}(\lambda_{r-1} - \lambda_r)v_{r-1} = 0.$$

Teraz máme lineárny vzťah pre $r - 1$ vlastných vektorov, ktoré prináležia rôznym vlastným číslam. Indukciou zisťujeme, že všetky koeficienty sú nuly: $c_i(\lambda_i - \lambda_r) = 0$ pre $i = 1, 2, \dots, r - 1$. Keďže $\lambda_1, \dots, \lambda_{r-1}, \lambda_r$ sú rôzne, $(\lambda_i - \lambda_r) \neq 0$ pre $i = 1, 2, \dots, r - 1$. Tak $c_i = 0$ pre $i = 1, 2, \dots, r - 1$. Teraz sa náš lineárny vzťah (3.1) upravil na $c_r v_r = 0$. Vektor v_r nie je 0 (vlastné vektory sú vždy nenulové), preto $c_r = 0$.

□

Veta 2.3.2. *Lineárne zobrazenie, resp. jeho maticová reprezentácia, ktorého charakteristický polynóm sa dá zapísať ako súčin lineárnych činiteľov s rôznymi vlastnými číslami, je diagonalizovateľné.*

Dôkaz. Predpoklad: Máme n rôznych vlastných hodnôt v F , kde $n = \dim V$. Nazveme ich $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Nech e_i je vlastný vektor, ktorý prináleží vlastnej hodnote λ_i . Vlastné hodnoty sú rôzne a preto z Lemmy 3.1 vyplýva, že e_i sú lineárne nezávislé a keďže týchto vektorov je práve n , tak vektory $e_i, i = 1, \dots, n$ sú bázou V , získavame vlastnú bázu lineárneho zobrazenia a jeho diagonalizovateľnosť. □

Príklad 2.3.3. Matica $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ má charakteristický polynóm $(\lambda - 1)^2$, ktorý má lineárne zložky, ale jeho korene nie sú rôzne, preto tu Veta 3.2 neplatí a teda táto matica nie je diagonalizovateľná v $\mathbb{R}^{2 \times 2}$.

Príklad 2.3.4. Matica $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ má charakteristický polynóm $\lambda^2 - \lambda - 1$, ktorý má dva rôzne reálne korene, a preto je matica A diagonalizovateľná v $\mathbb{R}^{2 \times 2}$.

Existuje veľa diagonálnych matíc, ktorých diagonálne prvky sa opakujú (najjednoduchší príklad je I_n), a ktorých charakteristické polynómy majú viacnásobné (opakujúce sa) korene. Kritérium vo Vete 3.2 nikdy neobjaví diagonalizovateľnosť zobrazenia resp. matice s viacnásobnými vlastnými hodnotami. Vo 4. sekcii uvidíme spôsob ako odhaliť diagonalizovateľnosť pomocou polynómu, odlišného od charakteristického polynómu, ktorý poskytuje nevyhnutné aj postačujúce kritéria diagonalizácie.

Ako často sa stáva, že charakteristický polynóm má rôzne korene bez ohľadu nato, či ležia alebo neležia v F ? Zoberme si 2×2 matice: charakteristický polynóm $\lambda^2 + b\lambda + c$ má viacnásobné korene vtedy a len vtedy, keď $b^2 - 4c = 0$. Náhodne vybraný kvadratický polynóm väčšinou spĺňa $b^2 - 4c \neq 0$. A preto väčšina 2×2 matíc má charakteristický polynóm s rôznymi koreňmi. Po zovšeobecnení môžeme tvrdiť, že väčšina $n \times n$ matíc má charakteristický polynóm s rôznymi koreňmi. V komplexných číslach to znamená, že náhodná komplexná $n \times n$ matica má s takmer určitou rôzne vlastné čísla a preto (keďže vlastné čísla ležia v $\mathbb{C}$) Veta 3.2 hovorí, že náhodná $n \times n$ komplexná matica je diagonalizovateľná. Preto diagonalizovateľnosť je skôr pravidlo než výnimka nad $\mathbb{C}$.

2.4 Minimálny polynóm

Z Cayley-Hamiltonovej vety existuje nenulový normovaný polynóm, ktorý nuluje charakteristický polynóm lineárneho zobrazenia φ , resp. jeho maticovej reprezentácii.

Definícia 2.4.1. Nenulový normovaný polynóm $m_A(\lambda) \in F[\lambda]$, kde $F[\lambda]$ sú polynómy v premennej λ s koeficientami z poľa F , ktorý nuluje lineárne zobrazenie φ resp. jeho maticovú reprezentáciu A a má najmenší stupeň sa volá minimálny polynóm zobrazenia φ v $F[\lambda]$.

Matica $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ má minimálny polynóm $f(\lambda)$ najmenšieho stupňa, to znamená, že $f(A)$ je nulová matica.

Príklad 2.4.2. Majme matice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Tieto matice majú rovnaký charakteristický polynóm $(\lambda - 1)^2$, ale matica A má minimálny polynóm $\lambda - 1$ pričom matica B má minimálny polynóm $(\lambda - 1)^2$. Žiadny lineárny polynóm nemôže vynulovať maticu B , a to implikuje, že matica B je podobná skalárnej diagonálnej matici.

Veta 2.4.3. *Minimálny polynóm lineárneho zobrazenia $\varphi : V \rightarrow V$ je rovnaký pre všetky matice, ktoré reprezentujú toto zobrazenie.*

Dôkaz. Výberom bázy z V dostaneme maticovú reprezentáciu A lineárneho zobrazenia φ , potom pre každý polynóm $f(\lambda) \in F[\lambda]$ maticová reprezentácia zobrazenia $f(\varphi)$ bude $f(A)$. A z tohto dôvodu $f(\varphi) = O$ vtedy a len vtedy keď $f(A) = O$. Použitím f najmenšieho stupňa v jednej alebo druhej rovnici dostaneme, že φ a A majú rovnaký minimálny polynóm v $F[\lambda]$.

□

Zvyčajne budeme označovať minimálny polynóm matice A ako $m_A(\lambda)$.

Veta 2.4.4. *Nech $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ je maticová reprezentácia lineárneho zobrazenia φ . Polynóm $f(\lambda)$ splňa $f(A) = O$ práve vtedy, keď $m_A(\lambda) \mid f(\lambda)$.*

Dôkaz. Predpokladajme $m_A(\lambda) \nmid f(\lambda)$, teda $f(\lambda) = m_A(\lambda)g(\lambda)$. Odkiaľ substitúciou A za λ dostávame $f(A) = m_A(A)g(A) = O \cdot g(A) = O$.

Obrátene, predpokladajme $f(A) = O$, použitím polynomickeho delenia dostaneme $f(\lambda) = m_A(\lambda)q(\lambda) + r(\lambda)$ kde $q(\lambda), r(\lambda) \in F[\lambda]$ a $r(\lambda) = 0$ alebo $\deg r < \deg m_A$. Substitúciou A za λ v polynómoch dostaneme:

$$O = m_A(A)q(A) + r(A) = r(A).$$

A buď $r(\lambda) = 0$ alebo $r(\lambda)$ má stupeň menší ako je stupeň minimálneho polynómu A . Musí to byť prvý prípad, t.j. keď $r(\lambda) = 0$. A preto $f(\lambda) = m_A(\lambda)q(\lambda)$, teda $m_A(\lambda) \mid f(\lambda)$. □

Ak dva normované polynómy, sú obidva najmenšieho stupňa a nulujúce A , tak Veta 2.4.4. ukazuje, že sa navzájom delia, a preto musia byť rovnaké (keďže sú obidva normované). Minimálny polynóm matice nemusí byť ireducibilný (napr. $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ má minimálny polynóm $(\lambda - 1)^2$).

Príklad 2.4.5. Nech V je priamy súčet podpriestorov, t.j. $V = U \oplus W$. Nech $P_U : V \rightarrow V$ je projekcia na podpriestor U z rozkladu: $P(u + w) = u$. Keďže $P(u) = u$, máme $P^2(u + w) = P(u + w)$, teda $P^2 = P$. P je vynulované polynómom $\lambda^2 - \lambda = \lambda(\lambda - 1)$. Ak $\lambda^2 - \lambda$ nie je minimálny polynóm, potom podľa Vety 2.4.4 buď λ alebo $\lambda - 1$ nuluje P . Prvý prípad znamená $P = O$ ($U = 0$) a druhý prípad znamená, že $P = id_V$ (teda $U = V$). Pokiaľ U a W sú obidva nenulové, P nie je ani O ani id_V a $\lambda^2 - \lambda$ je minimálny polynóm projekcie P .

Pokiaľ všetky matice $\in \mathbb{C}^{n \times n}$ majú charakteristický polynóm stupňa n , stupeň minimálneho polynómu sa pre rôzne matice môže líšiť. Výpočet nie je tak mechanický ako pri výpočte charakteristického polynómu, keďže neexistuje univerzálna formula na výpočet minimálneho polynómu. Uvažujme maticu

$$A_\varepsilon = \begin{pmatrix} 1 + \varepsilon & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Pre $\varepsilon \neq 0$, A_ε má dve rozdielne vlastné čísla, $1 + \varepsilon$ a 1 . Preto minimálny polynóm A_ε nie je stupňa 1, preto minimálny polynóm matice A_ε musí byť rovnaký ako jej charakteristický polynóm $\lambda^2 - (2 + \varepsilon)\lambda + 1 + \varepsilon$. Avšak, ak $\varepsilon = 0$ matica A_ε je identita I_2 s minimálnym polynómom $\lambda - 1$. Ak sa zmení násobnosť vlastných hodnôt, tak sa nám aj minimálny polynóm zmení.

Na výpočet minimálneho polynómu je užitočná Veta 2.4.4. Napríklad minimálny polynóm delí charakteristický polynóm, pretože charakteristický polynóm nuluje svoju maticu.

Príklad 2.4.6. Nech

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Charakteristický polynóm je $\lambda^3 - 2\lambda^2 + \lambda = \lambda(\lambda - 1)^2$. Ak charakteristický polynóm nie je minimálny polynóm potom minimálny polynóm delí jednu z kvadratických zložiek: $\lambda(\lambda - 1)$ alebo $(\lambda - 1)^2$. Výpočty ukazujú, že $A(A - I_3) = O$, teda minimálny polynóm matice A je $\lambda(\lambda - 1) = \lambda^2 - \lambda$.

Keďže minimálny polynóm delí charakteristický polynóm, tak každý jeho koreň je vlastným číslom. Obrátene to tiež platí:

Veta 2.4.7. *Každé vlastné číslo matice je koreňom svojho minimálneho polynómu, teda minimálny a charakteristický polynóm majú rovnaké korene.*

Dôkaz. Minimálny polynóm lineárneho zobrazenia a jeho maticovej reprezentácii je rovnaký. Vyjadríme zobrazenie φ u nejakej bázy pomocou matice A v $F^{n \times n}$. Nech $\tilde{\lambda}$ je vlastné číslo matice v rozšírenom poli E . Chceme ukázať, že $m_A(\tilde{\lambda}) = 0$. Existuje vlastný vektor v E^n pre toto vlastné číslo: $Av = \tilde{\lambda}v$ a $v \neq 0$. Potom $A^k v = \tilde{\lambda}^k v$ pre všetky $k \geq 1$, teda $f(A)v = f(\tilde{\lambda})v$ pre všetky $f \in E[\lambda]$. Špeciálne, ak zoberieme $f(\lambda) = m_A(\lambda)$, $m_A(A) = O$ teda $0 = m_A(\tilde{\lambda})v$. Teda $m_A(\tilde{\lambda}) = 0$.

□

Poznámka 2.4.8. Nikde sme nepoužili minimalitu $m_A(\lambda)$. Naozaj sme ukázali, že každý polynóm nulujúci maticu A má každé vlastné číslo matice A ako koreň. Minimálny polynóm A delí všetky polynómy nulujúce A .

Príklad 2.4.9. V Príklade 2.4.6, $\chi_A(\lambda) = \lambda(\lambda - 1)^2$, teda vlastné čísla A sú 0 a 1. Veta 4.7 hovorí, že $m_A(\lambda)$ má korene 0 a 1, preto $m_A(\lambda)$ je deliteľný λ a $\lambda - 1$. A z toho dôvodu ak $m_A \neq \chi_A$ potom $m_A = \lambda(\lambda - 1)$. Úvaha, že minimálny polynóm môže byť $(\lambda - 1)^2$, v Príklade 4.6 bola zbytočná. Nemohla fungovať lebo $m_A(\lambda)$ musí mať aj 0 aj 1 ako koreň.

Dôsledok 2.4.10. *Minimálny a charakteristický polynóm matice majú rovnaké ireducibilné činitele.*

Dôkaz. Každý ireducibilný činiteľ minimálneho polynómu je činiteľ charakteristického polynómu, lebo minimálny polynóm delí charakteristický.

Obrátene, ak $\pi(\lambda)$ je ireducibilný činiteľ charakteristického polynómu, jeho koreň je vlastné číslo a teda je to aj koreň minimálneho polynómu (Veta 4.7). Každý polynóm, ktorý ma spoločný koreň s $\pi(\lambda)$ je deliteľný $\pi(\lambda)$, preto $\pi(\lambda)$ delí minimálny polynóm. $\square$

Ak porovnáme ireducibilnú faktorizáciu:

$$\chi_A(\lambda) = \pi_1(\lambda)^{e_1} \dots \pi_k(\lambda)^{e_k}, \quad m_A(\lambda) = \pi_1(\lambda)^{f_1} \dots \pi_k(\lambda)^{f_k},$$

máme $1 \leq f_k \leq e_k$, lebo $m_A(\lambda) \mid \chi_A(\lambda)$. Tiež platí: $e_i \leq n \leq n f_i$ a dostávame prevrátenú deliteľnosť: $\chi_A(\lambda) \mid m_A(\lambda)^n$. Hovoríme, že polynóm sa dá rozložiť na lineárne činitele z $F[\lambda]$ ak je súčinom lineárnych činiteľov. Napríklad, $\lambda^2 - 5$ sa dá rozložiť v $\mathbb{R}[\lambda]$, ale nedá v $\mathbb{Q}[\lambda]$. Polynóm $(\lambda - 1)^2$ sa dá rozložiť v každom $F[\lambda]$. Použitím minimálneho polynómu namiesto charakteristického získavame kritérium pre diagonalizáciu nad každým poľom, čo je náš hlavný výsledok:

Veta 2.4.11. *Nech $\varphi : V \rightarrow V$ je lineárne zobrazenie, potom jeho maticová reprezentácia A je diagonalizovateľná práve vtedy, keď jej minimálny polynóm $m_A(\lambda)$ z $F[\lambda]$ sa dá rozložiť na lineárne činitele z $F[\lambda]$ a má rôzne korene.*

Veta 2.4.11 poskytuje nutnú aj postačujúcu podmienku pre diagonalizáciu, čo je lepšie ako len postačujúca podmienka vo Vete 2.3.2. A pretože minimálny polynóm je súčasťou charakteristického polynómu, Veta 2.4.11 zahŕňa Vetu 2.3.2.

Dôkaz. Predpokladajme, že $m_A(\lambda)$ sa dá rozložiť na lineárne činitele z $F[\lambda]$ s rôznymi koreňmi. Ukážeme, že V obsahuje bázu vlastných vektorov A , teda A je diagonalizovateľná. Nech pre $\lambda_i \neq \lambda_j$ a

$$m_A(\lambda) = (\lambda - \lambda_1) \dots (\lambda - \lambda_r),$$

kde λ_i sú vlastné čísla matice A (Veta 2.4.7). Nech pre každé vlastné číslo λ_i platí:

$$E_{\lambda_i} = \{v \in V : Av = \lambda_i v\}$$

existuje vlastný podpriestor prislúchajúci λ_i . Ukážeme, že

$$(2.4.1) \quad V = E_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus E_{\lambda_r},$$

použitím báz z každého E_{λ_i} získavame vlastnú bázu pre A . Keďže vlastné vektory s rôznymi vlastnými číslami sú lineárne nezávislé, stačí to aby sme ukázali

$$V = E_{\lambda_1} + \dots + E_{\lambda_r},$$

čiže to bude automaticky priamy súčet vďaka lineárnej nezávislosti týchto podpriestorov.

Ako dostaneme vlastné vektory jednotlivých vlastných podpriestorov? Treba ukázať, že je možné projektovať z V do vlastného podpriestoru E_{λ_i} pomocou polynómov s premennou A . Presnejšie, chceme nájsť polynómy $h_1(\lambda), \dots, h_r(\lambda)$ v $F[\lambda]$ také, že

$$(2.4.2) \quad 1 = h_1(\lambda) + \dots + h_r(\lambda), \quad h_i(\lambda) \equiv 0 \pmod{m_A(\lambda)/(\lambda - \lambda_i)}.$$

Polynóm $(\lambda - \lambda_i)h_i(\lambda)$ je deliteľný polynómom $m_A(\lambda)$, preto $(A - \lambda_i)h_i(A) = O$ na V . Ak nahradíme A za λ v (4.2) a vynásobíme vektorom $v \in V$ obidve strany, dostaneme

$$v = h_1(A)(v) + \dots + h_r(A)(v), \quad (A - \lambda_i)h_i(A)(v) = 0.$$

Druhá rovnica hovorí, že $h_i(A)(v)$ leží v E_{λ_i} a prvá rovnica hovorí, že v je súčet vlastných vektorov a $V = \sum_{i=1}^r E_{\lambda_i}$. Zostáva nájsť $h_i(\lambda)$. Pre $1 \leq i \leq r$, nech $f_i(\lambda) = m_A(\lambda)/(\lambda - \lambda_i) = \prod_{j \neq i} (\lambda - \lambda_j)$. Keďže λ_i sú rôzne, polynómy $f_1(\lambda), \dots, f_r(\lambda)$ sú navzájom nesúdeliteľné ako r -tica, preto existujú ich lineárne kombinácie rovné 1:

$$(2.4.3) \quad 1 = \sum_{i=1}^r g_i(\lambda)f_i(\lambda),$$

kde $g_i(\lambda) \in F[\lambda]$. Nech $h_i(\lambda) = g_i(\lambda)f_i(\lambda)!$

Teraz predpokladajme, že A je diagonalizovateľná, teda všetky vlastné čísla ležia na F a V je priamy súčet vlastných priestorov matice A . Chceme ukázať, že minimálny polynóm matice A sa dá rozložiť na lineárne činitele z $F[\lambda]$ a má rôzne korene.

Nech $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ sú rôzne vlastné čísla matice A , teda $V = E_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus E_{\lambda_r}$. Ukážeme, že $f(\lambda) := (\lambda - \lambda_1) \dots (\lambda - \lambda_r)$ je minimálny polynóm A . Podľa hypotézy, vlastné vektory A sú bázou priestoru V . Nech v je vlastný vektor, t.j. $Av = \lambda v$. Potom $A - \lambda$ nuluje v . Matice $A - \lambda_i$ komutujú medzi sebou a jeden z nich nuluje v , teda ich súčin $f(A)$ nuluje v . Teda $f(A)$ nuluje obal vlastných vektorov, čo je V , a $f(A) = O$. Minimálny polynóm je potom súčasť $f(\lambda)$. Zároveň každý koreň $f(\lambda)$ je vlastné číslo A a preto je aj koreňom minimálneho polynómu matice A (Veta 2.4.7). Pokiaľ sú korene $f(\lambda)$ rôzne, $f(\lambda)$ musí byť minimálny polynóm matice A .

□

Poznámka 2.4.12. V (2.4.3), polynóm $g_i(\lambda)$ môžeme považovať za konštantu $1/f_i(\lambda_i)$. Suma

$$\sum_{i=1}^r \frac{1}{f_i(\lambda_i)} f_i(\lambda)$$

je polynóm stupňa najvyššie $r-1$ (každý $f_i(\lambda)$ je stupňa $r-1$) a v $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ nadobúda hodnotu 1. Získaním hodnoty r -krát pričom stupeň je najviac $r-1$ núti polynóm aby bol konštantný.

Dôsledok 2.4.13. *Nech $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ a $A^m = id_V$ pre nejaké kladné celé číslo m . Potom A je diagonalizovateľná.*

Dôkaz. $A^m = id_V$, A je nulovaná polynómom $\lambda^m - 1$. A preto minimálny polynóm A je súčastou $\lambda^m - 1$. Polynóm $\lambda^m - 1$ má rôzne korene v $\mathbb{C}$. □

V Príklade 2.4.5 sme videli, že projekcia z V na podpriestor (rozkladom na priame súčty) je matica P , kde $P^2 = P$. Teraz to môžeme dokázať naopak.

Dôsledok 2.4.14. *Každá matica $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ spĺňajúca rovnosť $A^2 = A$ je projekcia vo V na nejaký podpriestor, to znamená, že existuje rozklad $V = U \oplus W$ taký, že $A(u + w) = u$, kde $u \in U$ a $w \in W$.*

Dôkaz. Keďže polynóm $\lambda^2 - \lambda$ nuluje maticu A , jej minimálny polynóm je $\lambda^2 - \lambda$, λ , alebo $\lambda - 1$. Rozkladajú sa na lineárne činitele s rôznymi koreňmi 1 alebo 0. Teda A je diagonalizovateľná s vlastnými číslami 1 alebo 0 (alebo obe). Nech $U = E_1$ je vlastný priestor A prislúchajúci 1 a $W = E_0$ je vlastný priestor A prislúchajúci 0. Tak $V = U \oplus W$ (U alebo W môžu byť $\{0\}$ ak $A = O$ alebo $A = id_V$). Pre $u \in U$ a $w \in W$, $A(u + w) = A(u) + A(w) = 1 \cdot u + 0 \cdot w = u$, teda A je projekcia na podpriestor U . □

Poznámka 2.4.15. Nepotrebujeme toľko informácií o diagonalizácii aby sme ukázali, že A je projekcia, keď $A^2 = A$. Pre $v \in V$, $v = Av + (v - Av)$ a $A(Av) = Av$, pokiaľ $A(v - Av) = Av - A^2v = Av - Av = 0$, tak A je projekcia V na podpriestor $U := A(V)$ s komplementárnym (doplňkovým) podpriestorom $W := (id_V - A)(V)$, na ktorom je $A = O$.

Príklad 2.4.16. 3×3 matica v Príklade 2.4.6 spĺňa $A^2 = A$, teda to musí byť projekcia. Riadkovou elimináciou, obraz $A : F^3 \rightarrow F^3$ je rovina vytvorená vektormi $(1, 0, 1)$ a $(0, 1, 1)$. Jadro matice je priamka daná vektorom $(-1, 1, 1)$ teda

$$A(a(1, 0, 1) + b(0, 1, 1) + c(-1, 1, 1)) = a(1, 0, 1) + b(0, 1, 1).$$

Vidíme, že A je projekcia na rovinu $A(1, 0, 1) + B(0, 1, 1)$, kde $A, B \in F^3$.

Veta 2.4.17. *Existuje báza lineárneho zobrazenia φ , v ktorej je maticová reprezentácia zobrazenia φ daná hornou trojuholníkovou maticou práve vtedy, keď $m_A(\lambda)$ sa dá rozložiť na súčin lineárnych činiteľov z $F[\lambda]$.*

Toto je zhodné s tým, čo sme vedeli o matici $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, ktorá je horná trojuholníková, ale nie je diagonalizovateľná. Jej minimálny polynóm je $(\lambda - 1)^2$.

Ako špeciálny prípad Vety 2.4.17, každá komplexná štvorcová matica je podobná s hornou trojuholníkovou maticou. Dôkaz Vety 2.4.17 rozoberieme až po zavedení nilpotentných zobrazení v sekcii 2.6.

2.5 Simultánna diagonalizácia

Keďže už vieme kedy je matica diagonalizovateľná (len vtedy ak minimálny polynóm s rôznymi koreňmi sa dá rozložiť na lineárne činitele), môžeme zaviesť pojem simultánna diagonalizácia pre niekoľko lineárnych zobrazení $\varphi_j : V \rightarrow V$, $j = 1, 2, \dots, r$. Predpokladajme, že každé zobrazenie φ_j má diagonálnu maticovú reprezentáciu A_j v nejakej báze, môžeme nájsť spoločnú bázu, v ktorej budú všetky A_j diagonálne matice? (Táto možnosť sa nazýva simultánna diagonalizácia.) Dôležité obmedzenie je komutatívnosť: Každá množina diagonálnych matíc komutuje, preto ak A_j môžu byť simultánne diagonalizovateľné, musia komutovať. Špeciálna vlastnosť komutatívnosti je to, že matica A zachováva ľubovoľný vlastný podpriestor matice B a naopak: ak $AB = BA$ a $Av = \lambda v$ potom $A(Bv) = B(Av) = B(\lambda v) = \lambda(Bv)$, teda B zobrazí každý vektor z vlastného podpriestoru E_λ matice A na iný vektor z E_λ matice A .

Veta 2.5.1. *Ak $A_1, \dots, A_r$ sú z $\mathbb{C}^{n \times n}$ a každá matica A_i je diagonalizovateľná, potom sú simultánne diagonalizovateľné práve vtedy, keď komutujú.*

Dôkaz. Už sme naznačili prečo simultánne diagonalizovateľné matice musia komutovať. Opačným smerom, predpokladajme $A_1, \dots, A_r$ komutujú a sú diagonalizovateľné. Na ukázanie, že sú simultánne diagonalizovateľné, postupujeme indukciou na r . Výsledok je jasný pre $r = 1$, teda predpokladajme $r \geq 2$. Nech

$$E_\lambda = \{v : A_r v = \lambda v\}$$

je vlastný priestor A_r pre nejaké vlastné číslo λ z A_r . Pokiaľ A_r je diagonalizovateľná na V , V je priamy súčet vlastných priestorov A_r . Pre $v \in E_\lambda$, $A_r(A_i v) = A_i(A_r v) = A_i(\lambda v) = \lambda(A_i v)$, teda $A_i v \in E_\lambda$. A preto každá A_i je zúžená na podpriestor E_λ . Matice $A_1|_{E_\lambda}, \dots, A_{r-1}|_{E_\lambda}$ komutujú pokiaľ A_i komutujú na V , a tieto zúženia na E_λ sú diagonalizovateľné podľa Dôsledku 2.7.5. Je ich $r - 1$, preto z indukcie na r vyplýva, že

existuje báza E_λ tvorená simultánnymi vlastnými vektormi $A_1|_{E_\lambda}, \dots, A_{r-1}|_{E_\lambda}, A_r|_{E_\lambda}$.
² Prvky tejto bázy sú aj vlastné vektory $A_r|_{E_\lambda}$, keďže všetky nenulové vektory v E_λ sú vlastné vektory A_r . A teda $A_1|_{E_\lambda}, \dots, A_{r-1}|_{E_\lambda}, A_r|_{E_\lambda}$ sú všetky diagonalizovateľné. Vektorový priestor V je priamy súčet vlastných priestorov E_λ , a spojenie simultánných vlastných báz všetkých $A_i|_{E_\lambda}$ nám dáva simultánnu vlastnú bázu V pre všetky A_i .

□

Táto Veta nevraví, že komutujúce zobrazenia (resp. matice) diagonalizujú, ale že komutujúce diagonalizovateľné zobrazenia (resp. matice) simultánne diagonalizujú!

Dôsledok 2.5.2. *Nech $\{A_i\}$ je postupnosť komutujúcich matíc. Ak každá A_i je diagonalizovateľná, potom sú všetky simultánne diagonalizovateľné.*

Dôsledok 2.5.3. *Nech A a B sú matice, ktoré komutujú a sú diagonalizovateľné. Potom každá matica z okruhu $F[A, B]$ je diagonalizovateľná. Napríklad matice $A + B$ a AB sú diagonalizovateľné.*

Dôkaz. Keďže A a B komutujú, majú spoločnú vlastnú bázu. Členy tejto bázy sú tiež vlastné vektory každej matice z $F[A, B]$, preto všetky tieto matice sú tiež diagonalizovateľné.

□

Bez komutatívnosti, diagonalizovateľnosť nemusí byť zachovaná sčítaním a násobením. Napríklad, matice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ a $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ sú obe diagonalizovateľné, ale ich súčet $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ nie je.

2.6 Nilpotentné zobrazenia(matice)

Minimálny polynóm neklasifikuje len diagonalizovateľné ale aj nilpotentné lineárne zobrazenia. Nilpotentné lineárne zobrazenie je také lineárne zobrazenie φ , ku ktorému existuje také číslo $n \in \mathbb{N}$, že $\varphi^n = O$.

Veta 2.6.1. *Pre maticu $N \in F^{n \times n}$ sú nasledovné body ekvivalentné:*

1. *N je nilpotentná: $N^k = O$ pre nejaké $k \geq 1$,*

²Výber bázy pre E_λ nezávisí od A_r , ale od všetkých ostatných matíc dokopy.

2. *jediné vlastné číslo N je 0,*
3. *$N^n = O$, kde $n = \dim V$,*
4. *minimálny polynóm N je λ^k pre nejaké $k \leq n$*

Dôkaz. Ukážeme $1. \Rightarrow 2. \Rightarrow 3. \Rightarrow 4.$ (opačne je to jasné.) Nech $N^k = O$ pre nejaké k potom pre minimálny polynóm N tvaru λ^l , kde $l \leq k$, platí, že jeho jediný koreň je 0. Korene minimálneho polynómu sú vlastné čísla matice N , teda jediné vlastné číslo N je 0. Charakteristický polynóm je normovaný polynóm stupňa n s koreňmi, ktoré sú vlastné čísla, teda ak jediné vlastné číslo je 0 potom $\chi_N(\lambda) = \lambda^n$, z čoho vyplýva, že $N^n = O$. Minimálny polynóm delí charakteristický, teda ak $\chi_N(\lambda) = \lambda^n$ potom minimálny polynóm je λ^k pre $k \leq n$.

□

Nemôžeme diagonalizovať nilpotentné matice, iba ak sú rovné O : minimálny polynóm tvaru λ^k má rôzne korene, iba ak $k = 1$, t.j. λ . A jediná matica s minimálnym polynómom λ je O .

Dôsledok 2.6.2 *Nilpotentné lineárne zobrazenie $\varphi : V \rightarrow V$ má striktnú hornú trojuholníkovú maticovú reprezentáciu.*

Striktná horná trojuholníková matica je horná trojuholníková matica s nulami na hlavnej diagonále, ako napríklad matica $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Dôkaz. Indukciou na $\dim V$. Keď $\dim V = 1$, $\varphi = O$, tak výsledok je zrejmý. Aj pre prípad $\dim V > 1$ a $\varphi = O$ je výsledok opäť zrejmý. Ak $\dim V > 1$ a $\varphi \neq O$, potom $W := \ker \varphi$ (jadro zobrazenia φ je množina všetkých vektorov x pre ktoré platí $\varphi x = 0$) je vlastný podpriestor V a $W \neq \{0\}$ keďže φ nie je injektívne zobrazenie. Pokiaľ $\varphi(W) = \{0\} \subset W$, φ indukuje lineárne zobrazenia na W a V/W . A keďže mocnina φ na V je O , tá istá mocnina bude aj na W a V/W . Teda zobrazenia, ktoré φ indukuje na W a V/W sú obe nilpotentné. φ je na W O , ale na V/W jediné, čo môžeme povedať je, že φ je nilpotentné zobrazenie. Keďže $0 < \dim V/W < \dim V$, indukciou existuje báza V/W vzhľadom na zobrazenie indukované φ na V/W , ktoré má striktnú hornú trojuholníkovú maticovú reprezentáciu. Vyberme takú bázu V/W a pridajme k tejto množine bázu W na získanie bázy V . Položme bázové vektory z W prvé v poradí bázy V . Vzhľadom na výber bázy V , maticová reprezentácia φ na V má tvar $\begin{pmatrix} O & * \\ O & U \end{pmatrix}$, kde

U je striktná horná trojuholníková štvorcová matica lineárneho zobrazenia φ na V/W . Táto matica je na V striktná horná trojuholníková matica. □

Teraz môžeme spraviť dôkaz Vety 2.4.17: lineárne zobrazenie má maticovú reprezentáciu danú hornou trojuholníkovou maticou iba ak jeho minimálny polynóm sa dá rozložiť na lineárne činitele z $F[\lambda]$.

Dôkaz. Ak lineárne zobrazenie má hornú trojuholníkovú maticovú reprezentáciu, potom charakteristický polynóm tejto matice sa dá rozložiť na lineárne činitele z $F[\lambda]$, a keďže minimálny polynóm je súčasťou charakteristického polynómu, tak aj on sa dá rozložiť na lineárne činitele v $F[\lambda]$.

Obrátene, predpokladajme, že $m_A(\lambda)$ sa dá rozložiť na lineárne činitele v $F[\lambda]$, t.j.

$$m_A(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{e_1} \cdots (\lambda - \lambda_r)^{e_r},$$

kde λ_i sú rôzne korene. Potom polynómy $f_i(\lambda) = m_A(\lambda)/(\lambda - \lambda_i)^{e_i}$ sú nesúdeliteľné. Teda argumentáciou ako v dôkaze Vety 2.4.11 (kde všetky exponenty e_i sú 1) dostaneme

$$V = \bigoplus \ker((A - \lambda_i I)^{e_i}).$$

Nech $W_i = \ker((A - \lambda_i I)^{e_i})$. Keďže A komutuje s $(A - \lambda_i I)^{e_i}$, tak $A(W_i) \subset W_i$. Ukážeme, že $A|_{W_i}$ má hornú trojuholníkovú maticovú reprezentáciu a pospájaním báz W_i na získanie bázy V dostaneme hornú trojuholníkovú maticovú reprezentáciu A na V .

Na $W_i, (A - \lambda_i I)^{e_i} = O$, teda $A - \lambda_i I$ je nilpotentná matica. Píšeme $A = \lambda_i I + (A - \lambda_i I)$, čo vyjadruje A na W_i ako súčet škálovej a nilpotentnej matice. Vzhľadom na to, čo vieme o nilpotentných maticiach, existuje báza W_i prislúchajúca $A - \lambda_i I$, ktorá je striktné horná trojuholníková. Vzhľadom na každú bázu, škálový operátor λ_i je diagonálny. Použitím bázy, ktorá robí z $A - \lambda_i I$ striktné hornú trojuholníkovú maticu, matica A je súčet diagonálnej a striktné hornej trojuholníkovej matice a to je horná trojuholníková matica. □

Dôsledok 2.6.3. *Ak $A_1, \dots, A_r$ sú komutujúce matice na V a každá A_i sa dá upraviť na horný trojuholníkový tvar, tak potom sa dajú simultánne upraviť na horný trojuholníkový tvar.*

Na rozdiel od Vety 2.5.1 komutatívny predpoklad nie je nevyhnutný: väčšina horných trojuholníkových matíc nekomutuje medzi sebou.

Dôkaz. Použijeme indukciu na dimenziu vektorového priestoru (nie indukciu na počet matíc ako je v dôkaze Vety 2.5.1). Jednorozmerný prípad je zrejmy. Teraz predpokladajme $\dim V \geq 2$ a dôsledok je známy pre menej rozmerné priestory. Môžeme predpokladať, že nie všetky A_i sú skalárne matice na V (v opačnom prípade by bol výsledok

zrejmy pri pouziti hocijakej bazy). Bez ujmy na vseobecnosti nech A_r nie je skalarna matica.

Pokiaľ sa dá A_r upraviť na horný trojuholníkový tvar na V , jej vlastné čísla sú v F . Nech $\lambda_r \in F$ je vlastné číslo A_r a množina E_λ je vlastný podpriestor A_r vo V . Potom $0 < \dim E_\lambda < \dim V$. Pokiaľ A_i komutujú, $A_i(E_\lambda) \subset E_\lambda$ pre všetky i . Navyše minimálny polynóm $A_i|_{E_\lambda}$ je súčasť minimálneho polynómu A_i na V , teda každý $A_i|_{E_\lambda}$ je možné upraviť na horný trojuholníkový tvar podľa Vety 2.4.17. Keďže A_i komutujú na V potom tiež komutujú na E_λ . Teda indukciou na dimenziu A_i sa dajú simultánne upraviť na horný trojuholníkový tvar na E_λ . Naozaj, prvý vektor v simultánnej "hornej trojuholníkovej báze" pre A_i je spoločný vlastný vektor všetkých A_i . Nazývame ho e_1 a $W = Fe_1$. Potom $A_i(W) \subset W$ pre všetky i . A_i sú všetko matice na W a teda aj na V/W . Nech $\bar{A}_i \in V/W \rightarrow V/W$ sú matice A_i indukujúce na V/W , kde tieto matice komutujú a dajú sa upraviť na horné trojuholníkové, teda znovu indukciou na dimenziu matíc $\bar{A}_i$ na V/W môžeme tieto matice simultánne previesť na horné trojuholníkové. Ak zoberieme spoločnú hornú trojuholníkovú bázu pre $\bar{A}_i$ z V/W do V a pripneme na e_1 (prvý člen bázy V), získavame spoločnú hornú trojuholníkovú bázu pre všetky A_i (podľa argumentu v dôkaze Dôsledku 2.6.2).

□

2.7 Výpočet minimálneho polynómu

Jednou z metód hľadanie minimálneho polynómu je počítanie charakteristického polynómu a testovanie jeho lineárnych činiteľov. Existuje však metóda na výpočet minimálneho polynómu, ktorá je založená na nasledujúcej vete:

Veta 2.7.1. *Majme maticu $A \in V$. Predpokladajme $W_1, \dots, W_k$ sú podpriestory V také, že $V = W_1 + \dots + W_k$, $A(W_i) \subset W_i$ pre všetky i a zúženie A na W_i má minimálny polynóm $m_i(\lambda)$. Potom minimálny polynóm A vo V je $nsn(m_1, \dots, m_k)$ (najmenší spoločný násobok).*

Nepredpokladáme, že W_i sú lineárne nezávislé podpriestory (t.j. nepredpokladáme $V = \oplus_{i=1}^k W_i$), ale len, že W_i je doplnok V . Táto podmienka $A(W_i) \subset W_i$ je potrebná k zúženiu A na W_i ako matice s vlastným minimálnym polynómom.

Dôkaz. Nech $f(\lambda) = nsn(m_1(\lambda), \dots, m_k(\lambda))$, teda $f(\lambda)$ je násobok každého $m_i(\lambda)$ zapisujeme $f(\lambda) = g_i(\lambda)m_i(\lambda)$ pre každé i . Pre $v \in W$, $f(A)v = g_i(A)(m_i(A)v) = g_i(A)(0) = 0$, teda $f(A)$ je nula v každom W_i . Keďže W_i je doplnok V , $f(A) = O$ na V , a preto $m_A(\lambda) \mid f(\lambda)$.

Ďalej ukážeme, že $f(\lambda) \mid m_A(\lambda)$. Keďže $m_A(A) = O$ na V , $m_A(A)$ nuluje každé W_i . Zúžením na W_i , $m_A(A)|_{W_i} = m_A(A|_{W_i})$, teda $A|_{W_i}$ je vynulovaný polynómom $m_A(\lambda)$, a preto $m_A(\lambda)$ je deliteľné polynómom $m_i(\lambda)$. Z toho $m_i(\lambda) \mid m_A(\lambda)$ pre všetky i , ich najmenší spoločný násobok $f(\lambda)$ delí $m_A(\lambda)$. Polynómy $f(\lambda)$ a $m_A(\lambda)$ sú normované a delia sa navzájom, preto sú rovnaké.

□

Príklad 2.7.2. Nech

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Nech $W_1 = \{(x, y, 0)\}$ a $W_2 = \{(0, y, z)\}$ sú roviny v R^3 a platí $W_1 + W_2 = R^3$. Aj keď $W_1 \cap W_2 \neq \{0\}$, v tomto prípade $W_1 + W_2$ nie je rozklad na priamy súčet v R^3 . Výpočty ukazujú, že $A(W_1) \subset W_1$ a $A(W_2) \subset W_2$. Použitím bázy $\{(1, 0, 0), (0, 1, 0)\}$ pre W_1 a bázy $\{(0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ pre W_2 dostávame maticové reprezentácie $[A|_{W_1}] = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ a $[A|_{W_2}] = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, teda $m_1(\lambda) = (\lambda - 2)(\lambda - 1)$ a $m_2(\lambda) = (\lambda - 1)^2$. Preto $m_A(\lambda) = \text{nsn}(m_1, m_2) = (\lambda - 1)^2(\lambda - 2)$.

Veta 2.7.1 vedie k algoritmu na výpočet minimálneho polynómu nejakej matice A na V . Zoberme ľubovoľný $v \neq 0$ vo V a uvažujme postupnosť vektorov

$$\{v, A(v), A^2(v), \dots\},$$

ktoré tvoria podpriestor vo V . Nazveme ho W , teda $W = \{f(A)v : f(\lambda) \in F[\lambda]\}$. Prvky W majú tvar $f(A)v$. Vlastnosť W , $A(W) \subset W$ určuje A ako maticu vo W . Na výpočet minimálneho polynómu A vo W musíme nájsť najmenšie d také, že vektory $v, A(v), \dots, A^d(v)$ sú lineárne nezávislé. (Použitím bázy na zmenu z V na F^n , môžeme využiť riadkovú elimináciu na zistenie, kedy sa lineárna nezávislosť vyskytla prvýkrát, t.j. naše d .) Nech $d \geq 1$, keďže $v \neq 0$. Pretože pre $v, A(v), \dots, A^{d-1}(v)$ jediný lineárny vzťah vo forme

$$b_{d-1}A^{d-1}(v) + b_1A(v) + \dots + b_0v = 0$$

s $b_i \in F$, je ten, kde sa každé b_i rovná nule. Preto pre každý nenulový polynóm $f(\lambda) \in F[\lambda]$ so stupňom menším ako d , $f(A)(v) \neq 0$. A preto $f(A) \neq O$, čo znamená, že minimálny polynóm A na W má stupeň najmenej d .

Existuje vzťah lineárnej závislosti na množine $\{v, A(v), \dots, A^d(v)\}$, a koeficient v $A^d(v)$ musí byť nenulový, lebo ostatné vektory sú lineárne nezávislé. Môžeme normovať koeficient $A^d(v)$ tak aby bol 1,

$$(7.1) \quad A^d(v) + c_{d-1}A^{d-1}(v) + \cdots + c_1A(v) + c_0 = 0,$$

kde $c_i \in F$, toto nám hovorí, že polynóm

$$m(\lambda) := \lambda^d + c_{d-1}\lambda^{d-1} + \cdots + c_1\lambda + c_0$$

spĺňa $m(A)(v) = 0$, teda pre každý $f(\lambda) \in F[\lambda]$ máme $m(A)(f(A)v) = f(A)(m(A)v) = f(A)(0) = 0$. Každý prvok W je $f(A)(v)$ pre nejaké $f(\lambda)$, teda $m(A)$ nuluje všetko z W : $m(\lambda)$ je minimálny polynóm A na W . (Mimochodom, z toho tiež vyplýva, že $\dim W = d$ a W má bázu $\{v, A(v), \dots, A^{d-1}(v)\}$.)

Nech $W_1 = W$ a $m_1(\lambda) = m(\lambda)$. Ak $W_1 \neq V$ zoberieme vektor $v' \notin W_1$ a spravme to isté pre podpriestor W_2 z V tvorený vektormi $v', A(v'), A^2(v'), \dots$ aby sme dostali minimálny polynóm $m_2(\lambda)$ pre A na W_2 , a tak ďalej. Pokiaľ V je konečnorozmerný, dostávame postupnosť podpriestorov $W_1, W_2, \dots, W_k$, kde $A(W_i) \subset W_i$ pre všetky i a W_i sa doplnia k V . Minimálny polynóm A na V je najmenší spoločný násobok $m_i(\lambda)$ podľa Vety 2.7.1.

Príklad 2.7.3. Nech

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 1 & -2 \\ -1 & 4 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Nech $v_1 = (1, 0, 0, 0)$, teda $A(v_1) = (0, -1, 0, -1)$ a $A^2(v_1) = (-2, -3, 0, -3) = 3A(v_1) - 2v_1$. Teda $A^2(v_1) - 3A(v_1) + 2(v_1) = 0$, a preto $m_1(\lambda) = \lambda^2 - 3\lambda + 2$. Nech W_1 je tvorený vektormi v_1 a $A(v_1)$. Vektor $v_2 = (0, 1, 0, 0)$ nie je vo W_1 . Ukazuje sa, že $v_2, A(v_2)$ a $A^2(v_2)$ sú lineárne nezávislé a $A^3(v_2) = 4A^2(v_2) - 5A(v_2) + 2v_2$, teda $m_2(\lambda) = \lambda^3 - 4\lambda^2 + 5\lambda - 2$. Nech W_2 je tvorený bázou $v_2, A(v_2)$ a $A^2(v_2)$. Aj W_1 a W_2 sú v podpriestore vektorov s treťou zložkou 0, teda $W_1 + W_2 \neq R^4$. Zoberme $v_3 = (0, 0, 1, 0)$. Výpočty ukážu, že iteračný proces s A je rovnaký ako pre v_2 tak aj pre v_3 , teda $m_3(\lambda) = m_2(\lambda)$. Keďže $\{v_1, A(v_1), v_2, v_3\}$ je báza R^4 , minimálny polynóm A je $\text{nsn}(m_1, m_2, m_3) = \lambda^3 - 4\lambda^2 + 5\lambda - 2$.

Pozrime sa bližšie na podpriestory. Ak $\varphi : V \rightarrow V$ je lineárne zobrazenie, podpriestor $W \subset V$ sa nazýva φ -stabilný ak $\varphi(W) \subset W$. Napríklad, vlastný priestor φ je φ -stabilný. Ak $\varphi = \text{id}_V$, potom každý podpriestor V je φ -stabilný. (Nevyžadujeme $\varphi(W) = W$, iba $\varphi(W) \subset W$.) Keď $\varphi(W) \subset W$ indukuje lineárne zobrazenie na W a na faktorový priestor V/W . Označme tieto indukované lineárne zobrazenia ako φ_W a $\varphi_{V/W}$. Pozrieme sa v akom vzťahu je diagonalizovateľnosť a nilpotentnosť s φ, φ_W a $\varphi_{V/W}$, kde W je φ -stabilný podpriestor. Najskôr si ukážeme v akom vzťahu sú minimálne polynómy týchto troch lineárnych zobrazení.

Veta 2.7.4. *Predpokladajme $\varphi : V \rightarrow V$ je lineárne zobrazenie a W je φ -stabilný podpriestor V . Indukované lineárne zobrazenia $\varphi_W : W \rightarrow W$ a $\varphi_{V/W} : V/W \rightarrow V/W$ majú minimálne polynómy, ktoré delia $m_\varphi(\lambda)$. Presnejšie, ich najmenší spoločný násobok delí $m_\varphi(\lambda)$ a ich súčin je deliteľný $m_\varphi(\lambda)$.*

Dôkaz. Polynóm $m_{\varphi_W}(\lambda)$ nuluje W , keď λ je nahradená $\varphi|_W$, a polynóm $m_{\varphi_{V/W}}(\lambda)$ nuluje V/W , keď λ je nahradená φ na V/W (t.j. $\varphi_{V/W}$). Pokiaľ $m_\varphi(\lambda)$ nuluje W a V/W , keď λ je nahradená A , tak $m_\varphi(\lambda)$ je deliteľný aj polynómom $m_{\varphi_W}(\lambda)$ aj polynómom $m_{\varphi_{V/W}}(\lambda)$ a aj ich najmenším spoločným násobkom.

Pre $v \in V$, s jeho faktorovou množinou vo V/W označujeme $\bar{v}$, $m_{\varphi_{V/W}}(\varphi)(\bar{v}) = \bar{0}$, teda $m_{\varphi_{V/W}}(\varphi)(v) \in W$. Potom $m_{\varphi_W}(\varphi)(m_{\varphi_{V/W}}(\varphi)(v)) = 0$. Pokiaľ to platí pre všetky $v \in V$, $m_{\varphi_W}(\varphi)m_{\varphi_{V/W}}(\varphi) = 0$, teda $m_{\varphi_W}(\lambda)(m_{\varphi_{V/W}}(\lambda))$ nuluje φ na V . Potom $m_\varphi(\lambda) \mid m_{\varphi_W}(\lambda)m_{\varphi_{V/W}}(\lambda)$.

□

Veta 2.7.4 hovorí, že $m_A(\lambda)$, kde A je maticová reprezentácia lineárneho zobrazenia φ leží medzi $\text{nsn}(m_{A_W}(\lambda)(m_{A_{V/W}}(\lambda)))$ a $m_{A_W}(\lambda)(m_{A_{V/W}}(\lambda))$ v zmysle deliteľnosti. Nie je to vždy buď najmenší spoločný násobok, alebo súčin. Keď napríklad $V = R^2$ a $A = I_2$, $m_A(\lambda) = \lambda - 1 \neq m_{A_W}(\lambda)(m_{A_{V/W}}(\lambda))$ pre ľubovoľný $W \subset R^2$. Keď $V = R^2$ a $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $m_A(\lambda) = (\lambda - 1)^2 \neq \text{nsn}(m_{A_W}(\lambda)(m_{A_{V/W}}(\lambda)))$ ak použijeme $W = a\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, kde $a \in R$.

Dôsledok 2.7.5. *Použitím poznámok z Vety 2.7.4,*

1. *A sa dá previesť na hornú trojuholníkovú iba ak A_W a $A_{V/W}$ sa dajú previesť na hornú trojuholníkovú,*
2. *ak A je diagonalizovateľná, tak A_W a $A_{V/W}$ sú diagonalizovateľné,*
3. *A je nilpotentná iba ak A_W a $A_{V/W}$ sú nilpotentné.*

Dôkaz. Ak sa polynóm dá rozložiť na lineárne činitele v $F[\lambda]$, alebo dokonca ak sa rozkladá a má aj rôzne korene, tak ľubovoľný lineárny činiteľ má rovnaké vlastnosti, teda 1. a 2. priamo vyplývajú zo vzťahov vo Vete 2.7.4. Na dôkaz 3., $m_A(\lambda)$ je mocnina λ iba ak $m_{A_W}(\lambda)$ a $m_{A_{V/W}}(\lambda)$ sú mocniny λ .

□

Opačná implikácia v druhej vlastnosti Dôsledku 2.7.5 neplatí. Zoberme $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ vo $V = R^2$. Nech $W = a\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, teda $A(W) = W$. Aj W aj V/W sú jednorozmerné, teda

každá matica v nich je diagonalizovateľná. A preto A_W a $A_{V/W}$ sú diagonalizovateľné, ale A nie je diagonalizovateľná.

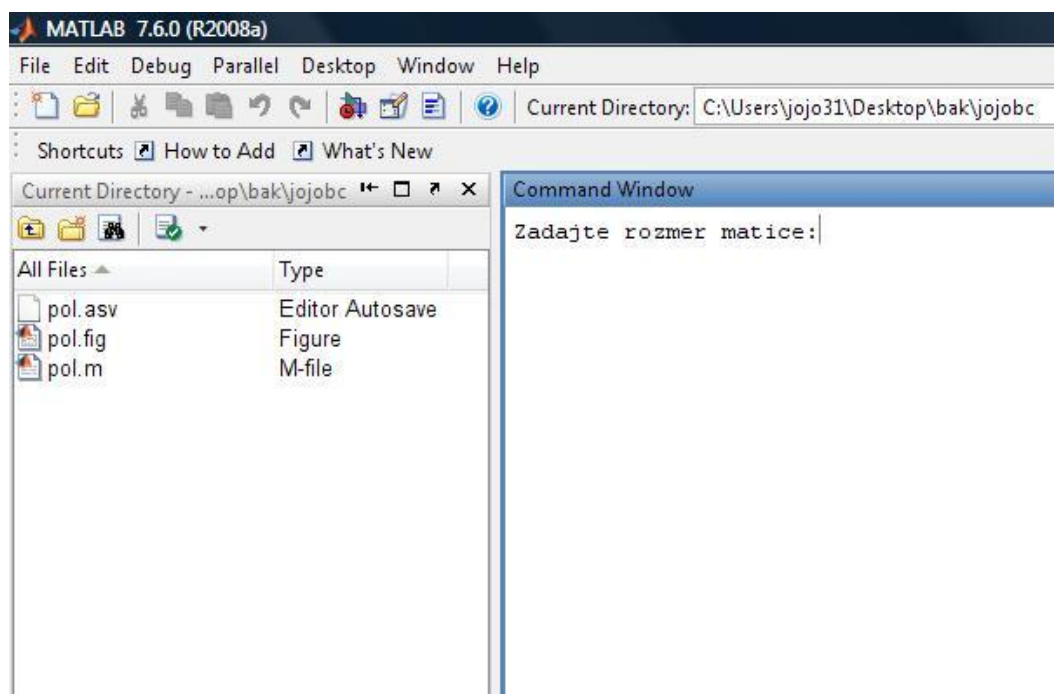
Toto je analogické pre súčin špeciálnych (“square-free”) čísel (celé číslo je “square-free” ak nie je deliteľné celým číslom, ktoré má celočíselnú odmocninu. Napr. čísla 6 a 15 sú “square-free”, ale ich súčin nie je.)

Kapitola 3

Program na výpočet minimálneho polynómu

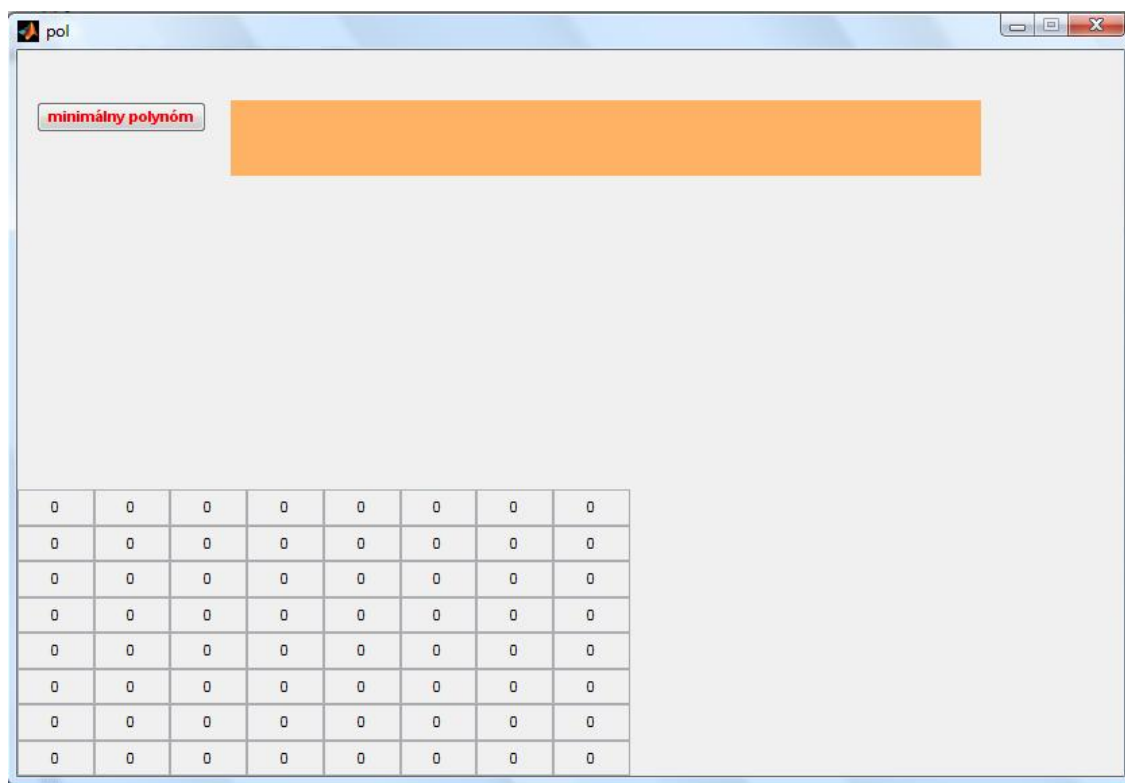
V tejto kapitole popíšem program, ktorý som vypracoval v softvéri MATLAB. Program vypočíta a vypíše minimálny polynóm pre ľubovoľnú reálnu maticu rozmeru $n \times n$, ktorú si užívateľ sám zadá na vstupe. Program je prehľadný a intuitívne ovládateľný.

Po spustení si program vyžiada hneď prvý vstupný údaj, ktorým je rozmer štvorcovej matice.

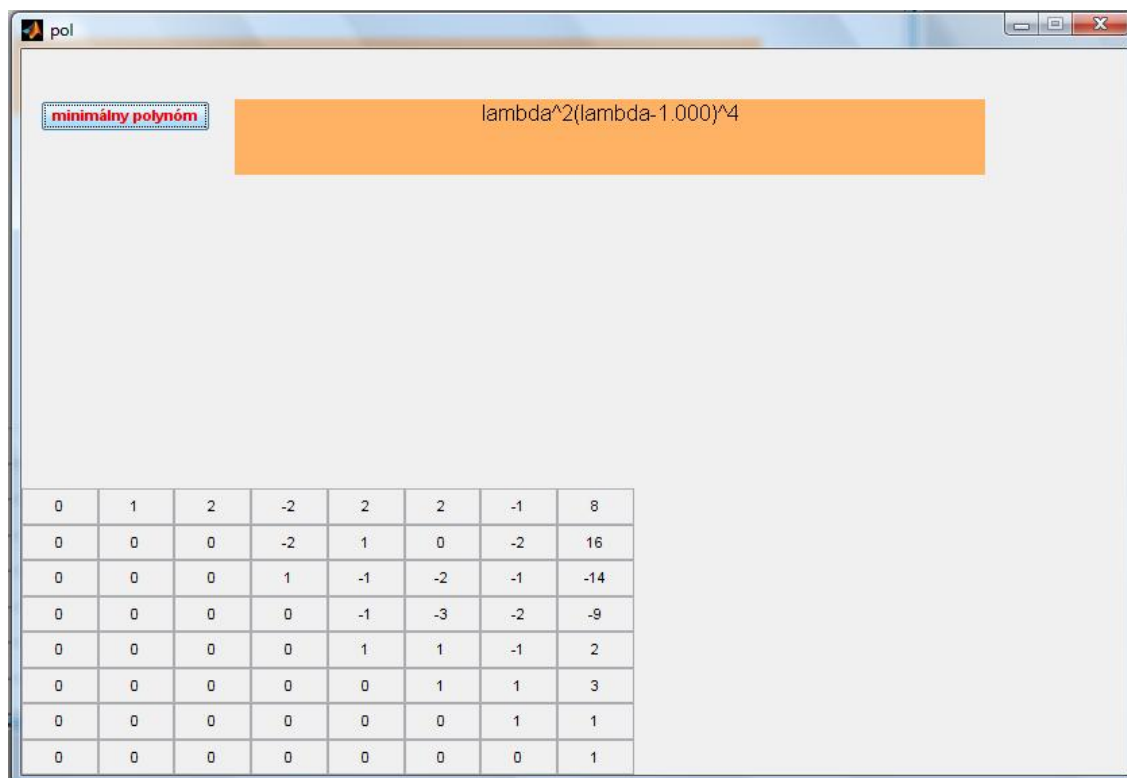


Tento údaj o rozmere sa načíta z klávesnice do premennej n . Program na základe toho vygeneruje maticu $H_{n \times n}$ editovacích políček a otvorí sa okno, kde budú vykreslené tieto editovacie políčka s preddefinovanou hodnotou 0. Okrem týchto políček sa

v okne nachádza aj tlačítko a textové pole, do ktorého sa nakoniec po stlačení tlačítka “minimálny polynóm “ vypíše minimálny polynóm užívateľom zadanej matice. Napríklad pre rozmer matice $n = 8$ bude okno vyzeráť nasledovne:



Užívateľ v tomto okne vyplní políčka zodpovedajúce prvkom matice a stlačí tlačítko “minimálny polynóm “. Prebehne algoritmus, ktorý nájde minimálny polynóm zadanej matice, a tento sa vypíše do textového pola vpravo hore. V našom prípade pre maticu 8×8 to môže vyzeráť takto:



Teda hľadaný minimálny polynóm našej matice je polynóm $\lambda^2(\lambda - 1)^4$.

Ideme sa pozrieť podrobnejšie na zdrojový kód nášho programu.

Rozdelíme si náš zdrojový kód na tri časti. Príkazy v prvej časti vytvoria užívateľské prostredie, čiže okno aplikácie s tlačítkom “minimálny polynóm “ a zatiaľ prázdny textový poľom. (Nastavia sa atribúty jednotlivých objektov ako napr. rozmery, pozícia, písmo, nápis...)

1. časť programu:

```
1  function varargout = pol(varargin)
2  -   gui_Singleton = 1;
3  -   gui_State = struct('gui_Name',       mfilename, ...
4  -                     'gui_Singleton',  gui_Singleton, ...
5  -                     'gui_OpeningFcn', @pol_OpeningFcn, ...
6  -                     'gui_OutputFcn',  @pol_OutputFcn, ...
7  -                     'gui_LayoutFcn',  [] , ...
8  -                     'gui_Callback',    []);
9  -   if nargin && ischar(varargin{1})
10 -       gui_State.gui_Callback = str2func(varargin{1});
11 -   end
12
13 -   if nargin
14 -       [varargout{1:nargout}] = gui_mainfcn(gui_State, varargin{:});
15 -   else
16 -       gui_mainfcn(gui_State, varargin{:});
17 -   end
18
19  function pol_OpeningFcn(hObject, eventdata, handles, varargin)
20  -   handles.output = hObject;
21  -   guidata(hObject, handles);
22
23  function varargout = pol_OutputFcn(hObject, eventdata, handles)
24  -   varargout{1} = handles.output;
25
```

Túto časť vygeneroval MATLAB viacmenej sám na základe toho ako som rozmiestnil a upravil jednotlivé objekty (tlačítka a textové pole). Editovacie políčka sa tu ešte nenachádzajú, pretože tie sa vytvoria až po zadaní rozmeru n. (Dovtedy ešte nevieme koľko ich vlastne bude.)

2.časť programu - vytvorenie matice $n \times n$ editovacích políčkoch na základe vstupu z klávesnice:

```
26 function figure1 CreateFcn(hObject, eventdata, handles)
27 - global H
28 - global n
29 - n=input('Zadajte rozmer matice: ')
30 - %čaká na vstup z klávesnice, ktorý potom načíta do n
31 - H=zeros(n);
32 - %nulová matica nxn, potom ju vyplníme ďalej v cykle
33 - for i=1:n
34 -     for j=1:n
35         H(i,j)=uicontrol('style','edit','units','centimeters','position',
36             [1.5*(j-1) 0.7*(n-i) 1.5 0.7],'string','0');
37         %uicontrol(parametre)...môže to byť button, editovacie políčko,
38         %textové pole...
39         %vytvoríme vo figure1 editovacie políčka ('style', 'edit'); rozmery
40         %políčka sú v cm ('units','centimeters'),potom tam je pozícia v rámci
41         %figure 1; nápis na políčkach je 0 ('string','0')
42 -     end
43 - end
44
```

Na plochu sa vypíše “zadajte rozmer matice: “ a čaká sa na vstup z klávesnice. Na základe tohto vstupu sa vo for cykle vytvorí matica s prvkami $H(i, j)$, $i, j = 1, \dots, n$ - editovacie políčka.

3.časť programu - samotný výpočet minimálneho polynómu:

```

45 - function But_Callback(hObject, eventdata, handles)
46 -     %funkcia sa vykoná po kliknutí na tlačítko
47 -     global H
48 -     global n
49 -     for i=1:n
50 -         for j=1:n
51 -             A(i,j)=str2double(get(H(i,j),'string'));
52 -             %get načíta názov z editovacieho políčka H(i,j) do matice A
53 -             %názov políčka potrebujeme zmeniť na číslo príkazom str2double
54 -         end
55 -     end
56 -     v=eig(A)
57 -     sort(v);
58 -     vlh = unique(v); %každé číslo z vektora v bude vo vektore vlh práve raz
59 -     I=eye(n);
60 -     polyn='';
61 -     for i=1:length(vlh)
62 -         for j=1:n
63 -             if rank((A-I*vlh(i))^j)==rank((A-I*vlh(i))^(j+1)) nasobnost=j;
64 -                 if vlh(i)<0 p=sprintf(' (lambda+%0.3f)^%0.0f',-vlh(i),nasobnost);
65 -                 end
66 -                 if vlh(i)>0 p=sprintf(' (lambda-%0.3f)^%0.0f',vlh(i),nasobnost);
67 -                 end
68 -                 if vlh(i)==0 p=sprintf(' lambda^%0.0f',nasobnost); end
69 -                 %sprintf spoji text a číslo
70 -                 polyn=strcat(polyn,p);
71 -                 %strcat spája textové reťazce (tie p=sprintf...)
72 -                 break;
73 -                 %keď už sme našli násobnosť danej vl. hodnoty tak stop a ide na
74 -                 %ďalšiu až po length(vlh)
75 -             end
76 -         end
77 -     end
78 -     set(handles.T,'String',polyn);
79 -     %nastaví T (oranžové textové pole) jeho názov zmení na polyn, čiže tam
80 -     %vypíše ten polynóm

```

Po stlačení tlačítka “minimálny polynóm”, get načíta názvy z editovacích políčk H do matice A. Funkciou $v=\text{eig}(A)$ získame vektor vlastných čísel matice A a funkciou $\text{unique}(v)$ obmedzíme ich násobnosť na 1 aby nám neskôr nevznikali v minimálnom polynóme problémy, keďže budeme prechádzať každú zložku $\text{unique}(v)$. V cykle prechádzame každým rôznym vlastným číslom, a postupne umocňujeme maticu $(A - \lambda I)$, pričom sledujeme jej hodnotu. Ak sa nám od určitej mocniny hodnota matice už neznižuje, stopneme cyklus a tú konkrétnu mocninu zahrnieme do získania minimálneho polynómu. Ako ilustračný príklad zoberme maticu 8×8 , ktorú máme vytvorenú v okne na str.37. Jej vlastné čísla sú 0 a 1, (nezaujíma nás násobnosť vlastných čísel). Zoberme $\lambda_1 = 0$. Zistíme, že hodnota matice $(A - \lambda_1 I)^1$ sa rovná 6. Hodnota matice $(A - \lambda_1 I)^2$ sa rovná 4. Hľadáme takú mocninu matice $(A - \lambda_1 I)$ na ktorej sa nám ustáli jej hodnota a ďalšie jej vyššie umocňovanie, nám ju už nebude znižovať. Spravme ešte hodnotu matice $(A - \lambda_1 I)^3$, zistili sme, že sa tiež rovná 4. Ustálila sa nám hodnota matice $(A - \lambda_1 I)$

na 4. Teda od jej druhej mocniny už jej hodnosť neklesá a preto súčasťou minimálneho polynómu bude výraz λ^2 . Tento proces zopakujeme aj pre druhé vlastné číslo. A naozaj dostaneme minimálny polynóm v textovom okne na str.37.

Záver

Cieľom bakalárskej práce bolo priblížiť pojem minimálny polynóm. Priblížili sme si rôzne metódy ako sa dostať k minimálnemu polynómu. Postupne sme sa od definícií vlastných čísel, charakteristických polynómov a diagonalizáciach dostávali k minimálnemu polynómu. Pozreli sme sa na vzťahy medzi nilpotentnými a diagonalizovateľnými maticami využívaním minimálneho polynómu. A nakoniec sme zostavili program v MATLAB-e na získanie minimálneho polynómu ľubovoľnej štvorcovej matice.

Literatúra

- [1] BURROW, M.D. 1973. The Minimal Polynomial of a Linear Transformation.
- [2] CONRAD, K. The Minimal Polynomial And Some Applications.
- [3] MEYER, C.D. Matrix analysis and applied linear algebra.
- [4] KILIANOVÁ, S. Matematický softvér. [online]. [cit. 2011.06.01.] Dostupné na internete:
<<http://www.iam.fmph.uniba.sk/institute/kilianova/teachingmatlab.html>>
- [5] SMÍTAL, J. - GEDEONOVÁ, E. 1981. Lineárna algebra. Bratislava : Univerzita Komenského, 1981. 116 s.
- [6] ZLATOŠ, P. Lineárna algebra a geometria. [online]. [cit. 2011.05.29.]. Dostupné na internete: <<http://thales.doa.fmph.uniba.sk/zlatos/la/Leto18.pdf>>