UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY

Aplikácie matematiky v ekonómii a financiách

BAKALÁRSKA PRÁCA

2012 Martin BUŠÍK

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY

Aplikácie matematiky v ekonómii a financiách

BAKALÁRSKA PRÁCA

Študijný program:	Ekonomická a finančná matematika
Študijný odbor:	1114 Aplikovaná matematika
Školiace pracovisko:	Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky
Vedúci práce:	Doc. RNDr. Július Vanko, PhD.

Bratislava 2012

Martin BUŠÍK

58928800

Univerzita Komenského v Bratislave
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

ZADANIE ZÁVEREČNEJ PRÁCE

Meno a priezvisko študenta: Martin Bušík
Študijný program: ekonomická a finančná matematika (Jednoodborové štúdium, bakalársky I. st., denná forma)
Študijný odbor: 9.1.9. aplikovaná matematika
Typ záverečnej práce: bakalárska
Jazyk záverečnej práce: slovenský

Názov: Aplikácie matematiky v ekonómii a financiách

Cieľ: Prezentovať použiteľnosť vybraných matematických metodík na riešenie problémov v ekonómii a financiách.

Vedúci: doc. RNDr. Július Vanko, PhD.
Katedra: FMFI.KAMŠ - Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky
Dátum zadania: 15.10.2011

Dátum schválenia: 27.10.2011

doc. RNDr. Margaréta Halická, CSc.
garant študijného programu

.... študent

.... vedúci práce

Poďakovanie Ďakujem vedúcemu bakalárskej práce, Doc. RNDr. Július Vanko, PhD. za cenné rady, venovaný čas a dôležité pripomienky pri vedení mojej bakalárskej práce.

Abstrakt v štátnom jazyku

BUŠÍK, Martin: Aplikácie matematiky v ekonómii a financiách [Bakalárska práca], Univerzita Komenského v Bratislave, Fakulta matematiky, fyziky a informatiky, Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky; školiteľ: Doc. RNDr. Július Vanko, PhD., Bratislava, 2012, 40 s.

Naša práca sa zaoberá aplikáciou matematických metód v ekonómii a financiách. Rozoberá využitie jednotlivých častí matematiky v ekonomických problémoch. Rôzne ekonomické problémy a úlohy transformuje a aplikuje na rozličné matematické úlohy, ktoré názorne zadefinuje. Ďalej sa práca zaoberá dvomi konkrétnymi problémami, a to oceňovaním opcií pomocou Black-Scholesovho modelu a hľadaním rovnovážnej ceny aktíva pomocou modelu CAPM. Uvedené oblasti podrobne rozoberá a vysvetľuje ich funkciu. Na základe predpokladov modelov sa snaží neskôr ukázať ich obmedzené reálne použitie a zdôrazniť ich hlavné výhody a nevýhody. Cieľom práce je prezentovať hlavné problémy pri aplikácii matematiky v ekonómií a financiách. Pomocou Black-Scholesovho a CAPM modelu sa práca snaží tieto nevýhody zovšeobecniť aj pre ostatné prípady.

Kľúčové slová: aplikácie, Black-Scholes model, Capital Asset Pricing Model (CAPM), využitie

Abstrakt v štátnom jazyku

BUŠÍK, Martin: Applications of Mathematics in Economy and Finance [Bachelor work], Comenius University in Bratislava, Faculty of Mathematics, Physics and Informatics, Department of Applied Mathematics and Statistics; Supervisor: Doc. RNDr. Július Vanko, PhD., Bratislava, 2012, 40 p.

The work is focused on application of mathematical methods in economy and finance. It deals with use of individual parts of mathematics in economical problems. It transforms different economical problems and applies them to various mathematical tasks which we demonstratively define. The work further deals with two particular problems, namely Option Pricing by using Black-Scholes Model and search for Equilibrium Asset Pricing by using Capital Asset Pricing Model (CAPM). These problems are analysed in details and their function is explained. On the base of assumptions the work tries to show their limited real use and to stress their main advantages and disadvantages. The aim of the work is to present main problems in application of mathematics in economy and finance. By using Black-Scholes and Capital Asset Pricing Model the work tries to generalize these disadvantages also for other cases.

Key words: applications, Black-Scholes Model, Capital Asset Pricing Model (CAPM), use

Obsah

Zoznam obrázkov

Zoznam tabuliek

Zoznam použitých symbolov

$\mathbb{R}$	množina všetkých reálnych čísel
$\mathbb{R}^n$	priestor rozmeru n
$\mathbb{R}^n_+$	nezáporný ortant
$\hat{x}$	optimálne riešenie
$f(.)$	funckia
σ	riziko
r	úrok
w	váha
$\frac{\partial f}{\partial x}$	parciálna derivácia funkcie f podľa premennej x
$\nabla f(x)$	gradient funkcie f, $\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \frac{\partial f}{\partial x_3}, \dots\right)$
$\nabla^2 f(x)$	Hessova matica
$E(.)$	stredná hodnota
$Var(.)$	variancia, disperzia
$cov(.)$	kovariancia

Úvod

Matematika v ekonómii sa začala rozvíjať v 19. storočí. V tej dobe prevažná časť ekonomickej analýzy zodpovedala tomu, čo dnes nazývame klasická ekonómia. Ekonómovia dovtedy nevyvíjali explicitné a abstraktné modely správania s cieľom použiť nástroje matematiky. Prelomovým bol až rok 1826, v ktorom Johann Heinrich von Thünen skonštruoval model využívania poľnohospodárskej pôdy, ktorý predstavoval prvý príklad marginálnej (hraničnej) analýzy. V porovnaní s jeho súčasníkmi, Thünen radšej postavil nové ekonomické modely a nástroje než by použil tie už existujúce. Rad nových matematických nástrojov ako je diferenciálny počet, linenárne programovanie, konvexné množiny a teória grafov sa od roku 1930 začal používať v ekonomickej teórii v podobe nových matematických metód, ktoré boli predtým uplatňované najmä vo fyzike.

V súčasnosti je matematika neoddeliteľnou súčasťou ekonómie. Je to nesmierne silný nástroj, ktorý však treba používať s rozumom. Ekonómia je spoločenská veda, a preto využívanie matematiky ako exaktnej vedy v nej nesie so sebou veľa problémov. Už len najzákladnejší predpoklad racionality správania ľudí je v skutočnosti nereálny. Ľudia totiž nikdy nehľadia iba na svoj vlastný úžitok. Aj preto som sa rozhodol spracovať túto nesmierne širokú a obsiahlu tému. Zameral som sa na to ako dobre a za akých predpokladov dokáže matematika popísať vybrané ekonomické problémy.

Cieľom práce je prezentovať použiteľnosť matematických metód v ekonómií a financiách. Snaží sa ponúknuť komplexný prehľad týchto aplikácií. Na konkrétnych príkladoch ukázať ich hlavné výhody a nevýhody pri využítí v reálnom svete.

Práca je rozdelená do troch kapitol. V prvej časti prvej kapitoly je uvedený stručný prehľad použitia matematických metód v ekonómii. V jej druhej časti sa zameriava na jednotlivé odvetvia matematiky ako sú lineárne programovanie, nelineárne programovanie, dynamické programovanie a diferenciálne rovnice. Pre každú oblasť sa snaží zadefinovať základnú úlohu, ktorú daná problematika rieši a k nej aj názorný ekonomický problém. Avšak kvôli rozsahu práce sa tu ich riešením bližšie nezaoberáme.

Druhá kapitola je venovaná Black-Scholesovmu modelu. Je to matematický nástroj slúžiaci na oceňovanie opcií. V jej úvode práca čitateľa oboznámuje so základnými pojmami ohľadom opcií a opčných kontraktov. Neskôr sa už zaoberá samotným Black-

Scholesovým vzorcom a jeho interpretáciou.

V tretej a záverečnej kapitole práca rozoberá problematiku CAPM modelu. Tento model slúži na hľadanie rovnovážnych cien aktív. Na začiatku sú uvedené základy markowitzovej teórie z ktorej tento model vychádza. Neskôr stanovuje predpoklady tohto modelu o oboznamuje čitateľa s danou problematikou.

V diskusii práca rozoberá hlavný dôvod a cieľ jej vzniku. Pomocou dvoch konkrétnych problémov, Black-Scholesovho a CAPM modelu, poukazuje na výhody a nevýhody využitia matematiky v ekonómii, ktoré sa snaží zovšeobecniť pre viac prípadov. V neposlednom rade zdôrazňuje použiteľnosť daných metodík v ekonómií a financiách.

1 Prehľad matematických metód používaných v ekonómii a financiách

Ekonomicko-matematické metódy a s nimi súvisiaca modelová tvorba v súčasnosti s výpočtovou technikou sa stávajú čoraz významnejším nástrojom. Matematické modelovanie ekonomických procesov a javov zaujíma postupne miesto vo všetkých odvetviach hospodárstva. Rozmanitosť a špecifickosť jednotlivých problémov, pri riešení ktorých možno aplikovať techniku modelovej tvorby, vyžaduje konštrukciu a uplatnenie modelov rozličných typov, líšiacich sa mnohými triediacimi znakmi. Z toho dôvodu ani okruh ekonomicko-matematických metód nie je celkom uzatvorený. Potreba riešiť jednotlivé ekonomické problémy si vyžaduje vznik stále nových metód [5].

Matematické programovanie

Do matematického programovania zahŕňame metódy, ktoré používame pri riešení problému najlepšieho využívania obmedzených zdrojov. Z celého radu možných riešení sa hľadá také, pri ktorom hodnota optimalizačného kritéria nadobúda extrémne (maximálne alebo minimálne) hodnoty. Takéto riešenie je optimálne. Do matematického programovania patrí dnes už celý rad relatívne samostatných disciplín, ako lineárne programovanie, nelineárne programovanie, stochastické programovanie, dynamické programovanie, parametrické programovanie, atď. Matematickým programovaním možno riešiť okrem iného napr. [5]:

- stanovenie optimálneho výrobného programu (optimalizačným kritériom môže byť hodnota výroby, zisk, produktivita práce, využitie kapacity, atď.),
- optimálne pridelenie zákazok na jednotlivé pracoviská alebo výrobné zariadenia,
- optimalizáciu prepravných (dopravných) plánov, pri ktorých sa minimalizujú dopravné náklady alebo celkovo prejdené vzdialenosti,
- optimalizáciu rozmiestnenia servisných staníc,
- viacetapové optimálne rozhodovanie.

Graficko-analytické metódy

Zahŕňajú teóriu grafov a metódy sieťovej analýzy. Tieto metódy sú určené pre analýzu zložitých nadväzných procesov, skúmaných z hľadiska ich časového priebehu. Odhaľujú kritické úseky, ktoré rozhodujú o včasnom ukončení plánovaných procesov a umožňujú stanoviť časové rezervy u tých činností, ktoré bezprostredne neovplyvňujú termín ukončenia celého procesu.

Metódy sieťovej analýzy

Tieto metódy sa používajú k rozborom a plánovaniu priebežných dôb výrobkov a obecne akýchkoľvek zložitých činností (projektov), kde ide o zistenie a využitie časových rezerv v priebehu projektu z hľadiska času, využitia zdrojov a nákladov. Metódy sieťovej analýzy sa používajú napr. k plánovaniu rozsiahlych investičných akcií, vývojových a výskumných prác, k plánovaniu opráv a rekonštrukcií, rozsiahlych organizačných prác a činností súvisiacich so zavádzaním výroby nového výrobku. Metód sieťovej analýzy je viac, avšak najznámejšie a najrozšírenejšie sú [5]:

- metóda CPM (Critical Path Method),
- metóda PERT (Program Evalution and Review Technigue).

Teória hier

Je ďalšou relatívne samostatnou disciplínou operačnej analýzy. Aj napriek tomu, že medzi teóriou hier a matematickým programovaním je určitá súvislosť, teóriu hier charakterizuje viacero zvláštností, ktoré jej vymedzujú v operačnej analýze osobitné postavenie. Teória hier - podobne ako matematické programovanie - rieši problematiku optimálneho rozhodovania a na tento účel využíva exaktný matematický aparát. V úlohách matematického programovania sa však nepredpokladá nijaká konfliktná situácia. Rozhodovací subjekt sa pri voľbe svojej stratégie nestretáva s aktívnou protiakciou iného subjektu (resp. protivníka), ktorý by svojim konaním jeho rozhodnutia zámerne maril. Naproti tomu pri teórii hier ide o situácie, ktoré sú svojou povahou typicky konfliktné. To znamená, že proti sebe stoja subjekty s čiastočne alebo úplne protichodnými záujmami. Aspoň jeden z týchto subjektov má cieľavedomé správanie a toto svoje správanie upravuje podľa rozhodnutia druhej strany [5].

Štruktúrna analýza

Je bilančná metóda, ktorá pomocou matematického modelu charakterizuje reprodukčný proces určitého ekonomického systému z hľadiska kvantitatívnych vzťahov medzi jednotlivými odvetviami a s ohľadom na ich proporcionálny rozvoj. Na rozdiel od úloh matematického programovania nehľadá štruktúrna analýza optimálnu štruktúru s prihliadnutím na určité kritérium, ale iba skúma podmienky rovnováhy v rámci určitého, relatívne obmedzeného systému [5].

Ekonometria

Skúma vzťahy medzi ekonomickými veličinami s cieľom kvantitatívne vyjadriť, overiť a aplikovať ekonomické hypotézy na základe konkrétnych štatistických údajov, a to použitím matematicko-štatistických metód. Jej nástrojom je ekonometrický model, ktorý možno aplikovať ako štatisticky významnú a ekonomicky interpretovateľnú ekonomickú štruktúru.

1.1 Lineárne programovanie

Lineárne programovanie predstavuje v súčasnom období jednu z teoreticky aj prakticky veľmi široko rozvinutých disciplín aplikovanej matematiky. V súvislosti s rozvojom prostriedkov výpočtovej techniky zaznamenalo značne prudký rozvoj. Celý rad technicko-ekonomických úloh možno formulovať v tvare úloh lineárneho programovania. Pri definovaní jednotlivých premenných je potrebné, na základe analýzy problému, formulovať ohraničenia na tieto premenné. Ohraničenia úlohy môžu vyjadrovať napr. vzťahy medzi čerpaním limitovaných výrobných zdrojov (kapacít) a intenzitou výrobných procesov. Ohraničenia úlohy môžu tiež zaisťovať požadované proporcionálne väzby medzi jednotlivými premennými alebo skupinami premenných. Veľmi často sa pomocou špecifických zadefinovaných ohraničení zabezpečuje plnenie úloh výrobného a finančného plánu v požadovanom sortimentnom členení. Ohraničenia úlohy musia dôsledne rešpektovať reálne zdroje príslušného výrobno-technologického, či organizačného systému, prípadne aj ich vzájomnú zameniteľnosť. [10]

Definícia

Pod úlohou lineárneho programovania rozumieme úlohu optimalizovať lineárnu funkciu pri lineárnych obmedzeniach za podmienky konečného počtu obmedzení a premenných. Vstup tvorí lineárna funkcia, ktorú máme minimalizovať alebo maximalizovať pre dané obmedzenia. Výstupom úlohy je jeden bod , v ktorom sa realizuje optimum, alebo informácia, že optimum neexistuje. V prípade ,že optimum neexistuje snažíme sa nájsť toho bližší dôvod. Môže to byť spôsobené nekonzistentnými obmedzeniami, alebo že funkcia nie je pri daných obmedzeniach ohraničená v smere optimalizácie.

Všeobecnú úlohu lineárneho programovania možno formulovať takto (hľadáme extrém hodnoty účelovej funkcie tvaru)[10, 5]:

$$Max \quad \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \qquad (n = 1, \ldots) \tag{1}$$

pri obmedzeniach

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j &\leq b_i \qquad (n = 1, \ldots) \\ x_j &\geq 0 \end{aligned} \tag{2}$$

Reálne ekonomické a finančné problémy v tvare úlohy LP

Možnosti aplikácií lineárneho programovania sú, ako už bolo uvedené, rôzne. Uvedieme niekoľko úloh z reálneho ekonomického života a ich formuláciu (matematický model) v tvare úlohy LP.

Výrobný problém (plánovanie výroby)

K dispozícii máme zdroje S_i (suroviny, stroje, pracovníci a p.) o kapacite $b_i \quad (i = 1, ..., m)$. Pomocou týchto zdrojov možno vyrábať produkty P_j (umelé hnojivo, cement, farby a p.) so ziskom c_j za jednotkové množstvo, $j = 1, ..., n$. Pritom vieme, že na vyrobenie jednotkového množstva produktu P_j spotrebujeme zo zdroja $S_i \quad a_{ij}$ jednotiek, $\forall i, j$. Aké množstvá jednotlivých produktov máme vyrobiť, aby sme dosiahli maximálny celkový zisk? Nech x_j je neznáme množstvo produktu $P_j \quad \forall j$. Vstupné údaje spolu s neznámymi môžeme prehľadne uviesť v nasledujúcej tabuľke.

		produkty				
		P_1	P_2	$\dots$	P_n	kapacita
	S_1	a_{11}	a_{12}	$\dots$	a_{1n}	b_1
zdroje	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
	S_m	a_{m1}	a_{m2}	$\dots$	a_{mn}	b_m
	zisk	c_1	c_2	$\dots$	c_n	
	množstvo	x_1	x_2	$\dots$	x_n	

Tabuľka 1: Výrobný problém

Teraz uz ľahko napíšeme matematický model výrobného problému ako úlohu lineárneho programovania [10].

$$
\begin{array}{ccccccc}
max & c_1x_1 & + & c_2x_2 & + & \dots & c_nx_n \\
 & a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & a_{1n}x_n \leq b_1 \\
 & \vdots & + & \vdots & + & & \vdots \ \vdots \\
 & a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \dots & a_{mn}x_n \leq b_m \\
 & x_1, & & x_2, & & \dots & x_n \geq 0
\end{array}
$$

Dopravná úloha

Teraz predpokladajme, že máme p výrobcov $s_1, \dots, s_p$ toho istého produktu (napr. cement), ktorí ho vyrobili v množstvách $a_1, \dots, a_p$. Tento produkt treba dopraviť ku q odberateľom $t_1, \dots, t_q$, ktorých požiadavky sú $b_1, \dots, b_q$. Pritom náklady na prepravu jednotkového množstva od výrobcu s_i k odberateľovi t_j sú c_{ij} a predpokladáme, že dopravné náklady závisia od množstva lineárne. Od jedného výrobcu môžeme produkt rozviesť k viacerým odberateľom a jeden odberateľ môže dostať produkt od viacerých výrobcov. Tiež budeme predpokladať tzv. vybalancovanosť, t.j., že spolu sa práve toľko vyrobilo ako je sumárna požiadavka [10]:

$$\sum_{i=1}^{p} a_i = \sum_{j=1}^{q} b_j$$

Tieto údaje môžeme zapísať v tabuľke:

c_{11}	$\dots$	c_{1q}	a_1
$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
c_{p1}	$\dots$	c_{pq}	a_p
b_1	$\dots$	b_q	

Tabuľka 2: Dopravná úloha

Ak zavedieme neznáme x_{ij} vyjadrujúce množstvo produktu prepraveného od s_i k s_j, tak dopravnú úlohu môžeme sformulovať takto:

$$\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{q} c_{ij}x_{ij} \to min$$

$$\sum_{j=1}^{q} x_{ij} = a_i \quad \forall i$$

$$\sum_{i=1}^{p} x_{ij} = b_j \quad \forall j$$

$$x_{ij} \geq 0 \quad \forall i, j$$

V praxi sa vyskytujú okrem iných aj tieto aplikácie [5]:

- premiestnenie m strojov určitého druhu z rôznych pracovísk na iné pracoviská tak, aby sme minimalizovali prepravné vzdialenosti,
- určitý počet strojov, ktoré môžu vyrábať alebo obrábať taký istý výrobok, sa má prideliť na rovnaký počet pracovísk, pričom každý stroj na rôznom pracovisku dosahuje iný výkon, má sa dosiahnuť maximálny celkový výkon (výkonnosť),
- problém optimálneho rozmiestnenia servisných staníc. Ak sa rieši otázka rozmiestnenia novo zriaďovaných servisných staníc, môžeme brať do úvahy náklady, ktoré vznikajú v závislosti na rozmiestnení týchto staníc, náklady dopravné, náklady na skladovanie, popr. náklady na spracovanie materiálu, náklady na opravy a pod. Rozmiestnenie týchto staníc možno riešiť optimálne, t.j. tak, aby náklady závisiace na riešení boli minimálne.

1.2 Nelineárne programovanie

V rade prípadov nemožno pracovať s predpokladom, že účelová funkcia alebo obmedzenia majú lineárny charakter (tvar). V týchto prípadoch použijeme nelineárne programovanie, ktoré pracuje s nelineárnou účelovou funkciou. Záleží na okolnostiach, či obmedzenia majú lineárny alebo nelineárny tvar. Na riešenie problému nelineárneho programovania je vytvorená celá rada metód. Na rozdiel od lineárneho programovania neexistuje všeobecne použiteľná metóda. Metódy sú tvorené vždy pre určité okruhy problémov. Základnú úlohy nelineárneho programovania môžeme rozdeliť na 4 druhy podľa účelovej funkcie a obmedzení [5]:

(U1) Úloha na voľný extrém

$$Min\{f(x) \quad | \quad x \in \mathbb{R}^n\}$$

Budeme predpokladať, že funkcia $f(x)$ má spojité prvé parciálne derivácie, resp. spojité druhé parciálne derivácie v uvažovanom bode.

- Nutné podmienky prvého rádu:
  Nech $\hat{x}$ je optimálnym riešením úlohy (U1). Potom $\bigtriangledown f(\hat{x}) = 0$.

- Nutné podmienky druhého rádu:
  Nech $\hat{x}$ je optimálnym riešením úlohy (U1). Potom $\bigtriangledown f(\hat{x}) = 0$ a Hessova matica druhých parciálnzch derivácií $\bigtriangledown^2 f(\hat{x})$ je kladne semidefinitná.

- Postačujúce podmienky druhého rádu:
  Nech pre bod $\hat{x}$ platí $\bigtriangledown f(\hat{x}) = 0$ a Hessova matica druhých parciálnych derivácií $\bigtriangledown^2 f(\hat{x})$ je kladne definitná. Potom $\hat{x}$ je ostrým lokálnym minimom funkcie $f(x)$.

(U2) Klasická úloha na viazaný extrém

$$Min\{f(x) \quad | \quad h_i(x) = 0, (i = 1, \ldots, m)\}$$

Budeme predpokladať, že účelová funkcia $f(x)$ ako aj funkcie ohraničení $h_i(x) \quad (i = 1, 2, \ldots, m)$ majú spojité prvé derivácie v uvažovanom bode minima. Okrem tohto prirodzeného predpokladu musí byť splnená ešte určitá podmienka regularity v bode minima, ktorú zatiaľ nebudeme bližšie špecifikovať.

- Nutné podmienky prvého rádu (Lagrangeove podmienky):
  Nech $\hat{x}$ je optimálnym riešením úlohy (U2). Potom existuje $\hat{u} \in \mathbb{R}^m$ tak ,že platí:

$$\begin{aligned} \bigtriangledown f(\hat{x}) + \sum_{i=1}^{m} \hat{u}_i \bigtriangledown h_i(\hat{x}) &= 0 & (3) \\ (i = 1, 2, \ldots, m) \qquad h_i(\hat{x}) &= 0 & (4) \end{aligned}$$

  Poznamenávame ,že Lagrangeove podmienky (3), (4) tvoria sústavu $n+m$ rovníc o $n+m$ neznámych x, u. Ak zavedieme pomocnú funkciu (tzv. Lagrangeovu funkciu)

$$L(x, u) = f(x) + \sum_{i=1}^{m} u_i h_i(x) \tag{5}$$

  tak podmienky (3), (4) možno vyjadriť ako podmienky stacionarity bodu $(\hat{x}, \hat{u})$ t.j.

$$\bigtriangledown L(\hat{x}, \hat{u}) = 0 \tag{6}$$

- Nutné podmienky druhého rádu:
  Nech $\hat{x}$ je optimálnym riešením úlohy (U2). Potom existuje $\hat{u} \in \mathbb{R}^m$ tak, že platia vzťahy (3), (4) a Hessova matica

$$\bigtriangledown^2_{xx} L(\hat{x}, \hat{u}) \tag{7}$$

  je kladne semidefinitná na podpriestore všetkých riešení systému homogénnych rovníc

$$y^T \bigtriangledown h_i(\hat{x}) = 0 \qquad (i = 1, \ldots, m) \tag{8}$$

- Postačujúce podmienky druhého rádu:
  Nech pre bod $(\hat{x}, \hat{u})$ spĺňa (3), (4). Nech Hessova matica (7) je kladne definitná na podpriestore (8). Potom $\hat{x}$ je ostrým viazaným lokálnym minimom funkcie $f(x)$.

(U3) Úloha matematického programovania v užšom zmysle

$$Min\{f(x) \quad | \quad g_i(x) \geq 0, (i = 1, 2, \ldots, m)\}$$

Budeme predpokladať, že účelovú funkciu $f(x)$, ako aj funkcie ohraničení $g_i(x) \geq 0, \quad (i = 1, 2, \ldots, m)$ majú spojité parciálne derivácie v okolí uvažovaného bodu minima. Okrem tohto prirodzeného predpokladu musí byť splnená ešte určitá podmienka regularity v bode minima, ktorú nebudeme zatiaľ bližšie špecifikovať.

- Nutné podmienky prvého rádu (tzv. Khun-Tuckerove podmienky):

  Nech $\hat{x}$ je optimálnym riešením úlohy (U3). Potom existuje $\hat{u} \in \mathbb{R}^m$ tak, že platí:

$$\bigtriangledown f(\hat{x}) - \sum_{i=1}^{m} \hat{u}_i \bigtriangledown g_i(\hat{x}) = 0 \tag{9}$$

$$\begin{aligned} g_i(\hat{x}) &\geq 0 \qquad (i = 1, \ldots, m) &(10)\\ \hat{u}_i g_i(\hat{x}) &= 0 \qquad (i = 1, \ldots, m) &(11)\\ \hat{u}_i &\geq 0 \qquad (i = 1, \ldots, m) &(12) \end{aligned}$$

  Ak definujeme tzv. Lagrangeovu funkciu

$$L(x, u) = f(x) - \sum_{i=1}^{m} u_i g_i(x) \tag{13}$$

  tak podmienky (9-12)možno prepísať (vo vektorovom tvare)takto:

$$\bigtriangledown_x L(\hat{x}, \hat{u}) = 0, \quad \bigtriangledown_u L(\hat{x}, \hat{u}) \leq 0, \quad \hat{u}^T \bigtriangledown_u L(\hat{x}, \hat{u}) = 0, \quad \hat{u} \geq 0 \tag{14}$$

  Prvý vzťah (14) vyjadruje podmienku stacionárnosti bodu $\hat{x}$ funkcie $L(x, \hat{u})$ - vzhľadom na premennú $x \in \mathbb{R}^n$. Posledné tri vzťahy (14) sú nutnými podmienkami pre maximum funkcie $L(\hat{x}, u)$ vzhľadom na premennú $u \in \mathbb{R}^m_+$.

- Nutné podmienky druhého rádu:

  Nech $\hat{x}$ je optimálnym riešením úlohy (U3). Potom existuje $\hat{u} \in \mathbb{R}^m$ tak, že platia vzťahy (9-12) a Hessova matica druhých parciálnych derivácií (podľa x) Lagrangeovej funkcie (13)

$$\bigtriangledown^2_{xx} L(\hat{x}, \hat{u}) \tag{15}$$

je kladne semidefinitná na podpriestore všetkých riešení sústavy homogénnych rovníc

$$y^T \bigtriangledown g_i(\hat{x}) = 0 \qquad , \qquad i \in \hat{I} = \{i \quad | \quad g_i(\hat{x}) = 0\} \tag{16}$$

Poznamenávame, že množina indexov $\hat{I}$ charakterizuje tzv. množinu aktívnych ohraničení úlohy (U3) v bode $\hat{x}$.

- Postačujúce podmienky druhého rádu:
  Nech $(\hat{x}, \hat{u})$ spĺňa (9-12), pričom v (11) je vždy jedna zložka nenulová. Nech Hessova matica (15) je kladne definitná na podpriestore (16), potom $\hat{x}$ je ostrým lokálnym riešením úlohy (U3).

(U4) Úloha matematického programovania v širšom zmysle

$$Min\{f(x) \quad | \quad g_i(x) \geq 0, \quad i = 1, \ldots, m; \quad h_j(x) = 0, \quad j = 1, \ldots, k\}$$

Budeme predpokladať, že účelová funkcia, $f(x)$ ako aj funkcie ohraničení $g(x)$, $h(x)$ majú spojité prvé parciálne derivácie, pričom v uvažovanom bode minima je splnená určitá podmienka regularity. Obmedzíme sa len na nutné podmienky prvého rádu. Nech $\hat{x}$ je optimálnym riešením úlohy (U4). Potom existujú vektory $\hat{u} \in \mathbb{R}^m$, $\hat{v} \in \mathbb{R}^k$ tak ,že platí:

$$\bigtriangledown f(\hat{x}) - \sum_{i=1}^{m} \hat{u}_i \bigtriangledown g_i(\hat{x}) - \sum_{j=1}^{k} \hat{v}_j \bigtriangledown h_j(\hat{x}) = 0 \tag{17}$$

$$h_j(\hat{x}) = 0 \qquad (j = 1, \ldots, k) \tag{18}$$

$$g_i(\hat{x}) \geq 0 \qquad (i = 1, \ldots, m) \tag{19}$$

$$\hat{u}_i g_i(\hat{x}) = 0 \qquad (i = 1, \ldots, m) \tag{20}$$

$$\hat{u}_i \geq 0 \qquad (i = 1, \ldots, m) \tag{21}$$

Ak definujeme Lagrangeovu funkciu

$$L(x, u, v) = f(x) - \sum_{i=1}^{m} u_i g_i(x) - \sum_{j=1}^{k} v_j h_j(x) \tag{22}$$

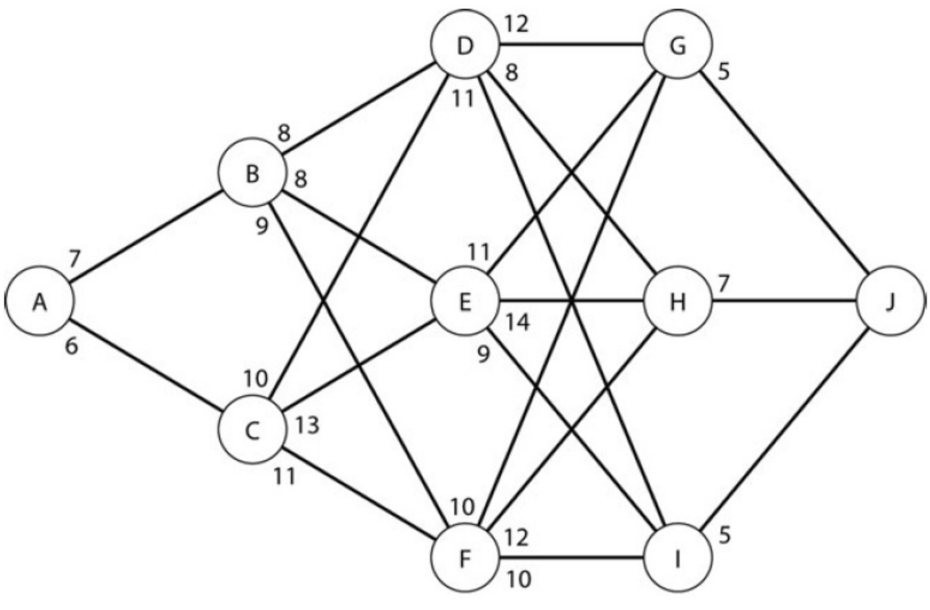
tak podmienky (17-21) možno prepísať nasledovne:
$\bigtriangledown_x L(\hat{x}, \hat{u}, \hat{v}) = 0, \quad \bigtriangledown_v L(\hat{x}, \hat{u}, \hat{v}) = 0, \quad \bigtriangledown_u L(\hat{x}, \hat{u}, \hat{v}) \leq 0, \quad \hat{u}^T \bigtriangledown_u L(\hat{x}, \hat{u}, \hat{v}) = 0,$
$\hat{u} \geq 0$

1.3 Dynamické programovanie

V ekonomických modeloch je čas jedinou skutočne exogénnou premennou. S ňou sa zásadným spôsobom počíta v dynamickej analýze. V podkapitolách 1.1 a 1.2, sme sa zaoberali statickou optimalizáciu nájsť maximum alebo minimum účelovej funkcie s alebo bez ohraničení. V tejto časti sa zameráme na problém optimalizácie v priebehu času. Príkladov optimalizácie vzhľadom na čas je v ekonómii mnoho. Uveďme si niektoré z nich. Spotrebiteľ môže minúť celý svoj súčasný príjem na spotrebu, alebo si niečo z neho ušetrí, a tým zlepší jeho možnosti spotreby v budúcnosti. Na druhej strane, on si môže požičať, čo zvýši jeho súčasný rozpočet na úkor toho v budúcnosti, kedy dlh bude musieť splatiť. Otázka potom je, ako môže spotrebiteľ vyvážením spotreby, sporenia a pôžičiek dosiahnuť čo najvyšší životný úžitok? Ako ďalší príklad môžeme spomenúť producenta ropy, či už je to malá firma v Texase, alebo veľké korporácie ropného priemyslu v Saudskej Arábii. Zisk z ropný vrtov závisí na celkovom výkone ropnej veže, ceny ropy v priebehu času a rýchlosti ťažby. Ako má byť regulovaná miera ťažby tak, aby sme maximalizovali zisk z ropných vrtov? [3]

Problém obchodného cestujúceho[3]:

Pre ilustráciu, je najlepšie začať klasickým jednoduchým problémom. Predpokladajme, že obchodník musí cestovať z bodu A do bodu J, rovnako ako v Obr. 1 .



Obr. 1: Problém obchodného cestujúceho

Má cestovať cez štyri stupne a v každej fáze má rad možností. Náklady na cestu na každej trase sú zobrazené ako číslo pri spojnici z jedného bodu do druhého. Akú cestu by si mal zvoliť, aby tak minimalizoval svoje výdavky? Pred začatím riešenia tejto úlohy, musíme sledovať dva dôležité body. Po prvé, začiatok v bode A a výber najlacnejšie trasy na každom stupni sa zdá byť intuitívne atraktívne riešenie, ktoré však nie je nutne optimálne riešenie. V našom príklade, to je trasa $ACDHJ$ za cenu 31. Avšak existuje lepšie (lacnejšie) riešenie tejto úlohy ($ABEIJ$ za cenu 29). Po druhé, vyhodnocovanie všetkých možných trás nie je lákavá možnosť. V našom príklade máme dve možnosti v etape 1 a tri možnosti v fázach 2 a 3, čo má za následok celkovo 18 možných ciest. Je jasné, že vo väčších problémoch, počet trás môže byť oveľa väčší. Napríklad, ak máme 11 etáp, v každom z prvých 10 stupňoch máme 9 možností, potom by sa počet možností blížil k 3500000000. Zdá sa, že potrebujeme účinnejší spôsob na nájdenie optimálnej cesty. Tento problém rieši úloha dynamického programania.

Príklad hľadania práce[3]:

Zoberme si pracovníka, ktorý žije n období a v každom má na výber dve alternatívy: Je mu ponúknuté pracovné miesto, ktoré platí x príjmov. On môže ponuku prijať alebo môže zostať nezamestnaný v tomto období a hľadať možno lepšiu ponuku. Príjmy, y zo zamestnania, medzi ktorými pracovník hľadá, sú náhodne rozdelené s hustotou funkcie $\varphi(y)$. Preto očakáva, že príjem pre ďalšie obdobie je

$$E(y) = \int_Y y\phi(y)dy \tag{23}$$

kde Y je množina všetkých možných hodnôt y. Nemá zmysel zostávať nezamestnaný a hľadať zamestnanie v poslednej fáze pracovného života (poslednom kroku rozhodovania pred dôchodkom). Preto pracovník prijíma ponuku a jeho príjem je x. Ale v predposlednom období, sú dve možnosti: prijať prácu a mať príjem $x + \delta x$ alebo ostane nezamestnaný a bude hľadať lepšiu prácu s príjmom $\delta E(y)$, kde δ je diskontny faktor. Rekurzívny vzorec je

$$v_{n-1}(x) = max[(1+\delta)x, \delta E(y)] \tag{24}$$

Ak sa vrátime spať "$k$öbdobí s možnostou prijať prácu. V takom prípade je zisk za zvyšok pracovného života bude

$$(1 + \delta + \delta^2 + \ldots + \delta^{k-1})x = x\frac{1-\delta^k}{1-\delta} \tag{25}$$

alebo môže zostať nezamestnaný a hľadať prácu s očakávaním

$$\delta E[v_{n-k+1}(y)] \tag{26}$$

Tak, vzorec rekurzie je

$$v_{n-k}(x) = max\left[x\frac{1-\delta^k}{1-\delta}, \delta E[v_{n-k+1}(y)\right] \tag{27}$$

1.4 Diferenciálne rovnice

Ekonomický život je dynamický proces, a práve preto sa zdá byť prirodzené modelovať ekonomické javy pomocou diferenciálnych rovníc. Problém je, že v ekonomike sú všetky premenné merané v diskrétnych časových intervaloch. Preto modely, ktoré používajú čas ako spojitú premennú nemusia byť vhodné pre ekonomickú analýzu. Na toto však existujú dva protiargumenty. Po prvé, v ekonomickom živote, je čas v skutočnosti spojitá premenná, jej meranie je iba umelé "zdiskrétnenie". V každom okamihu sa robia rozhodnutia, uzatvárajú sa mnohé transakcie, a veľa výrobných procesov sa nikdy nezastaví. Vždy je možné modelovať ekonomický vývoj pomocou spojitého času a diferenciálnych rovníc a následne to aproximovať s diskrétnym časovým modelom pre odhad a simulácie. Po druhé, matematická teória diferenciálnych rovníc je príliš bohatá a silná na to aby sa vzdala ekonomickej analýzy.

Ekonomika v reálnom svete je stále v procese vývoja a mimo rovnováhy. Je to, ako by naháňala rovnováhu a pred dosiahnutím tejto pozície sa rovnováha zmenila. Na modelovanie pohybu z jednej rovnováhy do druhej a na sledovanie premenných, keď je systém mimo rovnováhy, potrebujeme dynamické modelovanie.[3]

Najznámejší model v ekonómii používajúci diferenciálne rovnice je Solow rastový model. Solow predpokladal, že výstupné parametre závisia od práce a kapitálu a produkčná funkcia je homogénna a stupňa jedna. Potom,

$$Q = F(K, L) = LF(\frac{K}{L}, 1) = Lf(k) \tag{28}$$

pretože

$$F_k > 0, \quad F_{kk} < 0 \tag{29}$$

platí

$$f' > 0, \quad f'' < 0 \tag{30}$$

kde Q, K a L sú podľa poradia, výstup, kapitál a pracovná sila, a k = K / L. Okrem toho sa predpokladá, že časť príjmov s je ušetrená a investovaná, čo okamžite zvýši kapitál

$$\frac{dK}{dt} = I = S = sQ = sLf(k), \tag{31}$$

kde sklon k úsporám je kladný a menší ako jedna: $0 < s < 1$. Rast práce je konštantý s mierou n, tak

$$\frac{dL}{dt} = nL \tag{32}$$

všimnime si

$$\frac{dk}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{K}{L}\right) = \frac{1}{L^2}\left[L\frac{dK}{dt} - K\frac{dL}{dt}\right] \tag{33}$$

Substitúciou za dK/dt a dL/dt, dostaneme známu Solowovú jednoúrovňovú diferenciálnu rovnicu [3]:

$$\frac{dk}{dt} = sf(k) - nk \tag{34}$$

2 Black-Scholesov model

2.1 Opcie a opčné kontrakty

Definícia

Opčné kontrakty sa zaraďujú medzi podmienené kontrakty, kde subjekt ich zakúpením získava právo, nie však povinnosť, na realizovanie určitého obchodu v budúcnosti za dopredu pevne zjednaných podmienok, resp. na určité plnenie, pokiaľ nastanú stanovené okolnosti. Naproti tomu, predávajúci má povinnosť na požiadanie kupujúceho realizovať zjednaný obchod. [4]

Z definície jasne vyplýva nerovnomerné postavenie obchodných partnerov. To je dôvod prečo predajcovia opčných kontraktov požadujú pri ich uzatváraní určitý poplatok vo forme opčnej prémie. Pokiaľ predávajúca strana dostane túto zaplatenú opčnú prémiu, nenesie tak úverové riziko protistrany. Tým pádom je využitie opčných kontraktov na strane kupujúcich prístupné i pre subjekty s nižšou bonitou.[14]

Podľa techniky uzatvárania opčných transakcií rozlišujeme:

- kúpna opcia (call options)
- predajná opcia (put options)

Kupujúci *call opcie* získava právo nákupu stanoveného množstva určitého bazického inštrumentu za vopred stanovenou cenu a v presne určenom termíne (alebo behom stanovenej doby). Predávajúcí *call opcie* je zaviazaný poskytnúť na požiadanie majiteľa opcie bázické inštrumenty v súlade s podmienkami uzavretého opčného kontraktu.

Kupujúcí *put opcie* získava právo predaja stanoveného množstva určitého bazického inštrumentu za vopred stanovenou cenu a v presne určenom termíne (alebo behom stanovenej doby). Predávajúcí *put opcie* je zaviazaný na požiadanie majiteľa opcie odobrať bázické inštrumenty v súlade s podmienkami uzavretého opčného kontraktu [9].

V dobe uzavrenia opčného kontraktu sú dohodnuté všetky jeho náležitosti, tj.[9]:

- typ opcie (call alebo put)
- objem opcie je množstvo bázického inštrumentu (podkladového aktíva - underlying assets) v opčnom kontrakte
- realizačná cena (bazická cena - strike price) je cena, za ktorú môže držitel opcie call (resp. put) koupit (resp. prodat) bázický inštrument
- dátum splatnosti opcie (maturity date) je dátum plnenia opcie: pritom opciu je možné uplatniť buď iba k dátumu splatnosti opcie (tj. v jeden presne stanovený deň) a potom sa hovorí o európskej opcii (European option), alebo ju možno uplatniť kedykoľvek do dátumu splatnosti a potom sa hovorí o americkej opcii (American option), ktorá prevláda v rámci burzových opcii. Presnejšie rozlišujeme:
  - dátum vypršania opcie (expiration date) - čas keď opcia naozaj vyprší
  - dátum realizáce opcie (exercise date) - často zhodný s dátumom vypršania, keď prebehne zjednaná transakcia s bazickým inštrumentom
  - dátum zúčtovania (settlement date) - čas keď dôjde k vyúčtovaniu uskutočnenej transakcie.

Podľa vzťahu medzi realizačnou cenou opcie K a spotovou cenou podkladového aktíva $S(T)$ sa môže opcia dostať do jednej z troch pozícií [8]:

- in-the-money (v peniazoch): $S(T) > K$ pre call, $K > S(T)$ pre put. V toto prípade má zmysel uplatniť kúpnu, resp. predajnú opciu.
- at-the-money (na peniazoch): $S(T) = K$ pre call aj put. Do tejto pozície sa opcia dostáva okamihom vyrovania spotovej ceny a realizačnej ceny podkladového aktíva.
- out-the-money (v peniazoch): $S(T) < K$ pre call, $K < S(T)$ pre put. V toto prípade nemá zmysel uplatniť kúpnu, resp. predajnú opciu.

2.2 Predpoklady Black-Scholesovho modelu

1. Cena podkladového aktíva sa vyvíja podľa geometrického brownovho pohybu (špeciálny typ stochastického procesu) s konštantným posunom (odchýlkou) a konštantnou volatilitou.

2. Obchodovanie s podkladovým aktívom je spojité, v prenesenom zmysle likvidné.

3. Zanedbávanie daní a transakčných nákladov.

4. Zapožičanie hotovosti za konštantnú bezrizikovú úrokovú mieru.

5. Všetky aktíva sú perfektne deliteľné.

6. Na trhu neexistujú príležitosti na arbitráž.

7. Technicky je možné podkladové aktívum predať so zámerom neskoršie ho kúpiť (short sell).

Black-Scholesov model možno použiť iba na oceňovanie európskych opcií, inak sa Black-Scholesov model odchyľuje od skutočného ocenenie týchto opcií.

2.3 Black-Scholesov vzorec

Doteraz najpoužívanejší model vyvinuli v 70 rokoch páni Black, Scholes a Merton. Ich pôvodný model riešil európske opcie na akcie nevynášajúce dividendy. Model je avšak možné rôznym spôsobom prispôsobiť na mnoho ďalších prípadov. Odvodenie modelu je dosť zložité. Model bol odvodený na predpoklade tzv. stochastického procesu. Stochastický proces predstavuje matematický popis zmeny hodnoty určitej premennej v čase. Autori konkrétne použili Wienerov proces. Hlavným znakom Wienerovho procesu je to, že premenná sa spojite mení s časom a že zmeny, ktoré sa môžu kedykoľvek uskutočniť, majú normálne rozdelenie. Black-Scholesov model matematicky vyjadruje cenu kúpnej opcie ako funkciu piatich premenných: $S(T)$ (spotová cena akcie), K (realizačná cena akcie), T (doba do splatnosti obce), σ (volatilita ceny akcie) a r (bezriziková úroková miera). Zatiaľ sme cenu neboli schopní explicitne určiť. Ak poznáme päť vyššie uvedených premenných, potom môžeme stanoviť tiež teoretickú cenu opcie. Pre takto stanovenú cenu sa tiež používa názov adekvátna (fair) hodnota opcie. [9, 13]

Vplyv faktorov Black-Scholesovho modelu na hodnotu kúpnej a predajnej opcie môžeme vidieť v tabuľke [8]:

Názov faktora	**Kúpna opcia**	**Predajná opcia**
cena akcie $S(T)$	pozitívny	negatívny
realizačná cena K	negatívny	pozitívny
čas do maturity T	pozitívny	neznámy
volatilita akcie σ	pozitívny	pozitívny
bezriziková úroková miera r	pozitívny	negatívny

Výplata európskej kúpnej opcie s realizačnou cenou K so splatnosťou T je

$$c(T) = max[S(T) - K, 0],$$

kde $S(T)$ je cena podkladového aktíva k dátumu splatnosti (spotová cena). Ak v čase splatnosti $S(T) > K$ tak má zmysel opciu uplatniť, kúpiť ju za cena K a hneď obratom predať na trhu za $S(T)$, čo dáva výplatu $S(T) - K$. Budeme uvažovať, že podkladové nemožno uplatniť, keď by to viedlo k strate, $S(T) - K < 0$. Black-Scholes rovnica za cenu opcie v deň $t = 0$ pred dátumom splatnosti, je daná vzťahom

$$c(0) = S(0)\phi(d_1) - e^{-rT}K\phi(d_2)$$

,kde $\phi(d_i)$ je hodnota distribučnej funkcie normovaného normálneho rozdelenia v d_i. Je to oblasť pod funkciou hustoty normálneho rozdelenia od $-\infty$ do d_i, čo dáva pravdepodobnosť, že náhodný výber z normovaného normálneho rozdelenie bude mať hodnotu menšiu alebo rovnú d_i. Potom platí, že $0 \leq \phi(d_i) \leq 1$ s $\phi(-\infty) = 0$, $\phi(0) = \frac{1}{2}$ a $\phi(+\infty) = 1$ [8, 15]. Čas r je bezriziková úroková miera a d_1 a d_2 spĺňajú

$$d_1 = \frac{ln\left(\frac{S(0)}{K}\right) + \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)T}{\sigma\sqrt{T}},$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T} = \frac{ln\left(\frac{S(0)}{K}\right) + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)T}{\sigma\sqrt{T}},$$

kde σ je volatilita podkladového aktíva. Podobne, výplata pre európsku predajnú opciu s realizačnou cenou K a splatnosťou T je

$$p(T) = [K - S(T), 0]$$

ako predajná opcia dáva právo predať podkladové aktívum za realizačnú cenu K. Black-Scholes vzorec pre cenu predajnej opcie v deň $t = 0$ pred dátumom splatnosti, je daný

$$p(0) = c(0) + e^{-rT}K - S(0) = e^{-rT}K(1 - \phi(d_2)) - S(0)(1 - \phi(d_1)),$$

kde d_1 a d_2 boli definované vyššie. Zo symetria štandardné normálne rozdelenie $\phi(-d) = (1 - \phi(d))$, takže vzorec pre predajnú opciu sa dá zapísať ako [15]

$$p(0) = e^{-rT}K\phi(-d_2) - S(0)\phi(-d_1).$$

2.4 Interpretácia Black-Scholesovho vzorca

Prepíšme Black-Scholes rovnicu ako

$$c(0) = e^{-rT}(S(0)e^{rT}\phi(d_1) - K\phi(d_2)).$$

Vzorec možno interpretovať nasledovne. Ak kúpna opcia je vykonávaná v splatnosti, potom majiteľ získa akciu v hodnote $S(T)$, ale musí za ňu zaplatiť realizačnú cena K. Ale táto výmena prebieha len vtedy, ak kúpna opcia skončí "v peniazoch". Potom $S(0)e^{rT}\phi(d_1)$ predstavuje budúcu hodnotu podkladového aktíva, za podmienky, že konečná cena akcie $S(T)$ je väčšia, než jej realizačná cena K. Druhý člen v zátvorke $K\phi(d_2)$ je známa ako výplata K s pravdepodobnosťou, že realizačná cena bude zaplatená $\phi(d_2)$. Premenné vo vnútri zátvoriek sú diskontované bezrizikovou úrokovou mierou r, čo transformuje ich hodnotu do súčasnosti. Rovnica vnútri zátvoriek sa nazýva rizikovo neutrálnou alebo neutrálna vzhľadom na pravdepodobnosť. Premenná $\phi(d_2)$ predstavuje pravdepodobnosť, že kúpna opcia skončí "v peniazoch", kde d_2 je tiež vypočítaná na základe bezrizikovej úrokovej miery.

Nezabudnime, že v rizikovo neutrálnom svete všetky aktíva zarábajú bezrizikovou úrokovou mierou. Predpokladáme, že logaritmus ceny akcie má normálne rozdelenie. Teda $\tilde{\nu}$, očakávaná miera návratnosti v rizikovo neutrálnom svete, je rovná $r - \frac{1}{2}\sigma^2$.

Preto v čase T $\ln S(T)$ je normálne rozdelený s strednou hodnotou $\ln S(0) + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right) T$ a štandardnou odchýlkou $\sigma\sqrt{T}$. Tak

$$\frac{\ln S(T) - (\ln S(0)) + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)T)}{\sigma\sqrt{T}}$$

je štandartná náhodná premenná. Pravdepodobnosť ,že $S(T) < K$ je potom určená $\phi(-d_2)$ a pravdepodobnosť ,že $S(T) > K$ je daná $1 - \phi(-d_2) = \phi(d_2)$ [15].

Zložitejšie je ukázať, že $S(0)\exp^{rT}\phi(d_1)$ je budúca hodnota podkladového aktíva v rizikovo neutrálnom svete podmienená $S(T) > K$, ale dôkaz nebudeme uvádzať a možno ho nájsť v pokročilejších učebniciach.

3 The Capital Asset Pricing Model (CAPM)

3.1 Markowitzova teória, z ktorej vychádza CAPM

Harry Markowitz v teórii predpokladá, že investori maximalizujú svoj úžitok výberom ich optimálneho portfólia v nasledujúcich fázach:

- *analýza aktív* (investorov subjektívny odhad očakávanej výnosnosti a rizika jednotlivých aktív)
- *analýza portfólia* (investor početne rozhoduje o pomere zastúpenia vybraných aktív v jeho portfóliu na základe očakávanej výnosnosti a rizika zmeny portfólia, teda nezávisle na jeho očakávaniach a preferenciách)
- *výber optimálneho portfólia* (investor vyberá podľa jeho preferencii).

Pre výpočet budúcej (očakávanej) výnosnosti aktíva je nutné poznať, ako sa mení trhová cena za obdobie držania aktíva, výnosnosť [1] môžeme vyjadriť vzorcom [2] [7]:

$$r_{i_t} = \frac{P_{i_t} - P_{i_{t-k}}}{P_{i_{t-k}}} \tag{35}$$

r_{i_t} výnosnosť aktíva

P_{i_t} trhová cena aktíva na začiatku nasledujúceho obdobia

$P_{i_{t-k}}$ trhová cena aktíva na začiatku obdobia

Očakávaná výnosnosť aktíva $\bar{r}_i$:

$$\bar{r}_i = \frac{1}{T}\sum_{i=1}^{T} r_{i_t} \tag{36}$$

T počet období

[1] Uvažujeme iba kapitálový výnos, teda nezapočítavame dividendový výnos.

[2] Parameter k býva pri praktických odhadoch väčšinou pevne zvolený, keď $k = 1$, jedná sa o jednodennú zmenu trhovej ceny aktíva.

Očakávaná výnosová miera $\bar{r}_p$ (stredná hodnota) **portfólia**:

$$\bar{r}_p = \sum_{i=1}^{n} w_i \bar{r}_i \tag{37}$$

n počet aktív v portfóliu

w_i podiel i-tého aktíva v portfóliu, musí byť splnená podmienka: $\sum_{i=1}^{n} w_i = 1$

Riziko zmeny výnosnosti (smerodajná odchýlka) **aktíva** σ_i:

$$\sigma_i = \sqrt{\frac{1}{T-1} \sum_{i=1}^{n} (r_{i_t} - \bar{r}_i)^2} \tag{38}$$

Riziko σ_p (smerodajná odchýlka) **portfólia**:

$$\sigma_p = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} w_i w_j \sigma_i \sigma_j \rho_{ij}} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} w_i w_j \sigma_{ij}} \tag{39}$$

$w_1, \dots, w_n$ percentuálne zastúpenie jednotlivých aktív v portfóliu

σ_{ij} kovariancia očakávaných výnosností medzi aktívami i, j

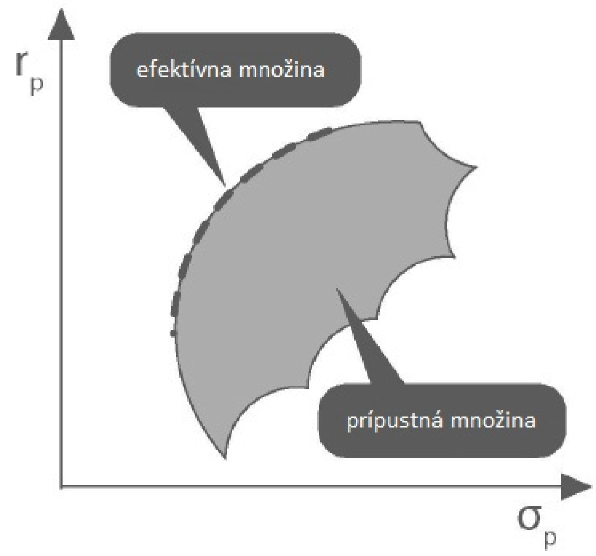
ρ_{ij} korelačný koeficient medzi i-tým a j-tým aktívom, jeho hodnota musí ležať v intervale $\langle -1, 1 \rangle$, platí: $\rho_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{\sigma_i \sigma_j}$.

Prípustnú množinu tvoria všetky možné kombinácie aktív, z ktorých môže investor vytvoriť nekonečný počet portfólií (preto sú zobrazené pomocou zakrivenej krivky). Efektívna množina je na obrázku 2 vyznačená zvýraznenou prerušovanou čiarou, ktorá značí portfólia s najnižším rizikom pri danej výnosovej miere, alebo portfólia s najvyššou očakávanou výnosovou mierou pri danom riziku. Model CAPM rozvíja Markowitzovu efektívnu množinu o existenciu bezrizikového aktíva a skúma jeho vplyv na ňu.

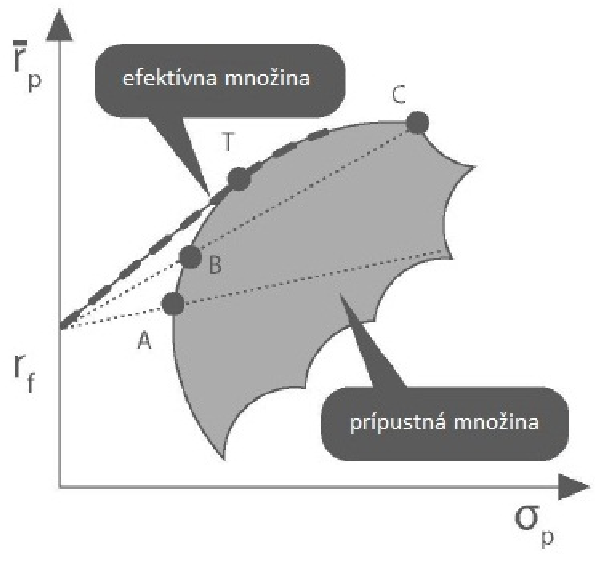
Uvažujeme, že je na trhu k dispozícií každému investorovi len jeden druh bezrizikového aktíva. Očakávaný výnos [3] takého bezrizikové aktíva je r_f a jeho riziko zmeny výnosu je rovné nule. Majme rizikové portfólia A,B,C a T patriace do efektívnej množiny. Všetky kombinácie rizikových portfólií s bezrizikovým aktívom budú ležať na

[3] Výnos bezrizikového aktíva je rovný výnosu krátkodobých vládnych dlhopisov

polpriamkách, ako je znázornené na obrázku 3 a vznikne tak nová efektívna množina. T, ktoré je bodom dotyku dotyčnice k pôvodnej efektívnej množine, je označované ako tangenciálne portfólio.

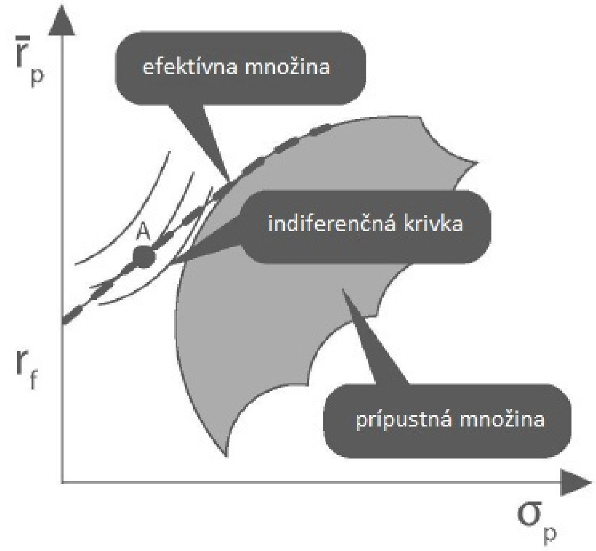


Obr. 2: Prípustná a efektívna množina



Obr. 3: Kombinácia rizikových portfólií s bezrizikovým aktívom

Veta 3.1. ***Veta o jednom fonde*** *Uvažujme situáciu s jedným bezrizikovým aktívom s výnosom r_f a viacerými rizikovými aktívami. Pre rizikové aktíva možno nájsť množinu optimálnych riešení, ktoré tvoria hyperbolu (Obr. 4). Nie je ťažké nahliadnuť, že po* *pridaní bezrizikového aktíva s výnosom r_f je efektívnou hranicou dotyčnica k hyperbole vychádzajúca z bodu $(0, r_f)$. Efektívne portfólia sú teda kombináciou bezrizikového aktíva a dotyčnicového portfólia T.*



Obr. 4: Voľba portfólia

3.2 Predpoklady pre stanovenie trhovej ceny všetkých aktív pomocou CAPM

1. Portfólio sa stanovuje v horizonte jedného obdobia a je hodnotené podľa očakávaného výnosu a očakávaného rizika.

2. Predpoklad nenasýtenosti investora, tj. z portfólií s rovnakým očakávaným rizikom je vybrané portfólio s vyššou očakávanou výnosnosťou.

3. Investori sú rizikovo averzní, tj. z portfólií s rovnakým očakávaným výnosom si vyberú to s nižším rizikom.

4. Počet aktív je fixný a všetky portfólia sú nekonečne deliteľné.

5. Existuje bezrizikové aktívum so sadzbou r_f.

6. Zanedbávame dane a transakčné náklady.

7. Všetci investori sú si rovní [2]:
   - majú rovnaký horizont jedného obdobia
   - platí pre nich rovnaká bezriziková sadzba
   - informácie sú zadarmo a sú dostupné všetkým investorom
   - majú rovnaké, homogénne očakávania ohľadom budúcnosti, tj. majú rovnako odhadnuté očakávania výnosnosti, rizika a kovariancie aktív.

3.3 The capital asset pricing model

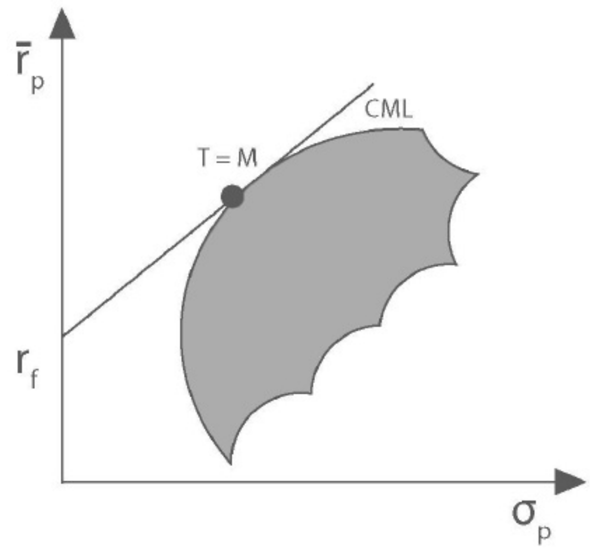
Významné osobnosti Sharpe, Lintner a Mossin sú tvorcami tohto modelu. Model sa často uvádza pod skratkou CAPM. Účelom tohto modelu nie je hľadanie optimálneho portfólia, ale hľadanie rovnovážnych cien aktív. [8] Kedykoľvek vykonávané investície, napríklad do akcií cez akciový trh, nesú riziko, že skutočný výnos investície sa bude líšiť od očakávaného výnosu. Investori riziko spojené s investovaním berú do úvahy pri rozhodovaní o výnose, ktorý chcú získať z investovania. CAPM ponúka spôsob na výpočet požadovanej výnosnosti z investície, na základe posúdenia jej rizika [1].

Každý investor rozloží svoju investíciu medzi bezrizikové aktívum a fond T zložený z rizikových aktív, čo vyplýva z vety o jednom fonde 3.1. Fond T je pre všetkých rovnaký, pretože všetci majú rovnaké informácie. Od individuálneho postoja k riziku závisí konkrétna váha investície v bezrizikovom aktíve a rizikovom fonde T. Fond T je súhrnom všetkých aktív na trhu a hovorí sa mu trhové portfólio. Váha aktíva i v trhovom portfóliu musí byť teda podiel aktíva i na celkovej hodnote trhu:

$$w_i = \frac{\text{súhrnná hodnota aktíva } i \text{ na trhu}}{\text{kapitalizácia celého trhu}}. \tag{40}$$

Trhové portfólio je náročné zostrojiť, pretože na trhu sa obchoduje veľké množstvo akcií. Najčastejšie sa teda trhové portfólio aproximuje indexom. Váhy v indexe, ktorý aproximuje trhové portfólio musia byť počítané podľa vzťahu 40. Toto spĺňa napr. americký index $S\&P500$. Tento index obsahuje 500 vysoko likvidných akcií obchodovaných na burzách v USA. Týchto 500 akcií dostatočne popisuje akciový trh v USA. V modeli CAPM nepotrebujeme hľadať optimálne portfólio, teda Markowitzov problém sme obišli. Riešenie problému vyplýva zo silných predpokladov. Optimálne portfólio je kombináciou trhového portfólia a bezrizikového aktíva.

Všetky efektívne portfólia ležia na polopriamke so začiatkom v bode $[0, r_f]$ a prechádzajú bodom $M[\sigma_M, r_M]$ obr. 5. Táto lineárna efektívna množina je známa ako priamka kapitálového trhu (Capital Market Line - CML). Neefektívne portfólia, teda iné než s trhovým portfóliom a bezrizikovým zapožičaním a vypožičaním, ležia pod priamkou CML.



Obr. 5: Capital Market Line

Smernica priamky kapitálového trhu sa rovná rozdielu medzi očakávanou výnosnosťou trhového portfólia a očakávanou výnosnosťou bezrizikového aktíva $\bar{r}_M - r_f$ delenému rozdielom ich rizík $\sigma_M - \sigma_f - 0 = \sigma_M$, lebo $\sigma_f = 0$ (bezrizikové aktívum) [7].

$$\bar{r}_p = r_f + \frac{\bar{r}_M - r_f}{\sigma_M}\sigma_p \tag{41}$$

M trhové porfólio

$\bar{r}_M$ očakávaná výnosnosť trhového portfólia

r_f očakávaná výnosnosť bezrizikového aktíva

Smernica CML $\lambda = \frac{\bar{r}_M - r_f}{\sigma_M}$ sa nazýva trhová cena rizika (Market price of Risk). Táto premenná naozaj nejakým spôsobom oceňuje riziko. Predstavuje nárast očakávaného výnosu pri zvýšení rizika o jednotku. Predpokladáme, že všetci investori v CAPM modeli riešia Markowitzov problém. Na druhej strane predpoklady modelu implikujú riešenie (optimálne portfóliá ležiace na CML). Teda na to aby boli portfóliá ležiace na CML skutočne riešením Markowitzovho problému, trh musí upraviť vstupné dáta. Veta 3.2 tvrdí, že predpoklady modelu CAPM implikujú očakávané výnosy, ktoré boli vstupom do Markowitzovho problému. Markowitzov problém neobmedzoval vstup, pretože nepredpisoval riešenie. Model CAPM uvažuje efektívnosť trhového portfólia a ako dôsledok upraví vstupy.

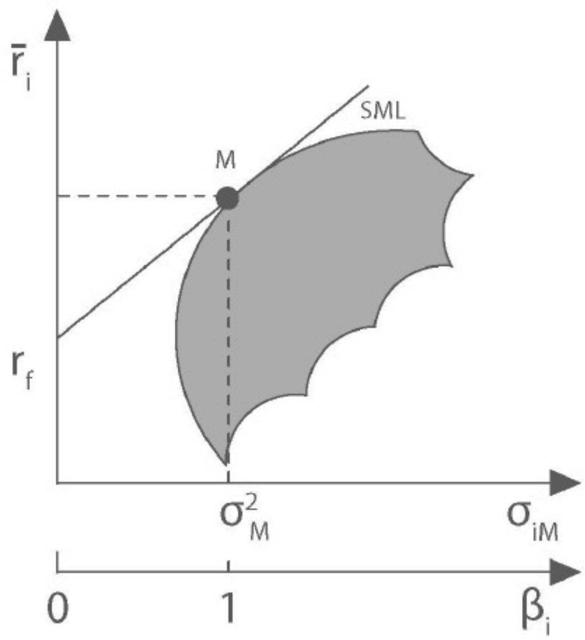
Veta 3.2. *Ak je trhové portfólio M efektívne, potom $\bar{r}_i$ pre každé aktívum spĺňa rovnicu:*

$$\bar{r}_i = r_f + \beta_i(\bar{r}_M - r_f), \tag{42}$$

kde

$$\beta_i = \frac{\sigma_{iM}}{\sigma_M^2} = \frac{cov(r_i, r_M)}{\sigma_M^2}.$$

Rovnicu (42) možno chápať ako lineárnu závislosť očakávaného výnosu od $\sigma_{iM} = cov(r_i, r_M)$, resp. od β_i Obr. 6. Rovnica (42) sa nazýva Security Market Line (SML).



Obr. 6: Security Market Line

Pojem "beta akcie"je vo finančníctve pomerne dosť zaužívaný. Vyjadruje závislosť výnosu danej akcie na výnose trhu. Ak beta akcie je kladná, potom má jej cena pri raste trhu tendenciu rásť. Opačne pri zápornej bete. Ak je hodnota bety 1, systematické riziko spojené s akciu firmy je rovnaké ako systematické riziko kapitálového trhu ako celku. Napríklad, ak akcia má beta rovnú 1, výnos z akcie sa zvýši o 10%, ak výnos na kapitálovom trhu ako celku sa zvýši o 10%. Ak hodnota beta akcie je 0.5, výnos z akcie sa zvýši o 5%, ak výnos kapitálového trhu sa zvýši o 10%, a tak ďalej. Odhadom tohto parametra pre rozličné firmy sa zaoberá mnoho spoločností. Pomocou [8] si tu ukážeme jednoduchý spôsob odhadnutia na základe historických dát. Majme historické údaje nejakej akcie (n pozorovaní). Z nich si vypočítame výnosy $r_1, r_2, \ldots, r_n$. Klasickým spôsobom môžeme odhadnúť očakávaný výnos a disperzie výnosu [8, 1]:

$$\hat{\bar{r}} = \frac{\sum_{i=1}^{n} r_i}{n},$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{1-N} \sum_{i=1}^{n} (r_i - \hat{\bar{r}})^2$$

Tak isto, ak máme index s historickými dátami (ktorý dobre aproximuje trhové portfólio) ,môžeme rovnakými vzorcami odhadnúť $\hat{\bar{r}}$ a $\hat{\sigma}^2$. Kovariancia výnosu aktíva a trhu sa odhadne ako

$$c\hat{o}v(r, r_M) = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (r_i - \hat{\bar{r}})(r_{M_i} - \hat{\bar{r}}_M).$$

Beta akcie potom odhadneme ako

$$\hat{\beta} = \frac{c\hat{o}v(r, r_M)}{\hat{\sigma}^2}.$$

Dôležitý je vyťah medzi betou jednotlivých aktív obsiahnutých v portfóliu a medzi betou portfólia. Nech portfólio obsahuje n aktív s váhami $w_1, w_2, \ldots, w_n$. Pretože pre výnos r platí:

$$r = \sum_{i=1}^{n} w_i r_i,$$

kde $r_1, r_2, \ldots, r_n$ sú výnosy jednotlivých aktív, je

$$cov(r, r_M) = \sum_{i=1}^{n} w_i cov(r_i, r_M)$$

a teda

$$\beta_p = \sum_{i=1}^{n} w_i \beta_i.$$

Beta portfólia je teda váženým priemerom biet jednotlivých aktív.

3.3.1 Systematické a nesystematické riziko

Predpovedanie výnosnosti cenného papiera je založené na vzťahu dvoch modelov - modelu pre očakávané výnosnosti (SML s dvoma komponentmi) a modelu pre skutočné výnosnosti (charakteristická priamka s tromi komponentmi). Očakávaná (rovnovážna) výnosnosť cenného papiera i v nadchádzajúcej perióde držania je daná rovnicou:

$$r_i^e = r_f + (\bar{r}_M - r_f)\beta_i \tag{43}$$

r_i^e rovnovážna očakávaná výnosnosť cenného papiera i

Charakteristická priamka je typom procesu generujúceho výnosnosť, ktorý garantuje skutočnú výnosnosť cenného papiera a je založený na rovnici:

$$r_i - r_f = (r_M - r_f)\beta_i + \varepsilon_i \tag{44}$$

ε_i náhodná chyba cenného papiera i

Náhodná chyba ε_i je zahrnutá v rovnici, aby bola presne vystihnutá situácia na trhu, na ktorom dochádza k zmenám pôsobením rôznych faktorov. Náhodná veličina má nulovú očakávanú (strednú) hodnotu a smerodajnú odchýlku σ_{ε_i} . Je bežnou praxou používať nasledujúcu rovnicu, ktorá se často nazýva model trhu:

$$r_i = \alpha_i + r_M\beta_i + \varepsilon_i \tag{45}$$

kde α_i je konštanta slúžiaca na zavedenie substitúcie: $\alpha_i = r_f(1 - \beta_i)$, pokiaľ bude použitá bezriziková investícia.

Odvodíme si z rovnice (44) vzťah medzi celkovým rizikom cenného papiera i meraného jeho smerodajnou odchýlkou σ_i a faktorom beta, ktorý je dôležitou mierou rizika cenného papiera:

$$\begin{aligned}
r_i - r_f &= (r_M - r_f)\beta_i + \varepsilon_i && (46)\\
var(r_i - r_f) &= var[(r_M - r_f)\beta_i + \varepsilon_i] &&\\
var(r_i) - var(r_f) &= var(r_M\beta_i) - var(r_f\beta_i) &&\\
\sigma_i^2 - 0 &= \beta_i^2\sigma_M^2 - \underbrace{\beta_i^2\sigma_f^2}_{0} + \sigma_{\varepsilon_i}^2 &&\\
\sigma_i^2 &= \beta_i^2\sigma_M^2 + \sigma_{\varepsilon_i}^2 && (47)
\end{aligned}$$

Celkové riziko [12] cenného papiera si môžeme rozložiť na dva komponenty:

$\beta_i^2\sigma_M^2$ systematické riziko (trhové riziko)

$\sigma_{\varepsilon_i}^2$ nesystematické riziko (netrhové riziko)

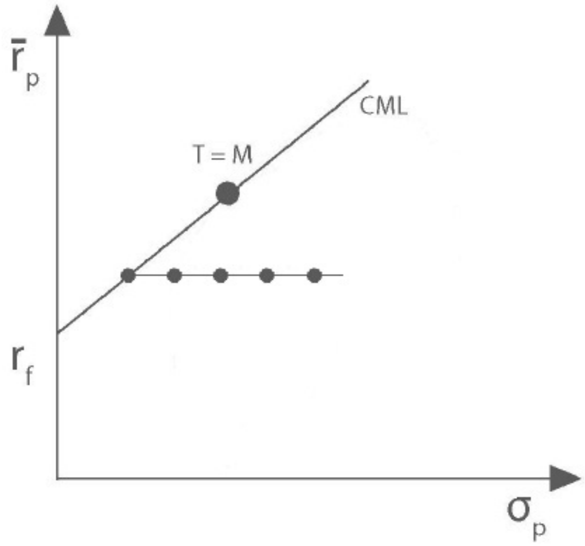
Systematické riziko súvisí s rizikom trhového portfólia a s betou cenného papiera. Vyššia beta u cenných papierov bude súvisieť s väčším množstvom systematického rizika a vyššou očakávanou výnosnosťou. Trhové riziko je spôsobené faktormi, ktoré ovplyvňujú ceny všetkých aktív obchodovaných na burze, teda máme na mysli makroekonomické, politické, sociálne zmeny apod. Typickým príkladom rizika trhu sú zmeny v očakávaní inflácie. Za systematické riziko zmeny tiež považujeme pôsobenie takých faktorov, ktoré ovplyvňujú iba určitú skupinu aktív (napr. zdraženie určitého typu suroviny). Systematické riziko je nediverzifikovateľné, lebo sa viaže k pohybu celého trhového portfólia [7]. Podiel systematického rizika na celkovom riziku aktíva určuje koeficient determinácie, ktorý vyjadruje schopnosť trhového modelu vysvetliť pohyby vo výnosoch jednotlivých akcií na trhu. Možno ho odvodiť zo vzťahu:

$$\rho_{iM} = \frac{\sigma_{iM}}{\sigma_i\sigma_M} = \frac{\beta_i\sigma_M^2}{\sigma_i\sigma_M} = \frac{\beta_i\sigma_M}{\sigma_i} \tag{48}$$

Koeficient determinácie je potom druhá mocnina odvodeného vzťahu, teda:

$$\frac{\beta_i^2\sigma_M^2}{\sigma_i^2} \tag{49}$$

Nesystematické riziko nie je spojené s betou cenného papiera, nie je dôvod k predpokladu, že vyššia rizikovosť bude znamenať vyššiu očakávanú výnosnosť. Ide o časť rizika, ktorá je jedinečná pre daný podnik, obor atď. Môže to byť spôsobené zlou činnosťou manažmentu, reštrukturalizáciou podniku, prechodom na novú technológiu, živelnou pohromou či úspešnou reklamnou kampaňou apod. Trhový pohyb nemá žiaden vplyv na netrhové riziko, riziko môžeme znížiť diverzifikáciou [7].



Obr. 7: Nesystematické riziko a CML

Uvažujme aktíva s rovnakou hodnotou β. Potom majú aj rovnaký očakávaný výnos $\bar{r}$, čo vyplýva z rovnice (43). Ak niektoré z týchto aktív obsahuje nesystematické riziko, neleží už na CML, čiže nie je efektívne. Takéto aktíva sa s rastúcim nesystematickým rizikom vzďaľujú v Obr. 7 napravo od CML. Netrhové riziko je horizontálna vzdialenosť od CML.

3.3.2 Celkové riziko portfólia

Výnosnosť každého rizikového papieru naviazanú k výnosnosti trhového portfólia sme si už odvodili, teraz si odvodíme pomocou [7] skutočnú nadmernú výnosnosť portfólia zloženého z n cenných papierov s váhami $w_i, w_2, \ldots, w_n$:

$$\bar{r}_p - r_f = \sum_{i=1}^{n} w_i r_i - r_f \tag{50}$$

Pretože platí $\sum_{i=1}^{n} w_i = 1$ a $r_f = const.$, môžeme rovnicu zapísať v tvare:

$$\bar{r}_p - r_f = \sum_{i=1}^{n} w_i r_i - \sum_{i=1}^{n} w_i r_f = \sum_{i=1}^{n} w_i (r_i - r_f) \tag{51}$$

Ďalej dosadíme za $r_i - r_f$ pravú stranu rovnice (46). Výsledkom bude tato charakteristická priamka portfólia:

$$\bar{r}_p - r_f = \sum_{i=1}^{n} w_i [(r_M - r_f)\beta_i + \varepsilon_i] = (r_M - r_f) \underbrace{\sum_{i=1}^{n} w_i \beta_i}_{\beta_p} + \underbrace{\sum_{i=1}^{n} w_i \varepsilon_i}_{\varepsilon_p} \tag{52}$$

$$r_p - r_f = (r_M - r_f)\beta_p + \varepsilon_p \tag{53}$$

β_p beta portfólia - vážený priemer biet jednotlivých aktív

ε_p vážený priemer náhodných chýb aktív

Z rovnice (52) odvoďme celkové riziko portfólia:

$$\begin{aligned} var(r_p - r_f) &= var[(r_M - r_f)\beta_p + \varepsilon_p] \\ var(r_p) - var(r_f) &= var(r_M\beta_p) + var(r_f\beta_p) + var(\varepsilon_p) \\ \sigma_p^2 - 0 &= \beta_p^2\sigma_M^2 + \sigma_{\varepsilon_p}^2 \end{aligned} \tag{54}$$

(55)

$\beta_p^2\sigma_M^2$ systematické riziko (trhové riziko)

$\sigma_{\varepsilon_p}^2$ nesystematické riziko (netrhové riziko)

U trhového rizika portfólia všeobecne platí, že čím viacej rôznych aktív je v portfóliu, tým menšia bude každá proporcia a nebude to mať za následok výrazné zníženie alebo zvýšenie bety portfólia. Diverzifikácia teda vedie k priemerovaniu trhového rizika.

U netrhového rizika portfólia naopak platí, že čím viacej je portfólio diverzifikovanejšie, tým je podstatne menšie jeho jedinečné riziko a v dôsledku toho i celkové riziko. Tzn. je možné dokázať, že s rastúcim počtom rôznych typov aktív portfóliu jedinečné riziko klesá.

Dôkaz. S väčšou diverzifikáciou portfólia klesá nesystematické riziko. Ak použijeme predpoklad, že aktíva majú v portfóliu rovnakú váhu, tzn. $wi = \frac{1}{n}$, potom platí:

$$\sigma_{\varepsilon_p}^2 = \sum_{i=1}^{n} w_i^2\sigma_{\varepsilon_i}^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n^2}\sigma_{\varepsilon_i}^2 = \frac{1}{n}\frac{\sigma_{\varepsilon_1}^2 + \sigma_{\varepsilon_2}^2 + \ldots + \sigma_{\varepsilon_n}^2}{n} \tag{56}$$

Môže to byť vyjadrené ako $\frac{1}{n}$ - krát priemerné reziduálne riziko v portfóliu. Ako sa počet akcií v portfóliu zvyšuje, tým sa drasticky zmenšuje priemerné reziduálne riziko, teda s väčšou diverzifikáciou portfólia rastie počet aktív(n sa zväčšuje). To ale znamená že $\frac{1}{n}$ sa zmenšuje, výsledné portfólio má menšie riziko.

Diskusia

Nevýhodou matematiky v ekonómii je nebezpečenstvo preváženia matematického pohľadu nad ekonomickým. Napriek tomu hrá matematika v ekonómii veľmi významnú úlohu. Ekonómia sa bez matematiky ako kompaktného vyjadrovacieho prostriedku nezaobíde. Správanie ľudí (spotrebiteľov, producentov) v reálnom svete nie je vždy racionálne a matematika predpokladá vždy dokonale racionálne správanie. Hlavným problémom využitia matematiky v ekonómii sú niekedy až bizarné predpoklady modelov. Matematika je exaktná veda, čo pri jej využití v ekonómii ako spoločenskej vede spôsobuje problémy, skreslenia a tým pádom vzdialenia sa od reality.

Black-Scholesov model

Tento model zhŕňa možnosť ocenenia opcie v podobe komplexnej rovnice (ktorá je odvodená pomocou diferenciálnych rovníc) za pomoci piatich známych faktorov. Black-Scholes model predpokladá určité idealistické predpoklady, ktoré nemusia odrážať realitu:

- Cena podkladového aktíva sa vyvíja podľa geometrického brownovho pohybu (špeciálny typ stochastického procesu) s konštantným posunom (odchýlkou) a konštantnou volatilitou. Predpoklad konštantnej volatility je tu veľmi dôležitý, avšak je nutné si uvedomiť, že volatilita aktív sa na trhoch mení. Je dôležité upozorniť nie len na to, že volatilita akcií sa mení v čase, ale obzvlášť dôležitý fakt je i zmena korelácie aktív.

- Obchodovanie s podkladovým aktívom je spojité, v prenesenom zmysle likvidné. Cenu podkladového aktíva je možné stanoviť v každom okamihu. Toto je dôvod, prečo ocenenie opcie pomocou Black-Scholes modelu je v niektorých prípadoch nutné doplniť i o ďalší nástroj, napríklad over-the-counter (OTC) inštrumenty.

- Neexistencia transakčných nákladov a daní je ďalším problémom modelu. V skutočnosti totiž neexistuje trh bez týchto poplatkov.

- Započičanie hotovosti za konštantnú bezrizikovú úrokovú mieru. Už len uročenie bezrizikovej úrokovej miery je problémom. Zväčša sa aproximuje krátkodobými dlhopismi, ktoré však nikdy nie sú "plne"bezrizikové. Avšak zo skúsenosti z praxe sa táto aproximácia zdá byť dostačujúca.

- Všetky aktíva sú perfektne deliteľné (nie je problém kúpiť napríklad 1/100 akcie). Túto požiadavku je opäť problematické splniť, pretože aktíva na akciových trhoch nemajú takúto vlastnosť.

- Na trhu neexistujú príležitosti na arbitráž. Toto je skôr technický predpoklad modelu.

- Technicky je možné podkladové aktívum predať so zámerom neskoršie ho kúpiť (short sell).

Black-Scholesov model možno použiť iba na oceňovanie európskych opcií (ktoré nemôžu byť uplatnené skôr ako v dátume vypršania). Ak podkladové aktíva vyplácajú dividendy, potom sa Black-Scholesov model odchyľuje od skutočného ocenenia týchto opcií. Takže v skratke, Black-Scholesov model ako komplexné oceňovanie opcií je rýchla metóda avšak len pre určité obmedzené typy opcií a v rámci obmedzujúcich predpokladov. Takýchto prípadov, ktoré spĺňajú tieto náročné kritéria, je však v reálnom svete málo. Preto existujú mnohé pomocné nástroje, modifikácie a úpravy tohto modelu, ktorými sme sa však kvôli rozsahu práce bližšie nezaoberali.

The Capital Asset Pricing Model (CAPM)

Už od času, kedy W. Sharpe publikoval metódu CAPM, je model pod paľbou kritikov a bol vystavený nespočetnému množstvu empirických testov. Kritizované sú najmä jeho zjednodušujúce predpoklady, a to:

- Dokonalý trh. Takýto trh na svete neexistuje a je to len isté zidealizovanie vlastností trhu a vzťahov, ktoré na ňom platia. Podľa môjho názoru je toto najobšírnejší a najviac skresľujúci predpoklad tohto modelu.

- Bezriziková sadzba r_f. Túto sadzbu je veľmi ťažko určiť. Zväčša sa aproximuje krátkodobými dlhopismi, avšak v skutočnosti ani oni nie sú úplne bezrizikové.

- Zanedbávanie daní a transakčných nákladov je ďalším problémom modelu. Neexistuje trh bez týchto poplatkov.

- Rovnaké očakávania investorov a rovnaká averzia k riziku. Rôzni investori nikdy nebudú mať rovnaké očakávania a postoj k riziku.

Model kritizoval napríklad Richard Roll [11]. Vo svojom odbornom článku argumentoval, že model CAPM je absolútne neuskutočniteľný. Index burzy podľa Rolla nemôže dostačujúcim spôsobom aproximovať trhové portfólio. Pretože nikto nie je schopný zmerať skutočné trhové portfólio, je zastúpené iba indexom. Ďalej nikto nevie hneď zmerať očakávanú návratnosť. Teda je nemožné vedieť, či je vzťah korektný. Ja sa
s týmto názorom stotožňujem, lebo CAPM model ja založený na vlastnostiach trhového portfólia

Záver

V našej práci sme sa snažili vytvoriť prehľad využitia matematiky v ekonómii a financiách. Pomocou Black-Scholesovho a CAPM modelu sme poukázali na hlavné problémy, ktoré pri tom nastávajú.

V prvej časti práce sme čitateľovi ponúkli všeobecný prehľad využitia matematiky v ekonómii. Pomocou konkrétnych príkladov ako sú dopravná úloha, výrobný problém, problém obchodného cestujúceho, príklad hľadania práce a solow rastový model sme ukázali možnosti aplikácie a použitie lineárneho programovania, nelineárneho programovania, dynamického programovania a diferenciálnych rovníc na dané ekonomické problémy. Tieto úlohy sme si vhodne pre daný ekonomický problém zadefinovali.

V druhej kapitole práce sme sa zaoberali Black-Scholesovým modelom oceňovania európskych opcií. Na začiatku sme si definovali kúpnu a predajnú opciou, spotovú cenu, realizačnú cenu, vzťah medzi nimi a dátum splatnosti. Potom sme sa venovali už samotnému Black-Scholesovmu vzorcu. Snažili sme sa čitateľovi vysvetliť každú premennú a správne interpretovať tento vzťah.

V poslednej kapitole sme rozoberali CAPM model, ktorý slúži na hľadanie rovnovážnych cien aktív. Pomocou markowitzovej teórie sme ukázali a prezentovali CAPM model. CAPM ponúka spôsob na výpočet požadovanej výnosnosti z investície, na základe posúdenia jej rizika. Vysvetlili sme si pojmy systematické, nesystematické a celkové riziko.

Naša práca čitateľovi poskytuje prehľad o nesmierne širokom využití matematiky v ekonómii a financiách. Je určená pre nenáročného čitateľa so základnými poznatkami z matematických oblastí, ktorý si chce urobiť všeobecný obraz o tejto problematike. Cieľom našej práce bolo na príkladoch Black-Scholesovho a CAPM modelu prezentovať hlavné problémy pri využití matematiky v ekonómií. Pomocou týchto príkladov sme sa snažili tieto výhody a nevýhody zovšeobecniť a ukázať čitateľovi, kde nastáva najväčší problém. Tie sme ukázali a rozobrali v záverečnej diskusii.

Hlavný prínos pre mňa ako autora práce bol v oboznámení sa s problematikou CAPM a Black-Scholesovho modelu. Rozšíril som si prehľad o využití matematiky a ekonómii a oboznámil som sa s problémami, ktoré nastávajú pri spájaní matematiky ako exaktnej vedy s ekonómiou.

Zoznam použitej literatúry

[1] Accaglobal: *the capital asset pricing model*, Qualification Paper 2008, dostupné na internete (23.4.2012):
http://www.accaglobal.com/content/dam/acca/global/PDF-students/2012/sa_jan08_capm.pdf

[2] Čámský, F.: *Teorie portfolia*, Masarykova univerzita, Brno, 2001

[3] Dadkhah K.: *Foundations of Mathematical and Computational Economics*, Springer, Berlín, 2011

[4] Dvořák, P.: *Deriváty*, Skriptá VŠE, Praha, 2003

[5] Ďuďák, J.: *Prednášky z ekonomicko-matematický metód*, učebné texty, Technická fakulta Slovenskej poľnohospodárskej univerzity, Nitra, 2010, dostupné na internete (24.4.2012):
http://www.tf.uniag.sk/e_sources/katsvs/rps/8_prednaska.pdf

[6] Hamala, M.: *Prednášky z nelineárne programovanie*, FMFI UK, Bratislava, 2011

[7] Kotulková, L.: *Užití modelu CAPM při tvorbě portfolia*, Diplomová práca, Přírodovědecká fakulta Masarykovy Univerzity, Brno, 2008, dostupné na internete (21.4.2012):
http://is.muni.cz/th/106509/prif_m/Diplomova_prace.pdf

[8] Melicherčík I., Olšarová L., Úradníček V.: *Kapitoly z finančnej matematiky*, Epos, Bratislava, 2005

[9] Nekula, K.: *Finanční opce*, Diplomová práca, Fakulta sociálních věd Karlovy Univerzity, Praha, 2004, dostupné na internete (21.4.2012):
http://www.google.sk/url?sa=t&rct=j&q=&esrc=s&source=web&cd=1&ved=0CCAQFjAA&url=http%3A%2F%2Fies.fsv.cuni.cz%2Fdefault%2Ffile%2Fdownload%2Fid%2F581&ei=moGST_ecCMjQ-gaz0MioBA&usg=AFQjCNEPfEJGpG8uPLnAvDvn1dGijlkDkw&sig2=wFRdYeJRb-Oy_yi76tW0QA

[10] Plesník, J.: *Prednášky z lineárne programovanie*, FMFI UK, Bratislava, 2011

[11] Roll, R.: *A critique of the asset pricing theory's tests*. Journal of Financial Economics, vol. 4 (1977), 129-176

[12] Sharpe, W. F., Alexander, G. J. *Investice*, Victoria Publishing, Praha, 1994

[13] Soukal, P.: *Empirické overení Black-Scholesova modelu ocenování opcí na akcie General Electric a IBM*, Dizertačná práca, Fakulta informatiky a statistiky VŠE, Praha, 2003, dostupné na internete (21.4.2012):
http://petrsoukal.profitux.cz/PhDprace_black_scholes.pdf

[14] Telgárska, L.: *Využitie opcií v medzinárodnom podnikaní*, Diplomová práca, Fakulta medzinárodních vztahů VŠE, Praha, 2009, dostupné na internete (18.4.2012):
https://www.google.sk/url?sa=t&rct=j&q=&esrc=s&source=web&cd=22&ved=0CCQQFjABOBQ&url=https%3A%2F%2Fisis.vse.cz%2Fzp%2Fportal_zp.pl%3Fprehled%3Dvyhledavani%3Bpodrobnosti%3D50857%3Bdownload_prace%3D1&ei=DbqOT6LiKMKcOsLhvN4K&usg=AFQjCNE03EN2sdqBSpA9imYKp_CBehLRmg&sig2=VjSxrScaSqV88nijWzCTyQ&cad=rja

[15] Worrall, T.: *The Black-Scholes Formula*, financial instuments (2008), dostupné na internete(17.4.2012):
http://personalpages.manchester.ac.uk/staff/tim.worrall/fin-40008/bscholes.pdf