UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE

FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY

TEÓRIA RASTU

BAKALÁRSKA PRÁCA

2012 **Miroslav Danček**

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY

TEÓRIA RASTU

BAKALÁRSKA PRÁCA

Študijný program:	Ekonomická a finančná matematika
Študijný odbor:	1114 Aplikovaná matematika
Školiace pracovisko:	Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky
Vedúci práce:	doc. RNDr. Július Vanko, PhD.

Bratislava 2012 **Miroslav Danček**

68060873

Univerzita Komenského v Bratislave
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

ZADANIE ZÁVEREČNEJ PRÁCE

Meno a priezvisko študenta:	Miroslav Danček
Študijný program:	ekonomická a finančná matematika (Jednoodborové štúdium, bakalársky I. st., denná forma)
Študijný odbor:	9.1.9. aplikovaná matematika
Typ záverečnej práce:	bakalárska
Jazyk záverečnej práce:	slovenský

Názov: Teória rastu

Cieľ: Cez reálne dáta overiť aplikovateľnosť a efektívnosť teórií rastu.

Vedúci: doc. RNDr. Július Vanko, PhD.
Katedra: FMFI.KAMŠ - Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky

Dátum zadania: 15.10.2011

Dátum schválenia: 27.10.2011 doc. RNDr. Margaréta Halická, CSc.
garant študijného programu

....
študent vedúci práce

Poďakovanie

Touto cestou sa chcem poďakovať svojmu vedúcemu bakalárskej práce doc. RNDr. Júliusovi Vankovi, PhD. za ochotu, pomoc, odborné rady a podnetné pripomienky, ktoré mi pomohli pri písaní tejto práce.

Abstrakt

DANČEK, Miroslav*: Teória rastu* [Bakalárska práca], Univerzita Komenského v Bratislave, Fakulta matematiky, fyziky a informatiky, Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky; školiteľ: doc. RNDr. Július Vanko, PhD., Bratislava, 2012, 47 s.

V našej práci sa zaoberáme teóriami dlhodobého ekonomického rastu. Zameriavame sa predovšetkým na neoklasické obdobie, ktoré predstavovalo prielom v týchto teóriách a nastolilo nový smer v zmýšľaní celej makroekonómie. V práci stručne charakterizujeme ekonomický rast, príčiny tohto rastu a koncepciu rovnovážneho stavu. Neskôr v práci popisujeme Harrod-Domarov rastový model, ktorý bol predchodcom neoklasického obdobia, ale najväčšiu pozornosť venujeme Solow-Swanovmu modelu, kde podrobnejšie rozoberáme jednotlivé predpoklady dlhodobej prosperity. Solowov model poukazuje na konvergenciu ekonomiky ku krivke ustáleného rastu bez toho, aby sme špeciálne volili počiatočný bod, čo znamená, že jednotlivé premenné rastú konštantne, podľa navzájom rovnakej miery. Okrem základného modelu sme opísali aj model s technologickým pokrokom. V ďalšej časti aplikujeme upravený Solowov model na ekonomiky Českej a Slovenskej republiky, aby sme pomocou neho odhadli rast a mieru rastu týchto ekonomík. Pri práci so Solowovým modelom používame Cobb-Douglasovu produkčnú funkciu, v ktorej postupne kvantifikujeme všetky premenné. Na odhad niektorých premenných používame log-lineárny regresný model. Dáta čerpáme predovšetkým zo slovenského a českého štatistického úradu a eurostatu.

Kľúčové slová: Solowov model ekonomického rastu, Efektívna kapitálová vybavenosť, Cobb-Douglasova produkčná funkcia, Harrodov neutrál

Abstract

DANČEK, Miroslav: Theory of growth [Bachelor thesis], Comenius University in Bratislava, Faculty of Mathematics, Physics and Informatics, Department of Applied Mathematics and Statistics, supervisor: doc. RNDr. Július Vanko, PhD., Bratislava, 2012, 47 p.

In our work we deal with theories of long-term economic growth. We focus on neo-classical period, which represented a breakthrough in these theories and to establish a new direction in thinking across the macroeconomics. In this paper I briefly describe the economic growth, the causes of this growth and the concept of equilibrium. Later we describe the Harrod-Domar growth model, which was the forerunner of neoclassical period, but most attention is paid to Solow-Swan model, which we discuss in more detail the different assumptions of long-term prosperity. Solow model shows the convergence curve of the steady economic growth without special we chose the starting point, which means that the individual variables are growing constantly, according to the same extent with each other. In addition to the basic model, we describe a model of technological progress. In the next section we apply the modified Solow model of the economy of the Czech Republic and Slovakia, so we use it to estimate growth and growth rates of these economies. Working with the Solow model we use the Cobb-Douglas production function, which gradually quantify all the variables. To estimate some of the variables we use log-linear regression model. The data we draw mainly from the Czech and Slovak Statistical Office and Eurostat.

Keywords: Solow model of economic growth, effective capital facilities, Cobb-Douglas product function, Harrod's neutral

Obsah

Abstrakt 4

Abstract 5

Obsah 6

Úvod 7

1 Ekonomický rast 9

1.1 Proces rastu intuitívny prístup a pracovný aparát 11

1.2 Neoklasické teórie a štandardné modely 12

1.3 Harrod-Domarov model ekonomického rastu...13

2 Solowov model ekonomického rastu 16

2.1 Riešenie s technologickým pokrokom 20

3 Upravený Solowov model pre ekonomiku SR a ČR 24

3.1 Údaje o hlavných makroekonomických agregátoch 26

3.2 Údaje o kapitalizácii trhu 27

3.3 Údaje závislé od trhu práce 29

3.4 Odhadnutie produkčnej funkcie 31

3.5 Modelovanie pomocou upraveného Solow-Swanovho modelu 35

Záver 44

Zoznam použitej literatúry 46

Úvod

V histórii sa ľudstvo neustále snažilo zlepšovať svoje životné podmienky, ktoré len nedávno nahradili základné potreby ako boj o prežitie a zabezpečovanie potravy. Vo všetkých civilizáciách bol pokrok mimoriadne pomalý a veľmi často bol sprevádzaný nečakanými a náhlymi pádmi. Najčastejšie sa jednalo o prírodné katastrofy, epidémie a vojny. Dnes môžeme odhadovať, že iba jedna pätina svetovej populácie má životnú úroveň, ktorú môžeme považovať za prijateľnú [3].

Aj preto je dosiahnutie dlhodobého ekonomického rastu v súčasnosti jedna z najčastejšie kladených otázok v svetovej ekonomike. O dosiahnutie tohto stavu sa v histórii pokúšalo už veľké množstvo ekonómov, ktorých snahou bolo prísť s teóriou, ktorá by tento rast dokázala dôkladne popísať a kvantifikovať. Tieto teórie dnes označujeme ako teórie dlhodobého ekonomického rastu. Veľký pokrok v tomto smere prichádza v šesťdesiatych rokoch 20. storočia, kedy bola vytvorená neoklasická teória ekonomického rastu spojená s menami Solow a Swan, ktorá ako prvá predpokladá dlhodobý ekonomický rast bez ohľadu na štartovací bod ekonomiky. Práve tejto teórii venujeme v práci väčšiu pozornosť a neskôr ju aplikujeme na reálne dáta. Je to síce model, ktorý má značné množstvo nedostatkov a pri jeho aplikácii na reálne dáta treba urobiť nejaké korekcie, ale aj napriek tomu tvorí základ súčasnej makroekonómie a je východiskovým bodom pri konštrukcii zložitejších modelov.[3]

V súčasnosti moderné ekonomiky prešli dramatickými zmenami, pretože došlo k posunu od rozsiahlej materiálovej výroby k navrhovaniu a zavádzaniu nových technológií, výskumu a ľudského kapitálu. Tento nový trend spôsobil zvýšenie produkcie prostredníctvom zvyšovania výnosov a učením sa praxou. Objem výroby je koordinovaný dvoma prvkami ekonomického rastu a to sú endogénne teórie rastu a inovačné teórie výkonnosti. [10]

Cieľom našej práce je prostredníctvom reálnych dát aplikovať teóriu ekonomického rastu a posúdiť jej efektívnosť v konfrontácii s reálnymi nameranými hodnotami. Prácu sme rozčlenili na tri kapitoly.

V prvej kapitole charakterizujeme pojem ekonomický rast. Zameriavame sa predovšetkým na metódy merania ekonomického rastu jednotlivých krajín sveta, ktoré slúžia aj ako porovnávacie kritérium pri porovnávaní týchto krajín v ekonomickej a technologickej vyspelosti. Kvantifikujeme tiež základné kvalitatívne a kvantitatívne príčiny ekonomického rastu a ich vplyv na dlhodobý rast. Skúmame požiadavku rovnováhy a vplyv rôznych faktorov na toto kritérium.

V druhej časti práce čitateľa oboznamujeme s jednotlivými teóriami ekonomického rastu, pričom sa obšírnejšie venujeme predovšetkým neoklasickému obdobiu. Stručne charakterizujeme Harrod-Domarov rastový model, ktorý bol akýmsi štartovacím bodom neoklasických modelov a neskôr hlavnú pozornosť venujeme Solow-Swanovmu rastovému modelu. Pri Solow-Swanovom modeli okrem základnej štruktúry popisujeme aj model s rozšírením o technologický pokrok.

Tretiu časť práce venujeme podrobnejšej analýze ekonomického rastu Českej a Slovenskej republiky. Na odhadnutie ekonomického rastu týchto krajín aplikujeme Solow-Swanov neoklasický model, ktorý čiastočne modifikujeme vzhľadom na otvorenosť ekonomík týchto štátov. Postupne odhadujeme tempá ekonomického rastu nielen prostredníctvom Cobb-Douglasovej produkčnej funkcie, ale predovšetkým upraveným Solow-Swanovým modelom. V závere pomocou grafov efektívnej kapitálovej vybavenosti a produkčnej funkcie hodnotíme efektívnosť nášho upraveného modelu vzhľadom na skutočné hodnoty, ktoré sme zozbierali predovšetkým zo štatistických úradov Českej a Slovenskej republiky a eurostatu.

1 Ekonomický rast

Pojmy „rozvoj“ a „rast“ sa často používajú ako synonymá. V ekonomickej literatúre teórie hospodárskeho rozvoja bol väčšinou zaujatý proces, pri ktorom zaostalé krajiny majú schopnosť sa stále rozvíjať a zvyšovať tak životnú úroveň jej obyvateľov, čo sa nazýva aj úroveň efektu. Samotné teórie hospodárskeho ekonomického rastu sa zvyčajne používali na vysvetľovanie dlhodobého rastu a merali sa pomocou rôznych meradiel ako je napríklad index ľudského rozvoja (HDI). Je to akýsi ukazovateľ gramotnosti, chudoby, priemernej dĺžky života a celkovej životnej úrovne jednotlivých krajín, ktorý si vedie OSN. Alternatívny spôsob je meranie ľudskej chudoby HPI. Ďalšími nástrojmi na meranie ekonomického rastu je reálny príjem a parita kúpnej sily. Reálny príjem je založený na myšlienke sčítania všetkých tovarov a služieb vyprodukovaných ekonomikou za jeden rok. Na druhej strane parita kúpnej sily umožňuje merať skutočnú hodnotu príjmov z vývozu, ktoré sú pozorované v rovnakej dobe v závislosti na voľbe priestorovej agregácie [9], [10]. Tieto opatrenia však ignorujú dva hlboké determinanty hospodárskeho rozvoja. Prvý z nich je ignorácia ľudského vývoja, druhý aspekt ignoruje vo výkaze ziskov a opatrení transakčné náklady a prínosy spojené s danou inštitúciou. Aj preto bolo potrebné tieto modely prerobiť a vytvoriť dokonalejšie, ktoré zahrnú viac kritérií ako tomu bolo doteraz. Jeden z najvýznamnejších pokrokov v ekonomickej teórii rastu je spojený s menom Robert Solow, ktorý bol tvorcom neoklasickej teórie, ktorej sa budeme aj obšírnejšie venovať neskôr [10], [8].

Aké sú príčiny ekonomického rastu? V súčasnosti neexistuje snáď žiadna dôležitejšia otázka spojená s technologickým rozvojom svetovej ekonomiky. Najväčší význam má táto otázka pre miliardy ľudí, ktorí žijú v úplnej chudobe a ich budúcnosť závisí práve od udržateľného hospodárskeho rastu. Hospodársky rast môže mať menší význam pre tých, ktorí už žijú v istom luxuse, ale aj tu je veľmi dôležité pochopiť príčiny jeho udržateľného rastu vzhľadom na budúcnosť. Súčasný výskum poukazuje, že veľmi veľké množstvo faktorov ovplyvňuje ekonomický rast. Mnohé z týchto faktorov sú prevažne ekonomické, ale okrem nich sú tu aj tie neekonomické, a preto je možné interdisciplinárne skúmanie. Aj napriek tomu najvýznamnejšie sú predovšetkým ekonomické faktory, ktorým sa budeme aj v práci viac venovať [2], [1].

Ekonomický rast predstavuje také zmeny v hospodárstve krajiny, ktoré sú spojené s prírastkom makroekonomických veličín. Základné príčiny vzniku ekonomického rastu:

- Kvantitatívne príčiny: zvyšuje sa množstvo výrobných faktorov, rozširuje sa výroba
- Kvalitatívne príčiny: rast produktivity práce spojený s využitím ľudského kapitálu, uplatňovaním technologického pokroku vo výrobe, systém a organizácia výroby.

Pri rozprávaní o ekonomickom raste je veľmi dôležité, aby bol tento rast vyvážený, preto sa pokúsime načrtnúť istú konštrukciu rovnováhy. Je pravda, že nie pre všetky modely je možné dosiahnuť rovnováhu. Medzi takéto modely patria predovšetkým modely s veľkým množstvom premenných, ktoré sa v priebehu času menia rôznymi mierami rastu. Preto sa musel vyvodiť dôsledok, že v dynamických modeloch nastane *rovnováha ustáleného stavu* vtedy, keď budú všetky premenné rásť zhodnými stálymi proporčnými mierami. Pričom $\boldsymbol{k}$ je konštantná miera rastu premennej $\boldsymbol{X_t}$, potom platí nasledovné [6]:

$$\dot{X}_t = kX_t \tag{1.1}$$

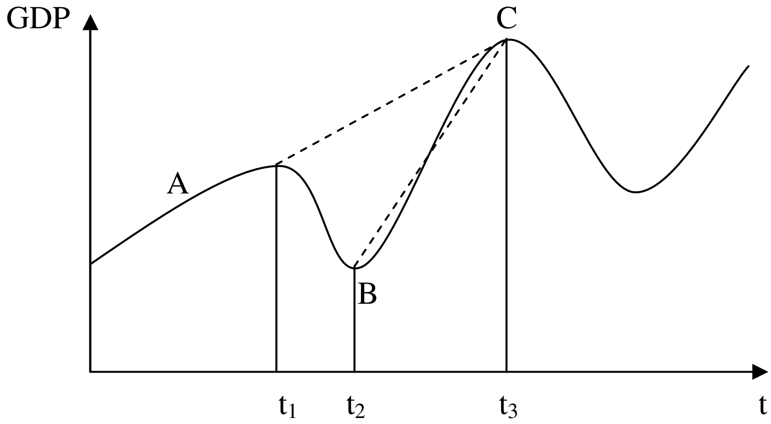
a takisto pre premennú $\boldsymbol{X}$ v každom časovom okamihu t platí:

$$X_t = X_0 e^{kt} \tag{1.2}$$

kde hodnota $\boldsymbol{X_0}$ je začiatočná hodnota premennej $\boldsymbol{X}$ v čase $\boldsymbol{t = 0}$. To môžeme jednoducho overiť nasledovne[6]:

$$\dot{X}_t = \frac{dX_t}{dt} = kX_0 e^{kt} = kX_t \quad \text{kde} \quad X_0 = X_0 e^{0t} = X_0 \tag{1.3}$$

Teraz nás bude zaujímať otázka, kedy merať rastový trend? Ak chceme kvalitne odmerať rastový trend potrebujeme ho merať naozaj pomerne dlhý časový okamih, prípadne je ešte možnosť ho odmerať v časových intervaloch kedy sú rovnako využívané všetky zdroje [5],[6].



Obr.1.1 Meranie miery rastu produkcie [5], [6]

Z obrázka je zrejmé, že ak meriame mieru rastu medzi hodnotami t_2 a t_3, potom je samozrejme vyššia ako tá, ktorú nameriame medzi t_1 a t_3, čo je jasné aj podľa sklonu priamok BC a AC. Preto musíme mieru rastu merať medzi bodmi, ktoré sú kvalitatívne rovnocenné. Vieme, že produkčný potenciál firmy či ekonomiky záleží od zdrojov ktorými disponuje, a preto je zrejmé, že väčšie krajiny s väčšími ekonomikami a väčšími zdrojmi rastú samozrejme rýchlejšie ako menšie krajiny s menšími ekonomikami a zdrojmi. A teda je úplne jasné, že pri meraní hrubého domáceho produktu treba zohľadniť aj veľkosť populácie, čo sa nazýva tiež ***GDP per capita***, čiže produkcia na jedného obyvateľa, čím sa odstráni závislosť od veľkosti ekonomiky [5], [6].

Problém vzniká aj pri tom ako objektívne porovnať GDP krajín s odlišnými hierarchiami a menami, pretože môžu byť vzájomne dosť podhodnotené reálne hodnoty vzhľadom na tieňovú ekonomiku. Problém s menami sa rieši cez konverziu na jednu spoločnú menu [5], [6].

1.1 Proces rastu intuitívny prístup a pracovný aparát

V danej krajine na začiatku určitého roka **t**, má spoločnosť k dispozícii dva základné výrobné faktory. Jednak je to zostatková zásoba kapitálu z minulosti, ktorý budeme označovať $\mathbf{K_t}$. $\mathbf{K_t}$ predstavuje hodnotu všetkých zariadení, ktoré boli nahromadené firmou a zachovali sa až do dnešného okamihu. To predstavuje napríklad stroje, dopravu, hodnotu pozemkov. Druhý výrobný faktor je práca, ktorú budeme najčastejšie charakterizovať počtom obyvateľov. Prácu budeme označovať $\mathbf{L_t}$. Predpokladáme, že v čase **t** už každý robotník disponuje istou technickou znalosťou, ktorú nadobudol v minulosti.[9]

Spolu s kapitálom, ktorý má k dispozícii, bude táto pracovná sila vyrábať vzhľadom na určité časové obdobie nejaký výstup, ktorý my voláme hrubý domáci produkt. Súčasťou produktu je aj snaha nahradiť časť kapitálu, ktorá bola počas daného obdobia znehodnocovaná. Zvyšok je čistý domáci produkt označuje sa aj $\mathbf{Y_t}$. Ďalej budeme používať ***agregovanú produkčnú funkciu F***, ktorá nám bude slúžiť na opis vývinu produkcie v časovom úseku **t.** [9]

$$Y_t = F(T_t, K_t, L_t)$$

V rovnici máme:

T_t – technologický pokrok

L_t – pracovný vstup

K_t – kapitálový vstup

Y_t - produkcia

1.2 Neoklasické teórie a štandardné modely

Myšlienky a teórie týkajúce sa ekonomického rastu môžeme nájsť už v klasickej ekonómii osemnásteho a devätnásteho storočia, ktorej diela sú stručne preskúmané spolu s prechodom na neoklasickú teóriu rastu. Predchodcom neoklasických teórií rastu bol Harrod-Domarov model rastu, ktorý je podrobnejšie opísaný v kapitole 2.1, a ktorý bol akýmsi impulzom k tvorbe nových teórií ekonomického rastu. Základný prehľad o neoklasických rastových modeloch ako prví vyvinuli Solow (1956) a Swan (1956). [9]

Prvotným cieľom bude objasniť ekonomický rast. Snahou všetkých teórií ekonomického rastu je dosiahnuť mieru rovnovážneho rastu v dlhodobom časovom období, čo zahrňuje predovšetkým mieru rastu produkcie, ktorá zaisťuje celkové využitie práce a kapitálu, pretože:

- S rastúcou nezamestnanosťou by sme vzhľadom na definíciu, porušili predpoklad o raste pri úplnej zamestnanosti, čo by s najväčšou pravdepodobnosťou viedlo k úbytku efektívneho dopytu a k znižovaniu cien. [5]

- Naopak, ak by sme využívali neadekvátne nízke množstvo kapitálu, viedlo by to k celkovému poklesu ziskov a záujmov investovať, čo má za následok pokles investícii a ponúkanej produkcie. [5]

Základným predpokladom všetkých teórií rovnovážneho ekonomického rastu je **jednoduchá ekonomika,** v ktorej sa odhliada od zahraničného obchodu a od verejného sektora. Ak by práca a kapitál neboli medzinárodne pohyblivé, tak samotný predpoklad jednoduchej ekonomiky zahŕňajúci aj predpoklad uzavretej ekonomiky, je z pohľadu teórie ekonomického rastu oveľa menej obmedzujúci, ako v ostatných oblastiach makroekonomickej teórie. [9]

1.3 Harrod-Domarov model ekonomického rastu

Všetky neoklasické teórie ekonomického rastu vznikli na podnet Harrod-Domarovho modelu. Pomenovanie dostal po dvoch slávnych ekonómoch Sira Roy Harroda z Anglicka a profesora Evesey Domara z USA, ktorí nezávisle formulovali model na začiatku roka 1950. Vývoj tejto teórie je potrebné dať do perspektívy s Marshallovým plánom na zvýšenie zamestnanosti v Európe po druhej svetovej vojne a po hospodárskej kríze v roku 1930. Harrod a Domar model postavili na nasledujúcich predpokladoch:[9]

1. **Výrobný postup povoľuje konštantné výnosy z rozsahu**. Predpokladá sa pritom, že výrobný postup má pevné koeficienty rastu m a n pre kapitál a prácu.[9]

$$K_t = mY_t , \qquad L_t = nY_t$$

2. Pretože spotrebná funkcia C má konštantný sklon k spotrebe, potom aj funkcia úspor S má z toho dôvodu tiež konštantný sklon k úsporám, čo znamená že:

$$S_t = sY_t$$

kde predpokladáme, že $\boldsymbol{s}$ je priemerný a hraničný sklon k úsporám.[9]

Harrod-Domarov model navyše predpokladá, že sa jedná o uzavretú ekonomikou, a že neexistuje žiadna vláda a takisto nie sú možné žiadne odpisy existujúcemu kapitálu. **Kapitálový a pracovný vstup rastú v čase**. Keďže nie sú v modeli zahrnuté odpisy kapitál sa zväčšuje len v dôsledku rastu investícií $\boldsymbol{I}$, o ktorých sa predpokladá, že pochádzajú z úspor $\boldsymbol{S}$ a pracovný vstup narastá kvôli rastúcemu stavu populácie, čo spôsobuje dynamický charakter modelu:[17], [5]

$$\dot{K}_t = \frac{dK_t}{dt} = I_t \qquad \dot{L}_t = \frac{dL_t}{dt} = nL_t$$

kde ***n*** je predpokladaná miera rastu populácie.

Na to, aby Harrod a Domar dosiahli rovnováhu ekonomiky, museli nastoliť v každom časovom úseku súčasnú rovnováhu, nie len na trhu produktov, ale aj na trhu práce. Harrod-Domarov model sa preto opiera o rovnováhu medzi spotrebou a investíciami.[5]

$$I_t = S_t$$

Napokon rovnovážnu trajektóriu Harrod a Domar vypracovali zo sústavy dvoch homogénnych diferenciálnych rovníc:[5]

$$\dot{Y}_t - \frac{s}{m} Y_t = 0 \quad (1.4) \qquad \dot{L}_t - nL_t = 0 \quad (1.5)$$

Z rovnice 1.4 dostaneme
$$\frac{\dot{Y}_t}{Y_t} = \frac{\frac{s}{m} Y_0 e^{\left(\frac{s}{m}\right)t}}{Y_0 e^{\left(\frac{s}{m}\right)t}} = \frac{s}{m}$$

Rovnica vyjadruje, že celková produkcia je časovo úmerná dopytu, pričom sa zväčšuje o hodnotu $\frac{s}{m}$. Túto mieru rastu nazýva Harrod garantovaná alebo zaručená miera rastu.[5] Rovnica 1.5 predstavuje rovnosť:

$$L_t = L_0 e^{nt}$$

Navyše Harrod a Domar predpokladajú, že $L_t = nY_t$, preto pre krivku produkcie platí nasledovná rovnosť:

$$Y_t = \frac{L_t}{n} = \left(\frac{L_0}{n}\right) e^{nt} = Y_0^1 e^{nt}$$

Takáto krivka produkcie sa volá **krivka úplnej zamestnanosti**. V rovnici predstavuje Y_0^1 začiatočnú produkciu, ktorá v čase $\boldsymbol{t_0}$ úplne využíva vstup $\boldsymbol{L_0}$. Na zabezpečenie plnej zamestnanosti navždy musí ekonomika s produkciou Y_0^1 spĺňať [5]:

$$\frac{\dot{Y}_t}{Y_t} = \frac{nY_0^1 e^{nt}}{Y_0 e^{nt}} = n$$

Pre takto definovanú rovnováhu musí v každom časovom okamihu platiť:

$$Y_0 e^{\left(\frac{s}{m}\right)t} = Y_0^1 e^{nt}$$

Takýto typ rastu Harrod a Domar označujú ako „**prirodzená miera rastu**“ [4].

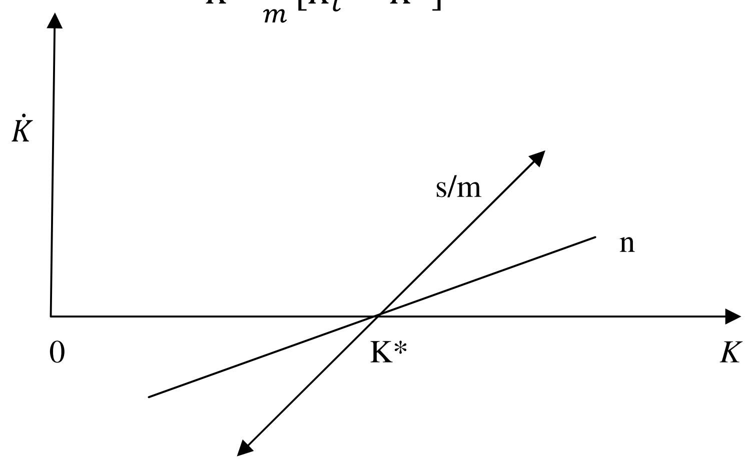
Dôsledky Harrod Domarovho modelu:

- Ak ekonomika dosiahne hladinu, pri ktorej má so zmenou času neustále identickú garantovanú a prirodzenú mieru rastu, hovoríme o ekonomike s vybilancovanou krivkou rastu.[5]
- Pokiaľ sú garantovaná a prirodzená miera rastu rovnaké v Harrod-Domarovom modeli sa predpokladá stopercentná zamestnanosť. Na začiatku pritom Harrod a Domar predpokladali plnú zamestnanosť.[5]
- Jednotlivé premenné **s, m a n** sú voľné.
- Samotné hodnoty **s** a **m** sa môžu meniť v prípade, že do modelu pribudne iný faktor, ktorý následne vytvára potrebné hodnoty týchto parametrov. Avšak Harrod-Domarov model je postavený na tom, že takýto faktor sa nevyskytne. Vtedy pre rovnováhu platia nasledovné vzťahy: [5]

$$m\dot{Y} = sY \qquad \text{čiže} \qquad \dot{K} = \frac{s}{m}K$$

Ak ešte označíme množstvo kapitálu $\boldsymbol{K}^*$, kde daná hodnota predstavuje množstvo kapitálu pri plnej zamestnanosti, dostaneme pre výchylku od kapitálu vzťah:

$$\dot{K} = \frac{s}{m}[K_t - K^*]$$



Obr.1.2 Harrold – Domar model prirodzená a garantovaná miera rastu [5]

Na obrázku je zobrazená kombinácia prirodzenej a garantovanej akumulácie kapitálu. Ak máme systém štartujúci z K = K*, potom môžu nastať tieto situácie:

Ak prirodzená miera rastu n je vyššia ako garantovaná miera rastu *s/m*, potom priamka trajektórie prirodzeného rastu leží pre $K > K^*$ nad priamkou trajektórie garantovaného rastu. Každá ekonomika štartujúca v bode $K = K^*$ dosiahne mieru rastu nižšiu ako je prirodzená miera rastu. Z toho dôvodu ekonomika opustí krivku úplnej zamestnanosti s tým, že sa na ňu už nikdy nevráti [5], [4].

Naopak, keď prirodzená miera rastu *n* je nižšia ako garantovaná miera rastu, potom priamka trajektórie prirodzeného rastu leží pre $K > K^*$ pod priamkou trajektórie garantovaného rastu. Každá ekonomika, ktorá štartuje z bodu $K = K^*$ bude prinášať nadvýrobu, čo povedie k dlhodobému deficitu dopytu [5], [4].

Na základe výsledkov je zrejmé, že tento model smeruje k celkovému deficitu dopytu alebo k rastúcej nezamestnanosti. Je to model, v ktorom je zahrnutých veľmi málo faktorov ovplyvňujúcich ekonomický rast krajiny, úspory jednotlivých krajín sú nedostatočné, čo vedie k nedostatku financií a dokonca ani pracovný vstup nie je zohľadnený vzhľadom na ekonomický rast [17]. Pravdou je, že rast podľa Harrod–Domara nejaví snahu zotrvať na rovnakej hladine, prípadne sa k nemu blížiť. To môžeme vidieť aj zo skutočnosti, že ak s/m > 0, potom: [5]

$$\lim_{t\to\infty} K_t = \lim_{t\to\infty} K_0 e^{\left(\frac{s}{m}\right)t} = \infty.$$

Harrod-Domarov model sa dnes stále používa na výpočet krátkodobých investičných požiadaviek na odhadnutie výšky cieleného rastu rozvojových krajín. Pri počítaní ekonomického rastu pomocou Harrod-Domarovho modelu ekonómovia rozvojových krajín často zapĺňajú rozdiel medzi požadovanými a dostupnými zdrojmi pomocou zdrojov zo zahraničia.[17]

2 Solowov model ekonomického rastu

V úvode svojho príspevku, ktorý tvorí základ neoklasickej teórie rastu, Robert Solow (1956) kritizuje Harrod-Domarov model. Za jeho najväčší nedostatok považuje predpoklad fixných hodnôt práce a kapitálu ako hlavné príčiny rovnovážneho rastu, ktorý v skutočnosti balansuje na ostrí noža (Solow 1956, s 65). Solow (1956) a Swan (1956) sa obrátili k neoklasickej produkčnej funkcii s rôznymi podielmi vstupov práce a kapitálu. Tieto dva prístupy poskytujú prvý neoklasicistický model dlhodobého ekonomického rastu a znamenajú akýsi východiskový bod u väčšiny štúdií zaoberajúcimi sa ekonomickým rastom až do súčasnosti. [9]

R. Solow a S. Swan publikovali tento model v dvoch nezávislých článkoch súčasne v roku 1956. Z predpokladov, ktoré vložili do modelu budeme vidieť, že v dlhodobom horizonte je tu absencia technologického pokroku a rast ekonomiky nie je v prepočte na obyvateľa ale uvádza sa vzhľadom na rastúcu populáciu ľudí.[7]

Solowov model sa zameriava na uzavreté ekonomiky, kde:

- výstup Y predstavuje množstvo produkcie
- L je množstvo práce
- K je množstvo kapitálu

Potom produkčná funkcia má tvar: $Y_t = f(K_t, L_t)$ kde **t** označuje pochopiteľne čas. Kritický predpoklad je, že produkčná funkcia má konštantné výnosy z rozsahu, čiže platí:

$$F(\lambda K, \lambda L) = \lambda F(K, L) \qquad \forall \ \lambda > 0$$

To znamená, že ak napr. zdvojnásobíme všetky vstupy, výstup vzrastie presne dvakrát. Okrem toho pre produkčnú funkciu platí, že jej hraničné produkty sú kladné a klesajúce, čo môžeme zapísať nasledovne:[1]

$$\frac{\partial Y}{\partial K} > 0, \quad \frac{\partial Y}{\partial L} > 0, \quad \frac{\partial^2 Y}{\partial K^2} < 0, \quad \frac{\partial^2 Y}{\partial L^2} < 0$$

Technicky povedané, neoklasická produkčná funkcia je homogénna stupňa jedna, čo znamená, že oba faktory musia byť k dispozícii, inak by bol výstup rovný nule (ekonomika by neexistovala). Produkčná funkcia musí preto navyše ešte spĺňať Inadove podmienky:[5]

$$F(0, L) = F(K, 0) = 0$$

$$\lim_{K\to 0} \frac{\partial F}{\partial K} = +\infty, \quad \lim_{L\to 0} \frac{\partial F}{\partial L} = +\infty, \quad \lim_{K\to \infty} \frac{\partial F}{\partial K} = 0, \quad \lim_{L\to \infty} \frac{\partial F}{\partial L} = 0$$

Funkcia umožňuje neobmedzenú zastupiteľnosť medzi kapitálom a prácou, čo znamená, že akúkoľvek sumu kapitálu môžeme nahradiť zodpovedajúcim množstvom práce. V dôsledku tohto predpokladu podiel medzi kapitálom a výstupom nadobúda len nezáporné hodnoty[9]. Výrobné faktory rastú v konštantných mierach:

$$\dot{L}_t = nL_t \tag{2.2}$$

$$\dot{K}_t = sf(K_t, L_t) \tag{2.3}$$

kde bodka nad premennými označuje derivácie s ohľadom na čas a prírastok pracovnej sily **n** rovnako ako miera úspor **s** sú exogénne parametre [9]. Z rovnice (2.2) vyplýva, že:

$$L_t = L_0 e^{nt}$$

Odtiaľ vidíme, že krivka práce závislá od pracovnej sily rastie exponenciálne. Vzhľadom na to, L_t predstavuje aj ponuky pracovných síl z rovnice (2.2), rovnako ako aj celkovú zamestnanosť z rovnice (2.3). Solowov model predpokladá, že plná zamestnanosť je neustále zachovaná. Na dosiahnutie plnej zamestnanosti a nepružnej ponuky oboch faktorov či už práce alebo kapitálu v každom okamihu, musia byť splnené nasledovné podmienky: [9], [11]

$$\frac{\partial Y_t}{\partial L_t} = v_t \qquad (2.4) \qquad\qquad \frac{\partial Y_t}{\partial K_t} = r_t \qquad (2.5)$$

kde **v** je reálna mzda a **r** reálna úroková miera. Tiež sa predpokladá, že cenová hladina je konštantná. Tieto dva predpoklady, sú často považované za slabé podmienky neoklasických teórií a len zriedka kedy ich nájdeme aj v reálnom svete. Ak ide o cenové hladiny dané podmienky nie sú až natoľko dôležité pri dlhodobom raste, pretože ak by aj nastalo kolísanie cien vieme ich dostať opäť pod kontrolu. Posledný uvedený argument sa vzťahuje aj na fiškálnu a monetárnu politiku. Pokiaľ je ekonomika uzavretá predpokladá sa, že výstup sa z definície rovná príjmu.[9] Z rovníc (2.1), (2.4), (2.5) dostávame rovnosť:

$$Y_t = v_t L_t + r_t K_t \qquad (2.6)$$

Rovnica (2.6) predstavuje súčet ziskov a miezd. V makroekonomickej terminológii hovoríme o hrubej pridanej hodnote (HPH). Keďže dane sú nulové, hrubá pridaná hodnota je rovná hrubému domácemu produktu (HDP). Následne ak neexistuje žiadny fyzický kapitál migrácie, potom hrubý domáci produkt sa rovná hrubému národnému príjem (HNI).[9]

Ďalej si označíme pomer kapitálu a práce akok_t, čiže platí:

$$k_t = \frac{K_t}{L_t} \qquad (2.7)$$

Po derivovaní rovnice (2.7) dostaneme:

$$\dot{k}_t = \frac{\dot{K}_t L_t - K_t \dot{L}_t}{(L_t)^2} = \frac{\dot{K}_t}{L_t} - n k_t \qquad (2.8)$$

Vzhľadom na to že, produkčná funkcia je homogénna stupňa jedna, výstup na jednotku práce $\mathbf{y}_t$ možno vyjadriť ako:[9]

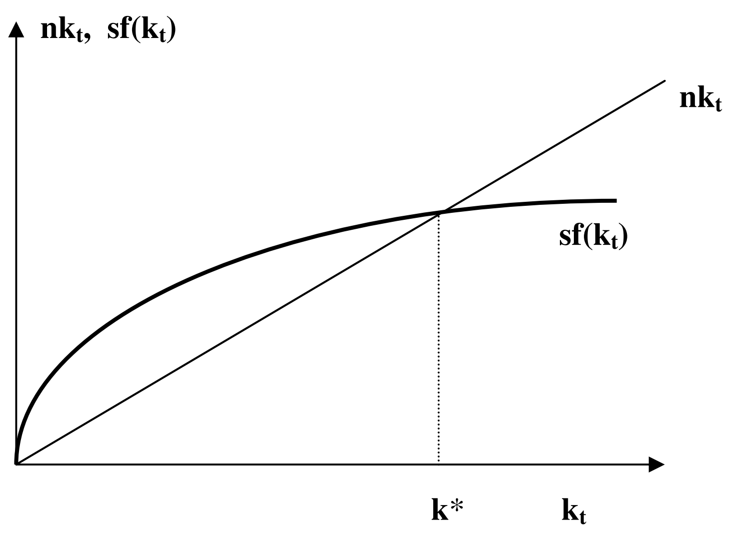
$$y_t = f(k_t) \tag{2.9}$$

kde $f(k_t) \geq 0$ pre $k_t \geq 0$. Z rovníc (2.3), (2,8) a (2.9) vieme povedať, že fyzický kapitál rastie na jednotku práce podľa rovnice:[9]

$$\dot{k}_t = \frac{s_k f(K_t, L_t)}{L_t} - nk_t = s_K f(k_t) - nk_t \tag{2.10}$$

Diferenciálna rovnica (2.10) predstavuje prielom v množstve investície potrebnej k udržaniu k_t na rozumnej úrovni. Keď sa derivácia $\dot{k}_t = 0$, pomer medzi kapitálom a prácou je konštantný, a preto celkový kapitál $\boldsymbol{K}$ musí byť zvyšovaný rovnakou mierou ako pracovná sila $\boldsymbol{n}$. Ak je to tak potom je celý systém v rovnováhe a je definovaný ako v stave vyváženého rastu v Solowovom modeli z roku 1956. [9], [11]

Stabilita vyváženého rastu, je znázornená na Obr. 2.1.je základná rovnica Solowho modelu. Uvádza, že rýchlosť zmeny základného kapitálu na jednotku práce predstavuje rozdiel medzi dvomi hodnotami. Prvá hodnota, $\boldsymbol{s_K f(k_t)}$, zobrazuje prírastok kapitálu a predstavuje skutočnú investíciu na pracovnú jednotku, druhá hodnota $\boldsymbol{nk_t}$, zodpovedá za nárast práce a ako taká predstavuje prielom v množstve investície potrebnej k udržaniu k_t na rozumnej úrovni. Keď sa derivácia $\dot{k}_t = 0$, pomer medzi kapitálom a prácou je konštantný, a preto celkový kapitál $\boldsymbol{K}$ musí byť zvyšovaný rovnakou mierou ako pracovná sila $\boldsymbol{n}$. Ak je to tak potom je celý systém v rovnováhe a je definovaný ako v stave vyváženého rastu v Solowovom modeli (1956).[9], [11]



Obr. 2.1: Rovnováha v neokalsickom modeli rastu [9]

Ak je pomer kapitálu a práce k_t menší ako rovnovážna hodnota k^*, potom skutočná hodnota investícií na pracovnú jednotku je vyššia ako výnosnosť investícií a pomer kapitálu a práce rastie s $\dot{k}_t > 0$. Ak $k_t > k^*$, potom $\dot{k}_t < 0$ a teda k_t bude klesať k hodnote k^*. Bez ohľadu na východiskový bod systému, bude to stále konvergovať k rovnovážnej hodnote $k_t = k^*$, kde $\dot{k}_t = 0$. Hneď ako sa dosiahne priesečník dvoch čiar Obr. 2.1**,** systém zostane na tomto mieste. Rovnováha je teda stabilná. Ak sa z nejakého dôvodu ekonomiky odklonia od rovnováhy, budú nútené sa vrátiť do vyrovnanej hladiny rastu. Všeobecne platí, že situácia, kedy rôzne množstvá rastú pri stálych cenových mierach, je definovaná ako stabilný stav. [9], [11]

Tento model ale nezahrňuje veľmi dôležitý predpoklad a tým je narastajúci technologický pokrok. Preto bol tento model upravený aj pre požiadavku technologického pokroku.

2.1 Riešenie s technologickým pokrokom a Cobb Douglasovou produkčnou funkciou

Solow a Swan mali v ich pôvodných prácach záujem o ekonomický rast ako dôsledok akumulácie kapitálu a je pravda, že prípad technologického pokroku študovali len málo v ich prácach. Až v nasledujúcom článku v roku 1957 Solow odhaduje technologický pokrok pre časové rozpätie medzi rokmi 1909-1949, ako zvyšok kapitálu a pracovnej sily pre vysvetlenie rastu výstupu v americkej ekonomike. Hlavný výsledok jeho práce ukazuje, že technologický pokrok je neutrálny pokiaľ berieme do úvahy rozsiahlejšie účinky. Technicky povedané posun produkčnej funkcie nemá žiadny vplyv na hraničné ceny medzi príslušnými pomermi medzi kapitálom a prácou.[12]

Všeobecne potom platí, že ak pôvodnú produkčnú funkciu obohatíme o technologický pokrok ten vstupuje v produkčnej funkcii ako rozšírenie pracovného vstupu. Ako sme uviedli v prvej kapitole značiť ho budeme T_t. Technologický pokrok je definovaný ako Harrod - neutrálny keď platí:

$$Y = f(K_t, T_t L_t) \tag{2.11}$$

O produkčnej funkcii budeme opäť predpokladať vzťahy uvedené vyššie. Neutrálny podľa Harroda znamená, že ak sa v čase nemení produktivita kapitálu tak sa nemení ani pomer kapitálu a produkcie, čiže pre dané F_K zostáva pomer K/Y v čase nezmenený. Je to pokrok rozširujúci prácu, pretože má rovnaký efekt ako zvýšenie pracovného vstupu. [5]

Okrem Harroldovho neutrálu sú známe aj Solowov alebo Hicksov neutrál, ale pre naše ďalšie smerovanie nám postačí Harrodov neutrál, čo vyplýva z toho, že matematicky sa preukázalo, že len rozšírenie pracovného vstupu má vplyv na technologickú zmenu v súlade s existenciou rovnovážneho stavu.[4], [5], [9]

Potom pre Cobb-Douglasovu produkčnú funkciu spolu s Harrodovým neutrálom platí vzťah:

$$Y_t = AK^{\alpha}(TL)^{1-\alpha} = AK^{\alpha}(e^{gt}L)^{1-\alpha} \tag{2.12}$$

$$0 < \alpha < 1$$

Kde exponentmi α a $1-\alpha$ označujeme výstupné elasticity kapitálu a pracovných síl, A je úroveň rastu a t je čas. Okrem toho sme tempo rastu technologického pokroku označili ako$g$, pre ktoré platí $\dot{T}/T = g.$ Môžeme povedať, že hraničné produkty každého faktora sú vysoké ak ich výška je dostatočne malá a naopak sú nízke ak ich výška je dostatočne veľká. Navyše musia byť splnené podmienky o produkčnej funkcii a to, že limita derivácie idúcej do nuly je plus nekonečno a limita derivácie idúcej do plus nekonečna je nula, čo sme predpokladali pri podmienkach o produkčnej funkcii. Keďže sú tieto podmienky splnené môžeme Cobb-Douglasovu produkčnú funkciu prepísať do intenzívneho tvaru. [9]

$$f(k_t) \equiv F\left(\frac{K_t}{T_t L_t}, 1\right) = \left(\frac{K_t}{T_t L_t}\right)^{\alpha} = k_t^{\alpha} \tag{2.15}$$

Z daného vzťahu vyplýva rovnosť $\dot{f}(k_t) = \alpha k_t^{\alpha-1}$. Ak je následne základné imanie považované za odpisy v rovnici, ktorá určuje vývoj na akciovom kapitáli, dostávame z rovnice 2.3 novú rovnicu:

$$\dot{K}_t = s_K Y_t - \delta K_t \tag{2.16}$$

Kde δ predstavuje mieru odpisov. Celkový kapitál rastie ak $s_K Y_t$ je väčšie ako δK_t.[9] V rovnovážnom stave je výška kapitálu na jednotku efektívnej práce rovná konštante a z toho dôvodu musí návratnosť investície vziať do úvahy technologický pokrok. Model sa preto bude ďalej rozvíjať nasledovne:

- dynamika dvoch vstupov do výroby (práce a technologického pokroku) bude exogénna premenná.[5]

- preto ak chceme opísať dynamiku ekonomiky je potrebné urobiť rozbor tretej premennej, ktorou je samotný kapitál.[5]

Pre mieru odpisov platí $\delta > 0$, rovnako musí byť splnená podmienka rovnováhy:

$$\dot{K}_t = sF[K_t, T_t L_t] - \delta K_t \tag{2.17}$$

Zo vzťahu na jednotku efektívnej práce máme potom rovnosť:

$$\frac{\dot{K}_t}{T_t L_t} = sF\left[\frac{K_t}{T_t L_t}, 1\right] - \frac{dK_t}{T_t L_t}$$

Navyše vieme, že

$$\dot{k}_t = \left(\frac{\dot{K}_t}{T_t L_t}\right) = \frac{\dot{K}_t T_t L_t - K_t(\dot{T}_t L_t + \dot{L}_t T_t)}{(T_t L_t)^2} = \frac{\dot{K}_t}{T_t L_t} - \frac{K_t}{T_t L_t}\left(\frac{\dot{T}_t}{T_t} + \frac{\dot{L}_t}{L_t}\right) = \frac{\dot{K}_t}{T_t L_t} - gk_t - nk_t$$

nakoniec Solow a Swan ukázali výsledný vzťah:

$$\dot{k}_t = sf(k_t) - (n + g + \delta)k_t \tag{2.18}$$

Keď sa pozrieme na hlavný rozdiel v porovnaní so základným Solowovým modelom vidíme, že kapitál $\boldsymbol{k_t}$ je vyjadrený na jednotku efektívnej práce a miera rastu rovnovážnej hodnoty predstavuje $\boldsymbol{n + g + \delta}$**.** Potom pre $\boldsymbol{k_t}$ rovnovážneho stavu platí:[9]

$$sf(k_t^*) = (n + g + \delta)k_t^* \tag{2.19}$$

$k^* -$ budeme nazývať efektívna kapitálová vybavenosť

Z toho je vidieť, že rovnovážny stav je definovaný ako rovnováha, kde tempo rastu na jednotku efektívnej práce je rovné nule, zatiaľ čo produkcia na jednotku práce rastie s technologickým pokrokom. V ustálenom stave pomer kapitálu k efektívnej práci je konštantný, teda rast fyzického kapitálu za efektívnej práce v ustálenom stave je rovný nule. Inými slovami rovnica 2.15 vyjadruje výkon na jednotku práce korekcie na technologický pokrok, ktorý slúži na dve veci. Jednak rast na jednotku efektívnej práce v ustálenom stave je priamka, ako môžeme vidieť z obr. 2.2 za druhé vzniká zaujímavá otázka rastu na jedného obyvateľa, ktorá sa nevzťahuje na technologický pokrok, čo umožňuje jeho jednoduchšiu korekciu. Ustálený stav sa spočíta z rovnice 2.18 a pre Cobb-Douglasovu produkčnú funkciu dostaneme:[9], [12]

$$k_t^* = \left[\frac{As_K}{n+g+\delta}\right]^{\frac{1}{1-\alpha}} \tag{2.20}$$

Z rovníc 2.15 a 2.20 vyplýva, že ustálený stav výstupu na jednotku práce je rovný:

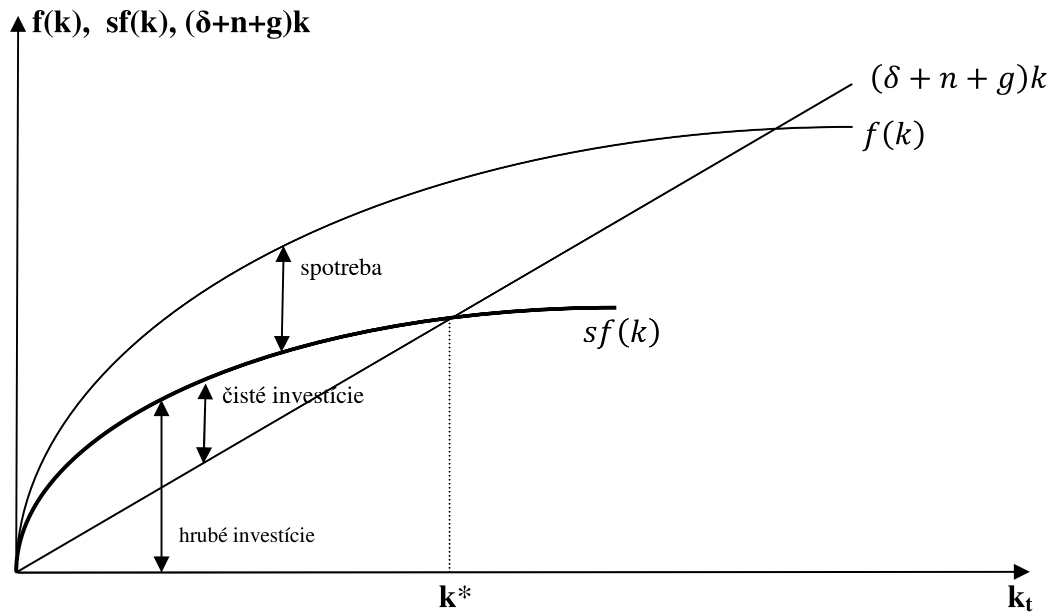
$$\dot{y}_t^* = \left(\frac{s_K}{n+g+\delta}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \tag{2.21}$$

S rastúcim T a L pri stálych cenách môže byť model v rovnovážnom stave riešený v každom časovom okamihu pre výstup na jednotku práce ako:

$$y_t^* = T_0 e^{gt} \left[\frac{s_K}{n+g+\delta}\right]^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \tag{2.22}$$

A agregátny výstup:

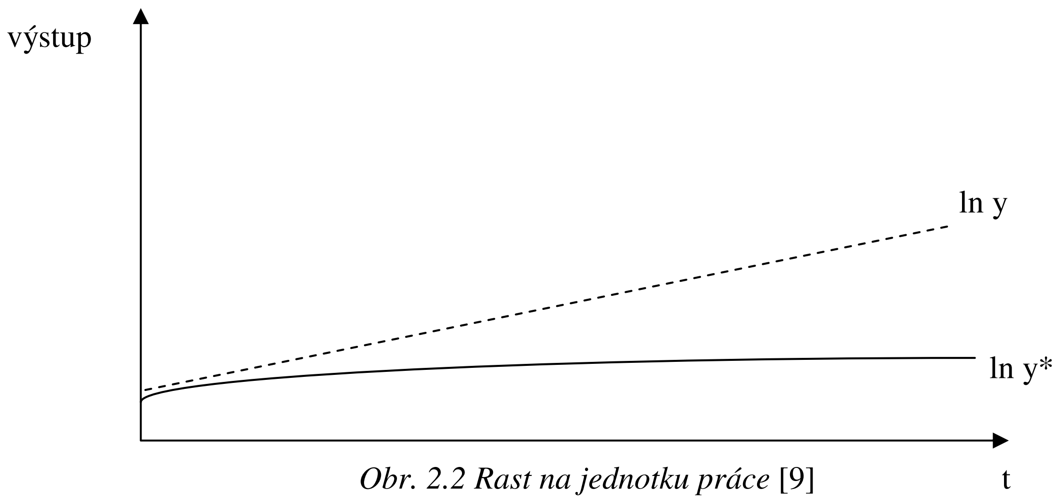
$$Y_t^* = T_0 L_0 e^{(g+n)t} \left[\frac{s_K}{n+g+\delta}\right]^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \tag{2.23}$$



Obr.2.1 Stály stav v Solow-Swanovom modeli s technologickým pokrokom [9]

Ak je hodnota $\boldsymbol{k}^*$ zodpovedá hodnote zobrazenej na obrázku tak ekonomika dosiahla rovnovážny stav, a preto sa ani k^* nebude meniť. Ak by bola hodnota $\boldsymbol{k}$ nižšia ako je rovnovážna hodnota, potom platí kvôli konkávnosti funkcie, že $\dot{k}^* = sf(k) -$

$(n + \delta + g)k > 0$. To znamená, že úspory prevyšujú opotrebenie, čiže $\boldsymbol{k}$ bude rasť k rovnovážnej hodnote. Analogicky to platí pre $\boldsymbol{k}$ väčšie ako $\boldsymbol{k}^*$.[9]



Obr. 2.2 Rast na jednotku práce [9]

Solowov model s technologickým pokrokom tak smeruje k rovnovážnemu stavu. Vzhľadom na to, že $\boldsymbol{k}$ sa nemení kapitál a efektívna práca rastú rovnakým tempom t.j.$(n + g)$, preto aj celkový produkt rastie týmto tempom odvolávajúc sa na predpoklady o produkčnej funkcii.[2]

3 Upravený Solowov model pre ekonomiku SR a ČR

Na to, aby sme mohli Solowov model použiť na ekonomiku SR a ČR musíme tento model upraviť. Jedným z hlavných problémov je, že Solow vo svojom modeli predpokladá uzavretú ekonomiku, ale skutočná ekonomika uzavretá nie je. To má hlavný dopad na národohospodársku identitu, ktorá navyše oproti Solowovmu modelu predpokladá export do zahraničia, preto dostávame:[2]

$$Y = C + I + NX \tag{3.1}$$

v rovnici $C -$ spotreba, $I -$ investície, $NX -$čistý export (rozdiel export mínus import)

Otvorenosť ekonomiky spôsobuje ďalší výraznejší problém vzhľadom na pôvodný model a to je nerovnosť medzi investíciami a úsporami. Je to dôsledok možnosti investovania štátu v zahraničí. Pre vlastné úspory štátu preto platí:[2]

$$S = Y - C$$

kde S sú domáce úspory. Potom po úpravách rovnice 3.1 dostaneme:

$$I = S - NX \tag{3.2}$$

Z rovnice 3.2 si môžeme všimnúť, že pokiaľ je hodnota čistého exportu záporná budú investície prevyšovať úspory, preto je ešte potrebné upraviť rovnicu 2.16 na tvar:

$$\dot{K}_t = sF[K_t, T_t L_t] - \delta K_t - NX \tag{3.3}$$

Pričom hodnota NX je v našom modeli exogénne daná. Na vylepšenie nášho modelu pridáme do Solowovho modelu verejný sektor. Hlavný predpoklad bude spočívať v tom, že definujeme podiel verejnej spotreby vzhľadom na produkt ako:[2]

$$\tau = \frac{G}{Y}$$

$\tau -$ podiel verejnej spotreby na celkovom HDP , $G -$spotreba verejného sektora

Aby sme model zjednodušili τ bude predstavovať mieru zdanenia, pretože uvažujeme vyrovnaný rozpočet verejného sektora. Z toho dôvodu musíme model rozšíriť nasledovne:[2]

$$Y = C + I + G + NX \tag{3.4}$$

Zavedením verejného sektora sa zmení aj sklon k spotrebe z pôvodného:

$$C = (1 - s)Y$$

na tvar:

$$C = (1 - s)(Y - G) = (1 - s)\big((1 - \tau)Y\big)$$

A pre úspory predpokladáme:

$$S = s(1 - \tau)Y$$

Po všetkých týchto modifikáciách rovnica 3.3 nadobudne konečný tvar:

$$\dot{K}_t = s(1 - \tau)F[K_t, T_t L_t] - \delta K_t - NX \tag{3.5}$$

Na to aby sme model vyskúšali na ekonomikách Českej a Slovenskej republiky potrebujeme dáta o produkte vzhľadom na zložku hlavných makroekonomických agregátov, kapitalizáciu trhu a trh práce.

3.1 Údaje o hlavných makroekonomických agregátoch

Väčšinu týchto údajov získame zo štatistického úradu SR a štatistického úradu ČR. Vyberieme hodnoty HDP vypočítané výdavkovou metódou, čiže musí platiť rovnica 3.4. Okrem údajov získaných zo štatistických úradov SR a ČR si dopočítame hodnoty sklonu k úsporám $\boldsymbol{s}$ a podiel verejnej spotreby na HDP (hodnotu dane) $\boldsymbol{\tau}$ z rovníc:[2]

$$s = 1 - \left(C/(Y - G)\right) \qquad \text{a} \qquad \tau = \frac{G}{Y}$$

Tab. 1 Hlavné makroekonomické agregáty SR [15] + vlastné výpočty

Rok	**Y (mil. €)**	**C (mil. €)**	**I (mil. €)**	**G (mil. €)**	**NX (mil. €)**	**s**	$\boldsymbol{\tau}$
1996	20613	10878	6701	4646	-1612	0,3187	0,2254
1997	22160	12253	7329	5167	-2589	0,2789	0,2332
1998	24908	13635	8284	5495	-2506	0,2976	0,2206
1999	26852	14465	8026	5392	-1031	0,3260	0,2008
2000	28493	16252	7547	5922	-1228	0,2800	0,2078
2001	32072	18561	9235	6619	-2343	0,2708	0,2064
2002	34991	20719	9709	7203	-2640	0,2544	0,2059
2003	38343	21685	9525	7784	-651	0,2904	0,2030
2004	41335	24175	10240	8052	-1132	0,2737	0,1948
2005	47083	27613	12764	8918	-2212	0,2765	0,1894
2006	52485	30017	14159	9835	-1526	0,2962	0,1874
2007	59790	33616	15923	10312	-61	0,3206	0,1725
2008	62977	36586	15892	11177	-678	0,2937	0,1775

Priemerné hodnoty sklonu k spotrebe a dane sú pre SR $s = 0{,}2906$ a $\tau = 0{,}2019$

Tab. 2 Hlavné makroekonomické agregáty ČR [16] + vlastné výpočty

Rok	**Y (mil. Kč)**	**C (mil. Kč)**	**I (mil. Kč)**	**G (mil. Kč)**	**NX (mil. Kč)**	**s**	$\boldsymbol{\tau}$
1996	1761575	914772	594847	342958	-91002	0,355	0,195
1997	1884924	1012750	574531	383263	-85620	0,326	0,203
1998	2061583	1084028	588635	399436	-10516	0,348	0,194
1999	2149023	1129904	590945	440117	-11943	0,339	0,205
2000	2269695	1178866	679296	460122	-48589	0,349	0,203
2001	2448557	1261003	726509	498119	-37074	0,353	0,203
2002	2567530	1316911	723331	557165	-29877	0,345	0,217
2003	2688107	1383203	727128	610081	-32305	0,334	0,227
2004	2929172	1479301	794085	630072	25714	0,357	0,215
2005	3116056	1537588	825856	667479	85133	0,372	0,214
2006	3352599	1629160	928397	694048	100994	0,387	0,207
2007	3662573	1747724	1091542	725863	97444	0,405	0,198
2008	3848411	1883248	1113805	759399	91959	0,390	0,197

Priemerné hodnoty sklonu k spotrebe a dane sú pre ČR $s = 0{,}35844$ a $\tau = 0{,}2060$

3.2 Údaje o kapitalizácii trhu

Náročnejšie bude získanie údajov o kapitálovej zásobe, pretože tieto nie sú dostupné v podobe v akej by sme ich potrebovali. My chceme, aby kapitálová zásoba v čase t predstavovala kapitálovú zásobu v čase $t-1$ znížený o opotrebenie a navýšenú o investície.[2] Aby sme mohli túto metódu použiť potrebuje získať aspoň jednu hodnotu kapitálovej zásoby pre SR a ČR a následne aplikujeme metódu inventarizácie. Hlavná myšlienka tejto metódy bola spomenutá vyššie a je nasledovná:[2]

$$K_{t+1} = K_t + I_{t+1} - SFK_{t+1}$$

Prípadne:

$$K_{t-1} = K_t - I_t + SFK_t$$

SFK –spotrebe fixného kapitálu inak nazývaná aj amortizácia, K- kapitálová zásoba, I- investície

Vidíme, že na použitie tejto metódy musíme zozbierať údaje o investíciách, spotrebe fixného kapitálu a takisto potrebujeme odhad kapitálovej zásoby v jednotlivých rokoch. Odhad kapitálovej zásoby získame zo štatistického úradu SR za rok 1998, ktorý mal hodnotu 115713 mil. € a pomocou metódy inventarizácie dopočítame ostatné hodnoty v jednotlivých rokoch. Podobne získame aj odhad pre ČR a aplikujeme rovnakú metódu.[2]

Vypočítame si aj hodnoty opotrebovania v jednotlivých obdobiach a v ďalších výpočtoch budeme narábať už len z priemernými hodnotami opotrebovania, čiže približne $\delta_{sk} = 6{,}88\%$ pre SR a $\delta_{cz} = 7{,}88\%$ pre ČR. Pri práci s mierou opotrebenia treba narábať opatrne, pretože môže spôsobovať odchýlky a chyby pri výpočtoch, pretože nie je konštantná, ale má rastúci charakter.[2]

Tab.3 Hodnoty kapitálovej zásoby ČR v jednotlivých rokoch [16] + vlastné výpočty

Rok	I (mil. Kč)	SFK (mil. Kč)	K (mil. Kč)	δ = SFK/K	K/Y (mil. Kč)
1996	594847	475625	8807875	0,054	5,01137
1997	574531	527779	8 854 627	0,060	4,69760
1998	588635	566935	8 876 327	0,064	4,30559
1999	590945	558746	8 908 526	0,063	4,14538
2000	679296	612818	8 975 004	0,068	3,95428
2001	726509	685596	9 015 917	0,076	3,68213
2002	723331	706071	9 033 177	0,078	3,51824
2003	727128	720413	9 039 892	0,080	3,36292
2004	794085	758656	9 075 321	0,084	3,09825
2005	825856	803942	9 097 235	0,088	2,91947
2006	928397	861618	9 164 014	0,094	2,73341
2007	1091542	988895	9 266 661	0,107	2,53010
2008	1113805	1031374	9 349 092	0,110	2,42934

Tab.4 Hodnoty kapitálovej zásoby SR v jednotlivých rokoch [14] + vlastné výpočty

Rok	I (mil.)	SFK (mil.)	K (mil. €)	δ = SFK/K	K/Y (mil. €)
1996	6701	5701	112156	0,051	5,441
1997	7329	6028	113457	0,053	5,1199
1998	8284	6237	115713	0,054	4,6456
1999	8026	6401	117338	0,055	4,3698
2000	7547	6524	118361	0,055	4,154
2001	9235	6642	120954	0,055	3,7713
2002	9709	7108	123555	0,057	3,5311
2003	9525	7298	125782	0,058	3,2804
2004	10240	8156	127866	0,064	3,0934
2005	12764	10216	130414	0,078	2,7699
2006	14159	11804	132769	0,089	2,5297
2007	15923	14357	134335	0,107	2,2468
2008	15892	15973	134254	0,119	2,1318

3.3 Údaje závislé od trhu práce

Už zo samotného názvu je jasné, že sa jedná predovšetkým o dáta spojené s veličinou práca. V pôvodnom Solowovom modeli je veličina L charakterizovaná ako počet pracovníkov prípadne ešte populácia ľudí. V našom upravenom modeli ju budeme charakterizovať ako celkový počet hodín, ktoré sú odpracované v jednotlivých rokoch. Použitím počtu odpracovaných hodín v jednotlivých rokoch zaručíme výrazne väčšiu presnosť modelu. Okrem parametra L musíme kvantifikovať aj elasticitu pracovných síl α, ktorá je zakomponovaná v Cobb-Douglassovej produkčnej funkcii. Pri odhadovaní jej hodnoty budeme uvažovať, že výrobné ceny sú rovnaké ako ich hraničné produkty. Z toho dostaneme nasledovný odhad:[2]

$$w = \frac{dF}{dL} = (1-\alpha)T\left(\frac{K}{L}\right)^{\alpha} e^{(1-\alpha)gt} <=> \frac{Lw}{Y} = \frac{(1-\alpha)T\left(\frac{K}{L}\right)^{\alpha} e^{(1-\alpha)gt}L}{TK^{\alpha}L^{(1-\alpha)}e^{(1-\alpha)gt}} = (1-\alpha)$$

$$r = \frac{dF}{dK} = \alpha T\left(\frac{L}{K}\right)^{(1-\alpha)} e^{(1-\alpha)gt} <=> \frac{Kr}{Y} = \frac{\alpha T\left(\frac{L}{K}\right)^{(1-\alpha)} e^{(1-\alpha)gt}K}{TK^{\alpha}L^{(1-\alpha)}e^{(1-\alpha)gt}} = \alpha$$

kde $w -$ mzda, $r -$ úroková miera

To znamená, že odhad pre elasticitu práce je možné nahradiť pomocou úrokovej miery a podiel miezd na dôchodku je rovný $(1-\alpha)$, preto elasticitu práce môžeme vypočítať priamo z národných účtov ako zastúpenie miezd na HDP. Na druhej strane ale nemôžeme všetky príjmy (samozrejme s výnimkou miezd) zaradiť k dôchodkom z kapitálu, preto hodnotu $(1-\alpha)$ nazveme pojmom upravený podiel miezd UPM, ktorý vypočítame z rovnice:[2]

$$UPM = \frac{OZ}{HDP} \times \frac{PRA}{ZAM} \tag{3.6}$$

Pričom: $OZ -$ *sú odmeny zamestnancom,* $PRA -$ *počet pracovníkov,* $ZAM -$ *počet zamestnancov*

Počet všetkých pracovníkov = ZAM + počet samostatne zárobkové osoby.[2]

Tab.5 Údaje o trhu práca SR [14], [15] + vlastné výpočty

Rok	L (mil. h)	OZ (mil. €)	HDP (mil. €)	PRA (tis.)	ZAM (tis.)	UPM
1996	3902	8827	21528	2225	2083	0,438
1997	3872	9786	23867	2205	2065	0,438
1998	3835	10207	26172	2199	2047	0,419
1999	3692	11244	28109	2132	1965	0,434
2000	3723	12689	31177	2102	1931	0,442
2001	3712	13451	33881	2123	1943	0,434
2002	3691	14575	36807	2127	1941	0,433
2003	3500	15757	40611	2164	1947	0,431
2004	3560	16620	45162	2171	1905	0,419
2005	3629	18345	49314	2216	1929	0,427
2006	3802	20185	55002	2301	2003	0,422
2007	3885	22262	61499	2357	2043	0,418
2008	3960	24296	66932	2434	2095	0,422

Priemerná hodnota UPM, ktorú budeme používať je $0{,}429 = (1 - \alpha)$ odtiaľ $\alpha = 0{,}571$.

Tab.6 Údaje o trhu práca ČR [16], [15] + vlastné výpočty

Rok	L (mil. h)	OZ (mil. €)	HDP (mil. €)	PRA (tis.)	ZAM (tis.)	UPM
1996	7804	687014	1761575	5173	4972	0,40577
1997	7744	753970	1884924	5185	4937	0,42009
1998	7670	804017	2061583	5201	4866	0,41685
1999	7384	859609	2149023	5218	4764	0,43812
2000	7446	914687	2269695	5186	4732	0,44166
2001	7424	989217	2448557	5146	4728	0,43972
2002	7382	1060390	2567530	5139	4765	0,44542
2003	7000	1118253	2688107	5132	4733	0,45107
2004	7120	1212677	2929172	5133	4707	0,45147
2005	7258	1299395	3116056	5174	4764	0,45289
2006	7604	1394681	3352599	5199	4828	0,44797
2007	7770	1512643	3662573	5198	4922	0,43616
2008	7920	1616333	3848411	5232	5002	0,43931

Priemerná hodnota UPM pre ČR, ktorú budeme používať je $0{,}437 = (1 - \alpha)$ odtiaľ $\alpha = 0{,}563$.

3.4 Odhadnutie produkčnej funkcie

V našom prípade ide o odhad Cobb-Douglasovej produkčnej funkcie, ktorú sme si upravili na tvar:

$$Y = AK^{\alpha}(e^{gt}L)^{1-\alpha}$$

V produkčnej funkcii musíme ešte kvantifikovať úrovňovú konštantu $\boldsymbol{A}$ a mieru technologického pokroku $\boldsymbol{g}$, ostatné premennú sú nám už známe. Spravíme to tak, že najskôr upravíme rovnicu na tvar, v ktorom na ľavej strane sú známe premenné a na pravej doposiaľ neznáme premenné:[2]

$$\frac{Y}{K^{\alpha}L^{1-\alpha}} = Ae^{g(1-\alpha)t}$$

Následne produkčnú funkciu zlogaritmujeme:

$$\ln\frac{Y}{K^{\alpha}L^{1-\alpha}} = \ln A + [g(1-\alpha)]t$$

Vidíme, že pre ľubovoľnú hodnotu t vieme určiť hodnotu $\ln(Y/K^{\alpha}L^{1-\alpha})$, čo nám umožňuje použiť log-lineárny regresný odhad pre hodnotu A a g v tvare:

$$q_t = \beta_0 + \beta_1 t$$

$$q_t \equiv \ln\frac{Y}{K^{\alpha}L^{1-\alpha}}$$

$q -$ vysvetľovaná (závislá) premenná; $t -$ čas; $\beta_0 -$ úrovňová konštanta a $\beta_1 -$ predstavuje sklon regresnej priamky

Odhady parametrov β_1a β_0 použijeme na odhadnutie hodnôt $g(1-\alpha)$ a $\ln A$, to znamená, že platí:

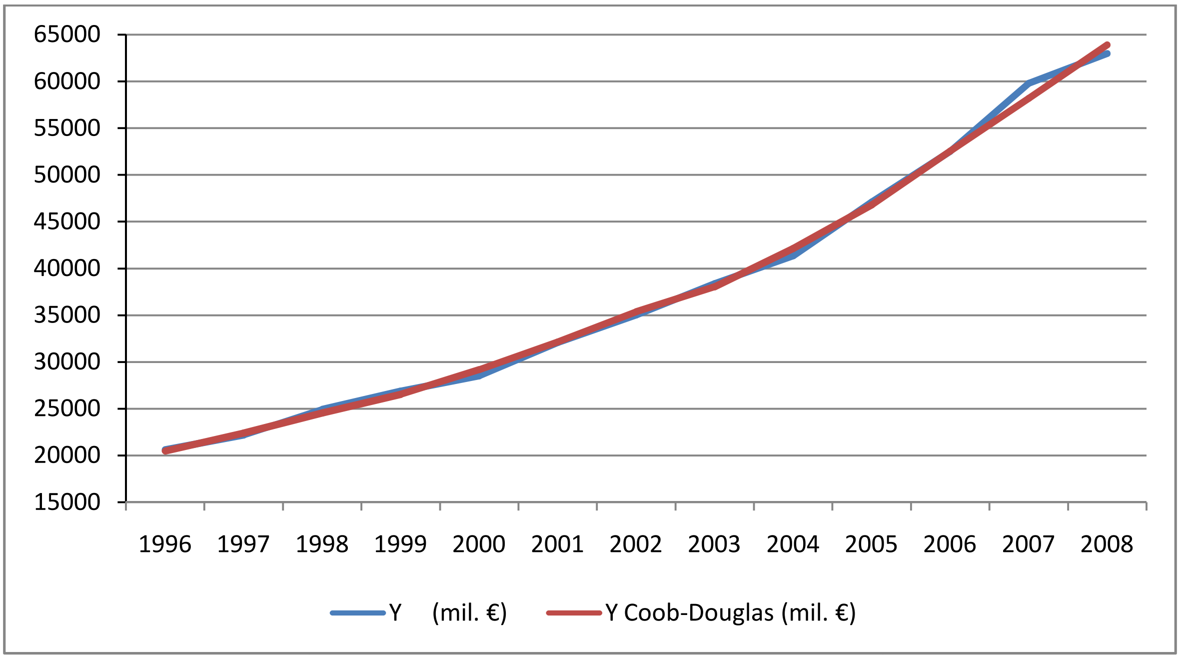
$$\ln A = \beta_0 <=> A = e^{\beta_0}$$

$$g(1-\alpha) = \beta_1 <=> g = \frac{\beta_1}{1-\alpha}$$

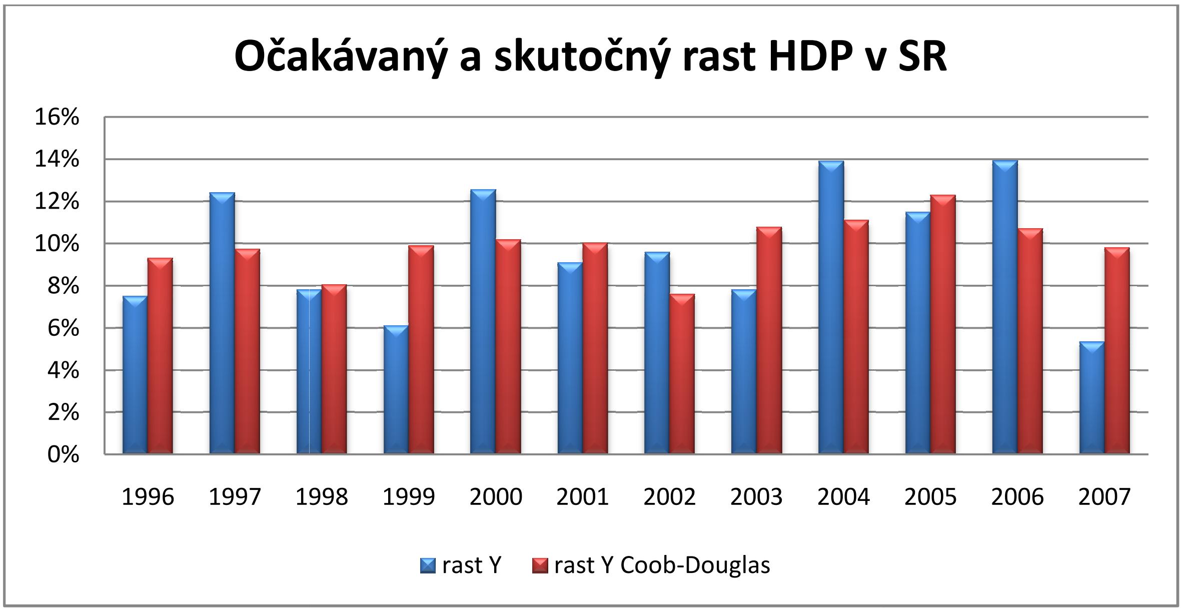
Pomocou programu EViews sme zostavili log-lineárny regresný model, v ktorom sme určili koeficienty β_0 a β_1, pre ktoré sme dostali nasledovné hodnoty pre SR $\beta_1 = 0{,}085737$, $\beta_0 = -0{,}2603$, ktoré nám generujú odhady pre $A = 0{,}77083$ a $g = 0{,}1999$.

Teraz, keď už máme odhadnuté všetky premenné, môžeme ich doplniť do našej Cobb-Douglasovej produkčnej funkcie, ktorá nadobudne nasledovný tvar:

$$Y_{SR} = 0{,}77083K^{0{,}571}(e^{0{,}1999t}L)^{0{,}429}$$



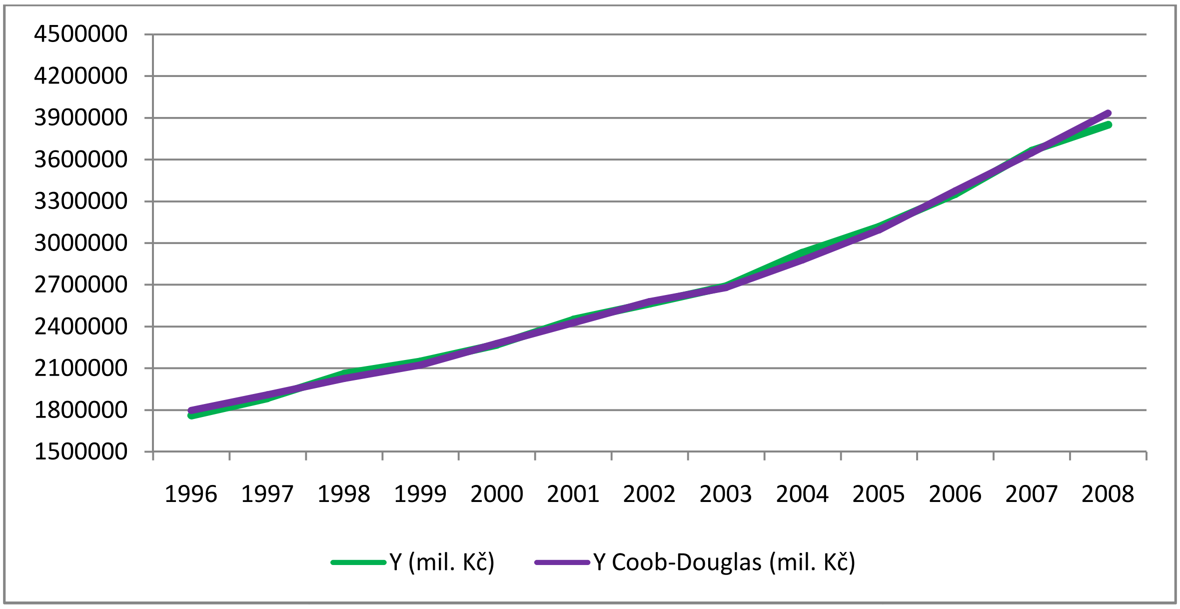
Graf 1 *Odhad HDP SR pomocou Cobb-Douglasovej funkcie [14] a vlastné výpočty*



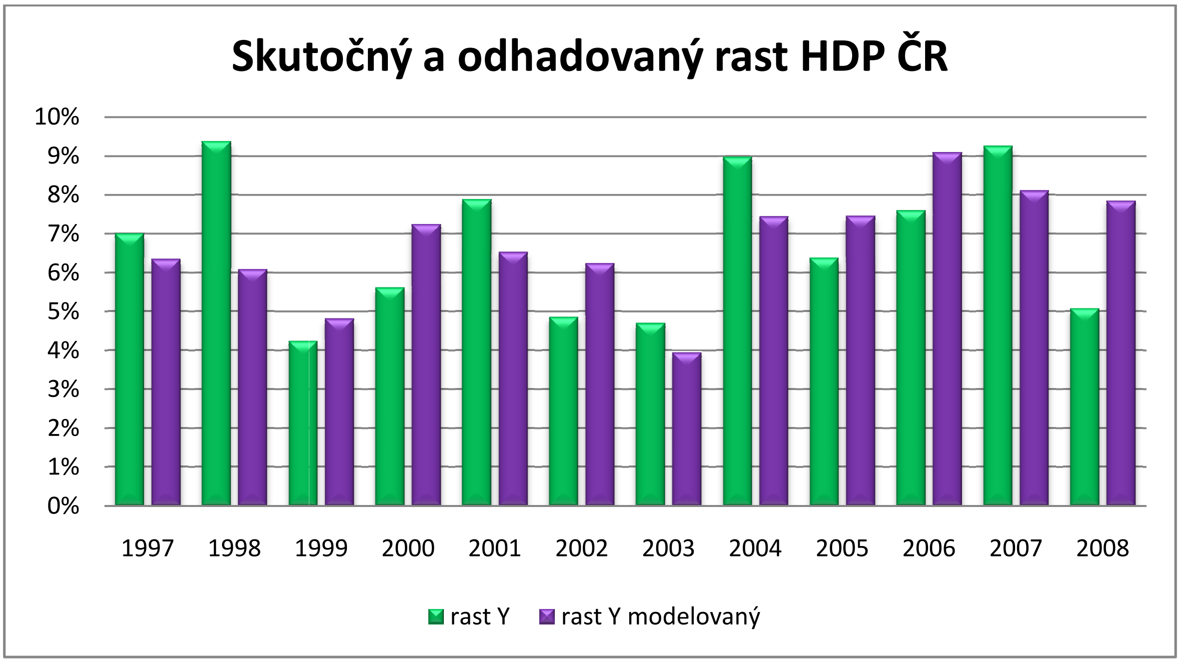
Graf 2 *Rast HDP a modelovaný HDP pomocou Cobb-Douglasovej funkcie [14]+výpočty*

Pre Českú republiku sme pomocou regresného modelu získali odhady koeficientov $\beta_1 = 0{,}06198$, $\beta_0 = 1{,}39208$, ktoré nám generujú odhady pre $A = 4{,}0232$ a $g = 0{,}14275$. Potom Cobb-Douglasova produkčná funkcia má pre Českú republiku tvar:

$$Y_{ČR} = 4{,}0232K^{0{,}563}(e^{0{,}14183t}L)^{0{,}437}$$



Graf 3 *Odhad HDP pomocou Cobb-Douglasovej funkcie* [16] a vlastné výpočty



Graf 4 *Rast HDP a modelovaný HDP pomocou Cobb-Douglasovej funkcie [14]+výpočty*

Pomocou regresného odhadu sa nám podarilo celkom presne kvantifikovať hodnoty úrovňových konštánt a technologických pokrokov, čo sa prejavilo tým ako dobre odhaduje skutočné hodnoty HDP Cobb-Douglasova produkčná funkcia v jednotlivých časových obdobiach. Ak sa pozrieme na produkčnú funkciu SR najskôr mierne podhodnocuje skutočné hodnoty produktu neskôr trochu nadhodnocuje a nakoniec opäť dosahuje mierne menšie hodnoty. Celkovo, ale model odhaduje veľmi presne. Táto skutočnosť môže byť spôsobená autokoreláciou rezíduí v jednotlivých časových obdobiach.[2] Ak by sme ju chceli odstrániť museli by sme namiesto Cobb-Douglasovej produkčnej funkcie použiť inú produkčnú funkciu, to ale nie je v našom záujme.

Na určenie miery presnosti našich modelov použijeme strednú štvorcovú chybu, ktorú ešte navyše znormalizujeme a odmocníme, čiže dostaneme strednú odmocnenú normalizovanú štvorcovú chybu. Strednú štvorcovú chybu (SŠCH) vypočítame zo vzťahu:[2]

$$SŠCH = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(\hat{Y}_i - Y_i\right)^2$$

kde N – počet pozorovaní, $\hat{Y}$ – odhadovaná hodnota produktu, Y – skutočná hodnota produktu.

Odmocnená stredná štvorcová chyba:[2]

$$OSŠCH_{SR} = \sqrt{SŠCH} = 470{,}43$$

$$OSŠCH_{ČR} = \sqrt{SŠCH} = 34528{,}27$$

Normalizovaná stredná štvorcová chyba:[2]

$$NOSŠCH_{SR} = \frac{RMSE}{max(Y) - min(Y)} = \frac{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(\hat{Y}_i - Y_i\right)^2}{max(Y) - min(Y)} = 0{,}0533 = 1{,}33\%$$

$$NOSŠCH_{ČR} = \frac{RMSE}{max(Y) - min(Y)} = \frac{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(\hat{Y}_i - Y_i\right)^2}{max(Y) - min(Y)} = 0{,}0533 = 1{,}79\%$$

Po postupných výpočtoch dostaneme pre normalizovanú odmocnenú strednú štvorcovú chybu hodnoty $NOSŠCH_{SR} = 1{,}33\%$ a $NOSŠCH_{ČR} = 1{,}79\%$. To znamená, že modelovanie pomocou Cobb-Douglasovej produkčnej funkcie je sprevádzané týmito chybami, ktoré sú na naše očakávania dosť nízke, čo nás teší. Takisto vidíme, že o niečo lepšie kvantifikuje Cobb-Douglasova funkcia ekonomiku SR, čo je pravdepodobne spôsobené lepším odhadom kapitálovej zásoby.

3.4 Modelovanie pomocou upraveného Solow-Swanovho modelu

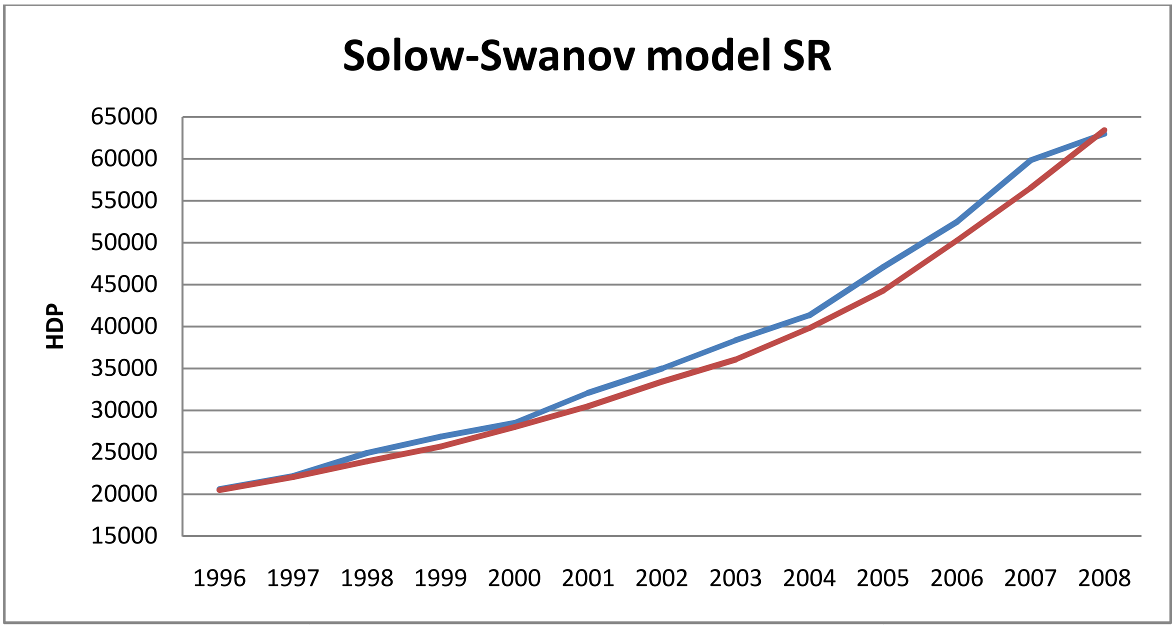
Teraz urobíme simuláciu pomocou nami upraveného Solow-Swanovho modelu. Tento model budeme simulovať v diskrétnom čase, keďže máme ročné dáta.[2] Náš pracovný aparát pozostáva z už vopred kvantifikovaných hodnôt pre obe krajiny:

$$A_{SR} = 0{,}77083 \qquad A_{ČR} = 4{,}0232$$
$$\alpha_{SR} = 0{,}571 \qquad \alpha_{ČR} = 0{,}563$$
$$g_{SR} = 0{,}1999 \qquad g_{ČR} = 0{,}1418$$
$$\delta_{SR} = 0{,}0688 \qquad \delta_{ČR} = 0{,}0788$$
$$s_{SR} = 0{,}2906 \qquad s_{ČR} = 0{,}3584$$

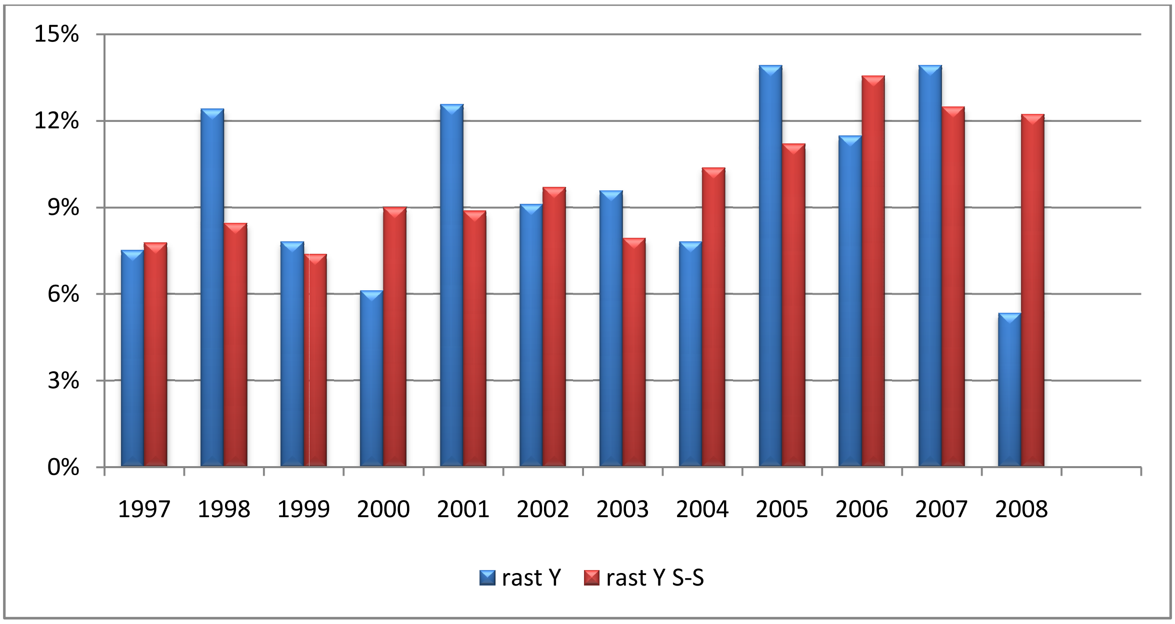
Pri modelovaní použijeme Cobb-Douglasovu produkčnú funkciu na výpočet hodnôt HDP, pričom z jednotlivými hodnotami postupujeme nasledovným spôsobom:

1. najskôr pomocou Cobb-Douglasovej produkčnej funkcie vypočítame hodnotu:[2]
   $$Y_t = 0{,}77083 K_t^{0{,}571}(e^{0{,}1999t} L_t)^{0{,}429}$$
   To znamená, že pre rok 1996 dostaneme výslednú hodnotu pre SR $Y_0 = 20467{,}72$
2. v druhom kroku už v čase $t = 1$ pomocou hodnôt $Y_0 = 20419{,}13$ a $K_0 = 112156$ spočítame hodnotu K_1, pričom použijeme vzťah:[2]
   $$K_{t+1} = K_t - 0{,}0688K_t + 0{,}3004(1 - \tau_t)Y_t - NX_t$$
   to znamená: $K_1 = 112156 - 0{,}0688 \times 112156 + 0{,}3004 \times (1 - 0{,}2342) \times$ $\times\, 20419{,}13 + 1612 = 110803$
3. vypočítame hodnotu Y_1 pre nasledujúci rok, na jej získanie aplikujeme $K_1 = 110803$.[2]
4. vypočítame hodnotu kapitálovej zásoby K_2.[2]

Analogicky pokračujeme až kým nevypočítame všetky hodnoty kapitálovej zásoby a HDP v jednotlivých rokoch. To ako upravený Solow-Swanov model popisuje vývoj ekonomiky na Slovensku vidíme z grafu 5 a grafu 6.

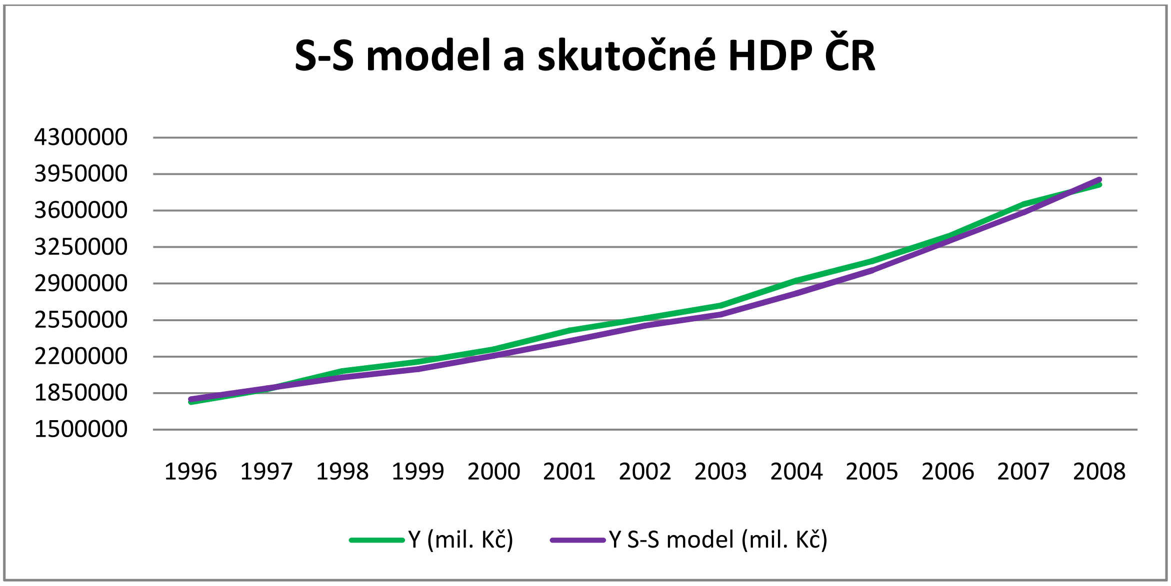


Graf 5 *Porovnanie skutočného a modelovaného rastu HDP SR (vlastné výpočty),*[14]

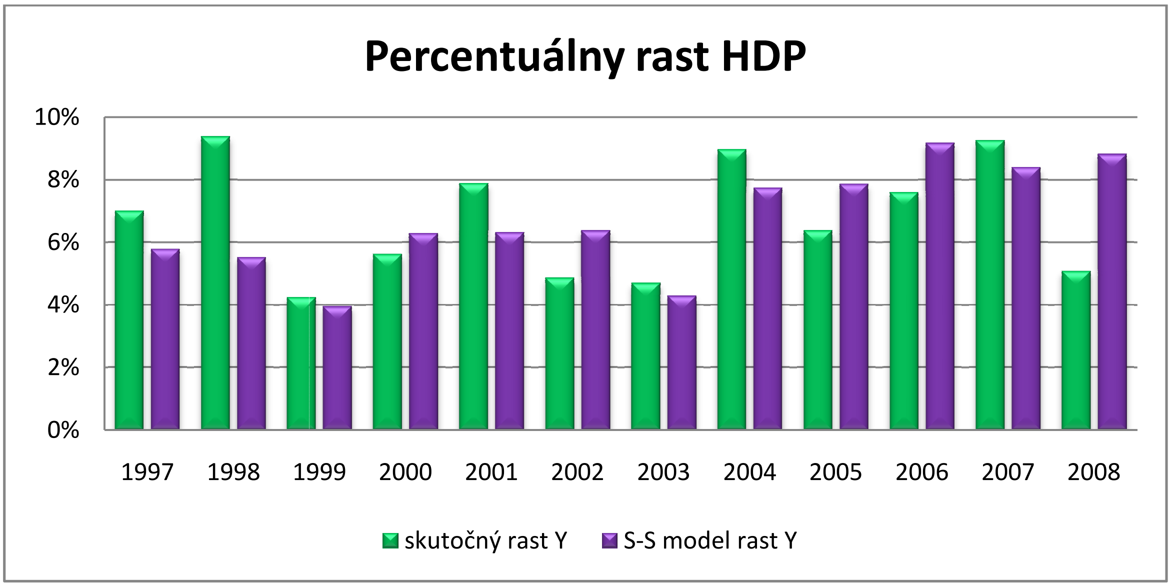


Graf 6 *Percentuálny rast HDP skutočný a modelovaný S-S (vlastné výpočty + [14], [15])*

Rovnakým spôsobom pokračujeme aj pre ekonomiku Českej republiky pričom použijeme údaje z českého štatistického úradu. Potom Solow-Swanov model pre Českú republiku opisujú nasledujúce grafy:

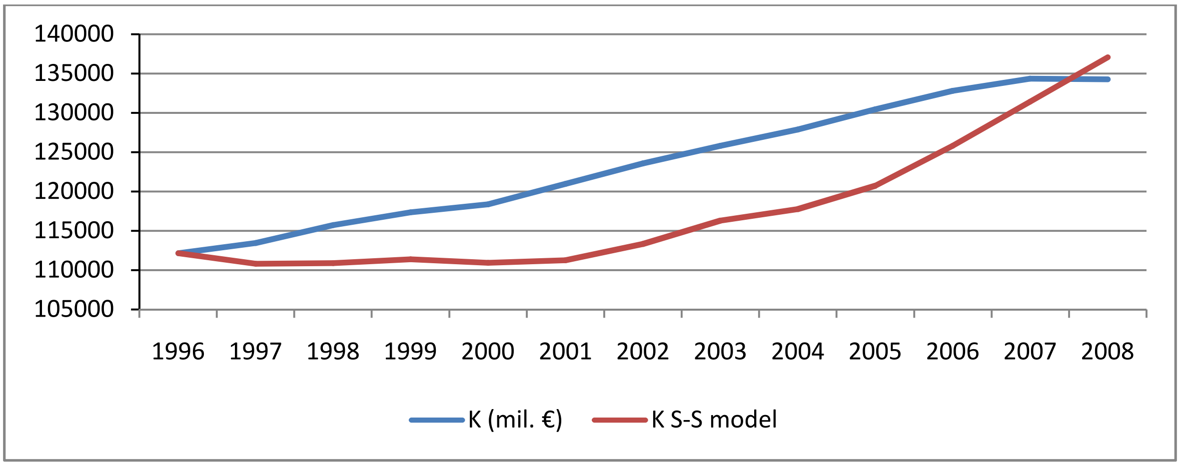


Graf 7 *Porovnanie skutočného a modelovaného rastu HDP ČR (vlastné výpočty),*[16]

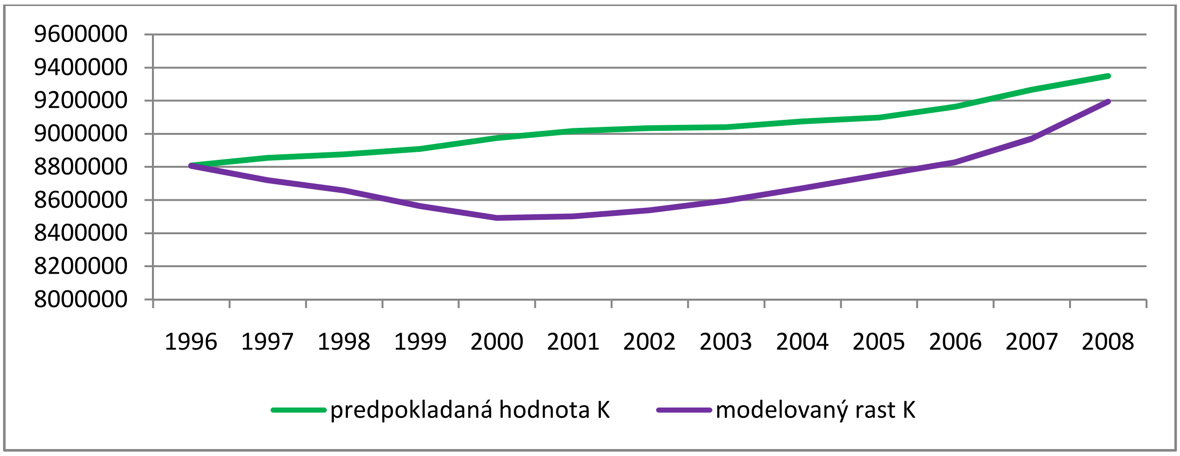


Graf 8 *Rast HDP ČR skutočný a modelovaný S-S* (vlastné výpočty + [16], [15])

Ak porovnáme grafy 5 a graf 7 s grafmi 1, 3 vidíme, že modelovanie pomocou upraveného S-S modelu nie je až také presné ako modelovanie pomocou Cobb-Douglasovej produkčnej funkcie. To nám potvrdzuje aj normalizovaná stredná štvorcová chyba, ktorá je pre obidve krajiny vyššia $NOSŠCH_{SR} = 2{,}9\%$ a $NOSŠCH_{ČR} = 3{,}53\%$ Samotná Cobb-Douglasova produkčná funkcia, ale nie je ekonomickým modelom, preto ju samotnú nemôžeme používať na odhadovanie ekonomického rastu. Vzniknutá nepresnosť je dôsledok toho, že pri S-S modeli počítame hodnoty HDP pomocou hodnôt kapitálovej zásoby, ktoré tiež modelujeme, na rozdiel od odhadu len pomocou Cobb-Douglasovej produkčnej funkcie, pri ktorej kvantifikujeme len hodnoty HDP, čo spôsobuje v konečnom dôsledku väčšie výchylky modelovaných hodnôt.[2] Taktiež veľkým zdrojom nepresností je miera opotrebenia, pretože jej hodnota neosciluje okolo rovnovážnej hodnoty, ale má rastúci charakter a keďže my v našom modeli používame jej priemernú hodnotu dopúšťame sa tak chyby. Výchylku spôsobujú aj hodnoty sklonu k úsporám napríklad z pohľadu SR v rokoch 2007($s = 0{,}3206$) a 2009($s = 0{,}3260$), ktoré sú oproti priemernej hodnote ($s = 0{,}2906$) výrazne väčšie. Najväčším zdrojom nepresností je ale aj tak kapitálová zásoba, ktorá nadobúda výrazne nižšie hodnoty aké sú v skutočnosti, či už pre ekonomiku SR alebo ČR (graf 9, graf 10)



Graf 9 *Predpokladané a modelované tempo rastu kapitálovej zásoby SR [14] + vlastné výpočty*



Graf 10 *Predpokl. a modelované tempo rastu kapitálovej zásoby ČR [14], vlastné výpočty*

Pre úplnosť Solow-Swanovho modelu zostavíme ešte graf produkčnej funkcie, funkcie efektívnych úspor a funkcie efektívneho opotrebovania použitím skutočných a modelovaných hodnôt a pomocou upraveného Solow-Swanovho modelu nasimulujeme rast ekonomiky SR. Produkčnú funkciu získame zo vzťahu:[2]

$$f(\kappa) = \frac{Y}{TL} = \frac{AK^{\alpha}(TL)^{1-\alpha}}{TL} = A\left(\frac{K}{TL}\right)^{\alpha} = A\kappa^{\alpha} = 0{,}77083\kappa^{0{,}571}$$

Pretože v našom modeli sú úspory závislé na verejnom sektore platí pre funkciu efektívnych úspor platí:[2]

$$s(1-\tau)f(\kappa) = s(1-\tau)A\kappa^{\alpha} = 0{,}2903(1-0{,}2019)0{,}7708\kappa^{0{,}571}$$

A nakoniec pre funkciu efektívneho opotrebenia máme rovnosť:

$$(n+g+\delta)\kappa = (0+0{,}1999+0{,}0688)\kappa$$

Na to aby sme mohli jednotlivé funkcie popísať potrebujeme vypočítať hodnotu efektívnej kapitálovej vybavenosti v jednotlivých rokoch pre skutočné aj modelované hodnoty. Túto hodnotu vypočítame zo vzorca:[2]

$$\kappa_t = \frac{K_t}{T_t L_t} = \frac{K_t}{e^{gt} L_t}$$

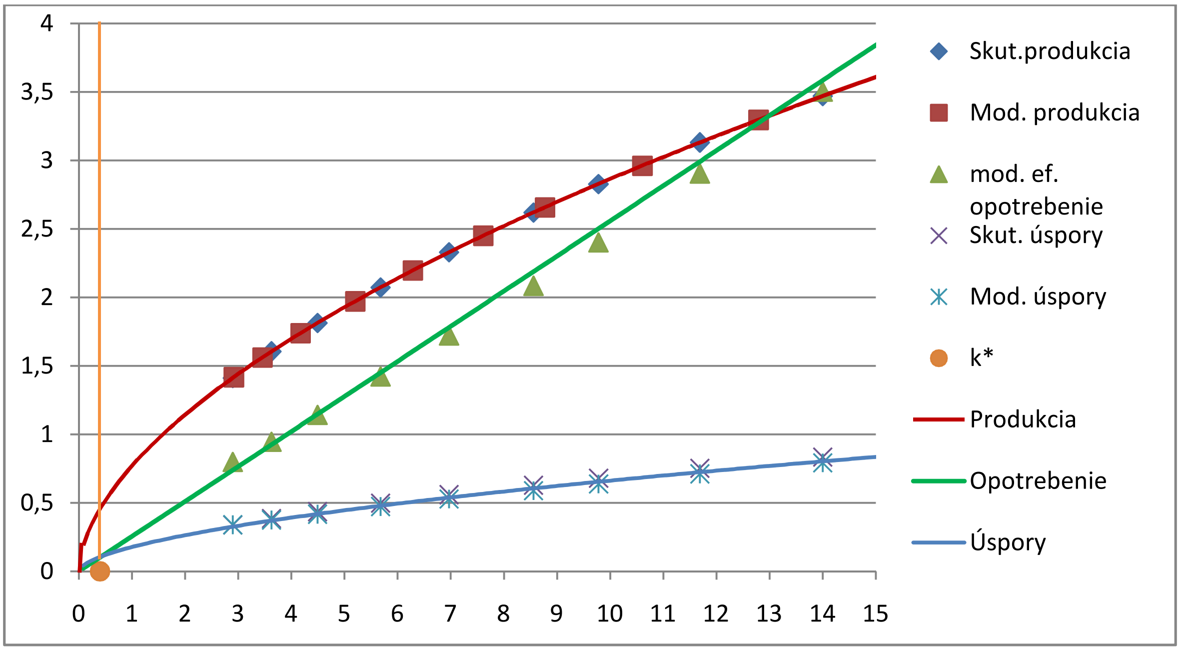
Pričom hodnoty efektívnej kapitálovej vybavenosti v stálom stave sú:

$$\kappa_{SR}^{*} = \left[\frac{s(1-\tau)A}{\delta+n+g}\right]^{\left(\frac{1}{1-\alpha}\right)} = \left[\frac{0{,}2906(1-0{,}2019)0{,}7708}{0{,}0688+0+0{,}1999}\right]^{\left(\frac{1}{1-0{,}571}\right)} = 0{,}387$$

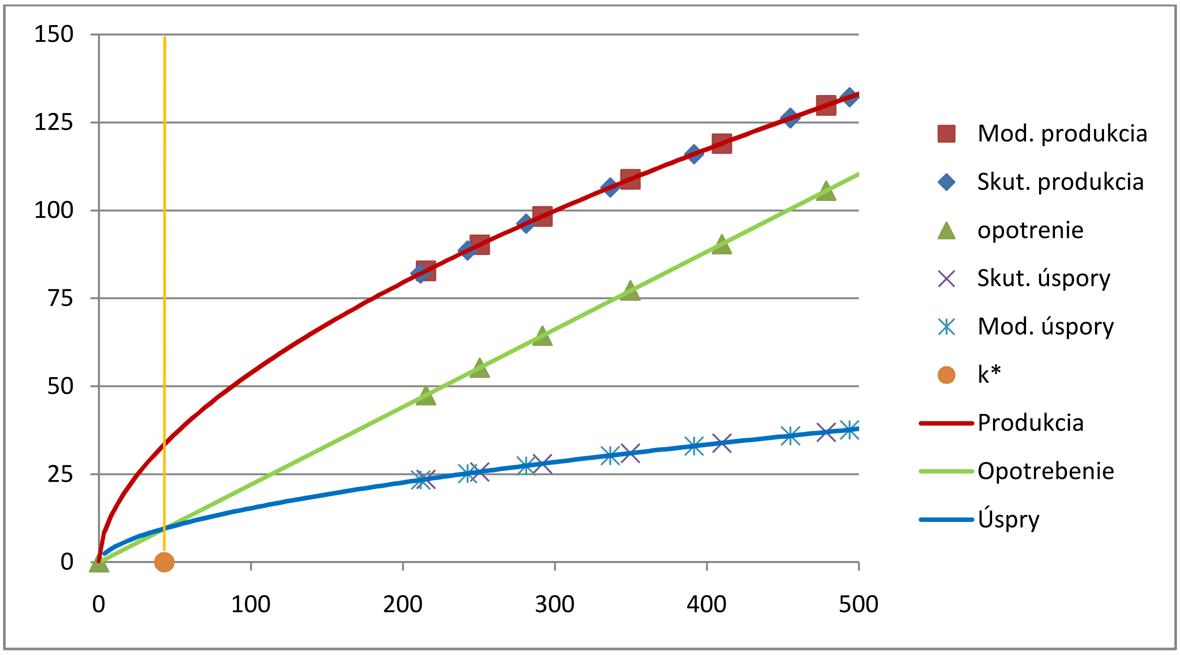
$$\kappa_{ČR}^{*} = \left[\frac{s(1-\tau)A}{\delta+n+g}\right]^{\left(\frac{1}{1-\alpha}\right)} = \left[\frac{0{,}3584(1-0{,}206)4{,}0232}{0{,}0788+0+0{,}14183}\right]^{\left(\frac{1}{1-0{,}563}\right)} = 43{,}29$$

Vo vzorci sme použili priemerné hodnoty dane opotrebenia a sklonu k úsporám. Po dosadení hodnôt efektívnej kapitálovej vybavenosti do pôvodných funkcií môžeme zostrojiť graf 11 a graf 12, ktoré nám popisujú vývoj ekonomiky SR a ČR z pohľadu

Solow-Swanovho modelu. Graf 11 a graf 12 sme zostrojili tak, že sme najskôr vypočítali príslušné skutočné a modelované hodnoty efektívnych funkcií a tieto sme neskôr fitovali pomocou aproximačných funkcii.



Graf 11 *Vývoj ekonomiky SR podľa Solow-Swanovho modelu* [14], [15] + vlastné výpočty



Graf 12 *Vývoj ekonomiky ČR podľa Solow-Swanovho modelu* [16], [15] + vlastné výpočty

Solow-Swanov model hovorí, že ak ekonomika dosiahne rovnovážnu hladinu rastu v našom prípade κ^*, potom už zostane na tejto hladine a bude rásť konštantnou mierou rastu, ktorá je rovná hodnote technologického pokroku, čo je v našom prípade pre SR 20% a pre ekonomiku ČR 14% [8]. Tieto hodnoty sú veľmi vysoké a v skutočnosti nereálne. Príčina takejto vysokej miery rastu technologického pokroku v našom modeli môže byť spôsobená preberaním technológií od vyspelejších zahraničných krajín.[2], [3] V skutočnosti bude táto hodnota klesať, čo bude mať za následok z rovnice 2.20 rast rovnovážnej hodnoty κ^*. Predpokladaná miera rastu sa bude pohybovať na úrovni 2-3%. Z grafov tiež vidíme, že ekonomiky Slovenska a Česka sa postupne približujú k rovnovážnej hodnote, pretože hodnoty produkcie majú klesajúci charakter, postupujú sprava doľava.

Skúsme teraz vypočítať hodnotu rovnovážneho stavu ekonomiky SR a ČR v roku 2008 ak budeme predpokladať hodnotu ekonomického rastu na úrovni 2%. To znamená, že hodnota technologického pokroku bude $g = 0{,}02$. Rok 2008 je novým štartovacím bodom, preto uvažujeme čas $t = 0$. Na vypočítanie hodnoty efektívnej kapitálovej vybavenosti v stálom stave ešte potrebujeme kvantifikovať úrovňovú konštantu, ktorú vypočítame zo vzťahu:[2]

$$A_{ČR} = \frac{Y_{2008}}{(e^{g\times 0}L_{2008})^{1-\alpha}K_{2008}^{\alpha}} = \frac{3848411}{(e^{0{,}02\times 0}7920)^{1-0{,}563}9\ 349\ 092^{0{,}437}} = 9{,}057$$

$$A_{SR} = \frac{Y_{2008}}{(e^{g\times 0}L_{2008})^{1-\alpha}K_{2008}^{\alpha}} = \frac{62977}{(e^{0{,}02\times 0}3960)^{1-0{,}571}134254^{0{,}429}} = 2{,}127$$

Teraz môžeme už vypočítať hodnoty efektívnej kapitálovej vybavenosti v stálom stave pre SR a ČR:

$$\kappa_{SR}^* = \left[\frac{s(1-\tau)A}{\delta+n+g}\right]^{\left(\frac{1}{1-\alpha}\right)} = \left[\frac{0{,}2906(1-0{,}2019)2{,}127}{0{,}0688+0+0{,}02}\right]^{\left(\frac{1}{1-0{,}571}\right)} = 54{,}44$$

$$\kappa_{ČR}^* = \left[\frac{s(1-\tau)A}{\delta+n+g}\right]^{\left(\frac{1}{1-\alpha}\right)} = \left[\frac{0{,}3584(1-0{,}206)9{,}057}{0{,}0788+0+0{,}02}\right]^{\left(\frac{1}{1-0{,}563}\right)} = 1742{,}715$$

Príslušné hodnoty efektívnej kapitálovej vybavenosti v tomto roku sú:

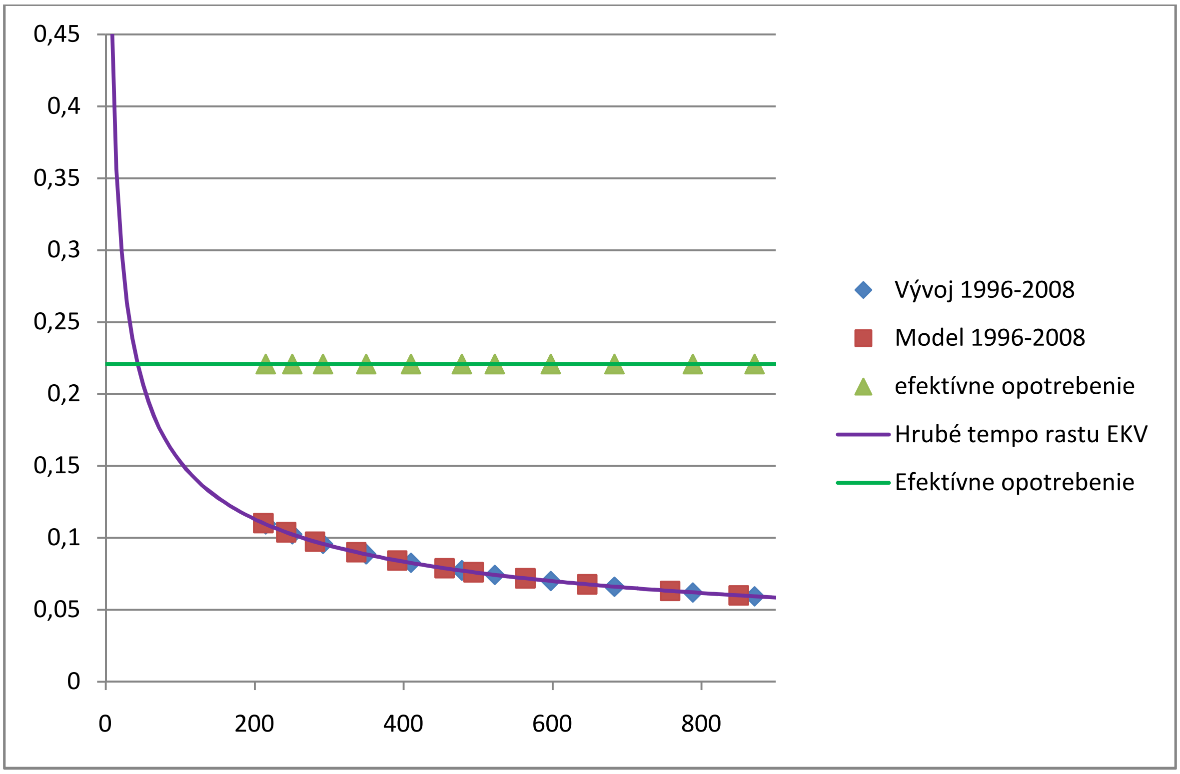
$$\kappa_{ČR} = \frac{K_{2008}}{T_{2008}L_{2008}} = \frac{9349092}{e^{0,02\times 0}7920} = 1180,441$$
$$\kappa_{SR} = \frac{K_{2008}}{T_{2008}L_{2008}} = \frac{134254}{e^{0,02\times 0}3960} = 33,903$$

Ak by sme predpokladali takýto rast obidve ekonomiku by boli pod rovnovážnou hodnotou efektívnej kapitálovej vybavenosti v stálom stave. Z toho môžeme usúdiť, že to či sa ekonomika nachádza nad alebo pod rovnovážnou hodnotou efektívnej kapitálovej vybavenosti v stálom stave závisí od miery technologického pokroku, ktorú pre dané obdobie predpokladáme. [2] [9]

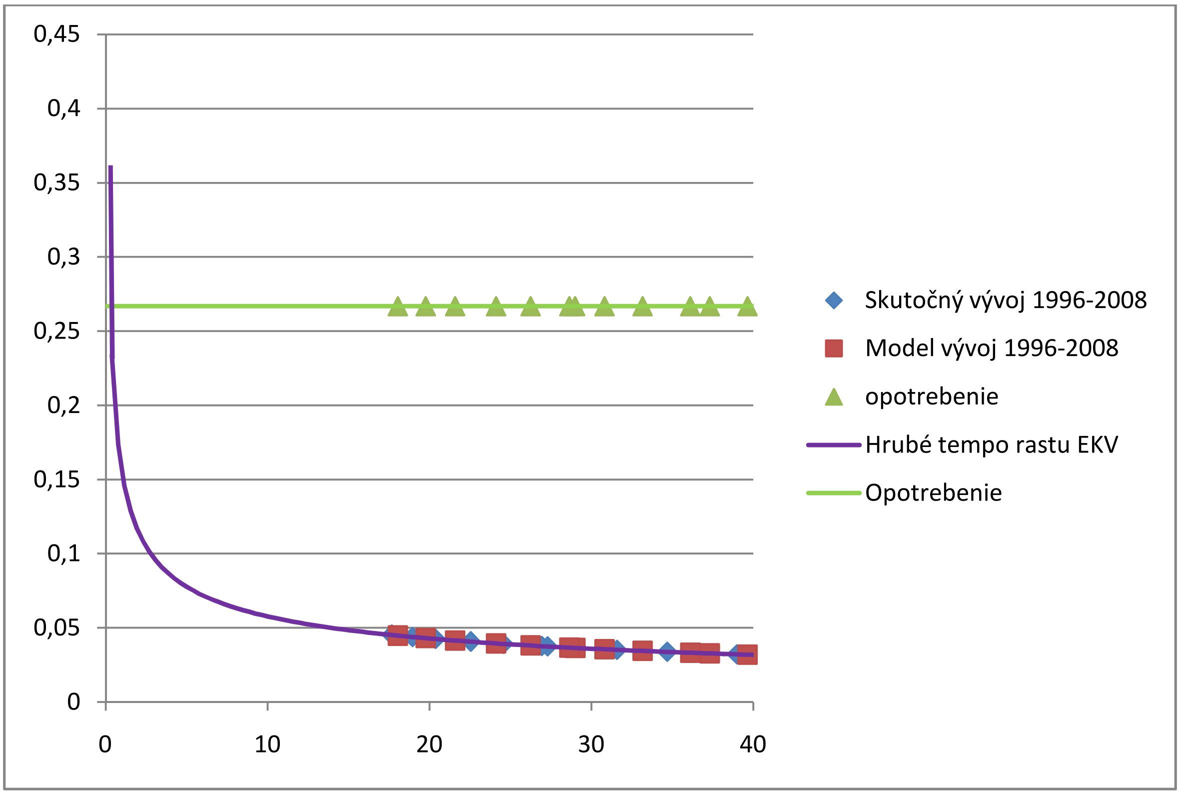
Nakoniec ešte prezentujeme rast efektívnej kapitálovej vybavenosti ČR a SR. Tento rast dostaneme z podielu efektívnych úspor $\boldsymbol{sf(\kappa)}$ a príslušnej hodnoty efektívnej kapitálovej vybavenosti $\boldsymbol{\kappa}$ v jednotlivých časových obdobiach:[2], [9]

$$\frac{s(1-\tau)A\kappa_t^{\alpha}}{\kappa_t} = \frac{sf(\kappa)}{\kappa}$$

Potom pomocou vypočítaných hodnôt môžeme odhadnúť mieru rastu efektívnej kapitálovej vybavenosti. Fitovacou metódou a nasledovným odhadom jednotlivých priamok dostávame:



***Graf 13** Rast efektívnej kapitálovej vybavenosti ČR* [15], [16] + vlastné výpočty



Graf 14 *Rast efektívnej kapitálovej vybavenosti SR* [14], [15] + vlastné výpočty

Rovnako ako simulácia ekonomík pomocou upraveného Solow-Swanovho modelu aj modelovanie rastu efektívnej kapitálovej vybavenosti predznamenáva, že ekonomiky SR a ČR sa postupne blížia k rovnovážnemu stavu, čo vidíme z toho, že jednotlivé namerané hodnoty postupujú sprava doľava k rovnovážnej hodnote. Celkovo preto z upraveného Solow-Swanovho modelu vyplýva, že ekonomiky ČR a SR smerujú k tejto hodnote, či už sú nad alebo pod jej úrovňou.

Záver

V práci sme postupne objasnili problematiku ekonomických teórií rastu, pričom sme sa hlavne zamerali na neoklasické obdobie, ktoré bolo akoby prelomovým obdobím pre vývin týchto teórií. Hlavnú časť nášho záujmu sme venovali popísaniu problematiky Solow-Swanovho modelu, kde sme zahrnuli okrem hlavného modelu aj rozšírený model o technologický pokrok.

Tento model sme neskôr upravili a pomocou neho sme analyzovali ekonomický rast Českej a Slovenskej republiky. Na simuláciu ekonomického rast pomocou Solow-Swanovho modelu sme použili Cobb-Douglasovu produkčnú funkciu, pomocou ktorej sme aj odhadli HDP v jednotlivých rokoch. Samotný odhad len pomocou Cobb-Douglasovej produkčnej funkcie bol veľmi presný a dosahoval normalizovanú odmocnenú strednú štvorcovú chybu menšiu ako dve percentá.

Pri simulácia ekonomického rastu pomocou Solow-Swanovho modelu sme ešte potrebovali urobiť odhad kapitálovej zásoby Českej a Slovenskej republiku, ktorý sme získali z odhadov štatistického úradu ČR a SR pre rok 1998 a ostatné hodnoty sme dopočítali pomocou rekurentného vzťahu. Tento odhad sa z pohľadu Solow-Swanovho modelu zdá výrazne nadhodnotený a spôsobuje v našej simulácia najväčšie nepresnosti. Napriek tomu modelovanie pomocou Solow-Swanovho modelu je veľmi efektívne, čo nám potvrdila a normalizovaná odmocnená stredná štvorcová chyba, ktorá je pre obe krajiny pod úrovňou piatich percent.

Takisto sme ukázali, že to či sa ekonomika nachádza nad alebo pod rovnovážnou hodnotou efektívnej kapitálovej vybavenosti závisí predovšetkým od miery technologického pokroku. V našom modeli sme mali veľmi vysokú mieru technologického pokroku či už v ČR alebo SR, a preto boli obidve ekonomiky nad úrovňou efektívnej kapitálovej vybavenosti. Táto skutočnosť mohla byť spôsobená preberaním nových technológií z vyspelejších krajín. V priebehu jednotlivých časových období sme zistili, že hodnoty kapitálovej vybavenosti postupne klesajú a približujú sa k rovnovážnej hodnote. Rovnaký záver sme dosiahli aj v modeli, kde sme upravili mieru technologického pokroku na rozumnejšiu úroveň, preto môžeme konštatovať, že či už ekonomika štartuje nad alebo pod rovnovážnou úrovňou stále k nej smeruje.

Celkovo môžeme povedať, že aplikácia Solow-Swanovho modelu je efektívna, ale potrebovala isté korekcie hlavne kvôli otvorenosti ekonomík oboch krajín. Napriek tomu sa ale stále musíme zamyslieť nad tým, že posledné roky nás len presviedčajú o tom, že tieto teórie nie sú úplne presné alebo stále nezahrnuli vo svojich štúdiách všetky dôležité parametre, pretože ani jedna z nich nepripúšťa to, čo dnes trápi celý svet a tým je svetová hospodárska kríza. Bolo by preto vhodné sa zamyslieť a prehodnotiť dosiahnuté poznatky a navrhnúť taký model ekonomického rastu, aby sa vzniknutá situácia už nemusela opakovať. Ekonómovia majú šancu si očistiť svoje meno v najbližších rokoch, no z môjho pohľadu si myslí, že neexistuje žiadna teória, ktorá je bezchybná a môže viesť len neustálemu blahobytu bez akýchkoľvek vedľajších následkov.

Zoznam použitej literatúry

[1] CROIX, D. *A Theory of Economic Growth* Dynamics *and Policy in Overlapping Generations.* Cambridge university press 2004. ISBN 0-511-02891-1

[2] DUJAVA, D. 2010. *Neoclassical and Keynesian View on a Growth of Economy of SR.* Institute of Economic Research SAS. o. z. SOLIM Bratislava 2010. ISSN 973-123-876-20

[3] GRANDVILLE, D.O. 2009. *Economic Growth A Unified Approach*. Cambridge university press 2009. ISBN-13 978-0-511-59051-1

[4] HARROD, R. F. 1939. *An Essay on Dynamic Theory*. In Economic Journal 49. 1939, vol. 49, no. 193, p. 14–33.

[5] MLYNAROVIČ, V. – MIŤKOVA, M. 2010. *Makroekonomická analýza*, IURA Edition, Bratislava 2010

[6] MURA, L. 2011. 2011. *Modely ekonomického rastu kvantitatívny pohľad.* Relik Praha 2011. ISBN 978-80- 8137-003-8

[7] NOVALES, A.– FERNANDEZ, E. – RUIZ, J. 2099. *Economic Growth Theory and Numerical Solution Methods.* Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2009. ISBN: 978-3-540-68665-1

[8] PITCHFORD, R. 2004. *Economic Growth and Macroeconomic.* Dynamics.Cambridge University Press 2004.

[9] SARDADVAR, S. 2011. *Economic Growth in the Regions of Europe*. New York Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2011. ISBN 978-3-7908-2636-4

[10] SENGUPTA, J. 2011. *Understanding economic growth*. University of California, Santa Barbara. Springer Science Business Media LLC 2011. ISBN 978-1-4419-8025-0

[11] SOLOW, R. 1956. *Technical change and aggregative production function. In The Review of Economic Studies*. 1957, vol. 39, no. 3, p. 312–320.

[12] SOLOW, R. 1957. *Technical change and aggregative production function. In The Review of Economic Studies*. 1957, vol. 39, no. 3, p. 312–320.

[13] SZOSTAK, R. 2009. *The Causes of Economic Growth*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2009. ISBN 978-3-540-92281-0

[14] http://epp.eurostat.ec.europa.eu

[15] http://portal.statistics.sk

[16] http://www.czso.cz/

[17] www.isb.ac.th/.../**Harrod**%20**Domar**%20**Growth**%20**Model**%20Notes