UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY

ZOSILŇOVANIE KONCEPTU NASHOVHO EKVILIBRIA

BAKALÁRSKA PRÁCA

2012 **Marek CIESAR**

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY

ZOSILŇOVANIE KONCEPTU NASHOVHO EKVILIBRIA

BAKALÁRSKA PRÁCA

Študijný program:	Ekonomická a finančná matematika
Študijný odbor:	1114 Aplikovaná matematika
Školiace pracovisko:	Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky
Vedúci práce:	doc. RNDr. Ján Pekár, PhD.

Bratislava 2012 **Marek CIESAR**

59862613

Univerzita Komenského v Bratislave
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

ZADANIE ZÁVEREČNEJ PRÁCE

Meno a priezvisko študenta: Marek Ciesar
Študijný program: ekonomická a finančná matematika (Jednoodborové štúdium, bakalársky I. st., denná forma)
Študijný odbor: 9.1.9. aplikovaná matematika
Typ záverečnej práce: bakalárska
Jazyk záverečnej práce: slovenský

Názov: Zosilňovanie konceptu Nashovho ekvilibria

Cieľ: Podať historický prehľad zosilňovania konceptov ekvilibria v teórii hier.

Vedúci: doc. RNDr. Ján Pekár, PhD.

Dátum zadania: 15.10.2011

Dátum schválenia: 27.10.2011

doc. RNDr. Margaréta Halická, CSc.
garant študijného programu

....
študent vedúci

Poďakovanie: Na tomto mieste by som chcel poďakovať vedúcemu mojej bakalárskej práce doc. RNDr. Jánovi Pekárovi, PhD., za ochotu a pomoc vždy, keď som to potreboval a cenné rady pri písaní práce. Zároveň by som sa chcel poďakovať aj Kristíne Ciesarovej za pomoc pri úprave obrázkov a podporu pri písaní práce.

Abstrakt

CIESAR, Marek: Zosilňovanie konceptu Nashovho ekvilibria [Bakalárska práca], Univerzita Komenského v Bratislave, Fakulta matematiky, fyziky a informatiky, Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky; školiteľ: doc. RNDr. Ján Pekár, PhD., Bratislava, 2012, 37s.

V práci sa zaoberáme konceptom Nashovho ekvilibria ako základným nástrojom na riešenie úloh teórie nekooperatívnych hier. Samotné Nashovo ekvilibrium sa ukázalo ako nedostatočné kritérium na určenie optimálneho výstupu hry a preto vzniklo v druhej polovici 20. storočia mnoho úprav, vylepšení a zosilnení tohto konceptu. V práci sme vybrali niekoľko najdôležitejších zosilnení a tieto sme podrobne rozobrali a ich podstatu sme sa snažili vysvetliť aj čitateľovi, ktorý nemá vedomosti z oblasti teórie hier. Sústredili sme sa najmä na konečné hry s úplnou informáciou a až v poslednej kapitole sme predpoklad úplnej informácie opustili a spomenuli sme tzv. Bayesovské hry. Cieľom práce bolo zhrnúť poznatky a podať historický prehľad o zosilňovaní konceptu Nashovho ekvilibria a ten sa nám podarilo naplniť. Práca má význam najmä pre študentov vysokých škôl ekonomického zamerania, ale jej pochopenie nepredpokladá mimoriadne znalosti matematiky ani ekonómie.

Kľúčové slová: Nashovo ekvilibrium, dokonalé ekvilibrium, zosilňovanie, sekvenčné ekvilibriá

Abstract

CIESAR, Marek: Refinements of the Nash Equilibrium Concept [Bachelor Thesis], Comenius University in Bratislava, Faculty of Mathematics, Physics and Informatics, Department of Applied Mathematics and Statistics, Supervisor: doc. RNDr. Ján Pekár, PhD., Bratislava, 2012, 37p.

The Nash equilibrium concept as a basic tool for solving problems in theory of non-cooperative games is the main topic of this thesis. Nash equilibrium proved itself to be insufficient criterion to determine optimal output of a game. To find better solution concept, many changes, improvements and refinements of Nash equilibrium concept were made in the second half of the 20th century. In this thesis, we chose the most important refinements of the concept and we explained how they work and when are these refinements useful even to the reader, who has no knowledge about game theory. We used many examples to illustrate these refinements. We focused mostly on finite games with complete information. We left out these assumptions only in the last chapter, where we briefly introduced Bayesian games with incomplete information. This thesis aimed to summarize knowledge about Nash equilibrium refinements and offer historical review about this topic and we can say we reached our goal. We wrote this thesis mostly for university students, but since understanding of most chapters does not assume deep knowledge of the subject, this paper can be read by anyone interested in economics or game theory.

Keywords: Nash equilibrium, refinement, perfect equilibrium, sequential equilibrium

Obsah

Úvod 8

1. Úvod do teórie hier 10

2. Nashovo ekvilibrium 13

3. História pred Nashom 15

4. Ekvilibriá dokonalé vzhľadom na podhry 16

   4.1. Hry v extenzívnom tvare 16

   4.2. Ekvilibriá dokonalé vzhľadom na podhry 18

5. „Trembling hand perfect“ ekvilibriá 21

6. Proper ekvilibriá 23

   6.1. Dokonalé a proper ekvilibriá v hrách v extenzívnej forme 24

7. Sekvenčné ekvilibriá 26

8. Ďalšie vylepšenia Nashovho ekvilibria 30

   8.1. Korelované ekvilibriá 30

   8.2. Bayesovské hry a Bayesovské ekvlibriá 33

Záver 35

Bibliografia 37

Úvod

Teória hier je matematická disciplína, ktorá sa zaoberá skúmaním správania hráčov v rôznych typoch hier. Hráči sú racionálni, teda sa snažia maximalizovať svoju výplatu, ktorá však nezávisí len na nich, ale aj na správaní sa ostatných hráčov. Teória hier ma široké uplatnenie, napríklad v politických vedách, biológii, filozofii, ale najmä v ekonómii, kde môžeme skúmať a následne predpovedať správanie sa rôznych subjektov na trhu, správanie sa ľudí počas aukcií alebo konkurenčný boj firiem na oligopolnom trhu.

Keďže každý hráč sa snaží maximalizovať svoj vlastný úžitok, je dôležité nájsť rovnovážne stavy, v ktorých sa hra ustáli. Na to slúži koncept Nashovho ekvilibria, ktorý vznikol v 50-tych rokoch minulého storočia a je pomenovaný po svojom objaviteľovi Johnovi Forbesovi Nashovi. Nashova práca bola odmenená v roku 1994 Cenou Švédskej banky za ekonómiu na pamiatku Alfreda Nobela. John Nash však nebol jediný odmenený a spolu s ním získali cenu aj J. Harsanyi a Reinhard Selten za ich prácu v teórii nekooperatívnych hier. V práci sa nebudeme zaoberať len konceptom Nashovho ekvilibria, ale aj zosilňovaním tohto konceptu. Ukázalo sa, že každé rozumné riešenie musí spĺňať podmienky Nashovho ekvlibria, no pre väčšinu hier potrebujeme na ich efektívne riešenie silnejšie podmienky, pretože Nashovych ekvilibrií môže mať hra veľmi veľa alebo sa môžu ukázať ako nerozumné. Takto sa dostaneme aj k práci Seltena, Harsanyiho a ďalších významných vedcov dvadsiateho storočia.

Dnes už vieme riešiť takmer všetky typy hier, no ich riešenia môžu byť výpočtovo veľmi náročné alebo nemusia byť v súlade s experimentmi. Existuje preto veľa rôznych spôsobov, ako riešiť hry a v tejto práci sa pokúsime podať čo najjednoduchší prehľad o najdôležitejších vylepšeniach Nashovho ekvilibria aj s príkladmi, ilustrujúcimi kedy metóda zlyhá a kedy je naopak vhodné ju použiť. Keďže sa teória hier vyučuje na väčšine ekonomicky zameraných vysokých škôl, táto práca môže pomôcť študentom pri štúdiu, či už utriedením rôznych druhov ekvilibrií, alebo rozšírením vedomostí získaných z prednášok. Pri písaní budeme vychádzať najmä z článkov vydaných v odborných časopisoch, ktoré sa dajú nájsť na internete, napríklad [1], [2], ale aj z prednášok k predmetu Úvod do teórie hier [3].

V prvej kapitole sa venujeme úvodu do teórie hier, definujeme základné pojmy, s ktorými budeme pracovať a príklady niektorých jednoduchých hier ako väzňova dilema, na ktorých ukážeme spomenuté pojmy. Obsahom druhej kapitoly je história myšlienky Nashovho ekvilibria končiaca rokom 1951, kedy Nash publikoval svoju prácu. Spomenieme tu prínos veľkých matematikov ako Cournot alebo Von Neumann, ktorí pomohli vytvoriť podmienky na dramatický rozvoj teórie hier v druhej polovici dvadsiateho storočia. V ďalších kapitolách sa venujeme samotným vylepšeniam, pokúsime sa vysvetliť nielen to, ako tieto metódy fungujú, ale prečo vznikli, aké majú využitia a aké sú ich slabiny. Budeme sa zaoberať ekvilibriami dokonalými vzhľadom na podhry, sekvenčnými ekvilibriami, ekvilibriami, ktoré sú dokonalé, aj keď sa hráčom trasú ruky (sú teda náchylní robiť veľmi malé chyby).

1. Úvod do teórie hier

Na začiatok si zadefinujeme základné pojmy s ktorými sa budeme stretávať. Pri definíciách vychádzame najmä z [3].

Definícia 1 (hra): *Nech* $I = \{1, 2, \ldots, n\}$ *je množina hráčov,* A_i *je množina akcií hráča* $i \in I$ *a zobrazenie* u_i *z* $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n \to \mathbb{R}$ *je funkcia výplat hráča. Potom trojicu* $(I, \{A_i\}_{i\in I}, \{u_i\}_{i\in I})$ *voláme hrou v* ***strategickom (normálnom) tvare****.*

Ukážeme si to na príklade hry **väzňova dilema**. Je to hra dvoch hráčov, ktorí sa rozhodujú, či sa priznať k zločinu, z ktorého sú obvinení, ale nevedia im ho dokázať. Ak sa obaja hráči priznajú, dostanú 5 rokov väzenia, ak sa obaja nepriznajú, dostanú po 2 roky a ak sa jeden prizná a druhý neprizná, tak toho čo sa prizná pustia na slobodu a ten čo sa neprizná si odpyká 10 rokov. Táto hra sa dá reprezentovať nasledovnou bimaticou, v ktorej výplaty sú ušetrené roky oproti najhoršiemu scenáru.(bimatica je podobná matici, akurát v jednom políčku máme dve čísla reprezentujúce výplaty dvoch hráčov). Je zvykom písať výplatu prvého hráča vľavo a druhého hráča vpravo.

Tabuľka 1

	priznať sa	nepriznať sa
priznať sa	**5**,**5**	**10**,0
nepriznať sa	0,**10**	2,2

I = {väzeň 1, väzeň 2} $A_1 = A_2$ = {priznať sa, nepriznať sa}

Vidíme, že racionálni hráči sa vždy rozhodnú priznať sa, pretože ak sa druhý hráč prizná, je výhodnejšie tiež sa priznať a ak sa neprizná, taktiež je výhodnejšie priznať sa. Je zaujímavé, že tento výstup z hry nie je paretovsky optimálny, teda existuje také vylepšenie, pri ktorom si aspoň jeden hráč polepší a ani jeden si svoju situáciu nezhorší. Profil akcií (Nepriznať sa, Nepriznať sa) je však nestabilný, pretože obaja hráči majú dôvod zmeniť svoje rozhodnutie, aby zvýšili svoju výplatu.

Definícia 2 (profil akcií): *Pseudo n-ticu* $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$*, kde* $a_i \in A_i$ *je akcia, ktorú si zvolil i-ty hráč, nazývame* ***profil akcií****. Profil akcií často označujeme písmenom* $\boldsymbol{\sigma}$*.*

Definícia 3: ***Komplementárny profil akcií*** *k akcii* a_i *označujeme* $a_{-i} = (a_1, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_n)$.

Definícia 4: *Nech* a_i *a* b_i *sú dve akcie hráča i. Potom ak platí* $u_i(a_i, a_{-i}) > u_i(b_i, a_{-i})\ \forall a_{-i} \in A_{-i}$, *tak akcia* a_i ***ostro dominuje nad*** *akciou* b_i. *Hovoríme aj, že akcia* b_i *je* ***ostro dominovaná*** *akciou* a_i. *Ak má hráč akciu, ktorá ostro dominuje nad všetkými jeho akciami, nazývame túto akciu* ***dominantnou akciou***. *V prípade, že* $u_i(a_i, a_{-i}) \geq u_i(b_i, a_{-i})\ \ \forall a_{-i} \in A_{-i}$, *hovoríme o slabej dominancii.*

Ultimátum je hra dvoch hráčov, ktorí si majú rozdeliť peniaze. Prvý hráč rozdeľuje peniaze a druhý hráč sa rozhoduje, či akceptuje rozdelenie a peniaze si nechajú, alebo neakceptuje rozdelenie a hráči nezískajú žiadne peniaze. V tejto hre má prvý hráč veľmi veľa akcií (peniaze môže rozdeliť mnohými spôsobmi), preto si vyberieme dve reprezentatívne akcie férové a neférové rozdelenie. Hru môžeme reprezentovať nasledovnou tabuľkou.

Tabuľka 2

	akceptovať	neakceptovať
zachovať sa férovo	50,**50**	**0**,0
zachovať sa neférovo	**99**,1	**0**,0

Vidíme, že akékoľvek rozdelenie prvý hráč zvolí, pre druhého hráča je vždy vhodnejšie akceptovať, pretože tým zvýši svoju výplatu. Takisto platí, že akcia druhého hráča akceptovať je dominantnou akciou, preto si ju vždy vyberie. Na tejto hre je zaujímavé, že pri experimentoch sa ukázalo, že ľudia často neakceptujú neférové rozdelenia a tým si radšej vyberú nič oproti malému zisku. Tomuto javu sa budeme podrobnejšie zaoberať pri ekvilibriách dokonalých vzhľadom na podhry.

Hráči však v skutočnosti často nehrajú len jednu zo svojich akcií, ale snažia sa namiešať si ich v rôznom pomere(ak to napríklad zvýši ich očakávanú výplatu). Na prvý pohľad to môže vyzerať zvláštne, keď sa hráč napríklad rozhodne ísť aj vľavo aj vpravo s pravdepodobnosťou ½, pretože v reálnom svete to nie je možné. Interpretácia je skôr taká, že hráč použije nejaký nástroj, ktorý s danými pravdepodobnosťami rozhodne za neho (napríklad si hodí kockou) a potom zahrá čistú akciu.

Definícia 5: *Nech má hráč n akcií.* ***Miešanie akcií*** *je jav, pri ktorom hráč i priradí každej svojej akcii* a_i *nezápornú pravdepodobnosť* p_i *tak, aby* $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$.

Môžeme si všimnúť, že aj čisté akcie sú zmiešanými akciami, v tomto prípade však jedna akcia hráča má pravdepodobnosť $p = 1$ a jeho ostatné akcie majú nulovú pravdepodobnosť. (pravdepodobnosti javov budeme označovať písmenom p).

2. Nashovo ekvilibrium

Neformálne môžeme definovať Nashovo ekvilibrium ako taký stav (profil akcií) v hre, pri ktorom žiadny z hráčov nemôže zvýšiť svoju výplatu tým, že zmení svoju akciu (neexistuje teda unilaterálna profitabilná deviácia). Je to teda taký stav, o ktorom môžu hráči predpokladať, že ak sa do neho hra dostane, už sa z neho nevychýli a preto môžu od racionálnych protihráčov očakávať, že sa oň budú pokúšať. Ak by totiž hráči aj chceli hrať profil akcií, ktorý nie je Nashovym ekvilibriom, aspoň jeden z nich by svoje rozhodnutie zmenil, pretože by tým zvýšil svoju výplatu. Hráči však chcúa istotu, že vedia, ako hra dopadne a nebudú stále meniť svoje rozhodnutia, musia zahrať Nashovo ekvilibrium. Na príklade väzňovej dilemy si môžeme ukázať, že Nashovo ekvilibrium tejto hry je profil akcií (priznať, priznať), pretože ak sa jeden z hráčov odchýli z tohto stavu a rozhodne sa nepriznať, jeho výplata sa zníži.

Definícia 6 (Nashovo ekvilibrium): *Profil akcií* $a^* = (a_1^*, a_2^*, \dots, a_n^*)$ *je* ***Nashovo ekvilibrium*** *hry G v strategickom tvare, ak pre každého hráča* $i \in I$ *platí:* $u_i(a_i^*, a_{-i}^*) \geq u_i(a_i, a_{-i})\ \forall a_i \in A_i$.

Definícia 7: *Multifunkciu* $B_i: A_i \to 2^{A_i}$ *takú, že* $B_i(a_{-i}) = \{a_i \in A_i: a_i \in \operatorname{argmax} u_i(a_i, a_{-i})\}$ *voláme* ***reakčnou multifunkciou*** *hráča* $i \in I$*. Takisto sa používa aj názov multifunkcia najlepších odpovedí.*

Vidíme, že ak $a_i \in B_i(a_{-i})\ \forall i \in I$, tak každý hráč zahrá svoju najlepšiu možnú akciu ku komplementárnemu profilu akcií a nemôže už zvýšiť svoju výplatu, teda tento profil akcií je Nashovym ekvilibriom. Najdôležitejšou vlastnosťou Nashovho ekvilibria je, že v každej hre nejaké ekvilibrium existuje a teda má zmysel ho hľadať.

Veta o existencii Nashovho ekvilibria: *V každej hre existuje aspoň jedno Nashovo ekvilibrium (v zmiešaných akciách).*

Dôkaz: Dôkaz existencie Nashovho ekvilibria je technicky náročný a jeho technická časť nie je pre túto prácu dôležitá, preto iba načrtneme ideu dôkazu, ktorá je elegantná a môže pomôcť pri uvedomení si, čo je to Nashovo ekvilibrium a prečo musí existovať. V prípade záujmu môžeme úplný dôkaz nájsť napríklad na internetovej stránke [4].

Zoberieme zobrazenie najlepších odpovedí na najlepšie odpovede (vznikne spojením reakčných multifunkcií všetkých hráčov) a ukážeme, že takéto zobrazenie ma pevný bod. V tomto bode hrá každý hráč najlepšiu možnú akciu, keď berie do úvahy správanie ostatných hráčov a teda ak zmení svoju akciu, nemôže zvýšiť svoju výplatu. Ak zaručíme existenciu tohto pevného bodu, máme zaistenú existenciu Nashovho ekvilibria tejto hry. Na to použijeme Kakutaniho vetu o pevnom bode. Tá ma nasledujúce podmienky, ktoré ak sú splnené, tak zobrazenie má pevný bod. Nech φ je zobrazenie, ktoré zobrazí množinu K samú na seba.

- K je konvexná, kompaktná a neprázdna,
- φ je zhora polospojité zobrazenie,
- $\varphi(x)$, $x \in K$ je konvexná množina.

Ako vidno v prednáške [4], tieto podmienky sú pre naše zobrazenie najlepších odpovedí na najlepšie odpovede splnené a teda pre každú hru existuje Nashovo ekvilibrium.

3. História pred Nashom

Je prekvapivé, že aj napriek užitočnosti Nashovho ekvilibria pri riešení problémov v rôznych sociálnych systémoch a logickej jednoduchosti sa tento koncept neobjavil už oveľa skôr ako v roku 1951. V tejto kapitole sa budeme venovať vývoju teórie hier, často dramatickému, ktorý predchádzal objaveniu Nashovho ekvilibria a spomenieme si ľudí, bez prínosu ktorých by Nash nemohol svoju teóriu vybudovať.

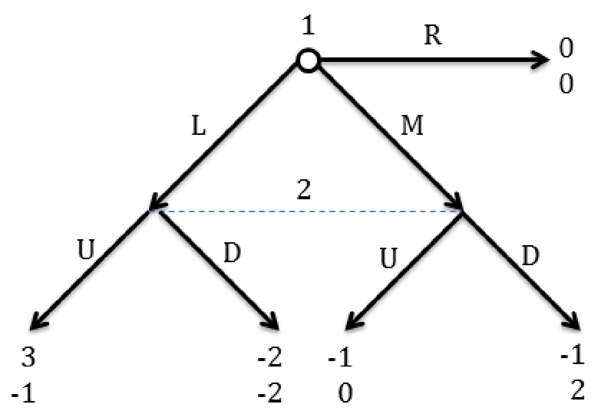
Prvé využitie myšlienky Nashovho ekvilibria nájdeme v roku 1838 (teda viac ako storočie pred Nashovou prácou) v knihe Antoina Augustina Cournota „Výskumy matematických princípov teórie bohatstva“. Cournot vytvoril model oligopolistickej konkurencie, tzv. Cournotov oligopol, ktorý analyzoval práve pomocou metódy Nashovho ekvilibria. V Cournotovom modeli je niekoľko firiem vyrábajúcich homogénny produkt, ktoré rozhodovaním o svojej produkcii určujú cenu výrobku na trhu. Firmy sa rozhodujú súčasne a o svojej voľbe navzájom nevedia. Za predpokladu racionality firiem, pri maximalizácii zisku je optimálny objem výroby bodom Nashovho ekvilibria. Cournot si totižto uvedomil, že rovnovážna produkcia nastane práve vtedy, keď žiadna z firiem nemôže zvýšiť svoj zisk tým, že zmení svoj objem výroby (teda neexistuje unilaterálna profitabilná deviácia). Niektorí ľudia preto tvrdia, že Nashovo ekvilibrium objavil už Cournot a objavujú sa aj názvy ako Nashovo-Cournotovo ekvilbrium, či dokonca Cournotovo ekvilibrium. Ale ako píše Robert Myerson v článku Nash Equilibrium and the History of Economic Theory: „O Cournotovi môžeme hovoriť ako o zakladateľovi oligopolistickej teórie, ale pripisovať mu objavenie fundamentálneho konceptu riešenia teórie nekooperatívnych hier by bolo zamenenie jednej aplikácie metódy s jej všeobecnou formuláciou.“ [1] Cournot teda využil rovnakú myšlienky ako neskôr Nash, ale nesnažil sa sformulovať všeobecné riešenie aj mimo svoj model. Ďalším dôležitým krokom bola vhodnejšia matematická formulácia hier.

Emile Borel opustil extenzívny tvar hier a každú hru nahradil maticou, ktorá určovala, akú výplatu hráč získa pri danej dvojici zahratých akcií (Borel uvažoval hru dvoch hráčov). Borel taktiež zaviedol do hier zmiešané stratégie, čo znamená, že hráči nehrajú priamo jednu akciu, ale určujú pravdepodobnosť, s akou zahrajú akciu pre všetky akcie. Túto myšlienku neskôr rozvinul John von Neumann, ktorý nahradil extenzívnu formu pomocou stratégií. Definoval stratégiu ako úplný plán, ktorý špecifikuje, ako sa bude hráč správať v každej fáze hry, v ktorej je aktívny, ako funkciu od jeho informácie v danom bode. Racionálny hráč potom môže už na začiatku hry určiť svoju stratégiu a hra tak nestratí na všeobecnosti. Stratégia mu totižto dovolí určiť, ako sa bude správať v každej možnej situácii, do ktorej sa počas hry dostane. Von Neumann na základe toho tvrdil, že každá hra môže byť reprezentovaná nasledovne: máme množinu hráčov, každý hráč má množinu stratégií, každý hráč má funkciu výplat, ktorá priradí každej stratégii reálne číslo (výplatu) a každý hráč si vyberá svoju stratégiu nezávisle od ostatných hráčov [1]. Táto štruktúra sa nazýva **normálnou formou** reprezentujúcou extenzívnu hru.

4. Ekvilibriá dokonalé vzhľadom na podhry

4.1. Hry v extenzívnom tvare

Pozrime sa na hru ultimátum. V nej sa hráč 1 rozhoduje, či ponúkne spravodlivé alebo nespravodlivé rozdelenie peňazí a hráč 2 sa až potom rozhodne, či rozdelenie prijme alebo neprijme. Túto časovú postupnosť nevieme zachytiť v normálnej forme a teda je lepšie opustiť normálny tvar hry a vrátiť sa k extenzívnemu tvaru. Aby sme s ním mohli korektne pracovať, musíme si najprv zadefinovať pojmy, ktoré budeme používať. Kreps a Wilson ukázali v [2] hru, na ktorej budeme definované pojmy ilustrovať (obrázok 1).



Obrázok 1

Na obrázku 1 vidíme hru dvoch hráčov v extenzívnom tvare. Hráč 1 hru začína a vyberá si z akcií L, M alebo R. Ak si vyberie akciu R, hra sa končí a obaja hráči majú výplatu 0, ak si vyberie L alebo M, na ťahu je hráč 2. Ten má iba dve akcie, U a D. Ak sa však hráč 2 dostane na ťah (teda hráč 1 nezvolí akciu R), nevie, či hráč 1 zvolil akciu L alebo M, pretože jeho možnosti sú v oboch prípadoch zhodné.

Hra v extenzívnom tvare sa skladá z niekoľkých objektov. V prvom rade sú to rozhodovacie uzly. Množinu všetkých uzlov označíme T. Na množine T zavedieme reláciu následnosti, ktorá je reprezentovaná šípkou. Ak uzol 2 nasleduje za uzlom 1, tak šípka ukazuje z uzlu 1 na uzol 2. Na obrázku je spolu osem uzlov, ktoré môžeme rozdeliť na tri skupiny:

Prázdny krúžok reprezentuje začiatočný uzol. (nemá žiadneho predchodcu).

Body, z ktorých vychádza viacero šípok, reprezentujú rozhodovacie uzly.

Päť terminálnych (koncových) uzlov, v ktorých sa hra končí, sú označené stĺpcovým vektorom, v ktorom sú zapísané výplaty hráčov s pravidlom, že výplata prvého hráča je najvyššie, nasleduje výplata druhého hráča a prípadne ďalších hráčov. Terminálne uzly nemajú žiadnych nasledovníkov.

Na obrázku je iba jeden začiatočný uzol, ale v hre ich môže byť aj viacej. Hra sa teda začína v začiatočnom uzle a postupuje po nasledujúcich uzloch až kým nedosiahne terminálny uzol, v ktorom sa hra ukončí a hráči dostanú prislúchajúce výplaty.

To, ktorý hráč sa rozhoduje v danom uzle je označené menom (alebo číslom) nad rozhodovacím uzlom. Akcie, ktoré môže hráč zahrať v uzle, v ktorom sa nachádza sú reprezentované vetvami, ktoré z neho vychádzajú. Sú označené vľavo od vetvy (ak je to možné) svojim názvom alebo skratkou. Na obrázku, v začiatočnom uzle sa rozhoduje hráč 1, má tri akcie, L, M a R. Akcia R vedie k terminálnemu uzlu a hra sa končí. Ostatné akcie vedú k rozhodovacím uzlom hráča 2.

Je zaujímavé, že hráč dva pri svojom rozhodovaní nevie, kde v hernom strome sa nachádza. Vie len, že hra sa ešte neskončila a teda hráč 1 zahral L alebo M. Túto situáciu popisuje tzv. informačná množina, ktorá je na obrázku reprezentovaná elipsou okolo rozhodovacích vrcholov hráča 2.

Definícia 8: *Informačná množina hráča je množina takých rozhodovacích vrcholov, že hráč vie, že sa nachádza v jednom z nich, ale nevie, v ktorom presne.*

V prípade, že sa jeden hráč rozhoduje viac ako raz, vyberá si aspoň dve akcie a vtedy je vhodnejšie uvažovať stratégiu hráča namiesto viacerých akcií.

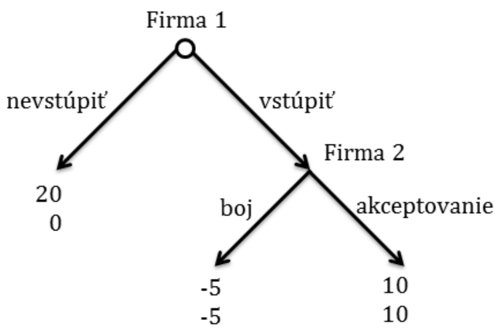
Definícia 9: Stratégia hráča je úplný predpis akcií, ktoré má hráč zahrať v každom svojom rozhodovacom uzle, aj v takom, do ktorého sa hra nedostane. Stratégiu hráča i označujeme π_i.

4.2. Ekvilibriá dokonalé vzhľadom na podhry

Pri skúmaní hier v normálnom tvare často získame priveľa Nashových ekvilibrií, čo spôsobuje nemalé problémy. Napríklad nie je jasné, ktoré ekvilibrium si hráči vyberú. Bolo by preto veľmi dobré, keby sme niektoré z nich vedeli vylúčiť. Pri skúmaní týchto ekvilibrií v extenzívnom tvare sa naozaj niektoré z nich ukazujú ako nevhodné, pretože sú založené na falošných hrozbách. Príčiny tohto problému sú zrejmé, keď si uvedomíme, že stratégia hráča popisuje jeho správanie aj vo fáze, kam sa hra nedostane a pri hľadaní Nashovho ekvilibria berieme do úvahy všetky možné scenáre hry. Môžeme si to ilustrovať na príklade nasledovnej hry. Firma 1 má monopolné postavenie na trhu a Firma 2 má záujem vstúpiť na tento trh. Firma 2 teda môže vstúpiť alebo nevstúpiť a Firma 1 môže bojovať proti konkurencii znížením cien a tým pádom aj svojich ziskov, čím vytlačí konkurenciu z trhu, alebo akceptovať Firmu 2, rozdeliť si s ňou zisky a zachovať vyššiu cenu na trhu. V takejto situácii bude mať firma 1 väčší zisk ako keby bojovala. Je to dynamická hra a preto ju môžeme zakresliť do herného stromu alebo do tabuľky.

Tabuľka 3

	vstúpiť	nevstúpiť
bojovať	-5,-5	**20,0**
akceptovať	**10,10**	**20**,0



Obrázok 2

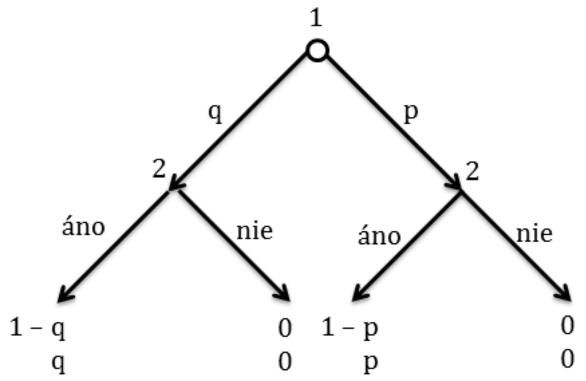
Ako vidíme už z tabuľky, táto hra má dve Nashove ekvilibriá, (bojovať, nevstúpiť) a (akceptovať, vstúpiť). Prvé z nich však nespĺňa podmienku dokonalosti vzhľadom na podhry.

Definícia 9: ***Podhra*** *je časť herného stromu, ktorá spĺňa nasledujúce podmienky:*

- *začína v rozhodovacom vrchole,*
- *obsahuje každého jeho nasledovníka,*
- *ak obsahuje vrchol z informačnej množiny, tak obsahuje celú informačnú množinu.*

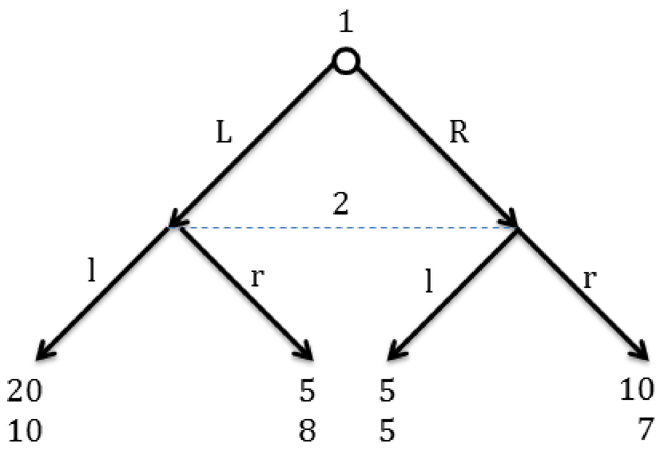
Aby bolo Nashovo ekvilibrium dokonalé vzhľadom na podhry, musí v každej podhre indukovať Nashovo ekvilibrium. Keď sa pozrieme na podhru skladajúcu sa z rozhodovacieho vrcholu Firmy 1, vidíme, že sa rozhodla bojovať, aj keď boj jej prinesie menšiu výplatu ako akceptovanie. Tým pádom sa nespráva racionálne. Preto je vyhrážka Firmy 1, že bude bojovať ak Firma 2 vstúpi na trh nedôveryhodná a v skutočnosti by v situácii, keď Firma 2 vstúpi na trh, vždy zvolila akceptovanie, pretože prinesie maximalizáciu jej výplaty. S týmto konceptom prišiel v roku 1965 Reinhard Selten.

Zaujímavým prípadom je hra ultimátum (str. 4). Uvedieme aj jej reprezentáciu v extenzívnej forme. V nej sa môže stať, že hráč 2 si zvolí na prijímanie alebo odmietanie rozdelenia nejakú funkciu, z ktorej zistí, či je pre neho dané rozdelenie výhodné a prijme ho alebo nevýhodné a potom ho neprijme (napríklad má pocit, že bol podvedený alebo zisk hráčovi 1 závidí). Nech si teda zvoli číslo $p \in (0,1)$ a ak jeho podiel z celkovej sumy je menší ako p, tak povie nie a rozdelenie odmietne. V tomto prípade sa profil akcií (hráč 1 ponúkne p; nie, áno) ukazuje ako Nashovo ekvilibrium, pretože ani jeden z nich nemôže zvýšiť svoju výplatu. Avšak takéto ekvilibrium nie je dokonalé vzhľadom na podhru začínajúcu v ľavom rozhodovacom vrchole hráča 2, pretože si zvolil radšej nič ako malú sumu, čo nie je racionálne správanie.



Obrázok 3

Veľkou nevýhodou ekvilibrií dokonalých vzhľadom na podhry je, že vyžadujú, aby hra mala vhodné podhry. Niekedy sa napríklad môže stať, že jediná podhra hry je hra samotná a potom je každé Nashovo ekvilibrium aj dokonalé vzhľadom na podhry. Vymyslieť príklad na hru, ktorá nemá žiadnu podhru okrem samej seba a má Nashovo ekvilibrium, v ktorom sa aspoň jeden hráč nespráva racionálne nie je ťažké. Napríklad hra na obrázku 4 má dve Nashove ekvilibriá, (L,l) a (R,r) a obidve sú dokonalé vzhľadom na podhry. Ťažko ale predpokladať, že hráč 2 zahrá akciu r, keď z hrania akcie l má vždy vyššiu výplatu.



Obrázok 4

5. „Trembling hand perfect“ ekvilibriá

Ďalšie dôležité vylepšenie konceptu Nashovho ekvilibria priniesol opäť Reinhard Selten v roku 1975. Ako píše Selten: „Označenie ekvilibria dokonalého vzhľadom na podhry ako dokonalého bolo predčasné, keďže tento koncept neodstránil všetky problémy, ktoré môžu nastať v časti hry mimo ekvilibria.“ [5] (Preto sa pôvodný koncept označuje dlhším pojmom ekvilibrium dokonalé vzhľadom na podhry a pod pojmom dokonalé, perfektné ekvilibrium sa myslí nasledovné). Ide o „Trembling hand perfect“ ekvilibriá, čo môžeme do slovenčiny preložiť ako ekvilibriá dokonalé aj pri roztrasených rukách. Ako názov prezrádza, toto vylepšenie skúma, či je Nashovo ekvilibrium racionálnou voľbou aj v prípade, že hráči nezahrajú vždy tú akciu, ktorú chcú zahrať, ale do ich rozhodovania vstupujú chyby. Skúma sa teda aj časť hry mimo ekvilibria, kde sú akcie hrané s nulovou pravdepodobnosťou. V niektorých hrách je totiž celkom dobre možné, že hráči s malou pravdepodobnosťou spravia chybu. Je dôležité vedieť, či uvedomenie si chybovosti hráčov zmení ich výstup z hry. Ak ekvilibrium nie je robustné voči chybám, hráči majú motiváciu vyhnúť sa mu, pretože zahraním inej akcie by sa ich výplata zvýšila.

V hrách teda hráči svoje akcie úplne miešajú (každú akciu hrajú s kladnou pravdepodobnosťou). Takto vznikajú perturbované hry. Ak existuje postupnosť perturbovaných hier, ktorá konverguje k pôvodnej hre a postupnosť Nashovych ekvilibrií týchto perturbovaných hier, ktoré konvergujú k Nashovmu ekvilibriu pôvodnej hry, tak toto ekvilibrium je Trembling hand perfect. Je dôležité uvedomiť si, že aj keď Trembling hand perfect ekvilibrium je definované ako limita úplne zmiešaných akcií, samotné ekvilibrium môže byť v čistých akciách. Ako vidíme na príklade nasledovnej hry, táto hra ma dve Nashove ekvilibriá {(α, A), (β, B)}. Iba jedno z nich je však Trembling hand perfect.

Tabuľka 4

	A	B
α	3,3	1,0
β	0,1	1,1

Preskúmajme najprv ekvilibrium (α, A) v prípade, že druhý hráč s pravdepodobnosťou $\varepsilon > 0$ zahrá akciu B a akciu A zahrá s pravdepodobnosťou $1 - \varepsilon$. Očakávaná výplata prvého hráča z hrania akcie α je potom $(1 - \varepsilon) * 3 + 1 * \varepsilon = 3 - 2\varepsilon$, čo je viac ako očakávaná výplata z hrania akcie β, ktorá je $(1 - \varepsilon) * 0 + 1 * \varepsilon = \varepsilon$, ak je ε dostatočne malé. Prvý hráč teda nemá motiváciu zmeniť svoje rozhodnutie. Nech teraz prvý hráč zahrá akciu α s pravdepodobnosťou $(1 - \varepsilon)$. Potom očakávaná výplata druhého hráča zo zahratia akcie A je $(1 - \varepsilon) * 3 + 1 * \varepsilon = 3 - 2\varepsilon$, čo je takisto viacej ako keby zahral akciu B, tam je výplata $(1 - \varepsilon) * 0 + 1 * \varepsilon = \varepsilon$. Vidíme, že ekvilibrium (α, A) je Trembling hand perfect a aj keď hráči majú nenulovú chybovosť, stále ho budú hrať. Preskúmajme teraz rovnakým spôsobom ekvilibrium (β, B). Nech druhý hráč spraví epsilonovú chybu. Očakávaná výplata prvého hráča z hrania akcie α je $\varepsilon * 3 + (1 - \varepsilon) * 1 = 1 + 2\varepsilon$. Naproti tomu výplata z hrania akcie β je $\varepsilon * 0 + (1 - \varepsilon) * 1 = 1 - \varepsilon$, čo je menej, preto racionálny hráč zvolí akciu α. Ekvilibrium (β, B) teda nie je Trembling hand perfect, pretože pri úplnom miešaní akcií existuje unilaterálna profitabilná deviácia.

Môžeme si všimnúť, že v tomto prípade problém s ekvilibriom (β, B) vznikol preto, že akcia β hráča 1 je slabo dominovaná akciou α. Klasické Nashovo ekvilibrium totiž úplne ignoruje akcie hrané s nulovou pravdepodobnosťou a preto neberie do úvahy, že akcie je slabo dominovaná. Hráč 1 má však vždy rovnakú alebo vyššiu výplatu z akcie α, preto je ochotný hrať akciu β iba ak si je istý, že hráč 2 zahrá akciu B s pravdepodobnosťou 1. Pri hre dvoch hráčov je každé ekvilibrium, ktoré neobsahuje dominované akcie Trembling hand perfect, ale pri hre viacerých hráčov to už neplatí a táto vlastnosť môže vylúčiť viaceré ekvilibriá.

Existuje teda vždy aspoň jedno Trembling hand perfect ekvilibrium? Každé rozumné vylepšenie Nashovho ekvilibria by totiž malo zachovať túto vlastnosť. Našťastie pre každú hru s konečným počtom čistých akcií existuje aspoň jedno takéto ekvilibrium. Toto ukázal Reinhard Selten vo svojom článku [5].

6. Proper ekvilibriá

Roger Myerson v článku „Refinements of the Nash Equilibrium Concept“ [6] uviedol ďalšie vylepšenie Nashovho ekvilibria a dokonca ide priamo o vylepšenie Trembling hand dokonalého ekvilibria. Jedná sa o tzv. Proper ekvilibriá. Myšlienkou tohto vylepšenia je, že aj keď hráči môžu spraviť chybu, tak chybu, ktorá ich stojí viacej, spravia s menšou pravdepodobnosťou ako chybu, ktorá ich nevyjde až tak draho. Ak má hráč napríklad tri akcie, chce zahrať prvú a druhá je pre neho lepšia ako tretia, tak druhú zahrá s pravdepodobnosťou $\varepsilon > 0$ ale tretiu zahrá s pravdepodobnosťou maximálne $\varepsilon^2 > 0$ (dá si väčší pozor aby sa vyhol väčšej strate). Myerson v [6] uviedol príklad hry dvoch hráčov, ktorá ma tri Nashove ekvilibriá, z ktorých dve sú dokonalé, ale iba jedno je proper.

Tabuľka 5

	b_1	b_2	b_3
a_1	1,1	0,0	-9,-9
a_2	0,0	0,0	-7,-7
a_3	-9,-9	-7,-7	-7,-7

Intuitívne vidíme, že najlepší výstup z tejto je profil akcií (a_1, b_1), ale táto hra má tri Nashove ekvilibriá (a_1, b_1), (a_2, b_2) a (a_3, b_3), ktoré sú všetky v čistých akciách. Môžeme si ale všimnúť, že akcia a_2 slabo dominuje nad akciou a_3. Keďže ekvilibrium (a_3, b_3) obsahuje slabo dominovanú akciu, nemôže byť ani dokonalé, ani proper. Teraz si všimnime ekvilibrium (a_2, b_2). Je toto ekvilibrium dokonalé? Výplata hráča 1, ak hráč 2 zahrá zmiešané akcie s pravdepodobnostným rozdelenim $\boldsymbol{\sigma_2} = (\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{1-2}\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\varepsilon})$ je:

$$u_1(a_1\,, \sigma_2) = \varepsilon - 9\varepsilon = -8\varepsilon$$

$$u_1(a_2\,, \sigma_2) = -7\varepsilon$$

$$u_1(a_3\,, \sigma_2) = -9\varepsilon - 7 + 14\varepsilon - 7\varepsilon = -7 - 2\varepsilon$$

Vidíme, že hráč 1 nemôže spraviť lepšie ako zahrať akciu a_2. Hra je symetrická a to isté platí aj z pohľadu hráča 2. Keď teda $\varepsilon \to 0$, tak $\sigma_2 = \sigma_1$ konverguje k hraniu akcie b_2 s pravdepodobnosťou 1 a teda k ekvilibriu (a_2, b_2). Je zaujímavé všimnúť si, že ekvilibrium (a_2, b_2) je dokonalé iba vďaka tomu, že v hre sú akcie a_3, b_3, ktoré sú slabo dominované. Slúžia však na to, aby a_1 resp. b_1 nedominovali akciám a_2 resp. b_2. Ekvilibrium (a_1, b_1) je zjavne dokonalé, stačí si všimnúť prvý stĺpec bimatice výplat (na ten stĺpec bude kladená váha $1-2\varepsilon$ a v ňom má prvá akcia ostro najväčšiu výplatu). Vidíme, že v hre ostali dve dokonalé ekvilibriá, preto preskúmame, či sa jedno z nich nedá vyradiť pomocou proper ekvilibria. Keďže akcia b_2 slabo dominuje nad akciou b_3, musí byť $\sigma(b_2) * \varepsilon \geq \sigma(b_3)$. Nech pravdepodobnostné rozloženie akcií hráča 2 je $\boldsymbol{\sigma_2} = (\mathbf{1} - \boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^{\mathbf{2}}, \boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\varepsilon}^{\mathbf{2}})$. Potom výplata hráča 1 je:

$$u_1(a_1, \sigma_2) = 1 - \varepsilon - \varepsilon^2 - 9\varepsilon^2$$

$$u_1(a_2, \sigma_2) = -7\varepsilon^2$$

$$u_1(a_3, \sigma_2) = -9 - 9\varepsilon - 9\varepsilon^2 + 7\varepsilon + 7\varepsilon^2 = -9 - 2\varepsilon - 2\varepsilon^2$$

Vidíme, že pre ekvilibrium (a_2, b_2) a zmiešané akcie hráča 2, $\sigma_2 = (\varepsilon, 1 - \varepsilon - \varepsilon^2, \varepsilon^2)$ sú možné výplaty hráča 1:

$$u_1(a_1, \sigma_2) = \varepsilon - 9\varepsilon^2$$

$$u_1(a_2, \sigma_2) = -7\varepsilon^2$$

$$u_1(a_3, \sigma_2) = -9\varepsilon - 7 + 7\varepsilon + 7\varepsilon^2 - 7\varepsilon^2$$

V tomto prípade sa hráčovi 1 viacej oplatí zahrať akciu a_1 a teda toto ekvilibrium nie je proper.

6.1. Dokonalé a proper ekvilibriá v hrách v extenzívnej forme

Selten definoval dokonalé ekvilibriá v prvom rade pre hry v extenzívnom tvare. Ukázať, že je ekvilibrium trembling hand dokonalé je ale jednoduchšie v normálnom tvare ako v extenzívnom (pretože hra sa aj tak s extenzívneho tvaru prenáša do normálneho), preto sme uviedli najprv dokonalé ekvilibriá v normálnom tvare. Pre porovnanie s ďalším typom ekvilibrií bude ale nutná extenzívna forma.

Nie je ťažké pretransformovať potrebné definície pre hry v extenzívnom tvare. V prvom rade si musíme uvedomiť, že chybovosť hráčov sa nebude týkať celej stratégie, ale iba jednej akcie v jednom rozhodovacom uzle. Je ťažko uveriteľné, že hráč omylom zahrá úplne inú stratégiu, než pôvodne plánoval a bude sa vlastne mýliť vždy, keď príde na ťah.

Potom je už schéma ekvilibria rovnaká ako pri hrách v normálnom tvare, vytvoria sa perturbované hry, nájdeme ich Nashove ekvilibriá a ak existuje taká postupnosť perturbovaných hier, ktorá konverguje k pôvodnej hre s ekvilibriami, ktoré konvergujú k ekvilibriu pôvodnej hry, tak je to dokonalé ekvilibrium hry v extenzívnom tvare.

7. Sekvenčné ekvilibriá

V roku 1982 vydali autori Kreps a Wilson článok „Sequential equilibria“ [2], v ktorom uviedli nový typ ekvilibrií pre hry v extenzívnom tvare, sekvenčné ekvilibriá. Ide o mierne zjemnenie a upravenie Seltenovho dokonalého ekvilibria. Sekvenčné ekvilibrium sa skladá z dvoch častí. Hráči spravia odhad, ktorý pozostáva z presvedčenia[1], s akou pravdepodobnosťou zahrali svoje akcie ostatní hráči a zo samotných stratégií hráčov. Takáto dvojica [odhad, stratégie] sa nazýva sekvenčným ekvilibriom, ak spĺňa podmienky, ktoré uvedieme neskôr. Ako píšu Kreps a Wilson v [2]: „špecifikácia týchto presvedčení nám dovoľuje zistiť, či je stratégia hráča optimálna bez ohľadu na to, v ktorej časti herného stromu začíname.“

Keď porovnáme Seltenovo trembling hand dokonalé ekvilibrium a sekvenčné ekvilibrium, tak dostaneme veľmi podobné výsledky, ale veľmi rôzne postupy. Ako píšu Kreps a Wilson v [2]: „Seltenova definícia spĺňa dve veci. V prvom rade implicitne generuje presvedčenia v informačných množinách mimo cesty ekvilibria a vyžaduje, aby stratégie hráčov boli optimálne vzhľadom na tieto presvedčenia. Navyše, eliminuje z hry stratégie, ktoré sú slabo dominované. V sekvenčných ekvilibriách, prvá časť je spravená explicitne a druhá časť je vypustená. Preto je každé perfektné ekvilibrium sekvenčné, ale naopak to neplatí.“ Toto je zaujímavá vlastnosť, pretože doteraz sa všetky vylepšenia Nashovho ekvilibria dali nazvať aj zosilňovaním, pretože cieľom bolo eliminovať čo najviac ekvilibrií, ktoré neboli zmysluplné, aby sa hráči mohli jednoduchšie rozhodovať, ktoré z ostávajúcich ekvilibrií si vybrať. V tomto prípade ide však o oslabenie, ale iba v porovnaní s trembling hand perfect ekvilibriami, v porovnaní s ekvilibriami dokonalými vzhľadom na podhry ide o zosilnenie (platí, že každé sekvenčné ekvilibrium je dokonalé vzhľadom na podhry, viď [2] str. 876).

Autori mali dva hlavné dôvody na uvedenie sekvenčných ekvilibrií. Prvý dôvod je pragmatický, na mnohých príkladoch sa ukázalo, že je oveľa jednoduchšie overiť, či je dané ekvilibrium sekvenčné ako ukázať, že je trembling hand perfect. Druhým dôvodom bolo, že keď sa stala konštrukcia presvedčení hráčov mimo cesty ekvilibria explicitnou, vznikla možnosť diskutovať, ktoré presvedčenia sú opodstatnené a ktoré

---

[1] Z anglického slova belief.

naopak môžeme zamietnuť. Takáto diskusia je zložitá v kontexte Seltenovej nepriamej konštrukcie presvedčení. A práve takáto diskusia môže pomôcť pri výbere medzi viacerými dokonalými/sekvenčnými ekvilibriami.

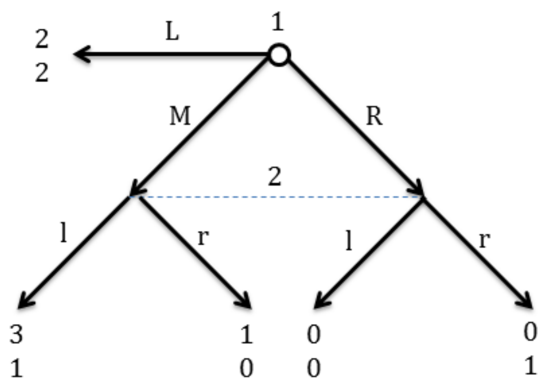
Aby sme mohli zadefinovať sekvenčné ekvilibrium, budeme musieť zadefinovať ďalšie pojmy. Presvedčenia označujeme písmenom μ. Π^0 je množina všetkých ostro kladných stratégií. Teda, $\pi \in \Pi^0$, ak $\pi(a) > 0$. V stratégii sa hrá každá akcia s nenulovou pravdepodobnosťou (tu vidíme podobnosť s trembling hand dokonalými ekvilibriami). Ψ^0 označuje takú podmnožinu množiny odhadov (μ, π), v ktorej $\pi \in \Pi^0$ a μ je vypočítaná v súlade s Bayesovým zákonom.

Definícia 10: *Odhad* (μ, π) *je konzistentný, ak* $(\mu, \pi) = \lim_{n\to\infty}(\mu_n, \pi_n)$ *pre nejakú postupnosť* $\{(\mu, \pi)\} \subseteq \Psi^0$*. Množina všetkých konzistentných odhadov* Ψ *je uzáverom* Ψ^0*.*

Odhad (μ, π), ktorý je konzistentný a sekvenčne racionálny nazývame **sekvenčným ekvilibriom**.

Rozdiel medzi stratégiou π_n z postupnosti a stratégiou π, ku ktorej konverguje môžeme interpretovať ako prejav malých pravdepodobností, že sa hráč pomýli.

Aby sme si ujasnili pojmy a spôsob výpočtu sekvenčných ekvilibrií, uvedieme si príklad.



Obrázok 5

V tomto prípade bude odhad (μ, π) vyzerať nasledovne ako (μ, π_1, π_2), kde μ je presvedčenie hráča 2 o tom, či sa nachádza v ľavej alebo pravej vetve, teda jeho presvedčenie o rozdelení pravdepodobností hráča 1 medzi akcie M a R.

π_1 je stratégia hráča 1, teda rozdelenie pravdepodobnosti nad jeho akciami L, M a R.

π_2 je stratégia hráča 2, teda rozdelenie pravdepodobnosti nad jeho akciami l a r.

Hľadáme taký odhad, ktorý je konzistentný a sekvenčne racionálny. Sekvenčná racionalita vylučuje, aby hráč 1 zahral akciu R s kladnou pravdepodobnosťou, pretože akcia M jej ostro dominuje. Preto musí byť v každom sekvenčnom ekvilibriu akcia R hraná s $p(\mathrm{R}) = 0$.

Táto hra má dve Nashove ekvilibriá, (M, l) a (L, σ), kde σ je také rozdelenie pravdepodobnosti nad akciami hráča 2, že akciu r hrá s pravdepodobnosťou aspoň ½. Hra má aj dve sekvenčné ekvilibriá.

V prvom je $\pi_1(\mathrm{M}) > 0$. V tomto prípade je informačná množina hráča 2 dosiahnutá s nenulovou pravdepodobnosťou, a z konzistencie odhadu musí byť μ vypočítaná z π_1 pomocou Bayesovho pravidla:

$$\mu(M) = \frac{\pi_1(\mathrm{M})}{\pi_1(\mathrm{M}) + \pi_1(\mathrm{R})} = 1$$

$$\mu(M) = \frac{\pi_1(\mathrm{R})}{\pi_1(\mathrm{M}) + \pi_1(\mathrm{R})} = 0$$

S týmto presvedčením je π_2 súčasťou sekvenčného ekvilibria len vtedy, ak hráč 2 zahrá akciu l, teda $\pi_2(\mathrm{l}) = 1$ a $\pi_2(\mathrm{r}) = 0$.

Potom však platí, že π_1 je súčasťou sekvenčného ekvilibria len v prípade, ak

$$\pi_1(\mathrm{L}) = 0$$

$$\pi_1(\mathrm{M}) = 1$$

$$\pi_1(\mathrm{R}) = 0$$

Takto vzniklo sekvenčné ekvilibrium ((1,0),(0,1,0),(1,0)). Existuje ešte aj sekvenčné ekvilibrium, kde $\pi_1(\mathrm{M}) = 0$. Keďže $\pi_1(\mathrm{R}) = 0$ z predpokladu racionality, tak $\pi_1(\mathrm{L}) = 1$. Takáto stratégia hráča 1 môže byť súčasťou sekvenčného ekvilibria iba v prípade, že stratégia hráča 2, π_2 má tvar $(p, 1-p)$ s $p \geq 1/2$ (inak by mal hráč 1 unilaterálnu profitabilnú deviáciu v podobe zmeny stratégie na akciu M). Ak $1/2 \leq p < 1$, potom π_2 je súčasťou sekvenčného ekvilibria vtedy a len vtedy, keď

$$\mu(\mathrm{M}) = 1/2$$

$$\mu(\mathrm{R}) = 1/2$$

Musíme overiť, či je tento odhad konzistentný. Definujeme π_1^ε ako drobné epsilonové odchýlenia, kde $\pi_1^\varepsilon(\mathrm{R}) = \varepsilon$, $\pi_1^\varepsilon(M) = \varepsilon$ a $\pi_1^\varepsilon(L) = 1 - 2\varepsilon$. $\pi_2^\varepsilon = \pi_2$.

Potom môžeme použitím Bayesovho vzorca vypočítať presvedčenie hráča 2

$$\mu(M) = \frac{\pi_1^\varepsilon(\mathrm{M})}{\pi_1^\varepsilon(\mathrm{M}) + \pi_1^\varepsilon(\mathrm{R})} = \frac{\varepsilon}{\varepsilon + \varepsilon} = \frac{1}{2}$$

$$\mu(M) = \frac{\pi_1^\varepsilon(\mathrm{R})}{\pi_1^\varepsilon(\mathrm{M}) + \pi_1^\varepsilon(\mathrm{R})} = \frac{\varepsilon}{\varepsilon + \varepsilon} = \frac{1}{2}$$

Navyše, ak $\varepsilon \to 0$, tak $\pi_1^\varepsilon \to \pi_1$. Máme teda druhé sekvenčné ekvilibrium $\left(\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), (1{,}0{,}0), (p, 1-p)\right)$, ak $p \geq \frac{1}{2}$.

8. Ďalšie vylepšenia Nashovho ekvilibria

Vývoj, ktorý sme sledovali doteraz sa sústredil najmä na vylúčenie neopodstatnených ekvilibrií, zmenšenie počtu ekvilibrií a zjednodušenie rozhodovania hráčov. Nebrali sme do úvahy ďalšie dôležité faktory, ako výpočtovú zložitosť alebo aplikovateľnosť na úlohy v reálnom svete. Použitie metódy Nashovho ekvilibria napríklad predpokladá, že v hre je úplná informácia. Tento predpoklad je však veľmi silný, pretože hráči musia byť schopní nielen určiť vlastnú užitočnosť(funkciu výplat), ale musia aj vedieť ohodnotiť, aký úžitok prinesie daná stratégia ostatným hráčom v hre. Takisto nachádzanie Nashovych ekvilibrií je výpočtovo náročná úloha s nelineárnymi ohraničeniami, ktorej výpočet v hrách veľkých rozmerov trvá dlho. Spomenieme si dva typy ekvilibrií, korelované a Bayesovské, ktoré ale nebudeme skúmať podrobne, keďže nie sú zosilnením konceptu Nashovho ekvilibria, ale jeho vylepšením v inom zmysle.

8.1. Korelované ekvilibriá

V roku 1974 prišiel Robert J. Aumann s pojmom korelované ekvilibriá [7]. Význam korelovaných ekvilibrií a ich jednoduchosť výstižne komentoval Roger Myerson: „Ak existuje inteligentný život na cudzích planétach, na väčšine z nich by objavili korelované ekvilibriá skôr ako Nashovo ekvilibrium“.

Pozrime sa na hru križovatka (čerpali sme z prezentácie k prednáškam [8]). Pre jednoduchosť môžeme uvažovať dvoch šoférov, ktorí sa stretávajú na križovatke a nedodržiavajú žiadne predpisy. Obaja šoféri majú dve akcie, čakať alebo pokračovať v jazde. Najhoršia možnosť pre nich je, ak sa obaja rozhodnú pokračovať a zrazia sa, druhá najhoršia možnosť je keď obaja šoféri zastanú a dajú si prednosť, nasleduje možnosť, kedy šofér zastane a dá prednosť druhému vozidlu a najlepšia možnosť je keď šofér pokračuje v jazde a druhý šofér zastaví vozidlo. Hru môžeme reprezentovať nasledovnou bimaticou.

Tabuľka 6

	pokračovať	dať prednosť
pokračovať	-100,-100	10,0
dať prednosť	0,10	-10,-10

Táto hra ma dve Nashove ekvilibriá (dať prednosť, pokračovať) a (pokračovať, dať prednosť). Hráči by si však medzi nimi nevedeli vybrať a tak by sa často zrážali alebo by obaja stáli, alebo by išli veľmi pomaly a obaja strácali čas. V skutočnosti však na križovatkách máme semafory, ktoré tento problém vyriešia tak, že rozhodnú, ktorý šofér bude čakať a ktorý bude pokračovať v jazde. To je aj myšlienka korelovaných ekvilibrií.

Každý hráč volí svoju akciu na základe jeho pozorovania hodnoty spoločného verejného signálu (v našom prípade farby semaforu). V stratégii priradí hráč akciu každej možnej hodnote signálu. Ak žiadny hráč nemá motiváciu odchýliť sa od signálom navrhnutej stratégie (červená farba na semafore znamená stop, zelená pokračovanie v jazde), toto rozdelenie sa nazýva korelovaným ekvilibriom.

Formálne môžeme postupovať takto. Nech (Ω, π) je konečný pravdepodobnostný priestor. Každý hráč i vie úplne rozdeliť Ω na množinu disjunktných oblastí $\boldsymbol{P_i} = \{P_{i,1}, \dots, P_{i,k_i}\}$. V jednotlivých oblastiach hráč nevie rozlíšiť hodnotu náhodnej premennej. Ak teda označíme stratégiu hráča i symbolom π_i a $\omega, \omega' \in P_{i,j}$, tak $\pi_i(\omega) = \pi_i(\omega')$. Pre korelované ekvilibrium (Ω, π, P, σ) potom platí nerovnosť $\sum_{\omega\in\Omega} \pi(\omega) u_i(\sigma_i(\omega), \sigma_{-i}(\omega)) \geq \sum_{\omega\in\Omega} \pi(\omega) u_i\big(\sigma'_i(\omega), \sigma_{-i}(\omega)\big)\, \omega \quad \forall i\,, \forall \sigma'_i$.

Niekedy nie je jasné, ako voliť samotný signál. Veľmi známy príklad na korelované ekvilibrium je hra Game of Chicken (Hra na zbabelca). V nej sa proti sebe dvaja hráči rútia na autách a hráč, ktorý uhne neskôr je väčší frajer. Táto hra sa dá reprezentovať nasledovnou bimaticou.

Tabuľka 7

	dare	*Chicken out*
dare	0,0	7,2
Chicken out	2,7	6,6

Táto hra má tri Nashove ekvilibriá, (D, C), (C, D) a zmiešané ekvilibrium ([1/3, 2/3], [1/3, 2/3]). Pridáme neutrálnu tretiu stranu, ktorá bude rovnomerne vyberať jednu z troch kariet (D, C), (C, C) a (C, D). Po vytiahnutí karty tretia strana informuje hráča, akú akciu má zahrať (hráč 1 prvú akciu na karte, hráč 2 druhú), ale neprezradí, aká akcia vyšla druhému hráčovi (všimnime si, že sa zachovala pravdepodobnosť zahrania akcií zo zmiešaného Nashovho ekvilibria). Ak tretia strana povie hráčovi, aby zahral dare, ten ho určite zahrá, pretože druhý hráč musel mať na kartičke akciu chicken out a teda prvý hráč nemôže zvýšiť svoju výplatu. Ak má podľa kartičky zahrať akciu chicken out, tak druhý hráč má s rovnakou pravdepodobnosťou akciu dare ako chicken out a tiež je výhodnejšie nezmeniť svoju akciu. Hra je symetrická a preto je toto rozdelenie korelovaným ekvilibriom tejto hry. Je zaujímavé všimnúť si, že korelované ekvilibrium prinieslo vyššiu očakávanú výplatu ako zmiešané Nashovo ekvilibrium (5>4.67) a to preto, že eliminovalo najhoršiu možnosť (D, D).

Korelované ekvilibriá však prinášajú aj oveľa väčšiu výhodu než zvýšenie výplat. Ich výpočet je výrazne jednoduchší než výpočet Nashovho ekvilibria. Ukážeme, že výpočet korelovaných ekvilibrií je úlohou lineárneho programovania a výpočet Nashovho ekvilibria je podobná úloha, ktorá má navyše nelineárne ohraničenia (hľadanie pevného bodu zobrazenia je komplikované). Ďalšia dôležitá vlastnosť korelovaných ekvilibrií je, že v každej hre existuje aspoň jedno.

Veta o existencii korelovaného ekvilibria: *Ku každému Nashovmu ekvilibriu σ^* existuje korelované ekvilibrium (Ω, π, P, σ) v ktorom hrá každý hráč i akciu $a \in A_i$ s pravdepodobnosťou $\sigma^*(a)$.*

Dôkaz (podľa [8]): Ukážeme, ako z Nashovho ekvilibria zostrojíme korelované ekvilibrium. $\Omega = A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$, $\pi(a) = \sum \sigma^*(a_i)$ je pravdepodobnosť, že akcia a bude zahratá v profile stratégií σ^*. $P_{i,j}$ je množina akcií, v ktorých hráč i zahrá akciu j. Potom stratégia korelovaného ekvilibria je $\sigma_i(\omega) = a$ pre $\omega \in P_{i,a}$. Fakt, že neexistuje unilaterálna profitabilná deviácia vyplýva z toho, že σ^* je Nashove ekvilibrium. ∎

Je zaujímavé, že každá konvexná kombinácia korelovaných ekvilibrií je tiež korelované ekvilibrium. Dá sa to ukázať nasledovným postupom. Zoberieme Nashove ekvilibriá hry (ktoré sú podľa predchádzajúcej vety aj korelovanými ekvilibriami), pridáme náhodnú premennú, ktorá rozhodne, ktoré ekvilibrium hráči zahrajú a ani v tomto výslednom ekvilibriu nebude existovať unilaterálna profitabilná deviácia. Náhodnú premennú vieme nakalibrovať tak, aby sme získali ľubovoľnú konvexnú kombináciu pôvodných ekvilibrií.

Z toho vyplýva, že korelovaných ekvilibrií je dokonca **viacej** ako Nashovych. Nejde teda o zosilnenie konceptu, ale o **zoslabenie**. Hľadanie korelovaných ekvilibrií však môžeme zapísať ako úlohu lineárneho programovania (pridaním účelovej funkcie môžeme nájsť aj spoločenské blaho maximalizujúce ekvilibrium). Aby neexistovala unilaterálna profitabilná deviácia, musí platiť

$$\sum_{\omega\in\Omega} p(\omega)u_i(\sigma_i(\omega),\sigma_{-i}(\omega)) \geq \sum_{\omega\in\Omega} p(\omega)u_i\big(\sigma'_i(\omega),\sigma_{-i}(\omega)\big)\,\omega \quad \forall i\,,\forall\sigma'_i.$$

Keďže $p(\omega)$ sú pravdepodobnosti, musia platiť nasledovné podmienky

$p(\omega) \geq 0$ a $\sum p = 1$. Naproti tomu hľadať pevný bod zobrazenia je úloha nelineárneho programovania a môže byť oveľa náročnejšia (ako sa spomína aj v [1], [7]).

8.2. Bayesovské hry a Bayesovské ekvlibriá

Ako sme už naznačili v úvode tejto kapitoly, ďalším dôležitým pokrokom v teórii nekooperatívnych hier bolo opustenie predpokladu úplnej informácie. V hrách, ktoré sme skúmali doteraz sa totižto predpokladá, že hráči poznajú svoje výplaty, akcie ostatných hráčov, ich výplaty a aj ostatní hráči poznajú výplaty a akcie všetkých hráčov a vedia, že ostatní hráči poznajú všetky akcie a výplaty všetkých hráčov a tak ďalej až do nekonečna. Tento predpoklad je veľmi silný a v reálnom svete je ťažko splniteľný, pretože v skutočných problémoch hráči niekedy ani nevedia, kto je ich protihráč, preto je ťažko predstaviteľné, že poznajú jeho subjektívnu hodnotu všetkých akcií. V skutočnosti majú hráči často iba čiastočné poznanie hry a to je aj myšlienka Bayesovských hier.

Ako sa píše v [9]: „Bayesovské hry (tiež známe ako hry s neúplnou informáciou) sú modelmi interaktívneho rozhodovania, v ktorých majú hráči iba čiastočnú informáciu o samotných hráčoch a aj o celej hre“. Vedomosti hráčov sú nahradené presvedčeniami (tak ako pri sekvenčných ekvilibriách) o stave hry a o vlastnostiach ostatných hráčov. Tu sa však tiež stretávame s problemom hierarchie presvedčení, kedy jeden hráč je presvedčený o vlastnostiach ostatných hráčov, ale zároveň musí mať aj predstavu o tom, čo si myslia ostatní hráči o ňom a čo si ostatní hráči myslia, že si myslí, že si myslia a tak ďalej až do nekonečna. Presvedčenia sú v našom ponímaní pozorovania náhodných premenných (stav hry alebo vlastnosti hráča).

Tento problém so zacyklením presvedčení dlho brzdil vývoj hier s neúplnou informáciou. V roku 1973 však americký matematik a ekonóm maďarského pôvodu J. Harsanyi vyriešil tento problém zavedením typov hráča. Typ hráča úplne definuje jeho presvedčenia nielen o stave hry, ale aj o typoch ostatných hráčov a o ich presvedčeniach. Harsanyiho hra s neúplnou informáciou potom pozostáva z nasledujúcich prvkov:

-I je množina hráčov

-S je stav okolností[2] hry

-T_i je množina možných typov hráča $i \in I. T = T_1 \times T_2 \times \ldots \times T_n$ je množina všetkých možných typov hráčov v hre

-$Y \subset S \times T$ je množina stavov sveta (stav sveta určuje okolnosti hry a typy hráčov)

-p je pravdepodobnostné rozdelenie, z ktorého pochádza Y

V Bayesovských hrách nachádzame Bayesovské ekvilibriá (často nazývané aj Bayes-Nash ekvilibriá). Tie sú založené na myšlienke Nashovho ekvilibria, len sú upravené pre hry s neúplnou informáciou, teda obsahujú okrem stratégií hráčov aj ich presvedčenia (resp. ich stratégie už obsahujú aj presvedčenia). Ak v profile stratégií σ neexistuje unilaterálna profitabilná deviácia, tento profil je Bayesovským ekvilibriom. Ako píše Zamir: „Bayesovské ekvilibrium teda špecifikuje správanie každého hráča, ktoré je najlepšou odpoveďou na stratégie ostatných hráčov berúc do úvahy ich typy“ [9].

Tento typ ekvilibrií je ale nedostatočný, keďže generuje aj ekvilibriá s nerozumnými vlastnosťami. Preto podobne ako ekvilibriá dokonalé vzhľadom na podhry, vznikli dokonalé Bayesovské ekvilibriá, ktoré sa sústredia na to, aby bol ekvilibriový profil optimálny a racionálny aj v každej podhre.

---

[2] Z anglického nature.

Záver

V tejto práci sme si zaumienili bližšie preskúmať zosilňovanie konceptu Nashovho ekvilibria. Môžeme povedať, že tento cieľ sa nám podarilo naplniť, keďže v práci sme sa podrobne zaoberali väčšinou dôležitých zosilnení konceptu Nashovho ekvilibria a navyše sme stručne spomenuli aj ďalšie riešenia problémov v teórii hier.

Keďže práca bola písaná tak, aby si ju mohol prečítať aj laik, v prvej kapitole sme zadefinovali základné pojmy z teórie hier a ukázali sme si aj na konkrétnych prípadoch, ako vyzerá hra. Na riešenie hier sme ale ešte nepoužili metódy, ktoré sú témou tejto práce, ale pokúsili sme sa ich vyriešiť úvahou, čo bolo možné, keďže hry boli jednoduché.

V druhej kapitole sme sa venovali Nashovmu ekvilibriu, keďže je to základná metóda riešenia nekooperatívnych hier. Uviedli sme slovnú aj formálnu definíciu, vlastnosti Nashovho ekvilibria a zaoberali sme sa existenciou Nashovho ekvilibria v každej hre. V tretej kapitole sme zablúdili do histórie a zosumarizovali sme vývoj teórie hier od 19. storočia až po objavenie Nashovho ekvilibria. Spomenuli sme najmä prínos Cournota a Von Neumanna, ale aj iných matematikov 20. storočia.

V nasledujúcich štyroch kapitolách sme sa venovali priamo zadaniu tejto práce. Najprv sme si uviedli ekvilibriá dokonalé vzhľadom na podhry, ktoré sú historicky aj jednoduchosťou najbližším zosilnením konceptu Nashovho ekvilibria. Na to sme ale ešte museli zadefinovať hry v extenzívnom tvare a pojmy s nimi spojené. V piatej kapitole sme sa zaoberali ďalším prínosom Reinharda Seltena, konkrétne Trembling hand dokonalými ekvilibriami. Ich ďalšie vylepšenie, proper ekvilibriá boli témou šiestej kapitoly. Tu sme uviedli aj zaujímavý príklad, na ktorom sme ilustrovali rozdiel medzi dokonalými a proper ekvilibriami. V podkapitole 6.1 sme popísali, ako dané vylepšenia fungujú pre hry v extenzívnom tvare. V siedmej kapitole sme uviedli v súčasnosti asi najpoužívanejšiu metódu na riešenie nekooperatívnych hier s úplnou informáciou, sekvenčné ekvilibriá. Tie sme tiež najprv zadefinovali a potom sme uviedli príklad, na ktorom mohol čitateľ jednoducho vidieť, ako sa tieto ekvilibriá počítajú a čo jednotlivé pojmy znamenajú.

V poslednej kapitole sme sa venovali vylepšeniam konceptu, ktoré alebo nie sú zosilnením Nashovho ekvilibria, alebo fungujú na inom type hier. Ich spomenutie, aj keď stručné, však dodalo práci komplexnejší ráz. V podkapitole 8.1 sme spomenuli korelované ekvilibriá, ktoré sú síce zoslabením Nashovho ekvilibria, ale ich výpočet je jednoduchší a ilustrovali sme tento pojem na niekoľkých príkladoch. V kapitole 8.2 sme veľmi stručne uviedli čo sú to Bayesovské hry a ako ich riešenie súvisí s Nashovym ekvilibriom.

Prácu sme písali v prvom rade pre študentov vysokých škôl, ktorí si jej prečítaním môžu rozšíriť obzory v teórii hier. Práca slúži aj na utriedenie rôznych vylepšení Nashovho ekvilibria, ktorých je už v dnešnej dobe veľa a niekedy nie je jasné, ktorý koncept sa najviac hodí na riešenie hry. V neposlednom rade mala práca veľký význam aj pre samotného autora, ktorý sa popri jej písaní dozvedel veľa o teórii hier, ale aj o písaní vedeckých prác a narábaní s odbornou literatúrou, najmä časopiseckou v anglickom jazyku.

Bibliografia

[1] R. B. Myerson, „Nash Equilibrium and the History of Economic Theory,“ *Journal of Economic Literature,* pp. 1067-1082, September 1999.

[2] D. M. Kreps a R. Wilson, „Sequential equilibria,“ *Econometrica,* pp. 863-894, Júl 1982.

[3] J. Pekár, *Úvod do teórie hier, prednášky,* FMFI UK, Bratislava, 2011.

[4] M. M. Möbius, „Existence of Nash equilibrium,“ [Online]. Available: http://isites.harvard.edu/fs/docs/icb.topic138342.files/lecture6.pdf. [Cit. 20 Máj 2012].

[5] R. Selten, „Reexamination of the Perfectness Concept for Equilibrium Points in Extensive Games,“ *International Journal of Game Theory,* %1. vyd.4, pp. 25-55, 1975.

[6] R. B. Myerson, „Refinements of the Nash equilibrium concept,“ *International Journal of Game Theory,* pp. 133-154, 1978.

[7] R. J. Aumann, „Subjectivity and Correlation inRrandomized Strategies,“ *Journal of Mathematical Economics,* pp. 67-96, 1974.

[8] K. Leyton Brown, „Correlated Equilibria,“ [Online]. Available: http://www.cs.ubc.ca/~kevinlb/teaching/cs532a%20-%202006-7/lectures/lect8.pdf. [Cit. 20 Máj 2012].

[9] S. Zamir, „Bayesian games: Games with incomplete information,“ *Discussion Paper Series, Hebrew University, Jerusalem,* pp. 426-453, 2008.