

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY



NUMERICKÉ METÓDY V DYNAMICKÝCH SYSTÉMOCH
POPULAČNEJ BIOLÓGIE

BAKALÁRSKA PRÁCA

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY

NUMERICKÉ METÓDY V DYNAMICKÝCH SYSTÉMOCH
POPULAČNEJ BIOLÓGIE

BAKALÁRSKA PRÁCA

Študijný program: Ekonomická a finančná matematika
Študijný odbor: 1114 Aplikovaná matematika
Školiace pracovisko: Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky
Vedúci práce: Mgr. Hana BUDÁČOVÁ



Univerzita Komenského v Bratislave
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

ZADANIE ZÁVEREČNEJ PRÁCE

Meno a priezvisko študenta: Kristína Batmendijnová
Študijný program: ekonomická a finančná matematika (Jednoodborové štúdium, bakalársky I. st., denná forma)
Študijný odbor: 9.1.9. aplikovaná matematika
Typ záverečnej práce: bakalárska
Jazyk záverečnej práce: slovenský

Názov: Numerické metódy v dynamických systémoch populačnej biológie

Cieľ: Pochopenie základných typov populačných modelov, charakterizácia ich dynamiky v závislosti od parametrov, numerické metódy hľadania riešení a ich porovnanie.

Vedúci: Mgr. Hana Budáčová

Dátum zadania: 15.10.2011

Dátum schválenia: 27.10.2011

doc. RNDr. Margaréta Halická, CSc.
garant študijného programu

.....
študent

.....
vedúci

Pod'akovanie Ďakujem svojej školiteľke Mgr. Hane Budáčovej za vedenie pri tejto práci, usmerňovanie pri jej písaní, vysvetlenie neznámych pojmov a poskytnutie užitočnej literatúry. Chcem sa poďakovať aj Jánovi Komadelovi za technickú pomoc pri práci v LATEX-u a psychickú podporu.

Abstrakt v štátnom jazyku

BATMENDIJNOVÁ, Kristína: Numerické metódy v dynamických systémoch populačnej biológie [Bakalárska práca], Univerzita Komenského v Bratislave, Fakulta matematiky, fyziky a informatiky, Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky; školiteľka: Mgr. Hana Budáčová, Bratislava, 2012, 37 s.

Cieľom tejto práce je skúmať a porovnať rôzne numerické metódy pre riešenie systému dvoch obyčajných diferenciálnych rovníc, ktoré sa používajú na modelovanie vývoja populácií živočíchov. Numerické metódy umožňujú aproximovať riešenie systému, ktorý nevieme riešiť analyticky. My porovnávame ich presnosť na systémoch, ktoré riešiť vieme. Zamerali sme sa na Eulerovu metódu napred, Eulerovu spätnú metódu a metódu Runge-Kutta. Porovnanie realizujeme pomocou početných fázových portrétov, ktoré znázorňujú skutočné trajektórie a ich numerické aproximácie pre rôzne systémy, ako aj pomocou vyčíslenia odchýliek. Zisťujeme, že najlepšie aproximácie dáva Runge-Kutta metóda a používame ju na skúmanie modelov typu dravec-korist'. Zaoberáme sa základným Volterra-Lotka modelom a jeho modifikáciami, ktoré lepšie vystihujú fungovanie v reálnom svete živočíchov. Modely typu dravec-korist' by sme nevedeli riešiť analyticky, čo ukazuje dôležitosť numerických metód.

Kľúčové slová: Runge-Kutta, Volterra-Lotka, fázový portrét, numerické metódy

Abstract

BATMENDIJNOVÁ, Kristína: Numerical methods in dynamical systems of population biology [Bachelor Thesis], Comenius University in Bratislava, Faculty of Mathematics, Physics and Informatics, Department of Applied Mathematics and Statistics; Supervisor: Mgr. Hana Budáčová, Bratislava, 2012, 37p.

The aim of this work is to explore and to compare various numerical methods to solve a system of two ordinary differential equations which are used in models in population biology. Numerical methods allows us to approximate the solution of a system which we are not able to solve analytically. We compare their accuracy on systems for which we know the exact solution. We focus on the forward Euler method, the backward Euler method and the Runge-Kutta method. We draw the comparison by numerous phase portraits, which depict real trajectories and their numerical approximations for various systems, as well as by expressing their deviations. We come to the conclusion that best approximations are reached by the Runge-Kutta method and we use it to examine the predator-prey models. We investigate the basic Volterra-Lotka model and its modifications which applies better for the real world. We are not able to solve the predator-prey models analytically which only shows the importance of numerical methods.

Keywords: Runge-Kutta, Volterra-Lotka, phase portrait, numerical methods

Obsah

| | |
|---|-----------|
| Úvod | 8 |
| 1 Diferenciálne rovnice | 9 |
| 1.1 Klasifikácia diferenciálnych rovníc | 9 |
| 1.2 Systém dvoch rovníc | 11 |
| 2 Numerické metódy | 20 |
| 2.1 Eulerova metóda napred | 20 |
| 2.2 Eulerova spätná metóda | 22 |
| 2.3 Runge-Kutta metóda | 24 |
| 2.4 Porovnanie metód | 27 |
| 3 Populačná biológia | 35 |
| 3.1 Model Volterra-Lotka | 35 |
| 3.2 Modifikácie modelu Volterra-Lotka | 38 |
| Záver | 43 |
| Zoznam použitej literatúry | 44 |
| Príloha A - Veta o logaritmoch | 45 |
| Príloha B - Zdrojový kód | 46 |

Úvod

Populačná biológia je predmetom záujmu už dlhé roky. Navrhnuť model, ktorý opisuje vývoj populácií živočíchov čo najpresnejšie je výzva pre mnohých matematikov.

Medzi prvými, ktorý v tejto oblasti vynikli bol taliansky matematik Volterra (1860-1940) a americký matematik Lotka (1880-1949), ktorí nezávisle na sebe navrhli model dravec-korist'. Ten si priblížime v tretej kapitole a pozrieme sa na jeho modifikácie, ktoré dopomohli modelu priblížiť sa realite. Hlavným nástrojom týchto modelov sú diferenciálne rovnice. V prvej časti našej práce sa zameriame práve na ne. Zoznámime sa s nimi a ukážeme si analytické spôsoby ich riešenia. V druhej časti sa budeme venovať numerickým metódam, ktoré aproximujú riešenia diferenciálnych rovníc. Numerické metódy pre riešenie diferenciálnych rovníc sú veľmi dôležité, pretože mnoho diferenciálnych rovníc sa nedá riešiť analyticky. V našej práci sa zameriame na Eulerovu metódu napred, Eulerovu spätnú metódu a Runge-Kutta metódu. Naprogramujeme ich v MATLAB-e a následne budeme ich presnosť skúšať na rovniciach, ktoré vieme riešiť aj analyticky. Pozrieme sa na odchýlku týchto metód a vzájomne ich porovnáme. Nakoniec aplikujeme najpresnejšiu z nich na populačnú biológiu. Zaujímať nás budú už spomínané dravec-korist' modely, ktoré nevieme riešiť analyticky, ale numerické metódy nám umožnia napriek tomu skúmať ich trajektórie.

Táto práca pomáha objasniť vykresľovanie grafov pre systém dvoch diferenciálnych rovníc a tiež vysvetľuje fungovanie numerických metód. Zoznamuje čitateľa s modelmi v populačnej biológii a interpretuje ich.

1 Diferenciálne rovnice

Mnoho problémov vedy a inžinierstva je riešených formou matematického modelovania. Často sa objavujú rovnice, ktoré obsahujú neznáme veličiny a ich derivácie. Takéto rovnice sa nazývajú diferenciálne rovnice. V tejto kapitole sa s nimi oboznámime, ukážeme si niektoré analytické spôsoby ich riešenia a vykreslíme rôzne obrázky znázorňujúce riešenia systému dvoch diferenciálnych rovníc.

1.1 Klasifikácia diferenciálnych rovníc

V tejto podkapitole čerpáme z [1]. Najprv definujeme pojem obyčajná diferenciálna rovnica.

Definícia 1.1 (ODR). *Rovnicu, v ktorej vystupuje len jedna nezávislá premenná t a jedna alebo viac derivácií závislej premennej $x(t)$, nazývame obyčajná diferenciálna rovnica (ODR).*

Rovnica s nezávislou premennou t a jednou závislou premennou $x(t)$ sa môže zapísať formou

$$F(t, x, x', x'', \dots, x^{(n)}) = 0, \quad (1)$$

kde

$$x^{(r)} = \frac{d^r x}{dx^r}, \quad r = 1, 2, \dots, n.$$

Nezávislá premenná t sa dá interpretovať ako čas a $x(t)$ bude v našej práci predstavovať početnosť populácie v čase t . Tým pádom $x'(t)$ opisuje zmenu populácie v čase.

Obyčajná diferenciálna rovnica n -tého rádu je taká rovnica, v ktorej najvyšší stupeň derivácie je n -tý. Keďže rovnice vyššieho rádu môžu byť vyjadrené ako systém rovníc prvého rádu, najviac metód riešenia diferenciálnych rovníc sa aplikuje práve na ne. Pozrime sa na explicitne vyjadrenú diferenciálnu rovnicu prvého rádu

$$x'(t) = f(t, x(t)). \quad (2)$$

Táto rovnica bude mať všeobecné riešenie zahŕňajúce ľubovoľnú konštantu, ktorá vznikne integrovaním. Konkrétne riešenie získame pridaním vzťahu

$$x(t_0) = x_0,$$

ktorý určí neznámu konštantu. Tento vzťah sa zvykne nazývať *počiatočná hodnota*, alebo *počiatočné podmienky*, teda bod (t_0, x_0) je začiatkový bod krivky riešenia.

Ukážeme si príklad rovnice prvého rádu, ktorá sa dá jednoducho riešiť integrovaním. Logistická rovnica

$$x' = x(\alpha - \beta x), \quad (3)$$

sa používa ako model rastu populácie nejakého druhu zvierat, kde x je funkciou uplynulého času t a vyjadruje počet jednotlivcov, α a β sú konštanty. Model vychádza z predpokladu, že rast populácie (x'/x) je rozdiel počtu narodených (α) a počtu tých, čo zomreli (βx), pričom $\alpha, \beta > 0$. Pre jednoduchosť vezmeme $\alpha = 2, \beta = 1$ a začiatkovú veľkosť populácie $x(0) = 1$. Rovnica teraz vyzerá takto

$$\frac{dx}{dt} = x(2 - x). \quad (4)$$

Predelením pravou stranou a integrovaním podľa t dostávame

$$\int \frac{1}{x(2-x)} dx = \int dt.$$

Táto technika je známa ako *separácia premenných*. Znamená to, že jedna strana rovnice závisí len od x a druhá len od t . To vedie k tvaru

$$\frac{1}{2} \int \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{2-x} \right) dx = t + C,$$

kde C je neznáma konštantu. Pokračujeme v úpravách. Ľavú stranu zintegrujeme

$$\frac{1}{2} \ln x - \frac{1}{2} \ln(2-x) = t + C,$$

prenásobíme dvomi a použijeme vetu o logaritmoch (táto veta je aj s dôkazom uvedená v prílohe A). Dostávame

$$\ln \frac{x}{2-x} = 2t + 2C.$$

Rovnicu dáme do exponentu eulerovho čísla, aby sme sa zbavili logaritmov

$$e^{\ln \frac{x}{2-x}} = e^{2t+2C}$$

a ďalej upravujeme

$$\frac{x}{2-x} = e^{2t} e^{2C}.$$

Prenásobením výrazom $(2 - x)$ dostávame

$$x = e^{2t}e^{2C}(2 - x).$$

Keďže e^{2C} je tiež nejaká konštanta, nazvime ju B , pričom $B > 0$. Roznásobíme pravú stranu

$$x = 2Be^{2t} - Be^{2t}x,$$

pričítame výraz $Be^{2t}x$

$$\begin{aligned} x + Be^{2t}x &= 2Be^{2t} \\ x &= \frac{2Be^{2t}}{1 + Be^{2t}} \\ x &= \frac{2}{1 + Be^{-2t}}. \end{aligned}$$

Teraz potrebujeme zistiť, čomu sa rovná konštanta B , aby sme dostali presné riešenie. Využijeme, že počiatočný bod je $(0, 1)$. Po dosadení za $t = 0$ a $x = 1$ dostávame

$$1 = \frac{2}{1 + B}$$

Riešením tejto jednoduchej lineárnej rovnice vyrátame, že $B = 1$. A teda riešenie diferenciálnej rovnice bude

$$x(t) = \frac{2}{1 + e^{-2t}}. \quad (5)$$

Ukázali sme si ako sa rieši diferenciálna rovnica prvého rádu metódou separácie premenných. Nie vždy sa však premenné dajú separovať a treba použiť iný postup. Toto však nie je predmetom tejto práce. Nás budú zaujímať najmä systémy dvoch diferenciálnych rovníc.

1.2 Systém dvoch lineárnych diferenciálnych rovníc

V tejto podkapitole čerpáme z [2]. Vezmime systém rovníc

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad (6)$$

kde matica $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ je regulárna. Systémy budeme ilustrovať pomocou *fázových portrétov*. Fázový portrét zobrazuje riešenia systému (6) v rovine x, y pre rôzne počiatočné body, pričom každý z nich začína novú trajektóriu, ktorá je znázornená krivkou

alebo bodom. Každý bod vo fázovom portréte reprezentuje stav premenných x, y v nejakom čase t . Pohybom po danej trajektórii môžeme sledovať ako sa x, y v čase menia. Trajektórie, ktoré sú tvorené len jedným bodom (\hat{x}, \hat{y}) , sú tzv. *stacionárne body* systému (6) a sú charakterizované tým, že

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

teda \hat{x} ani \hat{y} sa s pribúdajúcim časom nemenia. Poznáme viaceré typy stacionárnych bodov, ktoré určujú, ako bude fázový portrét vyzeráť, pretože ovplyvňujú trajektórie vo svojom okolí. Charakter stacionárneho bodu závisí od vlastných hodnôt matice A .

Nech vlastné hodnoty sú λ_1, λ_2 a príslušné vlastné vektory \vec{v}_1, \vec{v}_2 . Označme maticu vlastných vektorov $V = (\vec{v}_1, \vec{v}_2)$ a transformujme systém (6) pomocou

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = V \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}. \quad (7)$$

Dostávame tak

$$V \begin{pmatrix} \xi' \\ \eta' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = AV \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}.$$

Prenásobením maticou V^{-1}

$$\begin{pmatrix} \xi' \\ \eta' \end{pmatrix} = V^{-1}AV \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \Lambda \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix},$$

kde

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

Transformovaný systém (6) teda vyzerá takto

$$\begin{aligned} \xi' &= \lambda_1 \xi \\ \eta' &= \lambda_2 \eta \end{aligned} \quad (8)$$

a stacionárny bod bude zjavne $(0, 0)$. Transformáciou sme dosiahli, že vlastné hodnoty matice opisujúcej systém (8) sú rovnaké ako vlastné hodnoty matice A a vlastné vektory sú $(1, 0)^T$ a $(0, 1)^T$. Riešenia systému (8) sú

$$\begin{aligned} \xi(t) &= \xi(0) e^{\lambda_1 t} \\ \eta(t) &= \eta(0) e^{\lambda_2 t} \end{aligned}$$

Získavame tak predpis

$$\begin{pmatrix} \xi(t) \\ \eta(t) \end{pmatrix} = \xi(0) e^{\lambda_1 t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \eta(0) e^{\lambda_2 t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Spätnou transformáciou podľa vzťahu (7) dostávame

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = V \begin{pmatrix} \xi(t) \\ \eta(t) \end{pmatrix} = \xi(0) e^{\lambda_1 t} \vec{v}_1 + \eta(0) e^{\lambda_2 t} \vec{v}_2 = c_1 e^{\lambda_1 t} \vec{v}_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} \vec{v}_2,$$

kde

$$V \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix}.$$

Predpis riešení je teda v tvare

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = c_1 e^{\lambda_1 t} \vec{v}_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} \vec{v}_2, \quad (9)$$

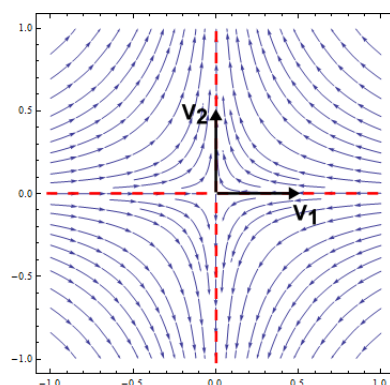
odkiaľ vidno, ako vlastné hodnoty určujú charakter stacionárnych bodov. Špeciálnymi trajektóriami sú tie, ktoré ležia priamo na vlastných vektoroch. Sú lineárne a ich smer závisí od vlastných hodnôt matice A . Ak je vlastná hodnota záporná, trajektória smeruje ku stacionárnemu bodu a ak je vlastná hodnota kladná, trajektória smeruje preč od stacionárneho bodu. Teraz sa pozrieme na to, ako vlastné hodnoty matice A ovplyvňujú ostatné trajektórie.

Vezmime maticu

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Vlastné hodnoty tejto matice sú $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 1$ a vlastné vektory sú $\vec{v}_1 = (1, 0)^T$, $\vec{v}_2 = (0, 1)^T$. Fázový portrét pre tento systém je znázornený na obrázku 1.

V predpise riešenia (9) sú dva sčítance. Hodnota λ_1 je záporná a λ_2 kladná. Ak t ide do nekonečna, hodnota prvého sčítanca ide do nuly a hodnota druhého sčítanca rastie nekonečne. Podobne, ak sa t blíži k mínus nekonečnu, hodnota druhého sčítanca sa blíži k nule a hodnota prvého sčítanca sa blíži k nekonečnu. Ak trajektória začína v blízkosti vektora \vec{v}_1 , bude smerovať popri ňom k stacionárnemu bodu. S rastúcim časom však rastie vplyv druhého sčítanca, ktorý naopak spôsobuje vzdďalovanie sa od stacionárneho bodu. Trajektória preto postupne stráca smer vektora \vec{v}_1 a nadobúda



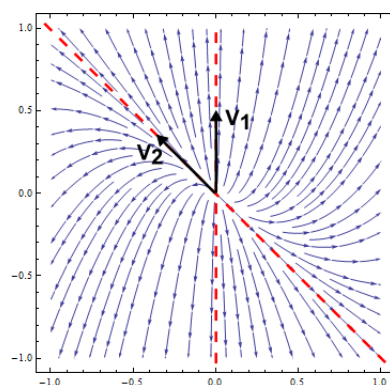
Obr. 1: Sedlo.

smer vektora \vec{v}_2 . Začne teda smerovať preč od stacionárneho bodu. Takýto stacionárny bod nazývame **sedlo** a vzniká vždy, keď sú vlastné hodnoty matice A reálne a každá má iné znamienko.

Skúsme pozmeniť maticu A na

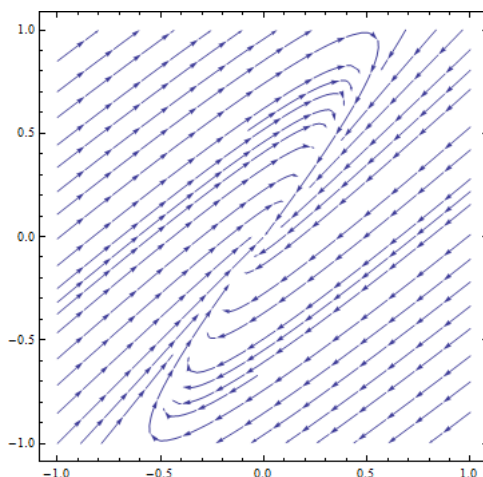
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Vlastné hodnoty tejto matice sú $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 1$ a vlastné vektory sú $\vec{v}_1 = (0, 1)^T$, $\vec{v}_2 = (-1, 1)^T$. Fázový portrét tohto systému je vykreslený na obrázku 2.



Obr. 2: Nestabilný uzol.

Keďže vlastné hodnoty sú obe kladné, všetky trajektórie budú smerovať preč od stacionárneho bodu. Takýto stacionárny bod sa nazýva **nestabilný uzol**. Ak by boli vlastné hodnoty obe záporné, všetky trajektórie by smerovali ku stacionárnemu bodu, ktorý sa v tomto prípade nazýva **stabilný uzol** (obr.3, fázový portrét pre systém s maticou $A = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$).

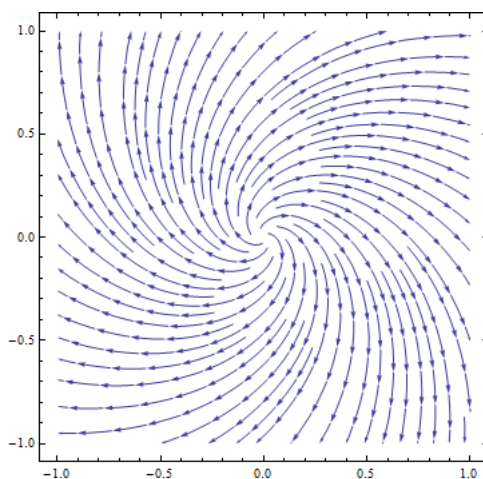


Obr. 3: Stabilný uzol.

Zaujímavé je, ak má matica A komplexné vlastné hodnoty

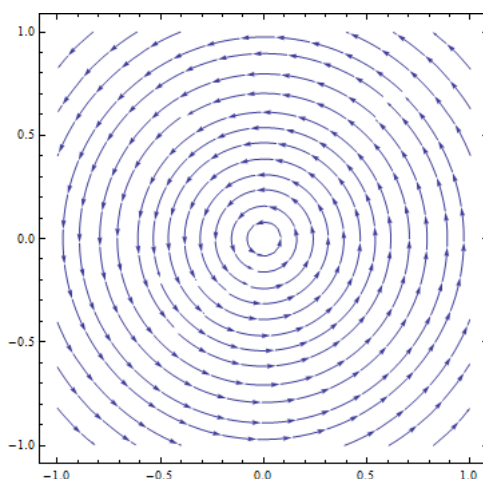
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Tu sa $\lambda_1 = 1 + i$ a $\lambda_2 = 1 - i$. Vlastné vektory sú $\vec{v}_1 = (1, i)^T$ $\vec{v}_2 = (1, -i)^T$. Fázový portrét tohto systému je znázornený na obrázku 4.



Obr. 4: Nestabilný fokus.

Ak teda vlastné hodnoty matice A sú komplexné a reálna časť je kladná, stacionárny bod takého systému sa nazýva **nestabilný fokus**. Ak by reálna časť bola záporná, stacionárny bod by bol **stabilný fokus**. A ak by reálna časť bola rovná nule, stabilným bodom by bolo **centrum** (obr.5)



Obr. 5: Centrum.

Ukážeme si, ako sa rieši pomerne zložitý príklad, ktorého stacionárnym bodom bude stabilný fokus.

Príklad:

$$\begin{aligned}x' &= -0,1x + y \\y' &= -x - 0,1y\end{aligned}\tag{10}$$

Sústavu zapíšeme maticovo

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,1 & 1 \\ -1 & -0,1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Hľadáme vlastné hodnoty a vlastné vektory matice

$$\det \begin{vmatrix} -0,1 - \lambda & 1 \\ -1 & -0,1 - \lambda \end{vmatrix} = (-0,1 - \lambda)^2 + 1 = \lambda^2 + 0,2\lambda + 1,01$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-0,2 \pm \sqrt{0,04 - 4,04}}{2}$$

$$\lambda_1 = -0,1 + i, \lambda_2 = -0,1 - i.\tag{11}$$

Prvý vlastný vektor spĺňa \vec{v}_1

$$\begin{pmatrix} -i & 1 \\ -1 & -i \end{pmatrix} \vec{v}_1 = 0$$

a teda

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}.$$

Druhý vlastný vektor \vec{v}_2 spĺňa

$$\begin{pmatrix} i & 1 \\ -1 & i \end{pmatrix} \vec{v}_2 = 0$$

a teda

$$\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}.$$

Vo všeobecnosti platí, že komplexné vlastné hodnoty sú navzájom komplexne združené a príslušné vlastné vektory tiež. Tak, ako v tomto príklade. Takisto konštanty c_1 a c_2 z (9) sú združené. Môžeme teda napísať

$$\begin{aligned} c_1 &= k_1 + ik_2, & c_2 &= k_1 - ik_2, \\ \lambda_1 &= \alpha + i\beta, & \lambda_2 &= \alpha - i\beta, \\ \vec{v}_1 &= \vec{w}_1 + i\vec{w}_2, & \vec{v}_2 &= \vec{w}_1 - i\vec{w}_2 \end{aligned}$$

a vzťah (9) upraviť

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} &= (k_1 + ik_2)e^{(\alpha+i\beta)t}(\vec{w}_1 + i\vec{w}_2) + (k_1 - ik_2)e^{(\alpha-i\beta)t}(\vec{w}_1 - i\vec{w}_2) \\ &= e^{\alpha t}(k_1 + ik_2)(\cos(\beta t) + i \sin(\beta t))(\vec{w}_1 + i\vec{w}_2) + \\ &\quad + e^{\alpha t}(k_1 - ik_2)(\cos(\beta t) + i \sin(\beta t))(\vec{w}_1 - i\vec{w}_2) \\ &= 2e^{\alpha t} [k_1 \cos(\beta t)\vec{w}_1 - k_1 \sin(\beta t)\vec{w}_2 - k_2 \cos(\beta t)\vec{w}_2 - k_2 \sin(\beta t)\vec{w}_1] \quad (12) \\ \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} &= 2 \operatorname{Re}(c_1 \vec{v}_1 e^{\lambda_1 t}) \quad (13) \end{aligned}$$

Najprv sa pozrime na zátvorku vo vzťahu (12). Čas t tu vystupuje len v argumente funkcií sínus a kosínus spolu s β . Preto výraz v zátvorke nadobúda rovnakú hodnotu pre $\beta t + 2k\pi$ pre všetky celé k . Z toho vyplýva, že ak $\alpha = 0$, t.j. vlastné hodnoty sú rýdzo imaginárne, tak sú trajektórie uzavreté, teda po určitom čase sa vždy vrátia do toho istého bodu (centrum). Ak $\alpha > 0$, t.j. reálna časť vlastných hodnôt je kladná, tak sa trajektórie špirálovito vzdiaľujú od stacionárneho bodu (nestabilný fokus). Nakoniec ak $\alpha < 0$, t.j. reálna časť vlastných hodnôt je záporná, tak sa trajektórie špirálovito približujú k stacionárnemu bodu (stabilný fokus).

Vráťme sa k nášmu príkladu, kde

$$\lambda_1 = \alpha + i\beta = -0,1 + i,$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} = \vec{v}_1 = \vec{w}_1 + i\vec{w}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Konštantu $c_1 = k_1 + ik_2$ vieme teraz dorátať z (12) s využitím počiatočných bodov $x_0 = 1, y_0 = 1$

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} &= 2e^0 [k_1 \cos(0) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - k_1 \sin(0) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} - k_2 \cos(0) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} - k_2 \sin(0) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}] \\ &= 2 [k_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - k_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}]. \end{aligned}$$

Odtiaľ dostávme

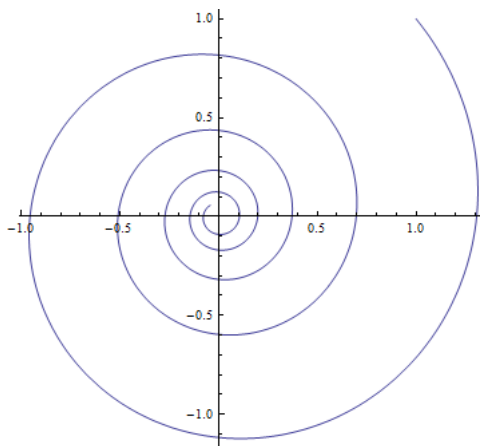
$$1 = 2k_1$$

$$1 = -2k_2$$

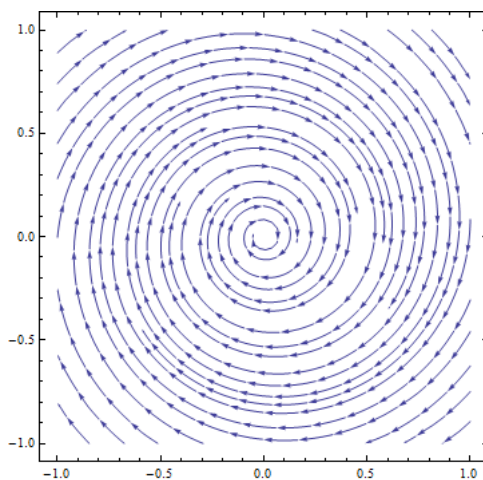
a $c_1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$. Dosadením do (13) konečne získavame riešenie nášho príkladu

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = 2 \operatorname{Re} \left(\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i \right) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{(-0,1+i)t} \right) \quad (14)$$

Ak začíname v počiatočnom bode $x(0) = 1, y(0) = 1$, tak vieme vypočítať hodnotu $x(t), y(t)$ v ľubovoľnom čase t pomocou tohto riešenia. Keďže reálna časť vlastných hodnôt je záporná, stacionárny bod bude stabilný fokus (obr.6).



Obr. 6: Riešenie systému (10) pre počiatočné body $x_0 = 1, y_0 = 1$.



Obr. 7: Fázový portrét pre systém (10). Stabilný fokus.

Toto je graf danej sústavy diferenciálnych rovníc pre počiatočné body $x(0) = 1$, $y(0) = 1$. Na obrázku 7 je znázornený fázový portrét tohto systému pre viaceré počiatočné body.

2 Numerické metódy

V prvej kapitole sme si ukázali, ako sa obyčajné diferenciálne rovnice, resp. systémy obyčajných diferenciálnych rovníc riešia analyticky. Nie vždy sa však riešenia dajú napísať v analytickom tvare. Preto sa študujú približné metódy pre riešenie obyčajných rovníc. V tejto kapitole si ukážeme niekoľko jednokrokových numerických metód riešenia diferenciálnych rovníc a systémov. V prílohe B sa nachádza zdrojový kód z MATLAB-u, kde sú naprogramované numerické metódy, ktoré budeme v nalsedujúcich podkapitolách spomínať.

2.1 Eulerova metóda napred

Pri popise tejto metódy vychádzame z [3].

Uvažujme diferenciálnu rovnicu prvého rádu

$$x'(t) = f(t, x(t)), \quad (15)$$

ktorá spĺňa počiatočnú podmienku

$$x(t_0) = x_0. \quad (16)$$

Metóda spočíva v tom, že malými krokmi postupne vykresľuje trajektóriu vo fázovom portréte.

Nech $h > 0$ je dĺžka kroku. Potom

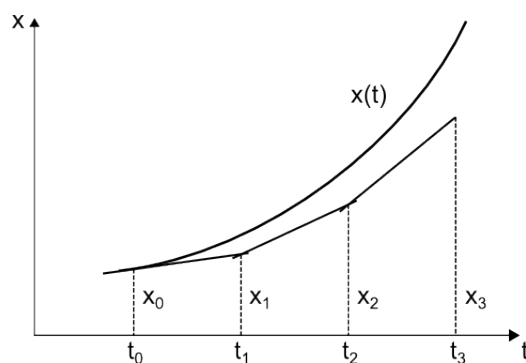
$$t_n = t_0 + nh, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Rovnica (15) vyjadruje deriváciu v bode (t_0, x_0) , čo je smernica dotyčnice riešenia. V smere dotyčnice v bode t_n sa budeme hýbať počas jedného kroku od bodu t_n po bod t_{n+1} . Od toho bodu, po ďalší bod, t_{n+2} , sa budeme hýbať v smere dotyčnice v bode t_{n+1} . Postupné aproximácie x_n pre exaktné hodnoty $x(t_n)$ teda získame na základe predpisu

$$x_{n+1} = x_n + hf(t_n, x_n), \quad n = 0, 1, \dots$$

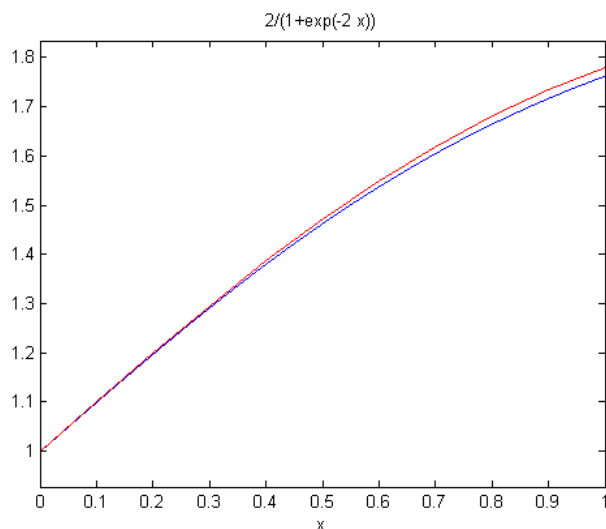
Na obrázku 8 je schematicky zakreslených niekoľko aproximácií.

V matlabe vykreslíme pomocou Eulerovej metódy napred graf riešenia diferenciálnej rovnice (4), ktorej analytické riešenie (5) sme odvodzovali v (1.1). Na obrázku 9 je modrou farbou znázornený graf analytického riešenia (5). Červenou farbou je vykreslený



Obr. 8: Eulerova metóda napred, niekoľko aproximácií.

graf riešenia rovnice (4) pre počiatkové body $t_0 = 0, x_0 = 1$ pomocou Eulerovej metódy napred s dĺžkou kroku $h = 0,1$.



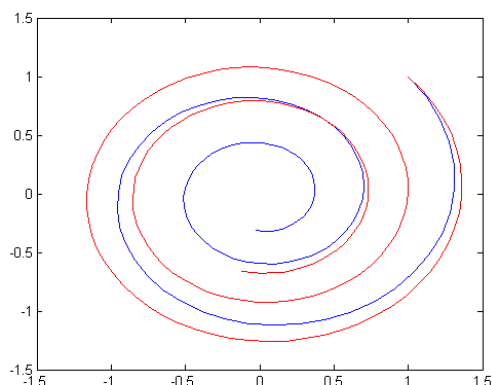
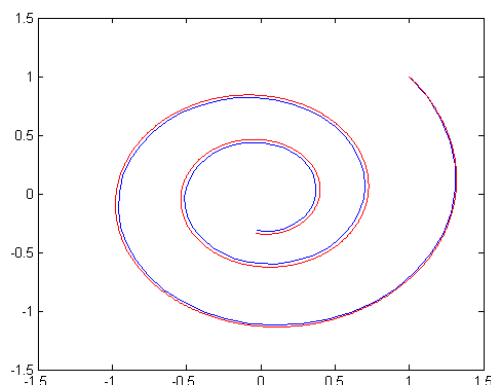
Obr. 9: Riešenie (4) Eulerovou metódou napred vykreslené červenou farbou a analytické riešenie (5) tejto rovnice vykreslené modrou farbou.

Vidíme, že graf získaný pomocou Eulerovej metódy napred nie je celkom presnou aproximáciou, no čím viac by sme zmenšovali dĺžku kroku, tým bližšie presnému riešeniu by bol.

Pre našu prácu je dôležitý systém dvoch lineárnych diferenciálnych rovníc, vzhľadom na to, že budeme skúmať vývin dvoch populácií zvierat, ktoré sú vo vzťahu dravec a korisť. Preto sa pozrieme, ako účinná je Eulerova metóda napred pre sústavu diferenciálnych rovníc (10) riešenú v (1.2).

Riešenie pre počiatkové body $x_0 = 1, y_0 = 1$ je (14).

V grafe (obr.10) na ľavo je modrou farbou vykreslený priebeh funkcie (14) v čase od $t_0 = 0$ do $t_1 = 15$ a červenou farbou riešený systém rovníc (10) Eulerovou metódou napred v rovnakom časovom intervale s počiatočnými bodmi $x_0 = 1, y_0 = 1$ a dĺžkou kroku $h = 0,1$. Napravo je dĺžka kroku pri vykresľovaní Eulerovou metódou napred $h = 0,01$.

(a) Dĺžka kroku $h = 0,1$.(b) Dĺžka kroku $h = 0,01$.

Obr. 10: Riešenie systému dvoch rovníc (10) Eulerovou metódou napred vykreslené červenou farbou a analytické riešenie (14) tohto systému vykreslené modrou farbou.

Ako aj v predošlom prípade, môžeme si všimnúť, že pri väčšej dĺžke kroku nie je aproximácia presná. Keď však dĺžku kroku zmenšíme, viac sa približuje k presnému riešeniu.

2.2 Eulerova spätná metóda

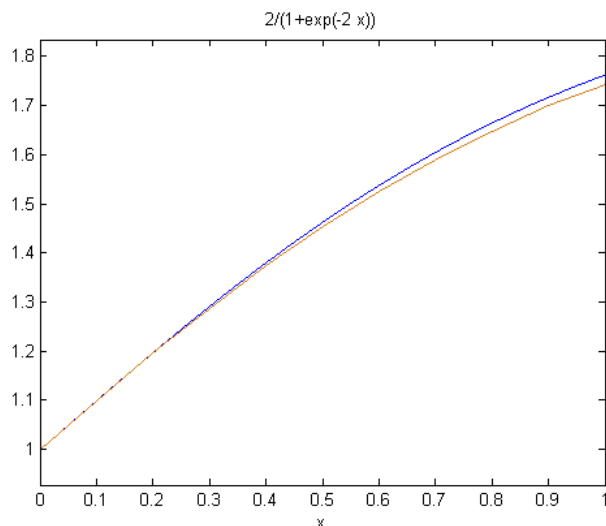
Pri popise Eulerovej spätnej metódy vychádzame z [3].

Táto metóda funguje veľmi podobne ako Eulerova metóda napred. Rozdiel je v tom, že keď sa pohybujeme z bodu t_n do bodu t_{n+1} , nehýbeme sa v smere dotyčnice v bode t_n , ale hýbeme sa v smere dotyčnice v bode t_{n+1} . Predpis pre x_{n+1} je teda nasledovný

$$x_{n+1} = x_n + hf(t_{n+1}, x_{n+1}), \quad n = 0, 1, \dots$$

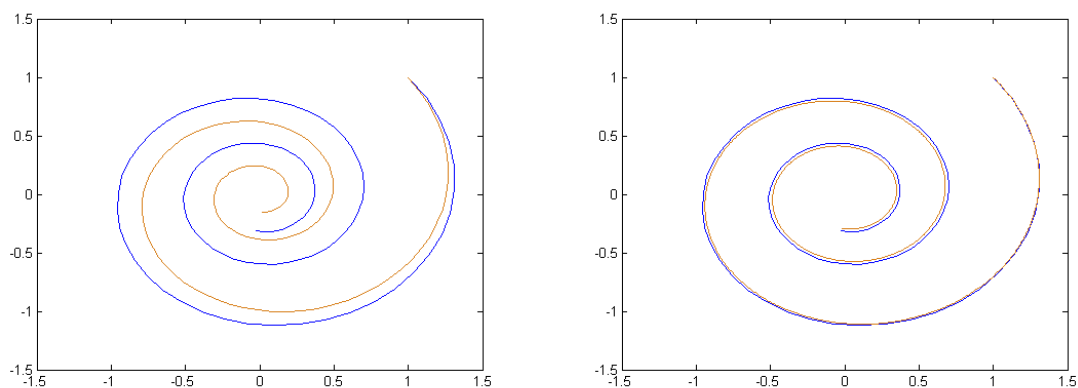
kde $h > 0$ taktisto ako v predošlom prípade predstavuje dĺžku kroku. Táto schéma je implicitná vzhľadom na x_{n+1} , takže sa na každom kroku rieši iteračným spôsobom.

Do grafu (obr.11) vykreslíme hnedou farbou priebeh riešenia diferenciálnej rovnice (4), ktorú tentokrát riešime Eulerovou spätnou metódou s dĺžkou kroku $h = 0,1$ a počiatočnými bodmi $t_0 = 0, x_0 = 1$ a modrou farbou graf analytického riešenia danej rovnice (5).



Obr. 11: Riešenie (4) Eulerovou spätnou metódou vykreslené červenou farbou a analytické riešenie (5) tejto rovnice vykreslené modrou farbou.

Numerické riešenie pomocou Eulerovej spätnej metódy taktiež nie je presnou aproximáciou analytického riešenia.



(a) Dĺžka kroku $h = 0,1$.

(b) Dĺžka kroku $h = 0,01$.

Obr. 12: Riešenie systému dvoch rovníc (10) Eulerovou spätnou metódou vykreslené hnedou farbou a analytické riešenie (14) tohto systému vykreslené modrou farbou.

Pozrime sa ako sa bude Eulerova spätná metóda správať v prípade systému dvoch diferenciálnych rovníc (10). V grafe (obr. 12) je hnedou farbou vykreslený riešený systém Eulerovou spätnou metódou s dĺžkou kroku $h = 0,1$ (vľavo), resp. $h = 0,01$ (vpravo) a počiatocnými bodmi $x_0 = 1, y_0 = 1$ v čase od $t_0 = 0$ do $t_1 = 15$. Modrou je znova vykreslené analytické riešenie systému (14).

2.3 Runge-Kutta metóda

V tejto podkapitole vychádzame z [1].

Najpraktickejšie jednokrokové numerické metódy pre riešenie obyčajných diferenciálnych rovníc sú metódy Runge-Kutta (ďalej len RK). Vo všeobecnosti môže byť explicitná RK formula vyjadrená nasledovne

$$x_{n+1} = x_n + h_n \sum_{i=1}^s b_i f_i, \quad (17)$$

kde

$$\begin{aligned} f_1 &= f(t_n, x_n) \\ f_i &= f\left(t_n + c_i h_n, x_n + h_n \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} f_j\right) \\ i &= 2, 3, \dots, s. \end{aligned}$$

Vlastnosti formuly sú určené parametrami b_i, c_i, a_{ij} a počtom úrovní s . Formulu nazývame explicitnou, pretože f_i je vyjadrená len pomocou už vyjadrených f_j , kde $j = 1, 2, \dots, i - 1$. My sa budeme zaoberať trojúrovňovou RK metódou.

Opäť uvažujme diferenciálnu rovnicu prvého rádu (15), ktorá spĺňa počiatocnú podmienku (16).

Parametre b_i, c_i, a_{ij} a s budú

$$\begin{aligned} b_1 &= \frac{1}{6}, & b_2 &= \frac{4}{6}, & b_3 &= \frac{1}{6}, \\ c_2 &= \frac{1}{2}, & c_3 &= 1, \\ a_{21} &= \frac{1}{2}, & a_{31} &= -1, & a_{32} &= 2, \\ s &= 3. \end{aligned}$$

Po dosadení do (17) získame

$$x_{n+1} = x_n + \frac{h}{6}(f_1 + 4f_2 + f_3), \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (18)$$

kde

$$\begin{aligned} f_1 &= f(t_n, x_n) \\ f_2 &= f\left(t_n + \frac{1}{2}h, x_n + \frac{1}{2}hf_1\right) \\ f_3 &= f\left(t_n + h, x_n + h(2f_2 - f_1)\right). \end{aligned}$$

Na príklade (4) si ukážeme ako prebieha jeden krok trojúrovňovej RK metódy. Vieme, že analytické riešenie pre počiatočné body $t_0 = 0, x_0 = 1$ je (5). Zvoľme dĺžku kroku $h = 0,1$. Výpočet je znázornený v tabuľke (tab. 1) (čísla sú zaokrúhľované na štyri desatinné miesta).

Tabuľka 1: Vyčíslenie trojúrovňovej Runge-Kutta metódy.

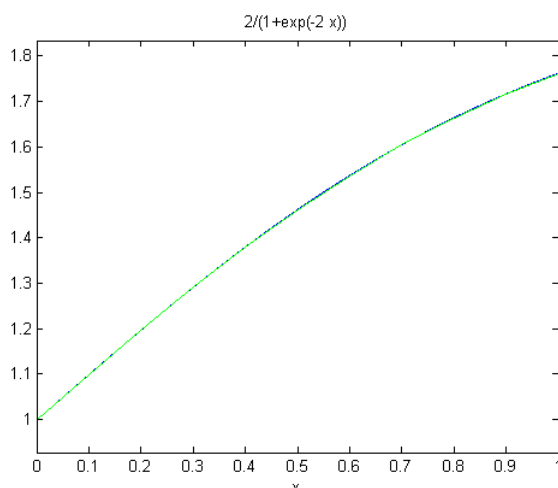
| Úroveň | t | x | $f(t, x)$ |
|--------|----------------------|-------------------------|-----------|
| 1 | t_0 | x_0 | f_1 |
| | 0 | 1 | 1 |
| 2 | $t_0 + \frac{1}{2}h$ | $x_0 + \frac{1}{2}hf_1$ | f_2 |
| | 0,05 | 1,05 | 0,9975 |
| 3 | $t_0 + h$ | $x_0 + h(2f_2 - f_1)$ | f_3 |
| | 0,1 | 1,0995 | 0,9901 |

Výsledok prvého kroku je

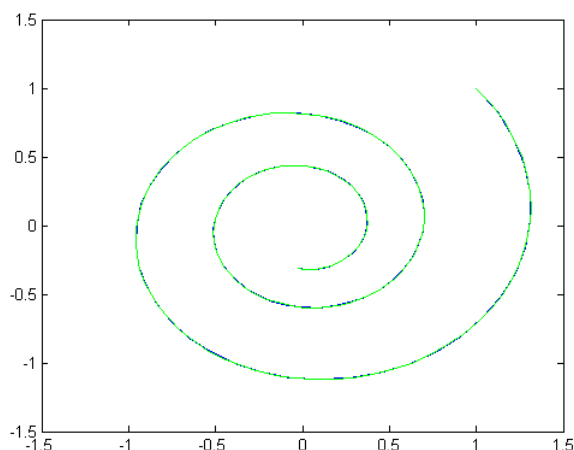
$$x_1 = 1 + \frac{0,1}{6}(1 + 4 \cdot 0,9975 + 0,9901) = 1,09967 \simeq x(0,1) = 1,09967$$

Odchýlku aproximácie vypočítame ako rozdiel hodnoty x_1 získanej RK metódou a hodnoty $x(t_1)$, čo je skutočná hodnota funkcie $f(t, x(t))$ v bode t_1 . V tomto prípade odchýlka po prvej iterácii je $3,345417107780691 \cdot 10^{-7}$.

Graf na obrázku 13 znázorňuje numerické riešenie rovnice (4) RK metódou s dĺžkou kroku $h = 0,1$, ktoré je vykreslené zelenou farbou. Modrou farbou je znázornené analytické riešenie (5) tejto rovnice.



Obr. 13: Numerické riešenie rovnice (4) pomocou Runge-Kutta metódy znázornené zelenou farbou a analytické riešenie (5) tejto rovnice znázornené modrou farbou.



Obr. 14: Riešenie systému dvoch rovníc (10) Runge-Kutta metódou vykreslené zelenou farbou a analytické riešenie (14) tohto systému vykreslené modrou farbou.

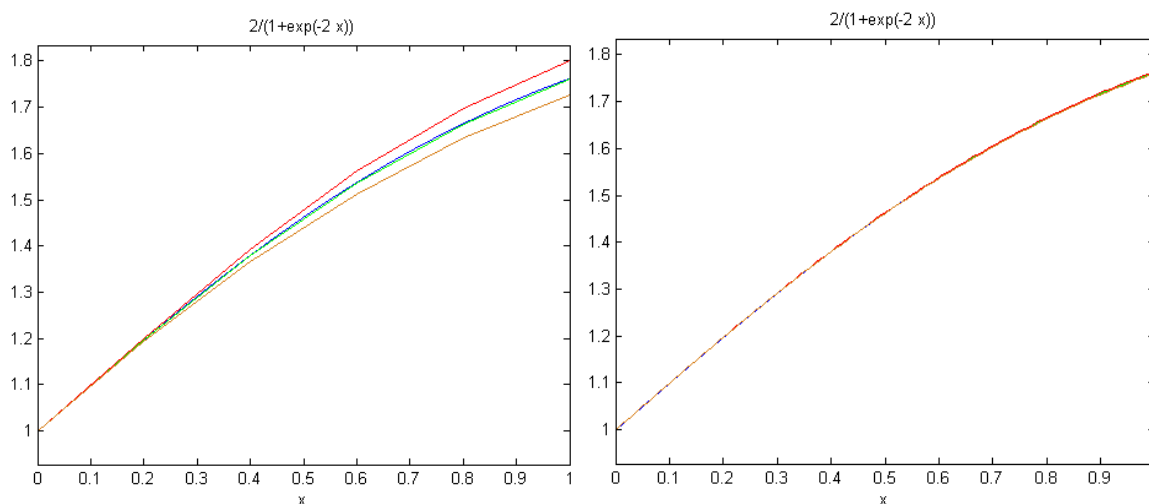
Vidíme, že táto aproximácia je pri danej dĺžke kroku veľmi podobná analytickému riešeniu. Tiež sa pozrime na to, ako sa numerické riešenie RK metódy správa pri vykresľovaní trajektórie systému (10). V grafe na obrázku 14 je zelenou farbou vykreslené numerické riešenie systému pomocou RK metódy v čase od $t_0 = 0$ do $t_1 = 15$ s dĺžkou kroku $h = 0,1$ a modrou farbou analytické riešenie tohto systému.

V prípade RK metódy je už pri dĺžke kroku $h = 0,1$ aproximácia takmer rovnaká ako analytické riešenie, preto nemusíme znázorňovať obrázok s menšou dĺžkou kroku.

2.4 Porovnanie metód

V predošlých podkapitolách sme si ukázali niekoľko jednokrokových numerických metód pre riešenie diferenciálnych rovníc. V tejto časti ich skúsime navzájom porovnať. V grafoch na obrázkoch 15, 16, 17, 19, 20 a 21 sú vykreslené numerické riešenia

- Eulerovej metódy napred - červenou,
- Eulerovej spätnej metódy - hnedou,
- Runge-Kutta trojúrovňovej metódy - zelenou,
- a analytické riešenie modrou farbou.



(a) Dĺžka kroku $h = 0,2$.

(b) Dĺžka kroku $h = 0,01$.

Obr. 15: Riešenia rovnice (4).

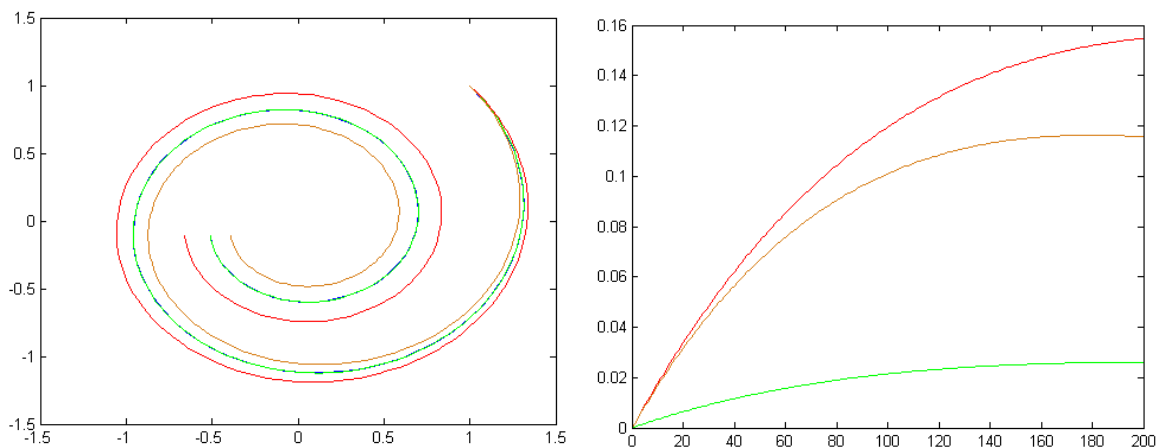
Grafy na obrázku 15(a) zobrazujú riešenia rovnice (4) s dĺžkou kroku $h = 0,2$ a na obrázku 15(b) s dĺžkou kroku $h = 0,01$.

Na obrázku 15(a) je vidieť, že RK metóda najpresnejšie aproximuje analytické riešenie danej rovnice. Dá sa všimnúť, že kým aproximácia Eulerovou metódou napred opisuje graf analytického riešenia z vonkajšej strany zakrivenia, aproximácia Eulerovou spätou metódou ho opisuje z vnútornej časti zakrivenia. To je spôsobené práve tým, že od bodu t_n po bod t_{n+1} sa metóda napred hýbe v smere dotyčnice v prvom bode

(teda bode t_n) a spätná metóda sa hýbe v smere dotyčnice v druhom bode (teda bode t_{n+1}).

Obrázok 15(b) demonštruje, že pri veľmi malej dĺžke kroku, sú odchýlky všetkých troch metód porovnateľne malé a aproximácie sú takmer presné. Spomeňme však, že pri tomto dvadsaťnásobnom zmenšení kroku sa dvadsaťkrát zvýšil počet výpočtových operácií, ktoré musíme spraviť. Dĺžku kroku teda treba voliť rozumne tak, aby výpočet netrval príliš dlho.

Riešenia sústavy diferenciálnych rovníc (10) znázorňujeme v grafe na obrázku 16(a). Za dĺžku kroku sme zvolili $h = 0,05$, trajektórie sme vykreslili v čase od $t_0 = 0$ do $t_1 = 10$ a počiatočné body sú $x_0 = 1$, $y_0 = 1$. Opäť pozorujeme, že RK metóda sa najviac približuje analytickému riešeniu, zatiaľ čo Eulerove metódy ho opisujú jedna z vonkajšej strany (metóda napred) a druhá z vnútornej strany (spätná).



(a) Numerické a analytické riešenia.

(b) Vývin odchýliek v čase.

Obr. 16: Stabilný fokus sústavy (10).

Pozrime sa na odchýlky numerických metód, ktoré vypočítame ako vzdialenosť bodov $[x(t), y(t)]$ a $[x_t, y_t]$. Odchýlka v čase t je

$$e_t = \sqrt{|x(t) - x_t|^2 + |y(t) - y_t|^2}, \quad (19)$$

kde

- x_t, y_t sú hodnoty premenných x, y v čase t získaných numerickou metódou,
- $x(t), y(t)$ sú skutočné hodnoty premenných x, y v čase t získané analytickým riešením.

V grafe na obrázku 16(b) je vykreslená závislosť veľkosti odchýliek numerických metód od času. Vidíme, že s rastúcim časom rastú aj odchýlky. Najväčšie odchýlky vznikajú pri použití Eulerovej metódy napred, aj keď z vykreslených riešení (obr. 16(a)) by sme nevedeli jednoznačne určiť, ktorá z Eulerových metód je lepšia.

Aproximácia plochy medzi krivkou numerického riešenia a krivkou analytického riešenia je

$$E = \sum_{i=1}^P e_i \cdot h,$$

kde $P = t_1/h$ je počet krokov.

Pre Eulerovu metódu napred $E = 1,0681$, pre Eulerovu spätnú metódu $E = 0,8780$ a pre RK metódu $E = 0,1890$. RK metóda je výrazne presnejšia ako Eulerove metódy.

Doteraz sme sa zaoberali len sústavou diferenciálnych rovníc, ktorej stacionárnym bodom bol stabilný fokus. Skúsme sa pozrieť, ako spomínané numerické metódy vykresľujú aj iné fázové portréty. Stacionárnym bodom nasledujúcej sústavy

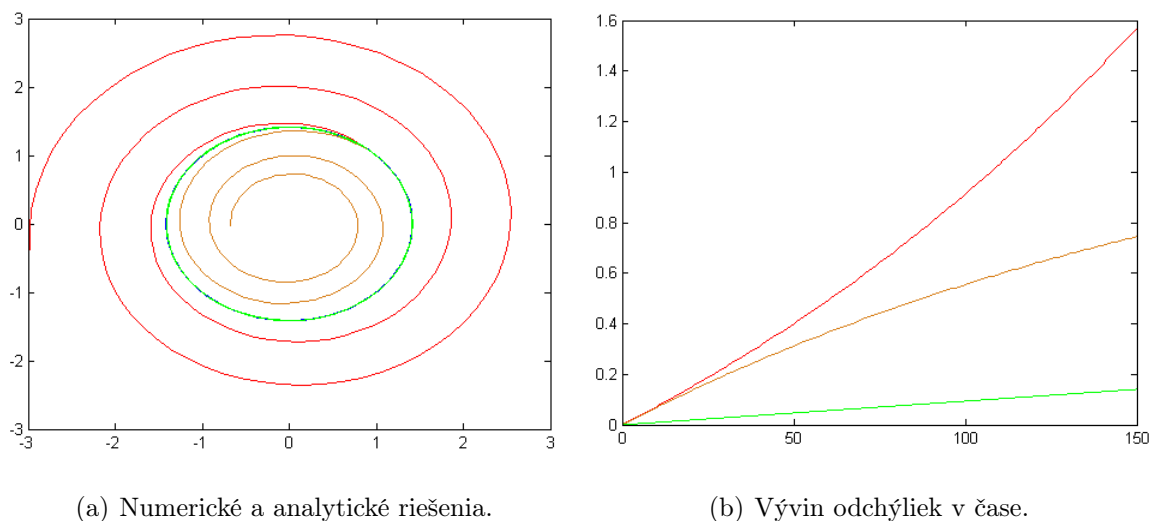
$$\begin{aligned} x' &= -y \\ y' &= x \end{aligned} \tag{20}$$

je centrum a jej analytické riešenie pre počiatočné body $x_0 = 1, y_0 = 1$ je

$$\begin{pmatrix} \cos(t) - \sin(t) \\ \cos(t) + \sin(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}. \tag{21}$$

Na obrázku 17(a) je zobrazený graf vykresľujúci analytické riešenie (21) sústavy (20) a numerické riešenia tej istej sústavy v čase od $t_0 = 0$ do $t_1 = 15$ s počiatočnými bodmi $x_0 = 1, y_0 = 1$ a dĺžkou kroku $h = 0,1$. Všimnime si, že k analytickému riešeniu tejto sústavy sa približuje len metóda RK. Eulerová metóda vpred a Eulerova spätná metóda naznačuje skôr fokus ako centrum.

Na obrázku 17(b) sú znázornené odchýlky numerických metód od presného riešenia v závislosti od času. Vidíme, že odchýlky metódy RK sú veľmi malé a odchýlky Eulerových metód sú pomerne veľké. V tabuľke 2 sú vyčíslené odchýlky na každom desiatom kroku vykresľovania pomocou numerických metód. Z obrázku 17(a) sa zdá, že RK metóda aproximuje analytické riešenie takmer presne, preto je prekvapivé, že odchýlky pre RK metódu s pribúdajúcim časom rastú. Dôvod je ten, že riešenie RK



Obr. 17: Riešenia sústavy (20). Centrum.

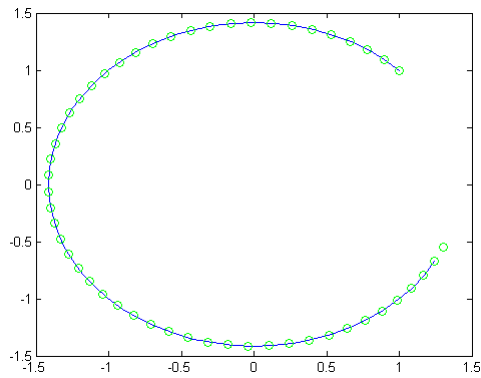
| Čas | | | | | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|-----------------------------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| Odchýlka Eulerovej metódy napred | | | | | 0,065 | 0,141 | 0,220 | 0,304 | 0,391 |
| Odchýlka Eulerovej spätnej metódy | | | | | 0,062 | 0,128 | 0,190 | 0,250 | 0,307 |
| Odchýlka Runge-Kutta metódy | | | | | 0,008 | 0,018 | 0,027 | 0,037 | 0,046 |
| 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
| 0,484 | 0,581 | 0,682 | 0,789 | 0,902 | 1,020 | 1,145 | 1,275 | 1,413 | 1,557 |
| 0,361 | 0,412 | 0,461 | 0,507 | 0,551 | 0,593 | 0,633 | 0,671 | 0,708 | 0,742 |
| 0,055 | 0,065 | 0,074 | 0,083 | 0,093 | 0,102 | 0,112 | 0,121 | 0,130 | 0,139 |

Tabuľka 2: Odchýlky riešení numerických metód.

metódy síce opisuje rovnakú elipsu ako analytické riešenie, ale opisuje ju rýchlejšie. Na obrázku 18 je tento jav znázornený. Riešenia vykresľujeme v čase od $t_0 = 0$ do $t_5 = 5$. Analytické riešenie je vykreslené modrou, riešenie RK metódou v každom bode je znázornené zeleným krúžkom. Vidíme, že obe riešenia začínajú v bode $(1, 1)$, no nekončia v tom istom bode, aj keď sú vykresľované pre rovnaký čas.

Pre Eulerovu metódu napred $E = 10,5739$, pre Eulerovu spätnú metódu $E = 6,3907$ a pre RK metódu $E = 1,0749$.

Ďalší typ stacionárny bod, ktorým sa budeme zaoberať, je nestabilný fokus. Vezmime



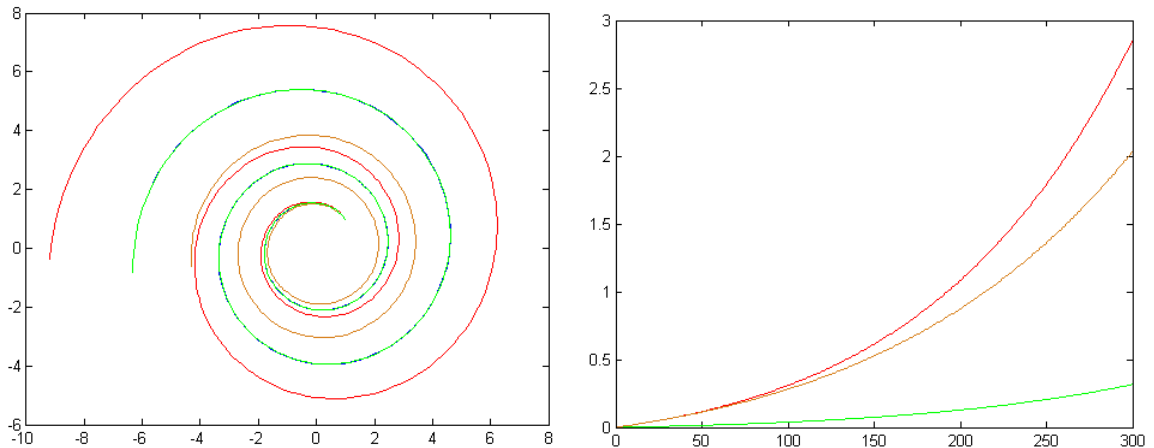
Obr. 18: Porovnanie rýchlosti RK metódy a analytického riešenia.

sústavu diferenciálnych rovníc

$$\begin{aligned}x' &= 0,1x - y \\y' &= x + 0,1y,\end{aligned}\tag{22}$$

ktorej analytické riešenie pre počiatočné body $x_0 = 1, y_0 = 1$ je

$$e^{0,1t} \begin{pmatrix} \cos(t) - \sin(t) \\ \cos(t) + \sin(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}.\tag{23}$$



(a) Numerické a analytické riešenia.

(b) Vývin odchýliek v čase.

Obr. 19: Riešenia sústavy (22). Nestabilný fokus.

V grafe na obrázku 19(a) sú vykreslené numerické riešenia sústavy (22) pre počiatočné body $x_0 = 1, y_0 = 1$, dĺžku kroku $h = 0,05$ v čase od $t_0 = 0$ do $t_1 = 15$ a analytické riešenie (23) tejto sústavy. Ani v tomto prípade sa Eulerove metódy nejavia ako veľmi presné aproximácie.

Graf 19(b) zobrazuje veľkosti odchýliek riešení numerických metód v závislosti od času. Môžeme si všimnúť, že kým v prípade stabilného fokusu boli krivky znázorňujúce rast odchýliek s časom konvexné, v tomto prípade sú konkávne. Pre Eulerovu metódu napred $E = 13,3348$, pre Eulerovu spätnú metódu $E = 10,4479$ a pre RK metódu $E = 1,5520$.

Na nasledujúcom príklade si ukážeme sústavu dvoch diferenciálnych rovníc

$$\begin{aligned}x' &= -2x - 2y \\y' &= -2x - 5y,\end{aligned}\tag{24}$$

ktorej stacionárnym bodom je uzol. Tentokrát pre lepšie znázornenie charakteru stacionárneho bodu vykreslíme až 4 trajektórie (obr. 20(a)). Všetky riešime pre dĺžku kroku $h = 0,1$ v čase od $t_0 = 0$ do $t_1 = 15$. Prvá začne v bodoch $x_0 = 2$, $y_0 = -8$. Analytické riešenie sústavy (24) pre tieto počiatočné body je

$$\begin{pmatrix} \frac{2}{5}e^{-6t}(12e^{5t} - 7) \\ -\frac{4}{5}e^{-6t}(3e^{5t} + 7) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}.\tag{25}$$

Druhá trajektória začne v bodoch $x_0 = -2$, $y_0 = 8$. Analytické riešenie je v tvare

$$\begin{pmatrix} -\frac{2}{5}e^{-6t}(12e^{5t} - 7) \\ \frac{4}{5}e^{-6t}(3e^{5t} + 7) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}.\tag{26}$$

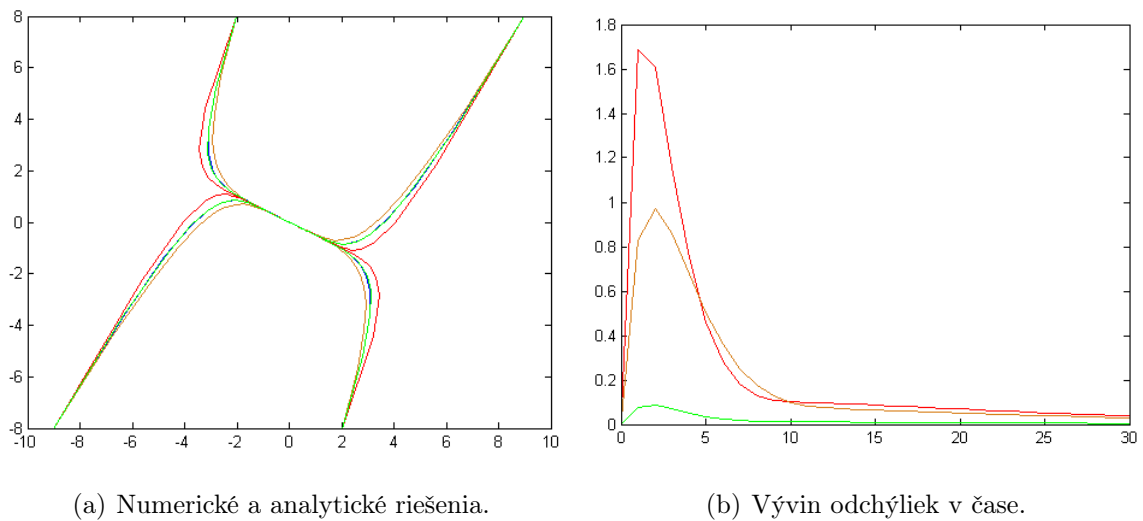
Počiatočné body tretej trajektórie sú $x_0 = -9$, $y_0 = -8$ a analytické riešenie vyzerá nasledovne

$$\begin{pmatrix} -e^{-6t}(4e^{5t} + 5) \\ 2e^{-6t}(e^{5t} - 5) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}.\tag{27}$$

A posledná trajektória začne v bodoch $x_0 = 9$, $y_0 = 8$ a analytické riešenie má tvar

$$\begin{pmatrix} e^{-6t}(4e^{5t} + 5) \\ -2e^{-6t}(e^{5t} - 5) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}.\tag{28}$$

Na obrázku 20(b) je graf znázorňujúci závislosť odchýliek numerických metód od času pre trajektóriu začínajúcu v bode (9, 8). Tento graf nezobrazujeme v celom časovom intervale, aby bolo lepšie vidno správanie sa odchýliek na začiatku vykresľovania. Tie



Obr. 20: Riešenia sústavy (24). Uzol.

zo začiatku rastú, no keď sa trajektórie blížia k stacionárnemu bodu, odchýlky sa opäť blížia k nule.

Pre Eulerovu metódu napred $E = 0,8283$, pre Eulerovu spätnú metódu $E = 0,6270$ a pre RK metódu $E = 0,0620$.

V poslednom príklade sa pozrieme na sedlo. Vezmime sústavu rovníc

$$\begin{aligned} x' &= 2x - y \\ y' &= -y. \end{aligned} \tag{29}$$

Znova budeme vykresľovať trajektóriu pre 4 počiatkové body s dĺžkou kroku $h = 0,2$ (obr. 21(a)). Prvá trajektória začína v bode $x_0 = 0,5$, $y_0 = 1$ a je vykreslená v čase od $t_0 = 0$ do $t_1 = 1,8$. Analytické riešenie pre tieto počiatkové body je

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{3}e^{-t} + \frac{1}{6}e^{2t} \\ e^{-t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}. \tag{30}$$

Druhá trajektória začína v bode $x_0 = -0,5$, $y_0 = -1$ a znázornená je v čase od $t_0 = 0$ do $t_1 = 1,8$. Jej analytické riešenie má tvar

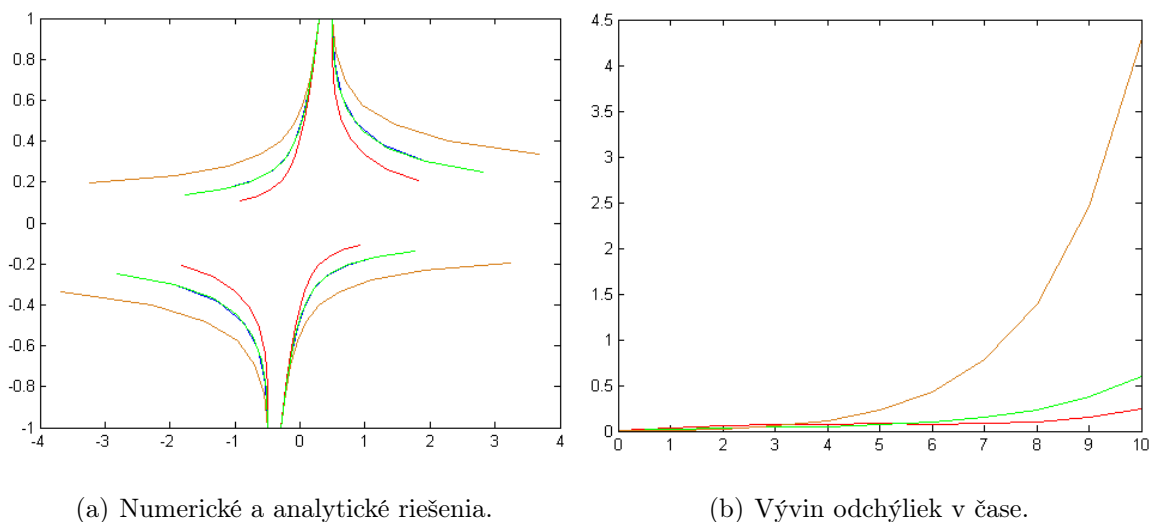
$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{3}e^{-t} - \frac{1}{6}e^{2t} \\ -e^{-t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}. \tag{31}$$

Vykresľovanie tretej a štvrtej trajektórie prebieha v čase od $t_0 = 0$ do $t_1 = 1, 2$. Počiatočný bod tretej je $x_0 = 0, 3$, $y_0 = 1$ a takto vyzerá analytické riešenie (29)

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{3}e^{-t} - \frac{1}{30}e^{2t} \\ -e^{-t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}. \quad (32)$$

Počiatočný bod poslednej trajektórie je $x_0 = -0, 3$, $y_0 = -1$ a analytické riešenie je

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{3}e^{-t} + \frac{1}{30}e^{2t} \\ -e^{-t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}. \quad (33)$$



(a) Numerické a analytické riešenia.

(b) Vývin odchýliek v čase.

Obr. 21: Riešenia sústavy (29). Sedlo.

Na obrázku 21(b) je graf znázorňujúci odchýlky numerických riešení v závislosti od času. Zaujímavé je, že riešenia RK metódou majú väčšie odchýlky ako riešenia Eulerovou metódou napred. Keď sa však pozrieme na obrázok 21(a), zdá sa, že riešenie RK metódou je bližšie analytickému riešeniu. Dôvod, prečo sú odchýlky v prípade RK metódy väčšie je rovnaký, ako v prípade centra. RK metóda vykresľuje trajektórie rýchlejšie ako analytické riešenie, preto sú odchýlky väčšie. Pre Eulerovu metódu napred $E = 0, 0992$, pre Eulerovu spätnú metódu $E = 0, 9788$ a pre RK metódu $E = 0, 1660$. Poprvýkrát pozorujeme, že RK metóda nie je najlepšia a Eulerova metóda napred nie je najhoršia. Tá je dokonca najlepšia. Môžeme však zhrnúť, že RK metóda je najlepšia zo spomínaných, pretože vo väčšine prípadov sú odchýlky riešení RK metódou výrazne menšie ako odchýlky riešení Eulerovými metódami.

3 Populačná biológia

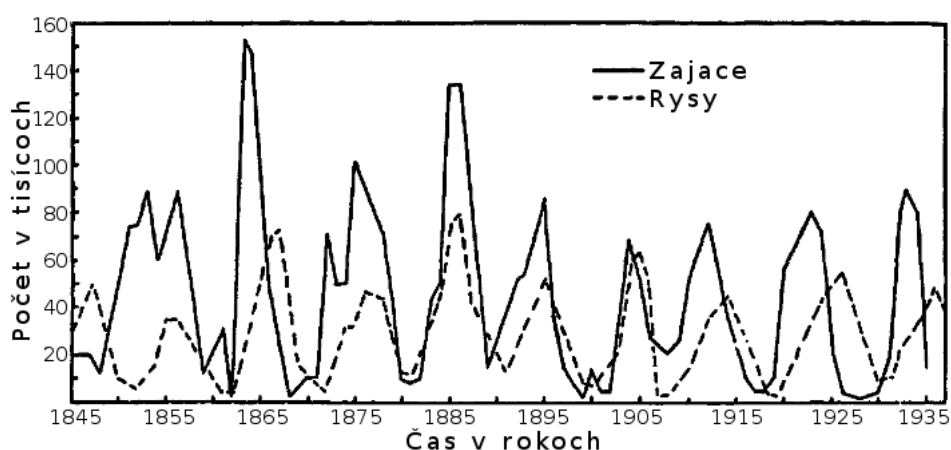
V tejto kapitole vychádzame z [4].

Rast a úpadok populácií v prírode a snaha jednotlivých druhov o dominantné postavenie medzi ostatnými je predmetom záujmu dlhé roky. Medzi zakladateľmi matematických modelov v populačnej biológii boli aj matematici Lotka a Volterra, ktorí publikovali svoje práce v tridsiatych rokoch minulého storočia. Nezávisle od seba navrhli niekoľko modelov, medzi ktorými bol aj známy dravec-korist' model (tiež označovaný ako Volterra-Lotka model). Ten mal veľký vplyv na oblasť populačnej biológie.

3.1 Model Volterra-Lotka

Model je založený na jednoduchých základných princípoch; náchylnosť systému dravec-korist' oscilovať, či tendencia konkurečných populácií vyhubiť slabší druh. Problém tohto modelu je, že kvôli svojej jednoduchosti nezohľadňuje niektoré dôležité faktory, ktoré v skutočnosti vplyvajú na vývin populácií v prírode.

Fakt, že systém dravec-korist' má tendenciu oscilovať bol pozorovaný pred viac ako storočím. Spoločnosť Hudson Bay, ktorá obchodovala s kožou zvierat v Kanade si viedla záznamy o vývine populácie zajacov (korist') a rysov (dravec) v rokoch 1845 – 1935. Tieto záznamy sú graficky znázornené na obrázku 22 (tento obrázok je prebratý z [4]).



Obr. 22: Vývin populácie zajacov a rysov.

Pozrime sa na domnienky, ktoré viedli matematika Volterru k navrhnutiu jeho modelu.

- Veľkosť populácie koristi rastie neohraničene, ak ju dravci nemajú pod kontrolou.
- Schopnosť prežitia dravcov závisí od súčasnej veľkosti populácie koristi.
- Veľkosť populácie dravcov závisí od pravdepodobnosti, že obeť sa stretne s dravcom.
- Miera rastu populácie dravcov je priamo úmerná prísunu potravy, teda súčasnej veľkosti populácie dravcov.

Na základe týchto predpokladov Volterra zostavil nasledujúci model

$$\begin{aligned}x' &= ax - bxy \\y' &= -cy + dxy,\end{aligned}\tag{34}$$

kde x reprezentuje populáciu koristi a y populáciu dravca. Parameter a určuje čistý rast populácie koristi (pôrodnosť koristi), ak v systéme nie sú žiadni dravci. Parameter c určuje úmrtnosť dravcov, ak v systéme nie je žiadna korisť, pretože nemajú čo jesť. Výraz xy aproximuje pravdepodobnosť, že dôjde k stretnutiu dravca a koristi, ak sa oba druhy pohybujú náhodne a sú rovnomerne rozptýlené vo svojom prirodzenom prostredí. Ak dôjde k stretnutiu, pôsobí to negatívne na rast populácie koristi a pozitívne na rast populácie dravca.

Narozdiel od systémov, ktoré sme rozoberali v predchádzajúcej kapitole, systém (34) nie je lineárny. Preto musíme pozmeniť spôsob zisťovania charakteru stacionárnych bodov. Pri lineárnom systéme (6) sme pracovali s maticou A . Pri nelineárnych systémoch, daných ako

$$\begin{aligned}x' &= f(x, y) \\y' &= g(x, y),\end{aligned}\tag{35}$$

budeme používať *linearizáciu systému* v bode (\hat{x}, \hat{y}) , pod ktorou budeme rozumieť

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(\hat{x}, \hat{y}) & \frac{\partial f}{\partial y}(\hat{x}, \hat{y}) \\ \frac{\partial g}{\partial x}(\hat{x}, \hat{y}) & \frac{\partial g}{\partial y}(\hat{x}, \hat{y}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.\tag{36}$$

Charakter stacionárneho bodu budeme zisťovať rovnako ako v prípade lineárnej funkcie, ale namiesto matice A budeme počítať s maticou parciálnych derivácií (Jacobiho maticou) zo vzťahu (36) vyčíslenej v stacionárnom bode. Túto maticu budeme označovať ako $J(\hat{x}, \hat{y})$.

Stacionárne body systému (34) sú $(\hat{x}_1, \hat{y}_1) = (0, 0)$ a $(\hat{x}_2, \hat{y}_2) = (\frac{c}{d}, \frac{a}{b})$. Jacobiho matica pre stacionárny bod (\hat{x}_1, \hat{y}_1) je

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -c \end{pmatrix}$$

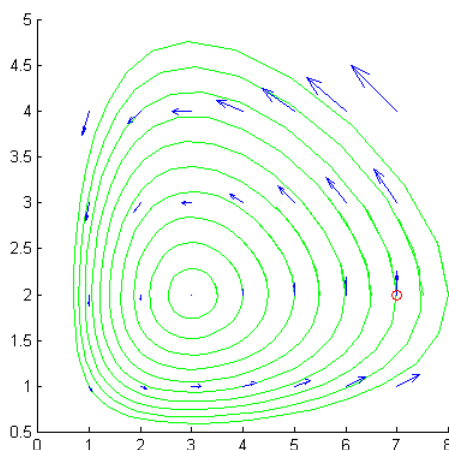
a jej vlastné hodnoty sú $\lambda_1 = a$, $\lambda_2 = -c$. Charakter tohto stacionárneho bodu je teda sedlo. Jacobiho matica pre stacionárny bod (\hat{x}_2, \hat{y}_2) je

$$\begin{pmatrix} 0 & -\frac{bc}{d} \\ \frac{da}{b} & 0 \end{pmatrix}$$

a jej vlastné hodnoty sú $\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{cai}$. Charakter tohto stacionárneho bodu je centrum.

Všimnime si, že v prípade stacionárneho bodu $(\hat{x}_1, \hat{y}_1) = (0, 0)$ nezávisí stav populácie koristi od parametra a , teda od jej vlastnej miery rastu populácie, ale len od parametrov c a d . Podobne stav populácie dravca závisí len od parametrov a a b a nie od jeho vlastnej miery rastu populácie.

Nech parameter $a = 4$, $b = 2$, $c = 3$ a $d = 1$. Použitím RK metódy vykreslíme riešenie takéhoto systému v čase od $t_0 = 0$ do $t_1 = 2$ do grafu na obrázku 23. Zelenou farbou sú vykreslené trajektórie riešenia a modré šípky znázorňujú smer a veľkosť derivácií vo vybraných bodoch. Podľa nich vieme určiť smer trajektórií.



Obr. 23: Fázový portrét modelu Volterra-Lotka. Osi x , y predstavujú početnosti populácií v desiatkách. Graf je znázornený pre dobu 2 roky.

Vidíme, že stacionárny bod $(\frac{c}{d}, \frac{a}{b}) = (3, 2)$ je naozaj centrum a stacionárny bod $(0, 0)$ je sedlo. Vezmime príklad, že na začiatku máme 70 zajacov a 20 rysov. V grafe

(obr. 23) je tento bod zaznačený červeným krúžkom. Pozrime sa ako sa vyvíjajú populácie v čase. Najprv rastie populácia rysov a klesá populácia zajacov. Potom sa populácia zajacov ustáli a populácia rysov prudko klesá. Nakoniec rastie populácia zajacov a neskôr aj rysov, až sa stavy oboch populácií vrátia do polohy, v akej boli na začiatku. Akonáhle by sa stalo, že by napr. jeden zajac umrel, lebo ochorel na zvláštnu chorobu a nie prirodzenou smrťou, alebo by ho nezožral rys, situácia by sa vychýlila. To však tento model neponúka. Ak začneme s nejakými populáciami, vždy sa po čase musíme vrátiť do tej istej situácie. Centrum nie je realistický fázový portrét, pretože zahŕňa primárne faktory, ktoré ovplyvňujú rast a úpadok populácií zvierat. Preto viacerí matematici vylepšovali tento model.

3.2 Modifikácie modelu Volterra-Lotka

Pozrime sa na niektoré vylepšenia, ktoré vo Volterra-Lotka modeli urobili iní matematici.

1. *Závislosť od hustoty populácie.* Tieto úpravy sa týkajú parametra a v predpise $x' = ax - bxy$. Vďaka nim sa model viac približuje realite. Funkcia $f(x)$ závisí od hustoty populácie:

$$f(x) = r \left(1 - \frac{x}{k}\right) \quad \text{navrhol Pielou,} \quad (37)$$

$$f(x) = r \left[\left(\frac{k}{x}\right)^{-g} - 1 \right], \quad (1 \geq g > 0) \quad \text{navrhol Rosenzweig,} \quad (38)$$

$$f(x) = r \left(\frac{k}{x} - 1\right) \quad \text{navrhol Schoener.} \quad (39)$$

2. *Miera napadnutia.* Tieto úpravy sa týkajú člena bxy v predpise $x' = ax - bxy$. Ten nahradíme iným výrazom, v ktorom je schopnosť napádania koristi limitovaná. Výrazy, ktoré nahrádzajú bxy v rovnici môžu byť:

$$ky(1 - e^{-cx}) \quad \text{navrhol Ivlev,} \quad (40)$$

$$\frac{kxy}{x + D} \quad \text{navrhol Holling,} \quad (41)$$

$$kx^g, \quad (1 \geq g > 0) \quad \text{navrhol Rosenzweig,} \quad (42)$$

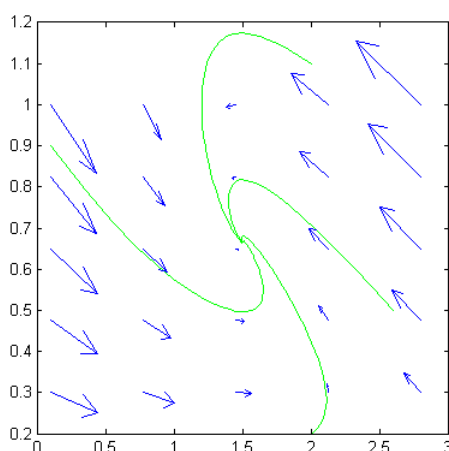
$$\frac{kx^2}{x^2 + D^2} \quad \text{navrhol Takahashi.} \quad (43)$$

V grafoch na obrázkoch 24, 25, 26 a 27 sú zelenou farbou vykreslené riešenia systémov typu dravec-korist' aproximované RK metódou a modré šípky znázorňujú smer a veľkosť derivácií vo vybraných bodoch. Podľa nich určujeme smer trajektórií.

Graf na obrázku 24 znázorňuje riešenie systému

$$\begin{aligned}x' &= 2\left(\frac{3}{x} - 1\right)x - 3yx \\y' &= y(-3 + 2x).\end{aligned}\tag{44}$$

Predpis pre x' sme získali použitím (39) a (42) Charakter stacionárneho bodu už nie je



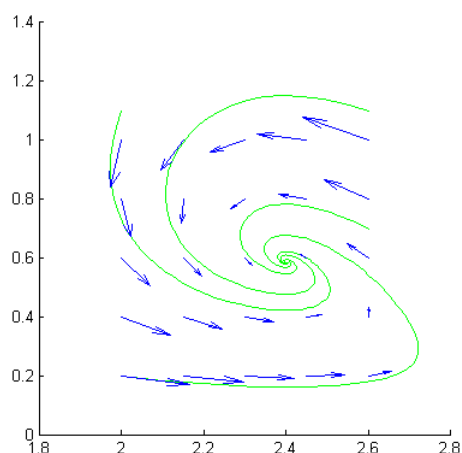
Obr. 24: Fázový portrét systému, ktorý využíva predpisy (39) a (42). Osi x , y predstavujú početnosti populácií v desiatkách. Graf je znázornený pre dobu 5 rokov.

centrum, ale stabilný fokus. V tomto modeli sa predpokladá, že nech bude na začiatku ľubovoľný stav populácií oboch druhov, nakoniec sa vždy ustáli v stacionárnom bode $(1, 5; 2/3)$.

V ďalšom prípade sa necháme inšpirovať pánmi Pielouom a Hollingom a ich predpismi (37), (41)

$$\begin{aligned}x' &= 2\left(1 - \frac{x}{3}\right)x - \frac{3xy}{x+2} \\y' &= y(-6 + 2, 5x).\end{aligned}\tag{45}$$

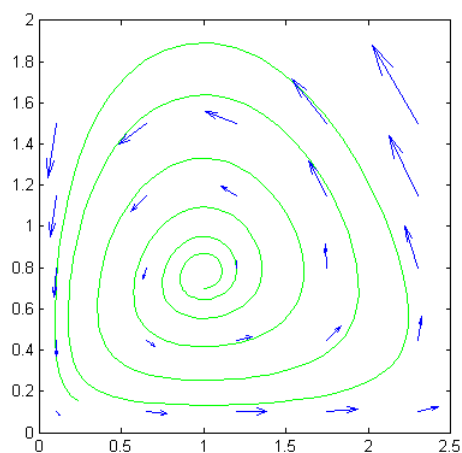
Charakter stacionárneho bodu tohto systému je opäť stabilný fokus (25). Tento je však oproti predošlému prípadu (44) viac zatočený. Vývin populácií pre tento systém teda viac osciluje, čo je realistickejší pohľad.



Obr. 25: Fázový portrét systému, ktorý využíva predpisy (37) a (41). Osi x , y predstavujú početnosti populácií v desiatkách. Graf je znázornený pre dobu 7 rokov.

Na obrázku 26 je znázornené riešenie systému

$$\begin{aligned} x' &= 3\left(1 - \frac{x}{3}\right)x - 3y(1 - e^{-2x}) \\ y' &= y(-2 + 2x). \end{aligned} \tag{46}$$



Obr. 26: Fázový portrét systému, ktorý využíva predpisy (37) a (40). Osi x , y predstavujú početnosti populácií v desiatkách. Graf je znázornený pre dobu 20 rokov.

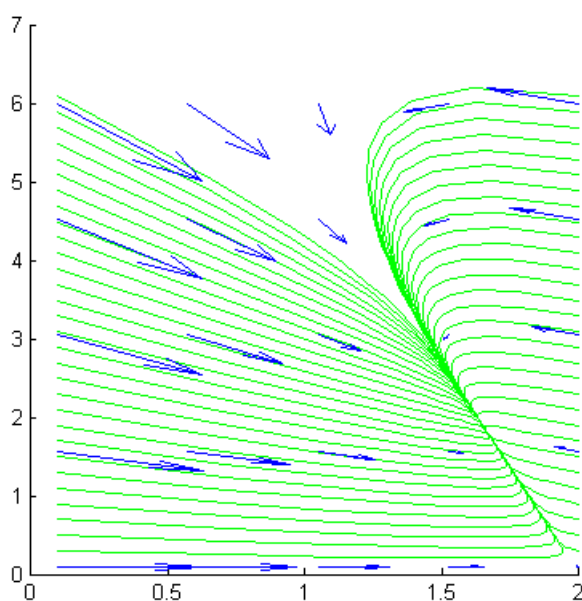
Tento systém je navrhnutý pomocou (37) a (40). Charakter stacionárneho bodu je nestabilný fokus. Znamená to, že stav populácií systému bude s časom oscilovať a nikdy

sa neustáli.

Spojením predpisov (39) a (43) dostávame systém rovníc

$$\begin{aligned}x' &= 8 \left(\frac{2}{x} - 1 \right) x - \frac{2yx^2}{x^2 + 1} \\y' &= y(-5 + 3x).\end{aligned}\tag{47}$$

Charakter stacionárneho bodu je uzol (27).



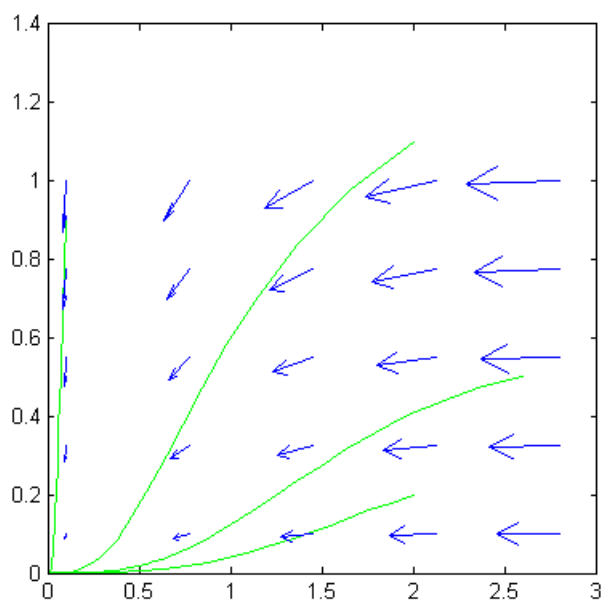
Obr. 27: Fázový portrét systému, ktorý využíva predpisy (39) a (43). Osi x , y predstavujú početnosti populácií v desiatkach. Graf je znázornený pre dobu 7 rokov.

Nech je teda počiatočný stav oboch populácií ľubovoľný, nakoniec sa ustáli v stacionárnom bode. Veľkosti populácií však nebudú oscilovať ako v prípade fokusu. Naopak, kým veľkosť jednej populácie sa bude meniť len trochu, veľkosť druhej populácie rapídne klesne, respektíve stúpne.

Na poslednom obrázku si ukážeme fázový portrét pre systém

$$\begin{aligned}x' &= 2 \left(\left(\frac{3}{x} \right)^{-1} - 1 \right) x - 3yx \\y' &= y(-6 + 2x),\end{aligned}\tag{48}$$

ktorý vznikol spojením rovníc (38) a (42).



Obr. 28: Fázový portrét systému, ktorý využíva predpisy (38) a (42). Osi x , y predstavujú početnosti populácií v desiatkách. Graf je znázornený pre dobu 5 rokov.

Všetky trajektórie smerujú do bodu $(0, 0)$. To znamená, že pri akýchkoľvek počiatočných podmienkach obe populácie vyhynú. Tento model teda veľmi neudáva realistický pohľad.

Záver

Začiatkom práce sme sa zamerali na fázové portréty dynamických systémov, ktoré sú nevyhnutné pri pochopení numerických metód. Vysvetlili sme si, ako fázové portréty vznikajú a aké druhy stacionárnych bodov v systéme dvoch obyčajných diferenciálnych rovníc existujú. Tie sme ilustrovali obrázkami.

Naprogramovali sme Eulerovu metódu napred, Eulerovu spätnú metódu a Runge-Kutta metódu, ktoré opisujeme v druhej kapitole. Zistili sme, že Runge-Kutta metóda je zo spomínaných najlepšia, pretože má najmenšie odchýlky od analytického riešenia. Druhá kapitola je bohatá na obrázky a vysvetlenia fungovania princípu numerických metód. Na viacerých príkladoch sú nami naprogramované numerické metódy odskúšané a navzájom porovnané.

Na základe tretej kapitoly môžeme zhrnúť, že navrhnúť model dravec-korist, ktorý bude fungovať v reálnom svete nie je vôbec jednoduché. Zdá sa, že model Volterra-Lotka, ktorý sme priblížili v 3.1, v praxi veľmi nefunguje. Z ostatných modifikácií asi najlepším modelom, ktoré sme uviedli v 3.2, je (45), pretože osciluje a nakoniec sa ustáli v stacionárnom bode.

Túto prácu môžu oceniť najmä študenti, ktorí sa zoznamujú s diferenciálnymi rovnicami a fázovými portrétmi, ako aj študenti, ktorých zaujímajú numerické metódy. Tiež môže byť zaujímavá pre nadšencov biológie, ktorým matematika nie je až taká blízka.

Zoznam použitej literatúry

- [1] Dormand, J. R.: *Numerical Methods for Differential Equations, A Computational Approach*, School of Computing and Mathematics University of Teesside, UK, 1996
- [2] Brunovský, P.: *Diferenčné a diferenciálne rovnice*, učebné texty, dostupné na internete (11.3.2012):
<http://pc2.iam.fmph.uniba.sk/skripta/brunovsky/ddrtext.pdf>
- [3] Babušíková, J., Slodička, M., Weisz, J.: *Numerické metódy*, vysokoškolské skriptá, Univerzita Komenského Bratislava, 2000
- [4] Edelstein-Keshet, L.: *Mathematical Models in Biology*, University of British Columbia Vancouver, British Columbia, Canada, 2005

Príloha A - Veta o logaritmoch

Veta A.0.1 (Veta o logaritmoch). *Logaritmus podielu sa rovná rozdielu logaritmov.*

$$\log_a \frac{r}{s} = \log_a r - \log_a s$$

Dôkaz.

$$\log_a r = x \Rightarrow a^x = r$$

$$\log_a s = y \Rightarrow a^y = s$$

$$\frac{a^x}{a^y} = \frac{r}{s} \tag{A.1}$$

$$a^{(x-y)} = \frac{r}{s} \tag{A.2}$$

$$\log_a \frac{r}{s} = x - y = \log_a r - \log_a s$$

□

Príloha B - Zdrojový kód

```
1 function eulerVpred(t0,t1,x0,h,f)
2 x=x0;
3 pom = 1;
4 t=t0:h:t1;
5 res = zeros(length(t),1);
6 tAx = zeros(length(t),1);
7 for (t=t0:h:t1)
8     res(pom)=x;
9     tAx(pom)=t;
10    dx=f(t,x);
11    x=x+dx*h;
12    pom=pom+1;
13 end
14 plot(tAx,res,'color','r');
```

```
1 function eulerVpred2(x0,y0,t0,t1,h,fx,fy)
2 y=y0;
3 x=x0;
4 pom=1;
5 res = zeros(2,length(t0:h:t1));
6 for t=t0:h:t1
7     res(1,pom)=x;
8     res(2,pom)=y;
9     dx=fx(x,y,t);
10    dy=fy(x,y,t);
11    x=dx*h+x;
12    y=dy*h+y;
13    pom=pom+1;
14 end
15 res(1,pom)=x;
16 res(2,pom)=y;
17 plot(res(1,:),res(2,),'color','r');
```

```
1 function eulerSpat(t0,t1,x0,h,f)
2 x=x0;
3 pom = 1;
4 t=t0:h:t1;
5 res = zeros(length(t),1);
6 tAx = zeros(length(t),1);
7 for (t=t0:h:t1)
```

```

8     res(pom)=x;
9     tAx(pom)=t;
10    x=fzero(@(x)res(pom)-x+h*f(t+h,x),res(pom));
11    pom=pom+1;
12    end
13    plot(tAx,res,'color',[0.85 0.5 0.1]);

```

```

1  function eulerSpat2(x0,y0,t0,t1,h,fx,fy)
2  y=y0;
3  x=x0;
4  pom=1;
5  res = zeros(1,length(t0:h:t1));
6  for t=t0:h:t1
7      res(1,pom)=x;
8      res(2,pom)=y;
9      nove = fsolve(@(ix)[x-ix(1)+h*fx(ix(1),ix(2),t+h); y-ix(2)+h*fy(ix(1),ix(2),t+h)],[x,y]);
10     x=nove(1);
11     y=nove(2);
12     pom=pom+1;
13    end
14
15    plot(res(1,:),res(2,),'color',[0.85 0.5 0.1]);

```

```

1  function rungeKutta(t0,t1,x0,h,f)
2  x=x0;
3  pom = 1;
4  t=t0:h:t1;
5  res = zeros(length(t),1);
6  tAx = zeros(length(t),1);
7  for(t = t0:h:t1)
8      res(pom)=x;
9      tAx(pom)=t;
10     f1 = f(t,x);
11     f2 = f(t+h/2 , x+h*f1/2);
12     f3 = f(t+h , x+h*(2*f2-f1));
13     x = x + (h/6)*(f1+4*f2+f3);
14     pom=pom+1;
15    end
16    plot(tAx,res,'color','g');

```

```

1  function rungeKutta2(x0,y0,t0,t1,h,fx,fy)
2  y=y0;
3  x=x0;

```

```
4 pom=1;
5 res = zeros(2,length(t0:h:t1));
6 for t=t0:h:t1
7     res(1,pom)=x;
8     res(2,pom)=y;
9     f1x = fx(x,y,t);
10    f1y = fy(x,y,t);
11    f2x = fx(x+h*f1x/2 , y+h*f1y/2, t+h/2);
12    f2y = fy(x+h*f1x/2 , y+h*f1y/2, t+h/2);
13    f3x = fx(x+h*(2*f2x-f1x) , y+h*(2*f2y-f1y), t+h);
14    f3y = fy(x+h*(2*f2x-f1x) , y+h*(2*f2y-f1y), t+h);
15    x = x + (h/6)*(f1x+4*f2x+f3x);
16    y = y + (h/6)*(f1y+4*f2y+f3y);
17    pom=pom+1;
18 end
19 res(1,pom)=x;
20 res(2,pom)=y;
21 plot(res(1,:),res(2,:), 'g');
```