

FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY
UNIVERZITY KOMENSKÉHO
V BRATISLAVE

BAKALÁRSKA PRÁCA

Bratislava 2011

Barbora Vyhnánková

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE

Fakulta matematiky, fyziky a informatiky



METÓDY NA URČENIE ŠTRUKTÚRY ÚROKOVEJ MIERY

Bakalárska práca

Evidenčné číslo: e078f905-450b-4263-99e9-dd58d00f5764

Študijný odbor: 9.1.9 Aplikovaná matematika

Študijný program: Ekonomická a finančná matematika

Školiace pracovisko: Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky

Vedúci bakalárskej práce a konzultant: Mgr.Katarína Kvašňáková

Bratislava 2011

Barbora Vyhnánková



Univerzita Komenského v Bratislave
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

ZADANIE ZÁVEREČNEJ PRÁCE

Meno a priezvisko študenta: Barbora Vyhnánková
Študijný program: ekonomická a finančná matematika (Jednoodborové štúdium, bakalársky I. st., denná forma)
Študijný odbor: 9.1.9. aplikovaná matematika
Typ záverečnej práce: bakalárska
Jazyk záverečnej práce: slovenský

Názov : Metódy na určenie štruktúry úrokovej miery

Cieľ : Zoznámenie sa so základnými metódami pre určovanie štruktúry úrokovej miery, porovnanie metód na reálnych dátach.

Literatúra : Melicherčík, I., Olšárová, L., Úradníček, V., Kapitoly z finančnej matematiky
Filipovic, D., Term-Structure Models.

Vedúci : Katarína Kvašňáková

Dátum zadania: 27.10.2010

Dátum schválenia: 08.11.2010

.....
doc. RNDr. Margaréta Halická, CSc.
garant študijného programu

.....
Vyhnánková

študent

.....
Kvašňáková

vedúci práce

Dátum potvrdenia finálnej verzie práce, súhlas s jej odovzdaním (vrátane spôsobu sprístupnenia)

.....
Kvašňáková

vedúci práce

Čestné prehlásenie

Prehlasujem, že som túto bakalársku prácu vypracovala samostatne s použitím uvedenej odbornej literatúry a ďalších zdrojov.

Bratislava 03.06.2011

.....

Barbora Vyhnánková

Podakovanie

Ďakujem mojej školiteľke Mgr. Kataríne Kvašňákovej za cenné rady, pomoc a poskytnutú literatúru, mojim rodičom a snúbencovi za trpezlivosť a podporu a takisto ďakujem Bohu, ktorý mi dával silu a múdrosť.

Abstrakt

VYHNÁNKOVÁ, Barbora: Metódy na určenie štruktúry úrokovej miery [Bakalárska práca], Univerzita Komenského v Bratislave, Fakulta matematiky, fyziky a informatiky, Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky; školiteľ: Mgr. Katarína Kvašňáková, Bratislava, 2011, 33 s.

Cieľom bakalárskej práce je ukázať, akými metódami popredné centrálné banky určujú časovú štruktúru úrokových mier. Každá metóda sa skladá z teoretickej a empirickej časti - v teoretickej časti popisujeme, ako daná metóda funguje a v empirickej túto metódu aplikujeme na dáta, s ktorými pracujeme - forwardové úrokové miery Španielska. Okrem týchto metód uvádzam aj analýzu hlavných komponentov.

Kľúčové slová: časová štruktúra úrokových mier, forwardová krivka, dlhopisy, bootstrap, kubické splajny, Nelson-Siegelova metóda, analýza hlavných komponentov

Abstract

VYHNÁNKOVÁ, Barbora: The methods for determining the structure of interest rates [Bachelor work], Comenius University in Bratislava, Faculty of Mathematics, Physics and Informatics, Department of Applied Mathematics and Statistics; Supervisor: Mgr. Katarína Kvašňáková, Bratislava, 2011, 33 p.

Goal of this work is to show which methods are used by the leading central banks to determine the term structure of interest rates. Each method consists of theoretical and empirical part - the theoretical part describes how the method works and in empirical part we apply this method to the data we work with - Spanish forward interest rates. In addition to these methods we mention also principal component analysis.

Key words: term structure of interest rates, forward curve, bonds, bootstrap, cubic splines, Nelson-Siegel method, principal component analysis

Obsah

1	Úvod	1
2	Finančné trhy	2
2.1	Dlhopisy	2
2.2	Swapy	4
2.3	Časová štruktúra úrokových mier	5
2.4	Forwardová krivka	5
2.5	Bootstrap	8
3	Metódy na určenie štruktúry úrokovej miery	9
3.1	Parametrické a neparametrické metódy	9
3.2	Základná metóda	9
3.3	Kubické splajny	12
3.4	Nelson-Siegel model	17
3.5	Realita	23
3.6	Analýza hlavných komponentov	24
4	Záver	32

1 Úvod

Odhadovanie výnosovej krivky je v modernom ekonomickom svete veľmi dôležité. Z čiastkových údajov sa snažíme vytvoriť si komplexný obraz, ktorý by dostatočne dobre popisoval správanie sa tejto krivky. Ako uvidíme, v niektorých situáciách ťažko povedať, či je jedna metóda lepšia ako druhá, často závisí na osobných preferenciách tímov centrálnych bánk jednotlivých krajín. Tieto preferencie môžu závisieť od mnohých faktorov, ako jednoduchší postup, dobré skúsenosti z minulosti, či počet faktorov, ktoré majú vplyv na výsledný tvar odhadovanej krivky.

Túto tému som si vybrala preto, lebo sa mi zdá ako užitočná nadstavba vedomostí, ktoré som dosiaľ nadobudla počas troch rokov štúdia na tejto fakulte. Som si istá, že v budúcnosti sa mi tieto vedomosti zídu, či ešte počas štúdia alebo neskôr v práci.

Cieľom mojej bakalárskej práce je detailne oboznámiť čitateľa s niekoľkými najznámejšími a najpoužívanějšími metódami v tejto oblasti. Text je doplnený mnohými sprievodnými obrázkami a tabuľkami pre vizualizáciu a lepšie pochopenie preberaných metód. Následne výstupy týchto metód porovnávam, k čomu mi dobre poslúžili práve obrázky.

V druhej kapitole, **Finančné trhy**, uvádzam základnú charakteristiku finančných nástrojov, ktoré budem v mojej práci používať.

V tretej kapitole, nazvanej rovnako ako celá bakalárska práca, **Metódy na určenie štruktúry úrokovej miery**, pojednávam o každej z metód zvlášť. V prvej, najjednoduchšej metóde prerátavam úrokové miery na forwardové a časovú štruktúru forwardových úrokových mier zostrojím jednoducho - pospájam jednotlivé body popisujúce závislosť forwardovej úrokovej miery od maturity dlhopisu. Je zrejmé, že táto metóda nie je používaná, lebo existujú lepšie a exaktnejšie, zo zložitejších metód budem viac písať o metóde kubických splajnov a metóde Nelsona a Siegela. Nakoniec sa pozrieme na výnosové krivky (no obdobný postup sa dá urobiť aj pre forwardové) a ich vývoj v čase a to nám umožní analýza hlavných komponentov. Každá podkapitola obsahuje teoretické minimum potrebné na pochopenie metódy a následne jej aplikáciu na dáta, ktoré som si vybrala.

Posledná kapitola, **Záver**, zhŕňa poznatky, ktoré som nadobudla počas písania práce.

Základná literatúra, z ktorej som čerpala poznatky a inšpiráciu pre potreby tejto práce, bola kniha od Filipoviča [1] a učebnica od Melicherčíka, Olšarovej a Úradníčka [2].

2 Finančné trhy

V tejto kapitole som čerpala z kníh [1] a [2] v zozname použitej literatúry.

Technicky povedané, finančný trh je miesto alebo mechanizmus, ktorý dovoľuje ľuďom predávať a kupovať rôzne finančné prostriedky, ako napríklad dlhopisy, finančné deriváty, komodity a iné. V podstate zhromažďuje ľudí, ktorí chcú predávať a ľudí, ktorí chcú kupovať a dáva im príležitosť, aby uzatvorili obchod. Finančné trhy by mali byť transparentné a mali by mať základné pravidlá, ktoré sú známe všetkým zúčastneným.

Môžeme ich nájsť skoro v každej (civilizovanej) krajine, od menších trhov až po celosvetové, ako New York Stock Exchange (NYSE), American Stock Exchange (AMEX) v Amerike, Euronext, OMX v Európe a dokonca Bratislavská burza cenných papierov, ktorá je jedinou burzou na Slovensku.

V mojej bakalárskej práci sa budem venovať dvom subjektom finančného trhu: dlhopisy a swapy. Pomocou základnej charakteristiky objasním, čo tieto pojmy znamenajú a ako sa dá pomocou nich odhadovať časová štruktúra úrokových mier.

2.1 Dlhopisy

Definícia 2.1.1 (Dlhopis). *Dlhopis je cenný papier, v ktorom sa dlžník zaväzuje, že v stanovenej lehote splatí nominálnu hodnotu a v dohodnutých obdobiach bude vyplácať pravidelný úrok, tzv. kupón.*

Ak si takýto dlhopis kúpime, máme z neho peňažný tok (cashflow), ktorý vyzerá takto:

$$C, C, C, C, \dots, C, C + F,$$

kde C je kupón a F je tzv. nominálna hodnota (face value) dlhopisu. Takýto druh dlhopisu sa nazýva kupónový. Ďalší druh je bezkupónový dlhopis. Ako už naznačuje jeho názov, keď si ho kúpime, jediné, čo dostaneme je nominálna hodnota v čase splatnosti. Môžeme si ho teda predstaviť ako klasické požičanie peňazí.

Dôležitý faktor je δ , čo je interval výplat kupónov (ak sa kupóny vyplácajú ročne $\delta = 1$, ak sa vyplácajú polročne, potom $\delta = 1/2$ a rátame s prílušnou hodnotou kupónu, teda $C/2$).

V prípade diskrétného úročenia cenu kupónového dlhopisu vypočítame podľa nasledovného vzťahu:

$$P = \sum_{i=1}^n \frac{C}{(1 + r_i)^i} + \frac{F}{(1 + r_n)^n} \quad (1)$$

V prípade spojitého úročenia vyzerá vzorec nasledovne:

$$P = \sum_{i=1}^n C\delta e^{-R(T_0, T_i)(T_i - T_0)} + F e^{-R(T_0, T_n)(T_n - T_0)}, \quad (2)$$

kde $T_i = T_0 + i\delta$.

Súčasnú hodnotu bezkupónových dlhopisov vyrátame z nasledovných vzorcov:

$$P = \frac{F}{(1 + r_n)^n} \quad (3)$$

v diskretnom prípade a v spojitom:

$$P(T_0, T) = e^{-R(T_0, T)(T - T_0)}. \quad (4)$$

Keď v mojej práci budem spomínať termín "úrokové miery", mám na mysli úrokové miery vypočítané z bezkupónových dlhopisov.

Pre zaujímavosť by som uviedla špeciálny druh dlhopisu a to je dlhopis s plávajúcim kupónom. Je to kupónový dlhopis, ktorého kupón je naviazaný na aktuálnu úrokovú mieru. Je tu teda určitá neistota, keďže úrokové miery môžeme dopredu len odhadovať. Napríklad ak sa jedná o dlhopis s $\delta = 1$, tak kupón na rok 2011 je naviazaný na úrokovú mieru z roku 2010.

Keďže kupóny sú naviazané na poslednú úrokovú mieru, konkrétna formula vyzerá takto:

$$c_i = (T_i - T_{i-1})F(T_{i-1}, T_i)N,$$

kde $F(T_{i-1}, T_i)$ je aktuálna úroková miera a N je v tomto prípade nominálna hodnota dlhopisu. Zvolíme $N = 1$, pre zjednodušenie, a plávajúci kupón vyjadríme z definície úrokovej miery pre časové obdobie $<i - 1, i>$:

$$c_i = \frac{1}{P(T_{i-1}, T_i)} - 1$$

Hodnota výplaty -1 v počiatočnom čase t je $-P(t, T_i)$ (pretože je to diskontný dlhopis) a hodnota $\frac{1}{P(T_{i-1}, T_i)}$ v čase t je $P(t, T_{i-1})$. Po realizácii konkrétnej stratégie je hodnota plávajúceho kupónu v čase t

$$P(t, T_{i-1}) - P(t, T_i). \quad (5)$$

Formulu 5 sme odvodili, pretože ju použijeme v nasledovnej podkapitole.

2.2 Swapy

Definícia 2.2.1 (Swap). *Swap je dohoda dvoch subjektov o zámene série platieb uskutočňovaných pravidelne v priebehu dohodnutého obdobia.*

Swapy nie sú obchodované na burze, obchody sú uzatvárané medzi dvoma stranami na základe osobitnej dohody.

Fungovanie obchodovania so swapmi si vysvetlíme na úrokových swapoch, kde ide o výmenu platieb počítaných na báze pevnej úrokovej miery za platby počítané na báze pohyblivej úrokovej miery (teda bude sa jednať o plávajúci kupón z predchádzajúcej kapitoly). Na swap sa môžeme pozrieť z dvoch strán, kde jedna strana

- platí fixné $K\delta N$
- dostáva pohyblivé $F(T_{i-1}, T_i)\delta N$

kde K je fixná úroková miera, F je pohyblivá úroková miera a N je nominálna hodnota. Cashflow je

$$(F(T_{i-1}, T_i) - K)\delta N$$

a v počiatočnom čase t (s využitím (5)) je jeho hodnota

$$N(P(t, T_{i-1}) - P(t, T_i) - K\delta P(t, T_i))$$

Keď zrátame všetky peňažné toky, dostaneme tzv. totálnu hodnotu swapu

$$\Pi_1(t) = N(P(t, T_0) - P(t, T_n) - K\delta \sum_{i=1}^n P(t, T_i)). \quad (6)$$

Druhá strana tohto swapového obchodu má opačné podmienky:

- dostáva fixné $K\delta N$
- platí pohyblivé $F(T_{i-1}, T_i)\delta N$

Nemusíme opakovat celý proces, stačí keď zmeníme znamienko vo výslednej hodnote swapu. Platí teda vzťah

$$\Pi_2(t) = -\Pi_1(t)$$

Posledná otázka zostáva, ako si dohodnú K , aby bolo "fér"? Je to K , pre ktoré $\Pi_1(t) = \Pi_2(t) = 0$ a K v tomto prípade príslušná úroková miera vyzerá nasledovne:

$$R_{swap}(t) = \frac{P(t, T_0) - P(t, T_n)}{\delta \sum_{i=1}^n P(t, T_i)} \quad (7)$$

To, prečo takáto zmluva vzniká, je napr. rozdiel v očakávaní toho, ako sa bude správať LIBOR.¹ Keďže swap je dohoda dvoch zmluvných strán o výmene platieb, predstavme si prípad, kde si jedna strana zoberie úver, kde bude platiť pohyblivý úrok a druhá strana si zoberie klasický úver s fixným úrokom. V istom momente prvá strana očakáva, že LIBOR porastie, čo bude pre ňu nevýhodné. Preto môže uzatvoriť mimoburzovnú dohodu o zámene platby so stranou číslo 2. Druhá strana s týmto kontraktom bude súhlasiť, ak naopak očakáva, že LIBOR klesne. Tu vzniká pôda pre uzavretie obchodu, aký sme práve popísali.

2.3 Časová štruktúra úrokových mier

Časová štruktúra úrokových mier (ČŠÚM) je funkcia, ktorá vyjadruje závislosť úrokovej miery od maturity dlhopisu. Vo väčšine prípadov je rastúca, výnimočne môže byť aj klesajúca. Jej tvar vyjadruje aj očakávania trhu - ak je rastúca, očakávame, že úrokové miery budú rásť. Iný názov je výnosová krivka bezkupónových dlhopisov. V mojej práci budem modelovať ČŠÚM, teda modelovať tvar krivky úrokových mier (z diskretných údajov na základe rôznych metód predpovedať, ako sa bude správať celá krivka) v čase. Prečo ju potrebujeme poznať? V praxi existuje veľa finančných nástrojov, ktorých cena je odvodzovaná od úrokových mier² a preto potrebujeme poznať celú informáciu o úrokových mierach vyrátaných z dlhopisu (alebo iného finančného instrumentu, z ktorého sa dajú vyrátať úrokové miery).

2.4 Forwardová krivka

Definícia 2.4.1 (Forwardová úroková miera). *Forwardová úroková miera je úroková miera medzi dvoma časovými obdobiami za podmienok dohodnutých dnes.*

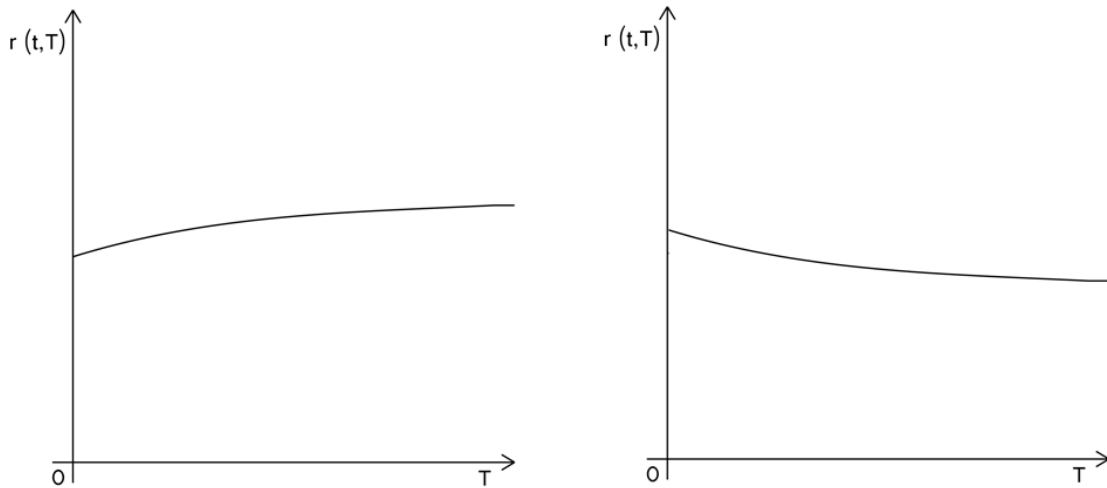
Vznik forwardového kontraktu je nasledovný: v čase t podpíšeme kontrakt, že v čase $T_1 > t$ kúpime diskotný dlhopis za cenu K s časom splatnosti $T_2 > T_1$.

Stratégia vyzerá tak, že v čase t predáme K ks diskontného dlhopisu $P(t, T_1)$ a kúpime 1 ks diskontného dlhopisu $P(t, T_2)$.

Bilancia v čase T_1 je $P(T_1, T_2) - K$. Hodnota K nie je neznáma, dá sa vyčíslieť. Chceme, aby bola hodnota kontraktu v čase t nulová (teda aby nedošlo k arbitráži) a táto podmienka je $K \cdot P(t, T_1) - P(t, T_2) = 0$. Navyše vieme, že za štandardných

¹LIBOR je úroková miera, za ktorú si banky na Londýnskom trhu medzi sebou požičiavajú peňažné prostriedky. V tomto prípade rátame s tým, že pohyblivá sadzba je naviazaná na LIBOR (referenčná sadzba).

²Napr. opcie. Informácia čerpaná z internetovej stránky <http://www.derivat.sk/index.php?PageID=1392>



Obr. 1: Rastúca a klesajúca časová štruktúra úrokových mier

okolností na trhu platí $P(t, T_2) > P(t, T_1)$ a zlúčením týchto podmienok dostávame, čomu je rovné K :

$$K = \frac{P(t, T_2)}{P(t, T_1)} < 1$$

K je teda cena, ktorú zaplatíme v budúcnosti za dlhopis. S využitím vzťahu (4) a vyjadrením úrokovej miery z neho vieme analogicky vyjadriť úrok z forwardového kontraktu:

$$f(t, T_1, T_2) = -\frac{\ln K}{T_2 - T_1} = -\frac{\ln \frac{P(t, T_2)}{P(t, T_1)}}{T_2 - T_1} = -\frac{\ln P(t, T_2) - \ln P(t, T_1)}{T_2 - T_1} \quad (8)$$

Potom pre čas T_2 blízky T_1 (t.j. limita výrazu (8) pre $T_2 \rightarrow T_1$) je:

$$f(t, T) = -\frac{\partial}{\partial T} \ln P(t, T), \quad (9)$$

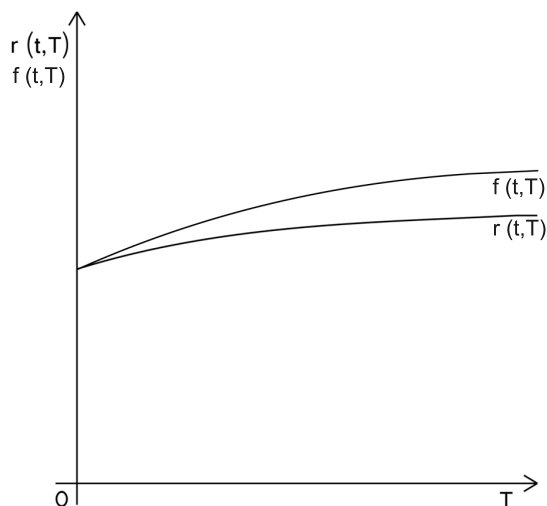
kde $f(t, T)$ nazývame okamžitou forwardovou úrokovou mierou. Chceme zistiť, aký je vzťah medzi úrokovou mierou a forwardovou úrokovou mierou. Opäť zo vzťahu (4) platí:

$$R(t, T) = -\frac{\ln P(t, T)}{T - t} \rightarrow -\ln P(t, T) = (T - t)R(t, T)$$

Keď túto rovnicu zderivujeme, tak s využitím vzťahu (9) dostávame hľadaný vzťah:

$$f(t, T) = R(t, T) + (T - t) \frac{\partial}{\partial T} R(t, T) \quad (10)$$

Z tejto rovnice môžeme vypočítavať, že pre začiatkový bod $T=t$ sa tieto úrokové miery rovnajú, to znamená že výnosová a aj forwardová krivka vychádzajú z rovnakého počiatku. Ak je výnosová krivka rastúca, je rastúca aj forwardová a okrem spomenutého počiatkového bodu nadobúda vyššie hodnoty.



Obr. 2: Vzťah medzi úrokovými mierami a forwardovými úrokovými mierami

Ešte odvodíme jeden vzťah, ktorý budeme neskôr potrebovať v metóde Nelsona a Siegela. Zintegrujeme rovnicu (9):

$$\ln P(t, T) = - \int_t^T f(t, u) du,$$

za $P(t, T)$ dosadíme ekvivalentný výraz zo vzťahu (4) a dostaneme túto výslednú rovnicu:

$$R(t, T) = \frac{1}{(T - t)} \int_t^T f(t, u) du. \quad (11)$$

Ak poznáme klasickú štruktúru úrokových mier, tak poznáme aj forwardové. Obe tieto krivky dostatočne popisujú situáciu na trhu. V čom spočíva výhoda forwardovej? Časová štruktúra úrokových mier zostrojená na základe úrokových mier je často interpretovaná ako očakávané budúce priemery úrokových mier, pričom forwardová krivka nám hovorí o ich očakávanej trajektórii a teda informácie v nej sú ľahšie separovateľné pre konkrétny časový okamih.

³V spracovaní tejto časti o forwardových úrokových mierach som použila najmä literatúru [2]

Pre porovnanie týchto dvoch kriviek si zoberme konkrétne T , napríklad $T = 4$. Potom časová štruktúra úrokových mier v sebe obsahuje informáciu do času $T = 4$ a štruktúra forwardových úrokových mier má v sebe informáciu o tom, aká bude úroková miera o 4 roky.

2.5 Bootstrap

Keď chceme odhadovať ČŠÚM, potrebujeme poznať úrokové miery. Ak máme k dispozícii napr. dlhopisy, na základe ktorých ideme zostrojovať tieto krivky, nie je samozrejmé, že ich máme popísané pomocou úrokových mier - často sú to súčasné ceny dlhopisov, ktoré ich popisujú. Vieme, že informácie o súčasných cenách a úrokových mierach sú ekvivalentné - z jedných vieme dorátať druhé. V bootstrap metóde sa postupne snažíme oddeliť informáciu o úrokových mierach z cien dlhopisov, alebo iných finančných nástrojov (napr. swapy, futurity).

Táto metóda je ľahko pochopiteľná a pomerne intuitívna. Predpoklad je, že na každé obdobie máme k dispozícii jeden dlhopis, a tieto dlhopisy nám postupne vytvárajú sústavu rovníc (rovnica (2) rozpísaná pre rôzne časy). Kupóny, súčasné a nominálne hodnoty dlhopisov sú nám známe, počiatkový čas $t_0 = 0$.

$$P_1 = (C_1 + F)e^{-r_1 t_1}$$

$$P_2 = C_2 e^{-r_1 t_1} + (C_2 + F)e^{-r_2 t_2}$$

$$\vdots$$

$$P_n = C_n e^{-r_1 t_1} + C_n e^{-r_2 t_2} + \dots + (C_n + F)e^{-r_n t_n}$$

Najprv vypočítame r_1 , pomocou neho dopočítame r_2 , a takto iteratívne postupujeme ďalej.

Ak máme k dispozícii bezkupónové dlhopisy, je postup ešte jednoduchší. Zo vzťahu (4) pre bezkupónový dlhopis by sme všetky úrokové miery vyjadrili ako

$$r_i = -\frac{1}{t_i} \ln P(t_i).$$

Tu sú jednotlivé r_i vypočítané nezávisle na predchádzajúcich úrokových mierach, t.j. v tomto prípade postup nie je iteratívny. Keď máme všetky dáta "prerátané" na úrokové miery, môžeme už použiť metódy, ktoré nám poskytnú informácie o celej ČŠÚM.

3 Metódy na určenie štruktúry úrokovej miery

V tejto práci sa budem zaoberať štyrmi metódami:

- Základná metóda
- Kubické splajny
- Nelson-Siegel model
- Analýza hlavných komponentov

3.1 Parametrické a neparametrické metódy

Na začiatok si objasníme, čo znamená klasifikácia metód na parametrické a neparametrické. Pri neparametrických metódach nezavádzame žiadne predpoklady o krivke, nemáme vopred danú rodinu kriviek, do ktorej by mala odhadovaná krivka patriť, a preto nepotrebujeme zisťovať parametre. Takouto metódou je napr. bootstrap.

Naopak, parametrické metódy predpokladajú už nejakú formu a krivku potom hľadáme vo vopred známom tvare s konkrétnymi vlastnosťami. Takýmito metódami sú v mojej práci Nelson-Siegel metóda a metóda kubických splajnov.

3.2 Základná metóda

V dátach, ktoré budem používať (zdroj: Datastream) sú bezkupónové dlhopisy (zero bondy) už vyjadrené pomocou úrokových mier, to znamená, že nemusíme použiť bootstrap. Keď máme úrokové miery, vyrátame forwardové úrokové miery. Výhody forwardovej úrokovej miery sú spomenuté v predchádzajúcej kapitole.

Dáta obsahujú informáciu o 1 až 6-ročných bezkupónových dlhopisoch pre Španielsko. Budeme pozeráť na to, ako sa forwardové krivky na tomto konkrétnom trhu menili vzhľadom na čas pred krízou, počas nej a po nej. A keďže Španielsko je momentálne jeden z horúcich kandidátov na žiadanie o pomoc Európskej Únie, môžeme predpokladať, že kríza mala dopad na španielsku ekonomiku.

Ako reprezentatívne dátumy, ku ktorým budeme sledovať tieto dlhopisy, som si vybrala 12.apríla 2003 (pred krízou), 1.apríla 2008 (počas krízy) a 11.apríla 2010 (po kríze).

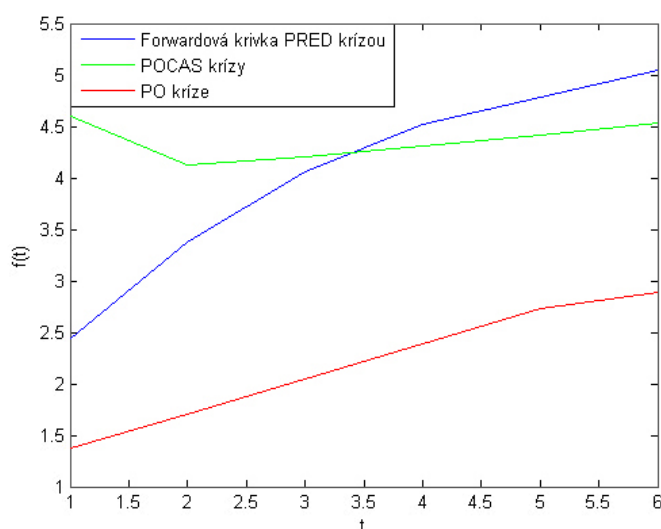
Z nich som si pomocou vstavanej MATLAB-ovskej funkcie 'zero2fwd' vypočítala forwardové úrokové miery.

	1Y	2Y	3Y	4Y	5Y	6Y
12.apríl 2003	2.4919	2.9856	3.3649	3.6712	3.9055	4.1085
1.apríl 2008	4.5951	4.3567	4.3083	4.3097	4.3327	4.3661
11.apríl 2010	1.3758	1.5426	1.7103	1.8794	2.0502	2.2191

Tabuľka 1: Španielske úrokové miery

	1Y	2Y	3Y	4Y	5Y	6Y
12.apríl 2003	2.44	3.38	4.06	4.52	4.78	5.04
1.apríl 2008	4.60	4.12	4.21	4.31	4.42	4.53
11.apríl 2010	1.38	1.71	2.05	2.39	2.73	2.89

Tabuľka 2: Španielske forwardové úrokové miery



Obr. 3: Príslušné forwardové krivky, základná metóda

Krivky sú zobrazené na Obr.3. Dostali sme ich tak, že sme pospájali príslušné body (forwardové úrokové miery v závislosti od maturity dlhopisu). Keď sa pozrieme na krivku so začiatkom v roku 2003, vidíme rastúci trend, čo je bežný úkaz, na dlhší čas požičiavame s vyšším úrokom (ak požičiame ten istý obnos niekomu na jeden rok a inému na dva roky, ten druhý by musel splatiť vyšší úrok, pretože nebudeme môcť s peniazmi hýbať dlhší čas a môžeme premeškať investičné možnosti, či minimálne to, že ich môžeme uložiť na účet a získať z nich úroky - 1 euro dnes je viac ako 1 euro zajtra)

Avšak, keď sa pozrieme na krivku z roku 2008, vidíme, že časová štruktúra for-

wardových úrokových mier má klesajúci charakter až po rok 2010 a potom pozvoľna rastie. Keďže táto krivka v sebe skrýva aj informáciu o očakávaní trhu, môžeme sa domnievať, že tvar krivky reflektuje očakávanie ľudí, že kríza sa do 2 rokov skončí (po 2.roku očakávaný jemný nárast). V porovnaní s predchádzajúcou krivkou sú úrokové miery na približne rovnakej hladine. Teda môžeme tu pozorovať úkaz, že nie je veľký rozdiel medzi forwardovou úrokovou mierou prislúchajúcou k 1-ročnému a 6-ročnému dlhopisu a teda 6-ročný sa nám v tomto období neoplatí kupovať. Môžeme sa domnievať, že je to fenomén súvisiaci s krízou.

V roku 2010 sa svet spamätáva z krízy a forwardová krivka má teraz podobný tvar ako v roku 2003, aj keď úrokové miery sú nižšie - peniaze sú lacnejšie.

Okrem bezkupónových dlhopisov máme k dispozícii swapové úrokové miery.

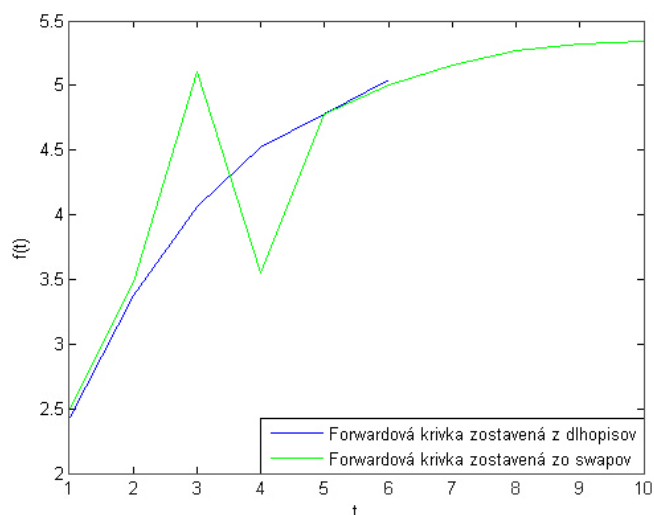
	1Y	2Y	3Y	4Y	5Y	6Y	7Y	8Y	9Y	10Y
12.apríl 2003	2.512	2.995	3.37	3.662	3.885	4.07	4.225	4.355	4.462	4.55
1.apríl 2008	4.61	4.37	4.311	4.31	4.332	4.361	4.399	4.438	4.48	4.522
11.apríl 2010	1.396	1.564	1.738	1.904	2.071	2.234	2.381	2.507	2.61	2.705

Tabuľka 3: Swapové úrokové miery pre Španielsko

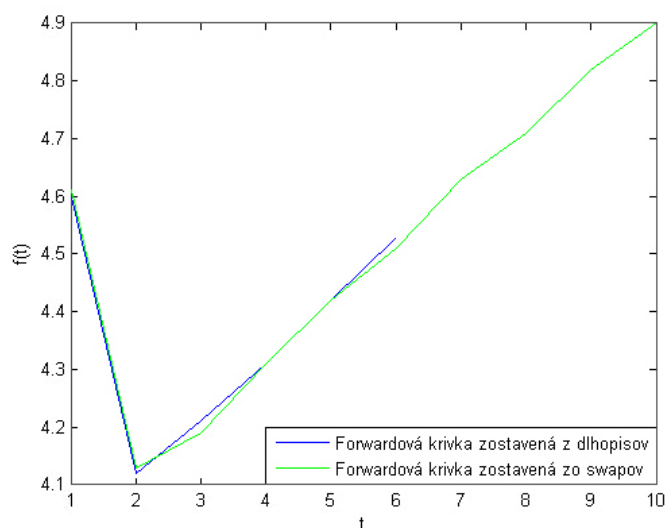
Otázkou zostáva, či bude odhadnutá forwardová krivka zostavená zo swapových úrokových mier rovnaká ako krivka zostavená z bezkupónových dlhopisov. Teoreticky by mala byť na trhu len jedna forwardová krivka, to očakávame aj z dát. Na zostavenie krivky použijeme rovnaký MATLAB príkaz ako predtým - 'zero2fwd'.

V druhom a treťom prípade sú krivky veľmi podobné, v prvom prípade sú tu určité výkyvy krivky zostavenej zo swapov, ale vo všeobecnosti môžeme povedať, že použitie týchto dvoch finančných inštrumentov v tejto metóde je ekvivalentné. Výkyvy, ktoré vidíme na Obr.5 sú zrejme spôsobené numerickou nestabilitou tejto metódy - máme len 6 bodov a ak sa len 1 z nich vychýli, môže to spôsobiť to markantnú zmenu tvaru odhadovanej krivky.

Keď sa pozrieme na grafy, ktoré boli zostrojené na základe tejto metódy, môžu sa nám zdať nie celkom realistické, lebo očakávame, že úrokové miery sa menia hladko, pričom na grafoch boli vidno výrazné "hroty". Preto ďalšia metóda, na ktorú sa detailnejšie pozrieme, je metóda kubických splajnov, ktorá tento úkaz eliminuje a grafy zhladzuje. Avšak za cenu oveľa komplikovanejšieho postupu.



Obr. 4: Porovnanie kriviek zostavených z bezkupónových dlhopisov a swapov, pred krízou, jednoduchá metóda

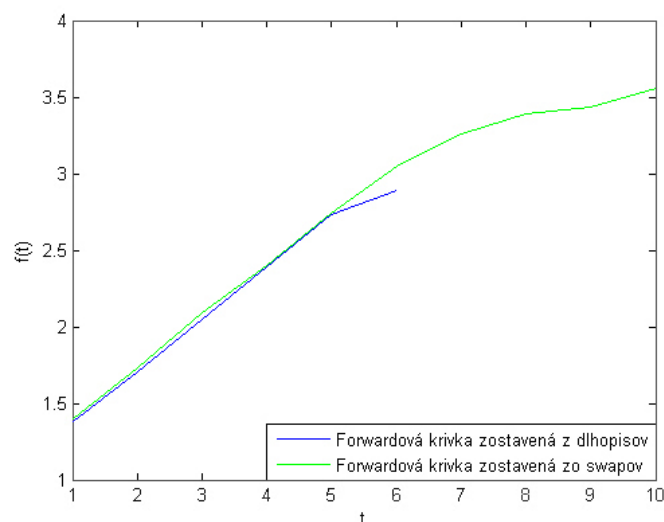


Obr. 5: Porovnanie kriviek zostavených z bezkupónových dlhopisov a swapov, počas krízy, jednoduchá metóda

3.3 Kubické splajny

Hlavný zdroj v tejto podkapitole je [3].

V metóde kubických splajnov, rovnako ako v predchádzajúcej metóde, budeme na základe zadaných bodov (forwardových úrokových mier v závislosti od maturity dlhopisu) odhadovať krivku, ktorá týmito bodmi prechádza a čo najlepšie aproximuje hľadanú forwardovú krivku. Hľadáme teda interpolačný polynóm, ktorý by ju najlepšie popisoval.



Obr. 6: Porovnanie kriviek zostavených z bezkupónových dlhopisov a swapov, po kríze, jednoduchá metóda

Ak by sme použili lineárnu interpoláciu, danú funkciu (ktorá môže byť zadaná aj diskkrétne) aproximujeme pomocou polynómu nanajvyš stupňa 1, ak je kvadratická, tak pomocou polynómu nanajvyš stupňa 2 a pod. Nevýhodou môže byť, že polynóm určitého stupňa je limitovaný tvarom svojej funkcie (a príslušného grafu) a môžu sa vytvoriť dosť veľké odchýlky od odhadovanej funkcie. Preto sa v oblasti aplikovanej matematiky často používajú tzv. **splajny**, čo je alternatívny prístup. Miesto toho, aby sme interpolovali na celom intervale hľadanej funkcie jedným polynómom, interval si rozdelíme na podintervaly a na každom z nich interpolujeme pomocou viacerých polynómov jednotného stupňa.

Používať budeme kubické splajny, teda každý podinterval budeme aproximovať polynómom rádu nanajvyš 3.

Definícia 3.3.1 (Kubický splajn). *Hovoríme, že reálna funkcia $S : \langle a, b \rangle \rightarrow R$ je kubický splajn, ak $S|_{\langle x_{i-1}, x_i \rangle} \in P_3$ a $S \in C^2 \langle a, b \rangle$. Hovoríme, že S je kubický interpolačný splajn, ak $S(x_i) = y_i, i = 0, \dots, n$.*⁴

Funkcia $f(x)$ v tomto prípade je daná bodmi (všeobecne pre všetky 3 obdobia): $f(1) = 2,44$ $f(2) = 3,38$ $f(3) = 4,06$ $f(4) = 4,52$ $f(5) = 4,78$ $f(6) = 5,04$.

Interval $\langle x_0, x_n \rangle = \langle 1, 6 \rangle$ rozdelíme na podintervaly dĺžky 1. Body $x_i, i = 0, 1, \dots, 5$ voláme uzlové body. Funkciu $f(x)$ odhadneme na každom intervale $\langle x_i, x_{i+1} \rangle$ polynómom tretieho stupňa: $a_i + b_i(x - x_i) + c_i(x - x_i)^2 + d_i(x - x_i)^3$.

⁴Definícia bola prebratá z [3]

Všeobecný zápis splajnu spoločný pre všetky 3 dátumy vyzerá nasledovne:

$$S(x) = \begin{cases} S_0(x) = a_0 + b_0(x-1) + c_0(x-1)^2 + d_0(x-1)^3 & x \in \langle 1, 2 \rangle \\ S_1(x) = a_1 + b_1(x-2) + c_1(x-2)^2 + d_1(x-2)^3 & x \in \langle 2, 3 \rangle \\ S_2(x) = a_2 + b_2(x-3) + c_2(x-3)^2 + d_2(x-3)^3 & x \in \langle 3, 4 \rangle \\ S_3(x) = a_3 + b_3(x-4) + c_3(x-4)^2 + d_3(x-4)^3 & x \in \langle 4, 5 \rangle \\ S_4(x) = a_4 + b_4(x-5) + c_4(x-5)^2 + d_4(x-5)^3 & x \in \langle 5, 6 \rangle \end{cases} \quad (12)$$

Hľadáme koeficienty a_i, b_i, c_i, d_i pre $i = 0, 1, 2, 3, 4$, dokopy je to $4 \times 5 = 20$ neznámych. Z definície splajnu nám vyplývajú ďalšie podmienky:

- $S(x_i) = f(x_i), i = 0, 1, \dots, n$
- spojitost
- spojitost prvých derivácií
- spojitost druhých derivácií
- $S''(x_0) = S''(x_n) = 0$

Podoba prvej podmienky v konkrétnom prípade:

$$S_i(i+1) = f(i+1) = a_i, i = 0, 1, 2, 3, 4$$

$$S_4(6) = 5,04 \Rightarrow 4,78 + b_4 + c_4 + d_4 = 5,04 \Rightarrow b_4 + c_4 + d_4 = 0,26.$$

Z podmienky spojitosti vyplýva $S_i(x_{i+1}) = S_{i+1}(x_{i+1})$, konkrétne

$$S_0(2) = S_1(2) \Rightarrow$$

$$a_0 + b_0 + c_0 + d_0 = a_1$$

$$b_0 + c_0 + d_0 = 0,94$$

Obdobne ďalšie rovnice, ktoré sú zostavené na základe podmienky spojitosti v ďalších uzlových bodoch:

$$b_1 + c_1 + d_1 = 0,68$$

$$b_2 + c_2 + d_2 = 0,46$$

$$b_3 + c_3 + d_3 = 0,26$$

Pri podmienke hladkosti potrebujeme poznať prvú deriváciu $S(x)$ a tá je $S'(x_i) = b_i + 2c_i(x - x_i) + 3d_i(x - x_i)^2$. Je to kvadratická funkcia. Samotná podmienka je $S'_i(x_{i+1}) = S'_{i+1}(x_{i+1})$. Konkrétne

$$\begin{aligned} S'_0(2) &= S'_1(2) \Rightarrow \\ b_0 + 2c_0 + 3d_0 &= b_1 \end{aligned}$$

Zvyšné rovnice vyplývajúce z podmienky spojitosti prvých derivácií:

$$\begin{aligned} b_1 + 2c_1 + 3d_1 &= b_2 \\ b_2 + 2c_2 + 3d_2 &= b_3 \\ b_3 + 2c_3 + 3d_3 &= b_4 \end{aligned}$$

Posledná z trojice podmienok spojitosti je spojitost druhých derivácií kubickej funkcie $S(x)$. Druhá derivácia je $S''(x_i) = 2c_i + 6d_i(x - x_i)$. Príslušné rovnice vyzerajú nasledovne:

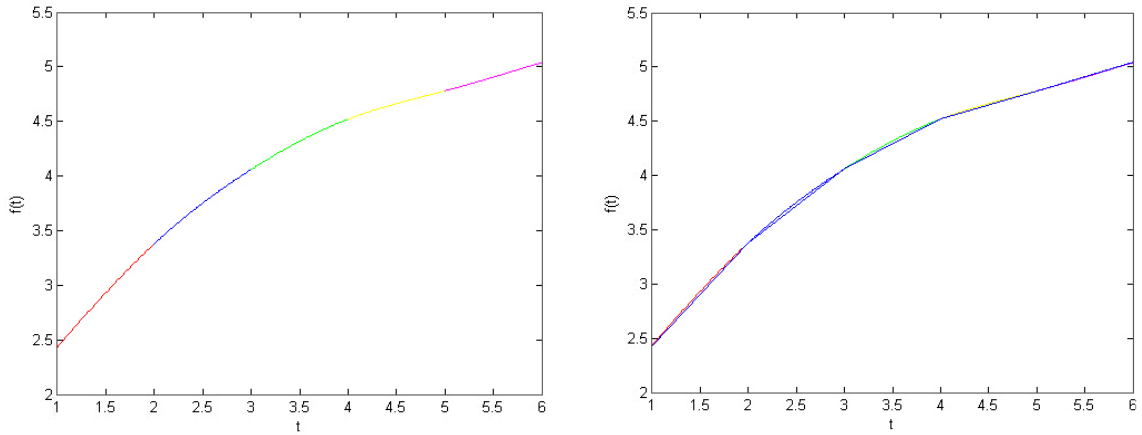
$$c_i + 3d_i = c_{i+1}, i = 0, 1, 2, 3$$

V spojení s poslednou podmienkou $S''(x_0) = S''(x_n) = 0$, ktorá po úprave vyzerá $c_0 = 0$ a $2c_4 + 6d_4 = 0$, dostávame 15 rovníc o 15 neznámych. Táto sústava lineárnych rovníc sa dá vyjadriť v maticovej forme $Ax = b$, kde A je matica 15×15 , b a x sú vektory 15×1 .

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 6 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 6 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 6 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 6 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 6 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_0 \\ c_0 \\ d_0 \\ b_1 \\ c_1 \\ d_1 \\ b_2 \\ c_2 \\ d_2 \\ b_3 \\ c_3 \\ d_3 \\ b_4 \\ c_4 \\ d_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,26 \\ 0,94 \\ 0,68 \\ 0,46 \\ 0,26 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Sústavu vyriešime a dostaneme hľadané koeficienty. Hodnoty koeficientov $a_i, i = 0, 1, 2, 3, 4$ sú určené rovnicami na začiatku príkladu. Splajny na jednotlivých intervaloch vyzerajú nasledovne:

$$S(x) = \begin{cases} S_0(x) = 2,44 + 0,9977(x-1) + 0,0000(x-1)^2 - 0,0577(x-1)^3 & x \in <1, 2> \\ S_1(x) = 3,38 + 0,8246(x-2) - 0,1731(x-2)^2 + 0,0285(x-2)^3 & x \in <2, 3> \\ S_2(x) = 4,52 + 0,5639(x-3) - 0,0876(x-3)^2 - 0,0164(x-3)^3 & x \in <3, 4> \\ S_3(x) = 4,06 + 0,3397(x-4) - 0,1367(x-4)^2 + 0,0569(x-4)^3 & x \in <4, 5> \\ S_4(x) = 4,78 + 0,2372(x-5) + 0,0342(x-5)^2 - 0,0114(x-5)^3 & x \in <5, 6> \end{cases}$$

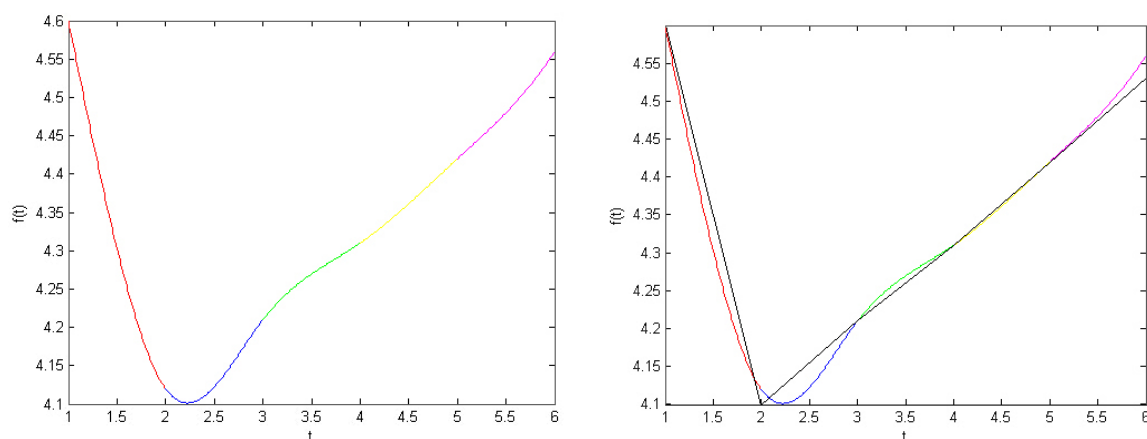


Obr. 7: Na prvom obrázku krivka zostavená pomocou aproximácie kubickými splajnami, na druhom porovnanie tejto krivky s krivkou zostavenou pomocou základnej metódy (cez bezkupónové dlhopisy) ku dňu uzatvorenia zmluvy 12.apríla 2003

Celý postup zopakujeme pre forwardové úrokové miery počas obdobia krízy (apríl 2008) a po kríze (apríl 2010). Splajny sú uvedené v tomto poradí. Jediná zmena oproti predchádzajúcemu postupu je, že sa zmení prvých 6 zložiek vektora b .

$$S(x) = \begin{cases} S_0(x) = 4,6 - 0,6322(x-1) + 0,0000(x-1)^2 + 0,1522(x-1)^3 & x \in <1, 2> \\ S_1(x) = 4,12 - 0,1756(x-2) + 0,4566(x-2)^2 - 0,191(x-2)^3 & x \in <2, 3> \\ S_2(x) = 4,21 + 0,1646(x-3) - 0,1164(x-3)^2 + 0,0518(x-3)^3 & x \in <3, 4> \\ S_3(x) = 4,31 + 0,0872(x-4) - 0,0390(x-4)^2 - 0,0163(x-4)^3 & x \in <4, 5> \\ S_4(x) = 4,42 + 0,1165(x-5) - 0,0098(x-5)^2 + 0,0330(x-5)^3 & x \in <5, 6> \end{cases}$$

$$S(x) = \begin{cases} S_0(x) = 1,38 + 0,3265(x-1) + 0,0000(x-1)^2 + 0,0035(x-1)^3 & x \in <1,2> \\ S_1(x) = 1,71 + 0,3371(x-2) + 0,0106(x-2)^2 - 0,0077(x-2)^3 & x \in <2,3> \\ S_2(x) = 2,05 + 0,3352(x-3) - 0,0125(x-3)^2 + 0,0173(x-3)^3 & x \in <3,4> \\ S_3(x) = 2,39 + 0,3621(x-4) + 0,0393(x-4)^2 - 0,0614(x-4)^3 & x \in <4,5> \\ S_4(x) = 2,73 + 0,2566(x-5) - 0,1448(x-5)^2 + 0,0483(x-5)^3 & x \in <5,6> \end{cases}$$



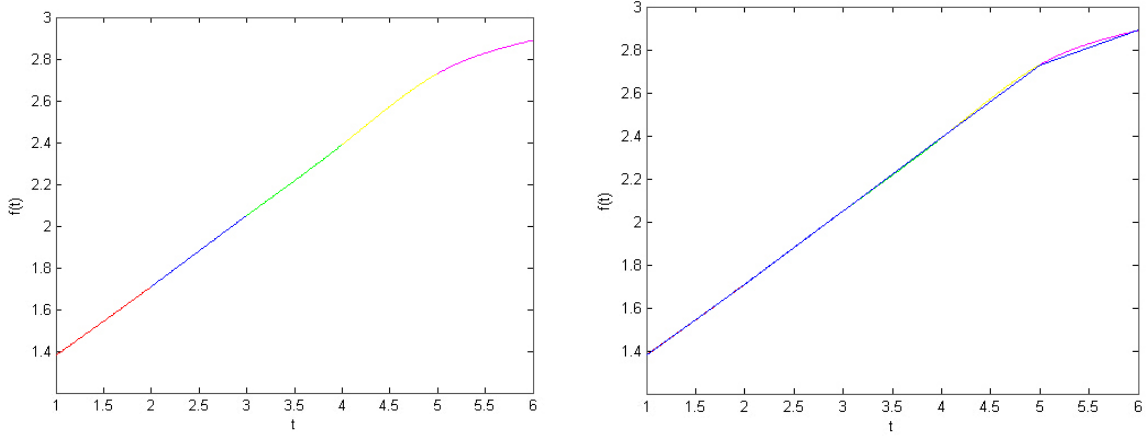
Obr. 8: Na prvom obrázku krivka zostavená pomocou aproximácie kubickými splajnami, na druhom porovnanie tejto krivky s krivkou zostavenou pomocou základnej metódy (cez bezkupónové dlhopisy) k dňu uzatvorenia zmluvy 1. apríla 2008

Z Obr. 7, 8, 9 vidno, že v časoch pred krízou a po kríze sa krivky na obrázkoch skoro po celý čas prekrývajú, prípadne môžeme pozorovať menšie odchýlky. Jediný obrázok, kde sa krivky viditeľnejšie odlišujú je ten, ktorý prislúcha k roku 2008, teda počas krízy. Odlišnosť je z veľkej časti spôsobená tým, že splajny krivku zhladzujú. Ďalší dôvod môže byť netypický tvar forwardovej krivky - nie je monotónna a to môže spôsobovať komplikácie. Dôvodov odchýliek výstupov týchto dvoch metód môže byť okrem týchto aj viac.

3.4 Nelson-Siegel model

Táto podkapitola bola spracovaná na základe literatúry [7] a [8].

V roku 1987 predstavili Charles R. Nelson a Andrew F. Siegel nový parametrický model, ktorý by sa dal použiť na všetky najčastejšie vyskytované tvary, ktoré sa spájajú s výnosovými krivkami - monotónny, S-tvar a U-tvar. Základná myšlienka je postavená



Obr. 9: Na prvom obrázku krivka zostavená pomocou aproximácie kubickými splajnami, na druhom porovnanie tejto krivky s krivkou zostavenou pomocou základnej metódy (cez bezkupónové dlhopisy) k dňu uzatvorenia zmluvy 11. apríla 2010

na tvrdení, že forwardové úrokové miery sa správajú podľa nasledujúcej diferenciálnej rovnice 2.stupňa, ktorá ma dvojnásobný reálny koreň :

$$f'' + \alpha_1 f' + \alpha_2 f = 0$$

Nelson a Siegel túto diferenciálnu rovnicu vyriešili a výsledkom bol vzorec pre forwardovú úrokovú mieru:

$$f_t(\tau) = \beta_0 + \beta_1 e^{-\lambda\tau} + \beta_2 \lambda \tau e^{-\lambda\tau} \quad (13)$$

Na tento model sa môžeme pozeráť ako na súčet konštanty a tzv. Laguerrovej funkcie (ktorej charakteristický tvar je polynóm $\times$ exponenciálny klesajúci člen). Je to obľúbená aproximačná funkcia medzi matematikmi. Vzorec pre forwardovú úrokovú mieru sa dá ľahko previesť na úrokovú mieru, použijúc vzťah (11) a metódu per partes:

$$\begin{aligned} r(\tau) &= \frac{1}{\tau} \int_0^\tau f(m) dm \\ &= \frac{1}{\tau} \int_0^\tau \beta_0 + \beta_1 e^{-\lambda m} + \beta_2 \lambda m e^{-\lambda m} dm \\ &= \frac{1}{\tau} \left(\beta_0 \tau + \beta_1 \frac{1 - e^{-\lambda\tau}}{\lambda} + \beta_2 \int_0^\tau \lambda m e^{-\lambda m} dm \right) \\ &= \frac{1}{\tau} \left(\beta_0 \tau + \beta_1 \frac{1 - e^{-\lambda\tau}}{\lambda} + \beta_2 \left(-e^{-\lambda\tau} \tau + \frac{1 - e^{-\lambda\tau}}{\lambda} \right) \right) \\ &= \frac{1}{\tau} \left(\beta_0 \tau + (\beta_1 + \beta_2) \frac{1 - e^{-\lambda\tau}}{\lambda} - \beta_2 (e^{-\lambda\tau} \tau) \right) \end{aligned} \quad (14)$$

$$= \beta_0 + (\beta_1 + \beta_2) \frac{1 - e^{-\lambda\tau}}{\lambda\tau} - \beta_2 e^{-\lambda\tau}.$$

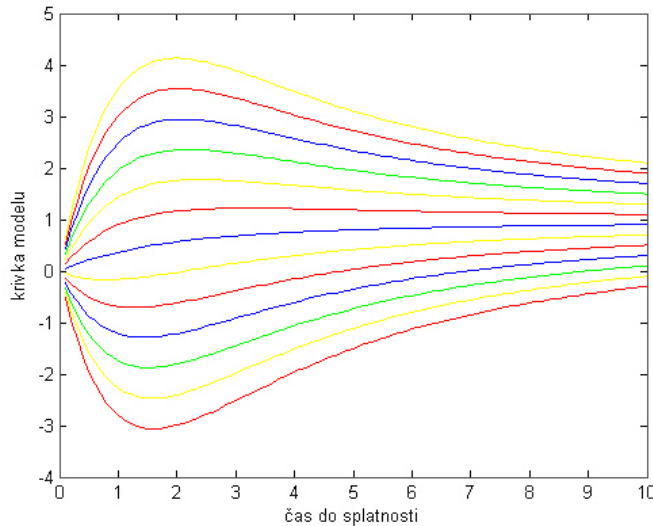
Koeficienty stále zostávajú lineárne ($\alpha_0 = \beta_0, \alpha_1 = \beta_1 + \beta_2, \alpha_2 = -\beta_2$). Pozrieme sa na to, čo sa stane s modelom, ak τ pošleme do ∞ a do 0.

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} r(\tau) = \beta_0 \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \lim_{\tau \rightarrow 0} r(\tau) &= \lim_{\tau \rightarrow 0} \beta_0 + (\beta_1 + \beta_2) \frac{1 - e^{-\lambda\tau}}{\lambda\tau} - \beta_2 e^{-\lambda\tau} \\ &= \beta_0 - \beta_2 + (\beta_1 + \beta_2) \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1 - e^{-\lambda\tau}}{\lambda\tau} \\ &\stackrel{\text{L'H}}{=} \beta_0 - \beta_2 + (\beta_1 + \beta_2) \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{\lambda e^{-\lambda\tau}}{\lambda} \\ &= \beta_0 - \beta_2 + \beta_1 + \beta_2 = \beta_0 + \beta_1. \end{aligned} \quad (16)$$

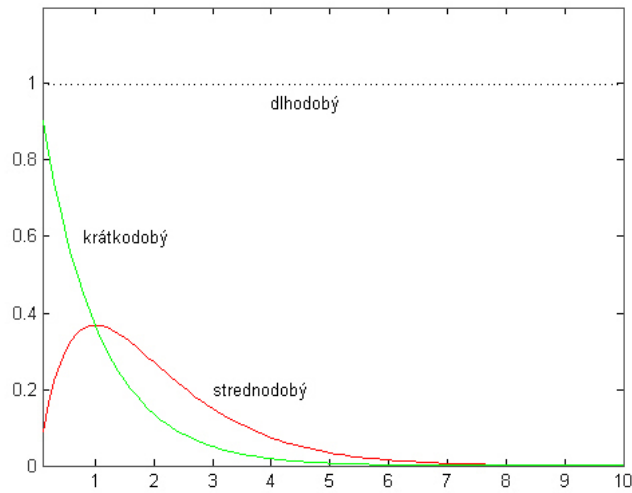
Tieto isté vzťahy platia aj keď sa na model pozeráme z pohľadu forwardových úrokových mier. Na začiatku sme povedali, že tento model dokáže dobre popísať najčastejšie sa vyskytujúce tvary výnosovej (alebo forwardovej) krivky. Môžeme to overiť pri nasledujúcich predpokladoch: $\lambda = 1, \beta_0 = 1, \beta_0 + \beta_1 = 0$. Potom rovnica a príslušný graf pre parameter a od -12 po 12 inkrementovaný v každom kroku o 2, vyzerajú:

$$r(\tau) = 1 - (a - 1) \left(\frac{1 - e^{-\tau}}{\tau} \right) - a e^{-\tau} \quad (17)$$



Obr. 10: Tvary výnosových kriviek modelu Nelsona-Siegela

Z Obr.10 vidíme, že tento pomerne jednoduchý model zachytáva všetky žiadané tvary. Koeficienty modelu sa dajú interpretovať ako sila dlhodobého, strednodobého a krátkodobého komponentu forwardovej krivky alebo výnosovej krivky. Model sa dá rozložiť na jednotlivé komponenty, kde β_0 predstavuje dlhodobý, β_1 krátkodobý a β_2 strednodobý faktor. Toto tvrdenie je jasnejšie vidieť z príslušného Obr. 11, kde dlhodobý komponent je konštanta, strednodobý s charakteristickým tvarom $\lambda e^{-\lambda}$ začína v 0 aj končí v 0. Krátkodobý komponent $e^{-\lambda}$ zo všetkých troch grafov najrýchlejšie monotónne klesá do 0. Z týchto troch komponentov sa dajú vygenerovať všetky najčastejšie tvary kriviek.



Obr. 11: Komponenty forwardovej krivky odhadnutej metódou Nelsona a Siegela

Diebold a Li [9] uvádzajú vo svojej práci, že ak zafixujeme parameter $\lambda = 0.0609$, tak sa jednotlivé komponenty dajú vysvetliť ako úroveň (level) krivky, monotónnosť a zakrivenie. Z Obr.11 vyplýva, že dlhodobý faktor β_0 zodpovedá úrovni, strednodobý faktor β_2 zodpovedá zakriveniu a krátkodobý faktor β_1 sa spája s monotónnosťou výslednej krivky.

Ako odhadneme jednotlivé koeficienty? V reči matíc riešime nasledovný problém vyplývajúci z horeuvedených rovníc, kde zadaných je n forwardových úrokových mier s príslušnými časmi maturít:

$$\begin{pmatrix} f_t(\tau_1) \\ f_t(\tau_2) \\ \vdots \\ f_t(\tau_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & e^{-\lambda\tau_1} & \lambda\tau_1 e^{-\lambda\tau_1} \\ 1 & e^{-\lambda\tau_2} & \lambda\tau_2 e^{-\lambda\tau_2} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & e^{-\lambda\tau_n} & \lambda\tau_n e^{-\lambda\tau_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix}$$

Riešime teda systém $f_t = X\beta$, kde f_t je vektor $n \times 1$, X je matica $n \times 3$ a β je vektor 3×1 . Metóda odhadu koeficientov je niekoľko, Nelson a Siegel navrhujú metódu používanú najmä v ekonometrii práve na odhad koeficientov, a to je Metóda najmenších štvorcov, teda ak máme model $f(t) = X\beta + \epsilon$, kde ϵ predstavuje chybu odhadu, tak sa snažíme túto chybu minimalizovať. Riešime nasledovný problém, za predpokladu regularity matice $X^T X$:

$$\min(f_t - X\beta)^T(f_t - X\beta) = \min(f_t^T f_t - f_t^T X\beta - \beta^T X^T f_t + \beta^T X^T X\beta) = \min Y \quad (18)$$

$$\frac{\partial Y}{\partial \beta} = -X^T f_t - X^T f_t + 2X^T X\hat{\beta} = 0$$

$$X^T f_t = X^T X\hat{\beta}$$

$$\hat{\beta} = (X^T X)^{-1} X^T f_t \quad (19)$$

Posledná úloha pri hľadaní vhodnej aproximačnej krivky je určenie λ . Tu Nelson a Siegel poskytujú nie príliš praktickú odpoveď, a to hľadanie najlepšej možnej λ empiricky, resp. pomocou rôznych optimalizačných metód, čo je náročné časovo aj numericky. Na lepšie a časovo menej náročné riešenie prišli vo svojej práci Diebold a Li [9]. Parameter λ určuje maturitu, v ktorej nadobúda strednodobý faktor svoje maximum. Vidíme to napr. aj z časti tejto podkapitoly, kde sme sa pozerali na charakteristické tvary všetkých troch faktorov a zafixovali sme $\tau = 1$. Ak zderivujeme $\lambda e^{-\lambda}$ a túto deriváciu položíme rovnú 0, výsledok je $\lambda = 1$, čo nám potvrdzuje aj graf 11. Vo všeobecnosti riešime

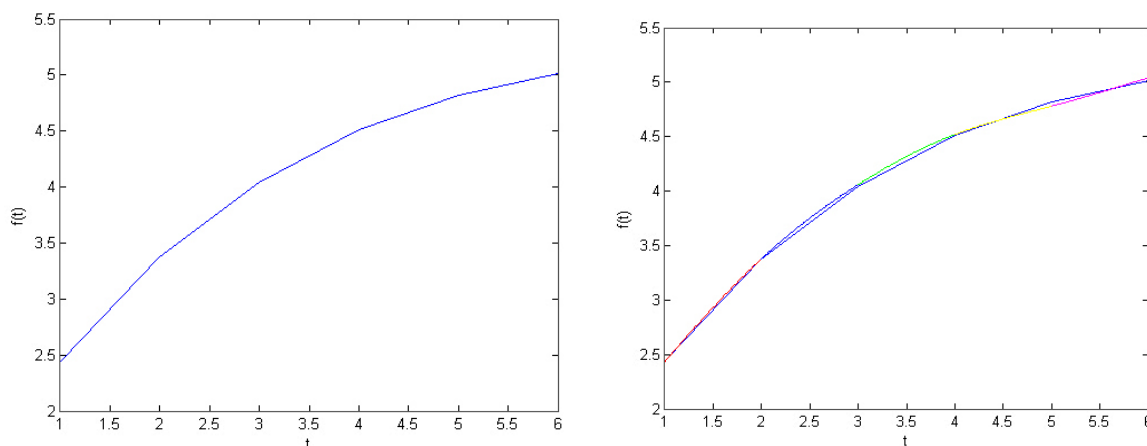
$$\arg \max_{\lambda} \lambda \tau e^{-\lambda \tau}. \quad (20)$$

Teraz, keď už poznáme "zákulisie" problematiky, môžeme celý postup aplikovať na známe dáta - začneme opäť s forwardovými úrokovými mierami na španielske dlhopisy pre 12.apríl 2003, ktoré sú uvedené v Tab.3. V našom prípade $\lambda = 6$, t.j.:

$$\arg \max_{\lambda} 6\lambda e^{-6\lambda} = 0.1667$$

Zafixovaním λ na 0.1667, dosadením a vyriešením rovnice $f_t = X\beta$ dostávame odhady pre bety použitím štandardnej výbavy Matlabu. $\beta_0 = 3.5060$, $\beta_1 = -2.3237$ a $\beta_3 = 6.4263$. Odhad forwardovej krivky pomocou Nelson-Siegelovej metódy má takúto výslednú podobu:

$$f(t) = 3.5060 - 2.3237e^{-0.1667t} + 6.4263 * 0.1667te^{-0.1667t}$$



Obr. 12: Na prvom obrázku je odhad forwardovej krivky pre apríl 2003 - metóda Nelson-Siegel, na druhom vidíme porovnanie s metódou splajnov

Pre grafické overenie môžeme porovnať s metódou splajnov.

Z Obr.12 môžeme pozorovať, že krivky sa líšia minimálne. Na rozdiel od prvej metódy, ktorú sme pomenovali základná, výsledné krivky zostavené pomocou týchto dvoch metód nemajú "hroty", sú hladké. Nedá sa povedať, ktorá metóda je krajšia, či lepšia, tu už závisí na osobných preferenciách používateľa metódy. Či inklinuje skôr ku štatistike a ekonometrii alebo k numerike.

Odhadnuté krivky pre apríl 2008 a apríl 2010, v tomto poradí:

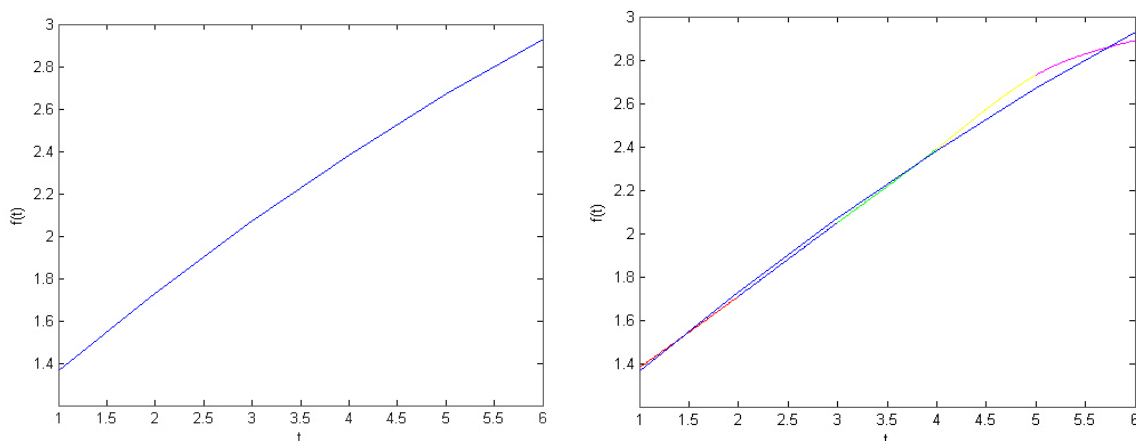
$$f(t) = 8.8004 - 3.7607e^{-0.1667t} - 7.6931 * 0.1667te^{-0.1667t}$$

$$f(t) = 4.9964 - 4.0257e^{-0.1667t} - 1.5942 * 0.1667te^{-0.1667t}$$

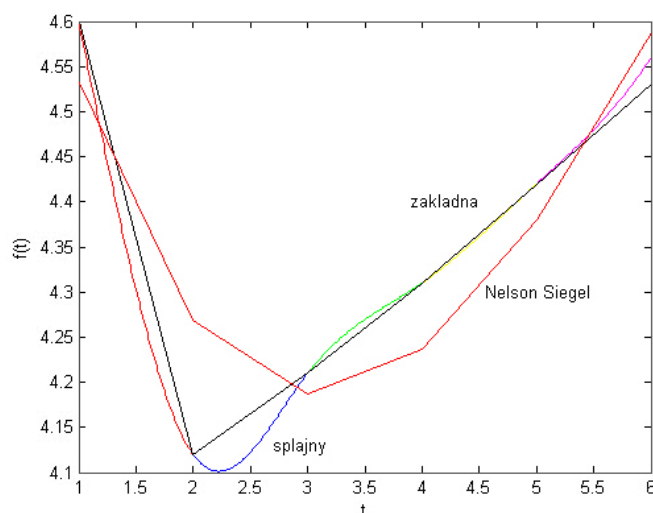
Obdobia pred a po kríze nerobia problém, tam odhady nami používaných metód nevykazujú veľké rozdiely, ako vidno na Obr.12 a Obr.13. Avšak krízové obdobie sa ukazuje ako problémové na odhadovanie výnosových alebo forwardových kriviek (Obr.14), lebo úrokové miery sa správajú atypicky. Z porovnania grafov sa zdá, že metóda Nelsona a Siegela sa odchyľuje od zvyšných dvoch, v tomto prípade graf navyše nie je hladký. Nevieme priamo povedať, ktorá z metód je lepšia. Čo však vo všeobecnosti môžeme povedať je, že čím viac je parametrov v modeli, tým je odhadnutá krivka citlivejšia a presnejšia.⁵

Metóda Nelsona a Siegela sa stala základom mnohých ďalších teórií a zlepšovaní pôvodných vzorcov.

⁵Napr. keď aproximujeme hľadanú krivku polynómom desiateho stupňa, tak je to presnejšie ako ten istý postup s polynómom prvého stupňa, ktorý má automaticky menej parametrov.



Obr. 13: Na prvom obrázku je odhad forwardovej krivky pre apríl 2010 - metóda Nelson-Siegel, na druhom vidíme porovnanie s metódou splajnov



Obr. 14: Porovnanie troch používaných metód na odhad forwardovej krivky, apríl 2008

Jeden z vedcov - ekonómov bol aj Švéd Lars E. O. Svensson [10], ktorý uverejnil článok, v ktorom vysvetľoval svoju zlepšenú metódu. Potrebu tejto modifikácie zdôvodnil tak, že chcel zvýšiť flexibilitu a zlepšiť presnosť. Pridal štvrtý komponent - druhý U-tvar a v zápise pribudli dva parametre - β_3 a τ_2 . Predpis funkcie forwardovej krivky je potom

$$f_t(\tau) = \beta_0 + \beta_1 e^{-\lambda\tau_1} + \beta_2 \lambda \tau_1 e^{-\lambda\tau_1} + \beta_3 \lambda \tau_2 e^{-\lambda\tau_2}. \quad (21)$$

3.5 Realita

Ako som spomenula, v metódach s odlišným prístupom často záleží na osobných preferenciách. V nich sa líšia aj centrálné banky rôznych krajín. Pre zaujímavosť uvádzam zoz-

nam rôznych popredných centrálnych bánk a metód, ktoré používajú pre odhadovanie. Dáta sú z roku 1999.

Belgicko	Svensson alebo Nelson-Siegel
Kanada	Svensson
Fínsko	Nelson-Siegel
Francúzsko	Svensson alebo Nelson-Siegel
Nemecko	Svensson
Taliansko	Nelson-Siegel
Japonsko	splajny
Nórsko	Svensson
Španielsko	Svensson
Švédsko	Svensson
UK	Svensson
USA	splajny

Tabuľka 4: Metódy používané centrálnymi bankami

Existujú všeobecné kritériá na žiadané vlastnosti "rodín kriviek", ktoré sú vhodné pre odhadovanie časovej štruktúry úrokových mier:

- flexibilita: hľadané krivky by mali "sedieť" na typické tvary výnosových kriviek
- "šetrnosť": počet faktorov by nemal byť príliš vysoký
- pravidelnosť: zvyčajne sa uprednostňuje krivka ktorá klesá smerom k dlhšiemu koncu

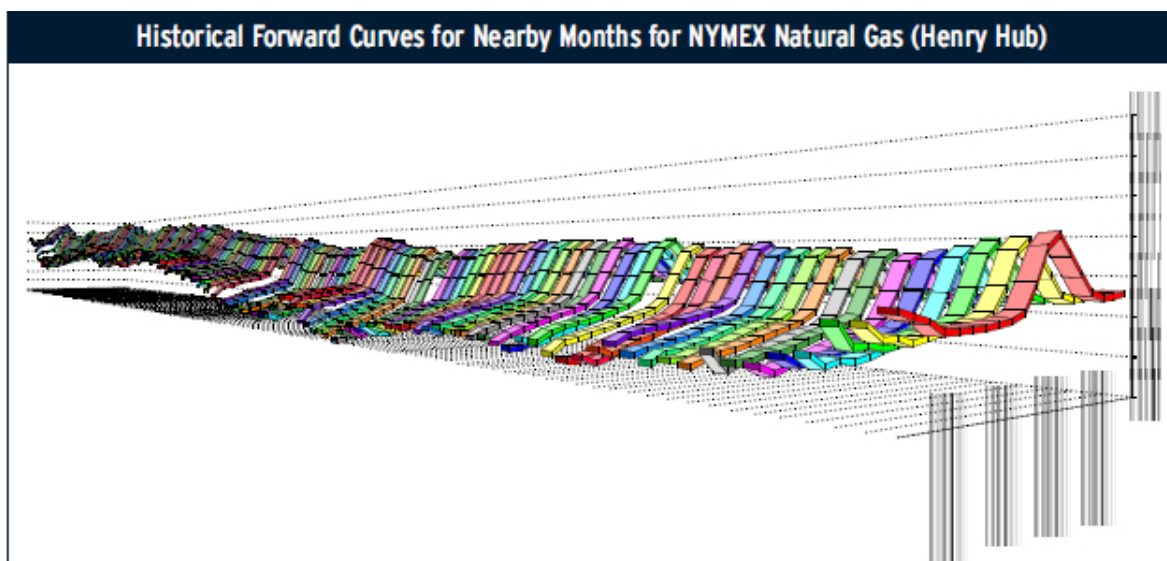
Táto podkapitola je prevzatá z knihy od Filipoviča [1].

3.6 Analýza hlavných komponentov

Pri spracovaní tejto časti práce som použila literatúru [4], [5] a [6].

V predchádzajúcich troch metódach sme mali zadané body $[t, f(t)]$ a pokúšali sme sa odhadovať forwardovú krivku. Inými slovami, objasňovali sme informáciu skrytú medzi známymi bodmi. Analýza hlavných komponentov (ďalej len AHK) nám umožňuje pozeráť sa na štruktúru úrokových mier z iného uhla pohľadu, ktorý v nasledujúcich odstavcoch pár vetami vysvetlíme. Znova pre porovnanie, v predchádzajúcich metódach sme si vybrali tri dni, pre ktoré sme odhadovali hľadané krivky. V AHK sa pozeráme na

všetky dostupné obchodované dni ako na časové dáta, čo názorne ukazuje nasledujúci obrázok, na ktorom môžeme vidieť forwardové krivky prislúchajúce k cenám plynu NYMEX Natural Gas, kde každá krivka zodpovedá jednému zo 72 dní.



Obr. 15: Historické forwardové krivky, NYMEX Natural Gas, článok [4]

Z Obr. 15 sa dá vypozerovať trend kriviek, opakujúci sa vzor, podľa ktorého sa správajú všetky krivky. Konkrétny tvar je spojený s reálnymi sezónnymi cenami plynu. Dôležitý je, ako som už spomenula, trend. Princíp AHK spočíva v hľadaní vzoru spoločného správania sa všetkých forwardových kriviek (alebo ČŠÚM) v čase. Táto informácia, ak ju máme, je cenná, pretože nám umožňuje náhľad do budúcnosti. Je len logické, že ak krivky opakujú (samozrejme, s výchyľkami) určitý vzor, tak ten sa dá aplikovať aj na ďalšie krivky, ktoré ešte teraz nepoznáme. Táto metóda sa z matematického hľadiska radí do odvetvia štatistiky. AHK je matematická procedúra, ktorá transformuje vysoký počet závislých premenných na menší počet nezávislých premenných. Umožňuje nám zbavovať sa prvkov (komponentov), ktoré majú iba malý vplyv na výsledný tvar krivky, čo je veľmi výhodné najmä pri práci s vysokým počtom dát. Lahko sa môže stať, že z pôvodných napr. 100 komponentov sú najdôležitejšie a zároveň postačujúce len prvé 3, čo je značné uľahčenie práce. V praxi sa väčšinou uspokojíme s tým, že komponenty vysvetľujú 95% variability krivky. Nové hlavné komponenty sú potom lineárnou kombináciou pôvodných dát. Navyše, niektoré finančné deriváty, napr. opcie na swapy (po anglicky tzv. swaptions), majú svoju cenu určenú nie podľa jedného forwardu, ale podľa viacerých.

To, ako AHK "funguje", najprv popíšeme na jednoduchších dátach, v dimenzií

$n = 2$, kde sa dá dobre vidieť idea tejto metódy. V praxi sa s takou nízkou dimenziou nestretneme, vysvetlenie bude podané na fiktívnych dátach, ktoré nemajú žiadnu ekonomickú interpretáciu.

x	0.8	0.9	2.5	1.9	3.1	0.4	1.5	1.8	2.3	2.9	1.3	1.2
y	1.0	0.95	2.8	1.85	3.2	0.5	1.9	1.85	2.4	3.0	1.7	1.4

Tabuľka 5: Dvojrozmerné dáta

1.krok v AHK spočíva v tom, že od každého prvku dát odpočítame príslušný priemer z dát, to znamená, od všetkých x sa odčíta $\bar{x} = 1.72$ a od všetkých y sa odčíta $\bar{y} = 1.88$, čím dosiahneme set dát, ktorých priemer je 0. Je to tzv. štandardizovanie.

x	-0.92	-0.82	0.78	0.18	1.38	-1.32	-0.22	0.08	0.58	1.18	-0.42	-0.52
y	-0.88	-0.93	0.92	-0.03	1.22	-1.38	0.02	-0.03	0.52	1.12	-0.18	-0.48

Tabuľka 6: Nové dáta s odčítanými priermi

Keď máme dáta upravené do tvaru, aký potrebujeme, **2.krok** je, že vypočítame prvky variančno-kovariančnej matice x a y . Kovariancia hovorí o miere závislosti dvoch veličín. Vďaka tomu, že $cov(x, y) = cov(y, x)$, kovariančná matica je symetrická. Okrem toho je štvorcová a kladne semidefinitná. Variancia je vlastne kovariancia veličiny samej so sebou a jej veľkosť nám poskytuje informáciu o rozptyle dát. Vzorec pre kovarianciu je

$$cov(x, y) = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{(n - 1)}.$$

Kovariančná matica v tomto konkrétnom prípade vyzerá nasledovne:

$$\begin{pmatrix} var(x) & cov(x, y) \\ cov(y, x) & var(y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.7306 & 0.7028 \\ 0.7028 & 0.6970 \end{pmatrix}$$

Keď máme kovariančnú maticu, **3.krok** bude, že vypočítame vlastné hodnoty a vlastné vektory tejto matice. Riešime problém $det(A - \lambda I) = 0$ a potom pre konkrétne vlastné hodnoty λ počítame sústavu $Ax = \lambda x$ a tak získame vlastné vektory. Naša matica má rozmery 2×2 , preto výsledkom budú 2 vlastné hodnoty λ a k nim 2 príslušné vlastné vektory. Vlastné vektory majú jednu zaujímavú vlastnosť, z ktorých vlastne vychádza ich podstata. Ak maticu A vynásobíme sprava jej vlastným vektorom, výsledkom je znova ten istý vektor, len vynásobený konštantou (predĺžený). Ak

si A predstavíme ako maticu transformácie, tak násobenie ľubovoľného vektora touto maticou znamená jeho transformáciu, presun z pôvodného miesta. Ak však miesto neho zoberieme vlastný vektor, tak je situácia iná. Vlastný vektor vynásobený maticou transformácie (t.j. ľubovoľnou maticou) sa nepohne, resp. zobrazí sa sám na seba. Príklad:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 * \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix},$$

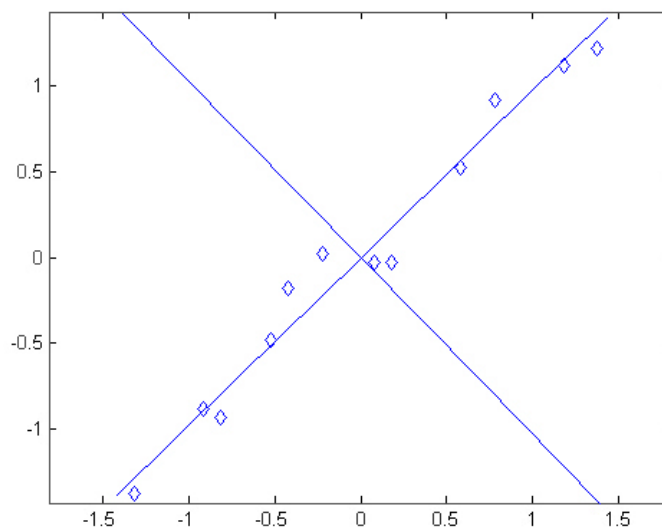
kde prvý prípad zobrazuje násobenie vlastným vektorom a druhý prípad násobenie ľubovoľným iným vektorom, ako je vlastný. Ale vráťme sa k našej pôvodnej kovariančnej matici a jej vlastným číslam a vektorom. Tie sú $\lambda_1 = 0.0108$, $\lambda_2 = 1.4168$,

$$v_1 = \begin{pmatrix} 0.6986 \\ -0.7155 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} -0.7155 \\ -0.6986 \end{pmatrix}$$

Tieto vlastné vektory predstavujú hľadané hlavné komponenty. Z teórie vieme, že všetky vlastné vektory jednej matice sú na seba kolmé. Platí všeobecné pravidlo, že vlastný vektor prislúchajúci k najväčšej vlastnej hodnote je 1.hlavný komponent (ďalej len HK), vlastný vektor prislúchajúci k druhej najväčšej vlastnej hodnote je 2.HK a pod. Vlastné hodnoty sú potom váhy týchto komponentov. Ak sa nachádzame vo väčšej dimenzii ako 2, väčšinou prvé 3 hlavné komponenty vysvetľujú dostatočne veľkú časť variancie. To, ako presne veľkú časť variability vysvetľuje HK_i vyjadruje podiel $\frac{\lambda_i}{\sum_{i=1}^n \lambda_i}$, kde λ_i reprezentuje príslušné vlastné číslo. Variabilita vysvetlená prvými k komponentami je $\frac{\sum_{i=1}^k \lambda_i}{\sum_{i=1}^n \lambda_i}$. HK prislúchajúci k najväčšej λ je prvý a najdôležitejší - vysvetľuje najväčšiu časť variancie, teda najväčšiu časť tvaru krivky.

Z Obr.16: 1.HK je ten, ktorý prechádza stredom dát (vidíme, že prislúcha k väčšej vlastnej hodnote). Vypovedá o najdôležitejšom vzťahu medzi dátami. Vidíme, že 2.HK je kolmý na 1. a hovorí o tom, že sú tam určité odchýlky od základnej línie dát. V prípade väčšej dimenzie sa môžeme rozhodnúť odignorovať menej významné komponenty. Aj keď sa cestou stratí časť informácie, ak je to komponent prislúchajúci k malej vlastnej hodnote, strata nebude veľká.

V tomto prípade dimenzie neredukujeme (predsa len sú len 2), skôr išlo o ukážku toho, ako AHK funguje. Posledným krokom by bolo vyjadrenie dát v zmysle hlavných



Obr. 16: Graf normalizovaných dát a vlastných vektorov príslušnej kovariančnej matice

komponentov, čo je v tomto prípade len pootočenie obrázku tak, aby boli 2 vlastné vektory súradnicovými osami.

Teraz, keď máme vizuálnu predstavu z predchádzajúcej sekcie, ktorej luxus si môžeme dovoliť pri dvojrozmerných, maximálne trojrozmerných dátach, vrátime sa k pôvodným dátam. V tomto prípade nebudeme potrebovať forwardové krivky, ale zostaneme pri obyčajných úrokových mierach⁶ španielskych dlhopisov z rokov 1998-2011. Budeme sa snažiť nájsť hlavné komponenty kovariačnej matice 159 dostupných dát a tak charakterizovať všeobecný tvar časovej štruktúry úrokových mier v Španielsku.

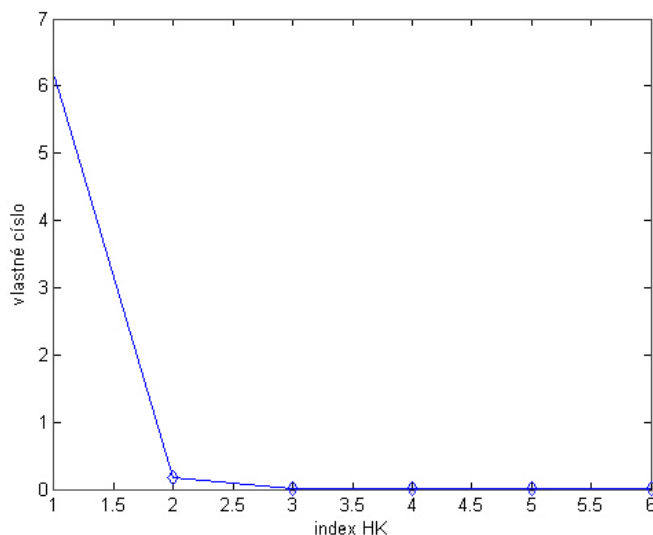
V mojom prípade som nepokladala za nutné dáta štandardizovať, lebo všetky údaje sú v rovnakých jednotkách a škálach. Dimenzia $n = 6$, lebo každý dlhopis má uvedené úrokové miery pre 6 rôznych maturít.

Výstupy:

	1.HK	2.HK	3.HK	4.HK	5.HK	6.HK
vlastné číslo	6.125	0.184	0.0079	0.0004	0.00006	0.00001
percento	96.97	2.91	0.12	0.0059	0.001	0.00017
kumulatívne percento	96.97	99.87	99.993	99.998	99.9998	100

Tabuľka 7: Hlavné komponenty a ich hlavné charakteristiky

⁶Konvencia je pri tejto metóde skôr používať úrokové miery ako forwardové úrokové miery.



Obr. 17: Indexový graf vlastných čísel

Vidíme, že už prvý komponent vysvetľuje viac ako 96% variability. Napriek tomu, že by sa mohol zdať postačujúci, v tomto prípade budeme pokračovať s prvými 3 HK. Z teórie totiž máme poznatok, nadobudnutý empiricky, že prvé 3 komponenty majú svoje typické tvary.

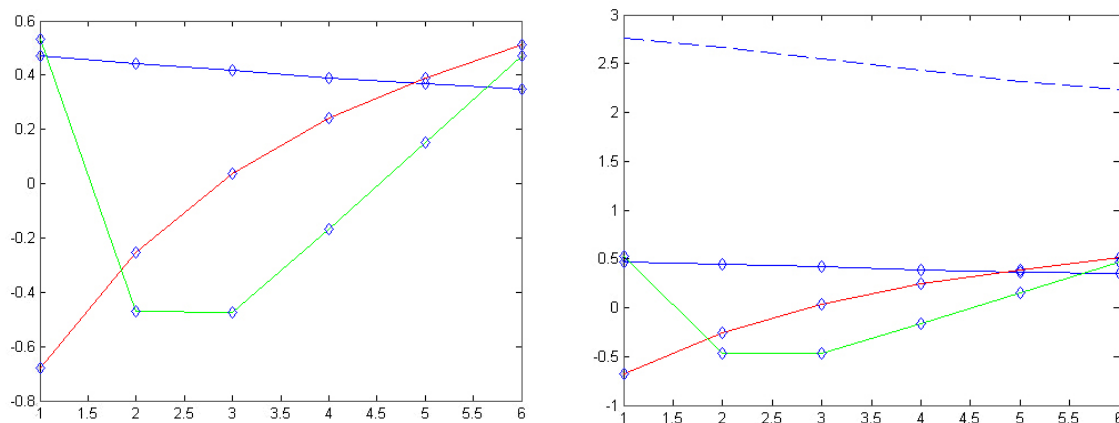
- prvý hlavný komponent poskytuje informáciu o posune krivky smerom hore alebo dolu.
- druhý komponent poskytuje informáciu o monotónnosti, t.j. rastúcosti alebo klesajúcosti krivky
- tretí komponent spôsobuje "hrb", alebo U-tvar, hovorí o zakrivení

V našom prípade môžeme teóriu podporiť obrázkom.

Pre úplnosť uvádzam hlavné komponenty:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 0.4711 \\ 0.4440 \\ 0.4159 \\ 0.3895 \\ 0.3669 \\ 0.3488 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} -0.6797 \\ -0.2516 \\ 0.0384 \\ 0.2408 \\ 0.3911 \\ 0.5122 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 0.5308 \\ -0.4690 \\ -0.4736 \\ -0.1679 \\ 0.1531 \\ 0.4715 \end{pmatrix}$$

Problém tejto metódy je v spojení s realitou, výsledná krivka nám hovorí o akomsi "priemernom dni", ktorý v reále vôbec nemusí existovať, teda prínos často býva iba



Obr. 18: Na prvom obrázku vidíme prvé 3 hlavné komponenty pre španielske dlhopisy, na druhom je výsledná krivka po sčítaní hlavných komponentov podľa príslušných váh (vlastných čísel)

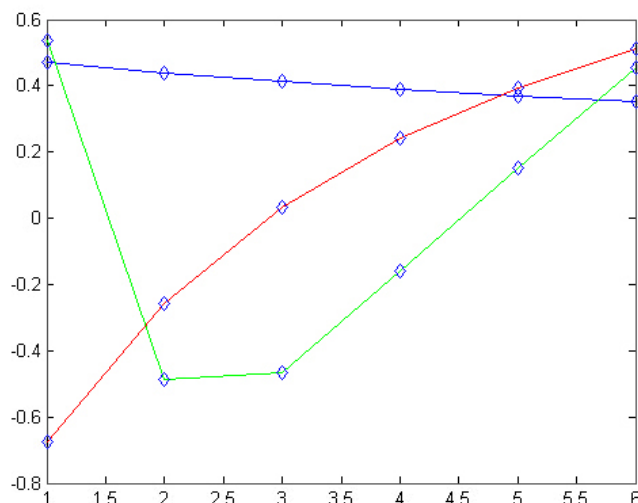
teoretický (ako v mnohých iných matematických metódach). Intuitívne môžeme niečo také povedať aj o Obr.18. 3 krivky, ktoré sme odhadovali v prvých troch metódach, sa vôbec nepodobajú na túto "priemernú".

Zaujímavé je, že analýza hlavných komponentov sa nepoužíva len v matematike a finančníctve, ale napr. aj v biológii, či pri rozpoznávaní tvárí na fotografiách, teda má svoj praktický význam.

Pre porovnanie sa môžeme pozrieť ešte na obdobný príklad, ale postup aplikujeme na portugalské dlhopisy (1997-2011). Španielsko a Portugalsko sú si geograficky a zrejme aj ekonomicky blízke, preto očakávame podobný priebeh. Znova sa pozrieme na prvé 3 hlavné komponenty. Podobne ako pri španielskych dlhopisoch, aj tu sú viac než postačujúce na vysvetlenie variance krivky a navyše sú aj vlastné hodnoty skoro totožné.

$$w_1 = \begin{pmatrix} 0.4728 \\ 0.4400 \\ 0.4130 \\ 0.3896 \\ 0.3692 \\ 0.3524 \end{pmatrix}, w_2 = \begin{pmatrix} -0.6768 \\ -0.2566 \\ 0.0315 \\ 0.2428 \\ 0.3923 \\ 0.5121 \end{pmatrix}, w_3 = \begin{pmatrix} 0.5373 \\ -0.4877 \\ -0.4677 \\ -0.1594 \\ 0.1511 \\ 0.4543 \end{pmatrix}$$

Na prvý pohľad sa môže zdať, že sa Obr.19 ničím nelíši od Obr.18, ale keďže sme podrobne vypísali zložky jednotlivých hlavných komponentov, vidíme malú (skoro nepa-



Obr. 19: Prvé 3 hlavné komponenty, portugalské dlhopisy

	1.HK	2.HK	3.HK	4.HK	5.HK	6.HK
vlastné číslo	6.5355	0.1746	0.0103	0.0004	0.0002	0.0000
percento	97.24	2.60	0.15	0.0005	0.0003	0.0000
kumulatívne percento	97.24	99.84	99.99	99.9905	99.9908	cca 100

Tabuľka 8: Hlavné komponenty a ich hlavné charakteristiky, portugalské dlhopisy

trnú) zmenu. Výsledok je zaujímavý a hovorí o tom, ako veľmi je španielsky a portugalský dlhopisový trh podobný a ako ho ovplyvňujú podobné faktory. Keby sme mali k dispozícii dlhopisy ďalších krajín, zrejme by rozdiel bol väčší, ale charakteristické tvary prvých troch komponentov by sa zachovali.

4 Záver

V tejto bakalárskej práci sme popisovali metódy na určenie štruktúry úrokovej miery. Prvé tri metódy sa venovali odhadovaniu forwardových kriviek zostavených zo španielskych bezkupónových dlhopisov. Robili sme to preto, aby sme poznali celú informáciu, ktorú krivka obsahuje. Táto informácia je dôležitá pre určovanie teoretickej hodnoty niektorých finančných nástrojov (napr. opcie). Uprednostnili sme forwardovú krivku pred klasickou výnosovou, ktorá hovorí o očakávaných budúcich priemeroch úrokových mier, zatiaľ čo forwardová krivka hovorí o ich očakávanej trajektórii, čo sa nám pre naše potreby zdalo vhodnejšie.

Rozbor som robila pre tri rôzne dátumy, ktoré boli signifikantné tým, že každý zodpovedal inému ekonomickému obdobiu - obdobiu pred finančnou a ekonomickou svetovou krízou, obdobiu počas nej a obdobiu po nej. Výsledkom bolo to, že sme mohli vidieť, ako kríza ovplyvňovala tvary forwardových kriviek.

Odhady sme robili pomocou troch metód - prvú sme pracovne nazvali "základná". Táto metóda je jednoduchá a reálne sa v bankách nevyužíva. Ďalšie dve metódy - metódu splajnov a metódu Nelsona a Siegela klasifikujeme ako parametrické a pre naše dáta sme odhadovali konkrétne parametre pre príslušné rodiny kriviek. Okrajovo sme spomenuli nadstavbu metódy Nelsona a Siegela - Svenssonovu metódu, ktorá je v súčasnosti veľmi používaná v centrálnych bankách.

Štvrtá metóda, analýza hlavných komponentov, nám poskytla iný pohľad na výnosové a forwardové krivky. Pretože je to obľúbená štatistická technika na redukciu dimenzií, pomohla nám zbaviť sa informácií, ktoré málo ovplyvňovali výsledný tvar kriviek. Výsledkom tejto analýzy, zostavenej pomocou všetkých časových dát, ktoré sme mali k dispozícii o španielskych úrokových mierach 1994-2011, bola "priemerná"krivka. Samotné hlavné komponenty majú svoj význam - každý má svoj typický tvar, ktorým podľa príslušnej váhy prispieva k výslednému tvaru krivky.

Písanie tejto bakalárskej práce bolo pre mňa určite prínosom a verím, že poznatky získané počas jej vypracovávania využijem v mojej akademickej kariére.

Literatúra

- [1] Filipovič, D., *Term - structure models: A Graduate Course*, Springer, 2009.
- [2] Melicherčík, I., Olšarová, L., Úradníček, V., *Kapitoly z finančnej matematiky*, Epos, 2005.
- [3] Babušíková, J., Slodička, M., Weisz, J., *Numerické metódy*, Univerzita Komenského, 1998.
- [4] Blanco, C., Soronow, D., Stefyszyn, P., *Multi-factor models for forward curve analysis: An introduction to principal component analysis*, Commodities Now, jún 2002, strany 76–78.
http://www.fea.com/resources/pdf/a_multi_factor_intro.pdf
- [5] Barošová, A., *Aplikácia analýzy hlavných komponentov na trhové údaje*, Bakalárska práca, Bratislava, 2008.
<https://stella.uniba.sk/zkp-storage/dzb/dostupne/FM/2008/2008-FM-amLYLf/2008-FM-amLYLf.pdf>
- [6] Smith, Lindsay I., *A tutorial on principal component analysis*, 2002.
http://www.cs.otago.ac.nz/cosc453/student_tutorials/principal_components.pdf
- [7] Berec, R., *Extraction of Nelson-Siegel factors from bond prices*, Diplomová práca, 2010.
<https://stella.uniba.sk/zkp-storage/ddp/dostupne/FM/2010/2010-FM-WGpuSY/2010-FM-WGpuSY.pdf>
- [8] Nelson, Charles R., Siegel, Andrew F., *Parsimonious Modeling of Yield Curves*, The Journal of business, Vol.60, No.4, strany 473–489, 1987.
<http://coin.wne.uw.edu.pl/sakowski/mrf/papers/1987.Nelson.Siegel.pdf>
- [9] Diebold, Francis X., Li, C., *Forecasting the term structure of government bond yields*, Journal of econometrics, Vol.130, strany 337–364, 2006.
<http://www.ssc.upenn.edu/~fdiebold/papers/paper49/Diebold-Li.pdf>
- [10] Svensson, Lars E. O., *Estimating and interpreting forward and interest rates: Sweden 1992-1994*, NBER Working Paper Series, Working Paper No.4871, 1994.