UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky
Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky

# SIMULAČNÉ OCEŇOVANIE FINANČNÝCH DERIVÁTOV

Bakalárska práca

Jakub HAVELKA

1114 Aplikovaná matematika
*Ekonomická a finančná matematika*

Školiteľ:
RNDr. Vladimír LACKO

BRATISLAVA 2012

# Simulačné oceňovanie finančných derivátov

Jakub Havelka
E-mail: *jakubhav@gmail.com*

RNDr. Vladimír Lacko
E-mail: *lackovladimir@gmail.com*

Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky
Univerzita Komenského v Bratislave
Mlynská dolina
842 48 Bratislava
Slovenská republika

---


Bakalárska práca v odbore 1114 Aplikovaná matematika
Dátum kompilácie: 27. mája 2012
Typeset in LaTeX

49052541

Univerzita Komenského v Bratislave
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

# ZADANIE ZÁVEREČNEJ PRÁCE

**Meno a priezvisko študenta:** Jakub Havelka
**Študijný program:** ekonomická a finančná matematika (Jednoodborové štúdium, bakalársky I. st., denná forma)
**Študijný odbor:** 9.1.9. aplikovaná matematika
**Typ záverečnej práce:** bakalárska
**Jazyk záverečnej práce:** slovenský

**Názov:** Simulačné oceňovanie finančných derivátov

**Cieľ:** Formálna stránka: Osvojiť si štandardy písania matematického textu (citácie, typografia, členenie textu, korektné formulácie, štylistika, atď.) a naučiť sa pracovať s cudzojazyčnou odbornou literatúrou. Obsahová stránka: Oboznámiť sa s oceňovaním vybraných typov finančných derivátov vychádzajúcich z komplikovanejších modelov, spracovať ich a naprogramovať.

**Vedúci:** RNDr. Vladimír Lacko

**Dátum zadania:** 25.10.2011

**Dátum schválenia:** 27.10.2011

doc. RNDr. Margaréta Halická, CSc.
garant študijného programu

.................................................... ....................................................

študent vedúci

# Abstrakt

Porovnávame klasický Black-Scholesov prístup k oceňovaniu opcií s oceňovaním formou stochastických simulácií. Tento simulačný prístup spočíva v modelovaní ceny podkladového aktíva a ostatných dôležitých faktorov pomocou stochastických diferenciálnych rovníc. Simulačný oceňovací model konštruujeme za predpokladu konštantnej aj stochastickej úrokovej miery. Výsledky ukazujú, že oceňovanie pomocou simulácií je v súlade s tradičným oceňovaním a naviac dáva širšiu informáciu o rozdelení ceny opcie. Skúmame vplyv volatility úrokovej miery na cenu opcie.



**Kľúčové slová:** stochastická diferenciálna rovnica • opcia • Black-Scholesov vzorec • martingal • simulácia



# Abstract

We compare classical Black-Scholes approach to option pricing with pricing by stochastic simulations. The latter approach is based on modeling of the price of underlying asset and other important factors by stochastic differential equations. We construct the simulation pricing model under the assumption of constant and also stochastic interest rate. The results show, that pricing by simulations is in accordance with ”traditional” pricing and moreover provides further information on distribution of option price. We examine the influence of interest rate volatility on option price.



**Key words:** stochastic differential equation • option • Black-Scholes formula • martingale • simulation

## Poďakovanie

Ďakujem Vladovi za jeho skutočný a pre mňa veľmi motivujúci záujem o tému tejto práce, rovnako za jej dôkladné odborné posúdenie a vecné pripomienky, ktoré významne pomohli jej skvalitneniu.

# *Obsah*

# *Úvod*

> *The derivatives genie is now well out of the bottle, and these instruments will almost certainly multiply in variety and number until some event makes their toxicity clear. Central banks and governments have so far found no effective way to control, or even monitor, the risks posed by these contracts. In my view, derivatives are financial weapons of mass destruction, carrying dangers that, while now latent, are potentially lethal.*
>
> Warren Buffet

Na finančnom trhu sa obchoduje s bežnými aktívami, ako napríklad akcie, dlhopisy alebo komodity. Okrem toho sa však obchoduje aj s finančnými derivátmi, ktorých hodnota závisí, resp. je odvodená (z angl. derive – odvodiť) od hodnoty bežných aktív. Zaujímavé je, že v súčasnosti trh s finančnými derivátmi svojím objemom niekoľkonásobne prevyšuje objem celkových svetových finančných aktív. Tento fakt je dôsledkom jednak toho, že na jedno aktívum môže byť vypísané veľké množsvo derivátov, ale aj dôsledkom veľkej popularity derivátov u investorov. Tí ich používajú ako nástroj na zabezpečenie svojich investícií, ale aj ako prostriedok špekulatívneho zisku.

Správne určenie ceny finančných derivátov je teda veľmi dôležité a jeho nedocenenie viedlo v minulosti k veľkým stratám mnohých finančných inštitúcií. V dôsledku toho sú dnes veľmi žiadaní špecialisti, ktorí vedia používať pokročilé analytické a numerické techniky oceňovania finančných derivátov. Na ocenenie finančných derivátov existujú rôzne metódy, ako napríklad prelomový Black-Scholesov model, za ktorý jeho autori dostali Nobelovu cenu za ekonómiu v roku 1997. Oceňovacie metódy sa stále vyvíjajú so snahou o čo najväčšie zníženie obmedzujúcich predpokladov.

Cieľom tejto práce je priblížiť princípy oceňovania opcií, ktoré patria medzi základné finančné deriváty. Čitateľ sa môže podrobnejšie informovať o danej problematike v knihe [5] a [7]. Hlavným prínosom práce je alternatívny prístup k oceňovaniu opcií formou simulácií. Tento spôsob oceňovania sa výhýba riešeniu zložitých rovníc a prináša aj iné výhody oproti klasickým spôsobom. Viac o simulačných metódach je napísané v knihe [6]. Ďalším cieľom práce je ukázať použitie oceňovacích metód na konkrétnych príkladoch a porovnať výsledky.

Práca je rozdelená na tri časti. Prvá časť je teoretická a sú v nej uvedené základy stochastického kalkulu, potrebné na oceňovanie finančných derivátov. Druhá časť je venovaná úvodu do oceňovania finančných derivátov, v ktorej ukážeme odvodenie základnej oceňovacej metódy pomocou binomického stromu. Fungovanie tejto metódy ilustrujeme na príklade ocenenia konkrétnej opcie. Následne prejdeme k Black-Scholesovmu vzorcu a oceňovaniu pomocou martingalov, kde využijeme stochastický kalkulus.

Tretia časť je venovaná simulačnému oceňovaniu opcií. Ukážeme, ako sa dá pomocou simulácie vývoja ceny podkladového aktíva vypočítať cena opcie. Najprv budeme uvažovať oceňovací model s konštantnou úrokovou mierou. Potom uvedieme základné modely vývoja úrokovej miery a ukážeme oceňovanie opcie za predpokladu, že úroková miera sa vyvíja podľa Vašíčkovho modelu. Výstupy zo simulácií ilustrujeme aj grafmi.

# Zoznam symbolov a skratiek

| | |
|---|---|
| $\mathbb{R}$ | množina reálnych čísiel |
| $\boldsymbol{b}$ | vektor |
| $\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}$ | náhodný vektor |
| $\boldsymbol{X}(t,\omega), \boldsymbol{X}(t), \boldsymbol{X}_t$ | t-parametrizovaný náhodný vektor |
| $\mathbf{A}^T$ | transponovaná matica $\mathbf{A}$ |
| $\mathbf{I}$ | jednotková matica |
| $\mathbf{0}$ | nulová matica |
| $\exp(x)$ | $\mathrm{e}^x$ |
| $\mathrm{E}[X]$ | stredná hodnota náhodnej premennej $X$ |
| $\mathrm{Var}[X]$ | variancia náhodnej premennej $X$ |
| $\mathrm{Cov}[X,Y]$ | kovariancia náhodnej premennej $X$ a $Y$ |
| $X\|Y$ | náhodná premenná $X$ podmienená $Y$ |
| $\mathscr{N}(\mu,\Sigma)$ | normálne rozdelenie so strednou hodnotou $\mu$ a kovariančnou maticou $\Sigma$ |
| $f(.)$ | funkcia |
| $\mathrm{d}f(t), \mathrm{d}f_t, \mathrm{d}f$ | diferenciál $f$ vzhľadom na $t$ |
| $\frac{\partial f}{\partial x}$ | derivácia $f$ podľa $x$ |
| $\frac{\partial f^2}{\partial^2 x}$ | druhá derivácia $f$ podľa $x$ |
| $\frac{\partial f(x,y)^2}{\partial x \partial y}$ | parciálna derivácia $f$ podľa $x$ a $y$ |
| SDR | stochastická diferenciálna rovnica |

Kapitola 1

# Stručný prehľad elementov stochastického kalkulu

## 1.1 Stochastický proces a Wienerov proces

**Definícia 1.** *[9] Stochastický proces je $t$-parametrický systém náhodných premenných $\boldsymbol{X}_t$ na pravdepodobnostnom priestore $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ s hodnotami v $\mathbb{R}^n$. Pre ľubovoľné, ale pevné $t$ je zobrazenie*

$$\omega \to \boldsymbol{X}_t(\omega),\ \omega \in \Omega,$$

*náhodná premenná. Na druhej strane pre pevné $\omega \in \Omega$, sa zobrazenie*

$$t \to \boldsymbol{X}_t(\omega),\ 0 \le t < \infty,$$

*nazýva trajektória procesu $\boldsymbol{X}_t$.*

Stochastický proces je teda funkciou dvoch premenných: $t$ a $\omega$.

**Definícia 2.** *[9] Wienerov proces je stochastický proces $\{W_t(\omega) \mid 0 \le t\}$ s nasledujúcimi vlastnosťami:*

*i)* $P[\{\omega : W_0(\omega) = 0\}] = 1$,

*ii)* $W_{t+\Delta}(\omega) - W_t(\omega) \sim \mathscr{N}(0, \Delta)$,

*iii) pre každé delenie $t_0 = 0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n$ sú prírastky $W_{t_1}(\omega) - W_{t_0}(\omega)$, $W_{t_2}(\omega) - W_{t_1}(\omega)$, $\ldots$, $W_{t_n}(\omega) - W_{t_{n-1}}(\omega)$ nezávislé.*

Na obrázku 1.1 je vyobrazených niekoľko realizácií Wienerovho procesu, kde možno vidieť jeho náhodný priebeh.

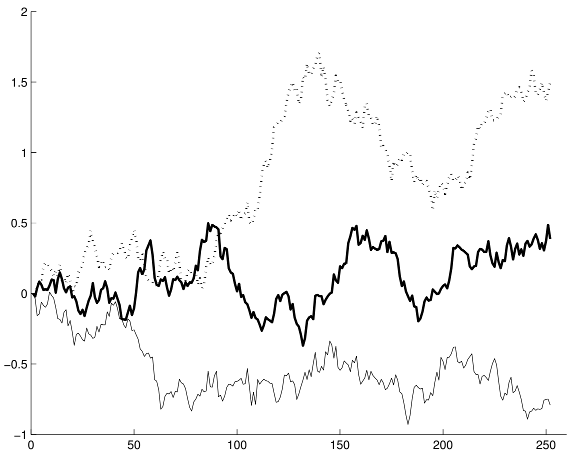
Z predchádzajúcej definície dostávame vzťah pre strednú hodnotu a disperziu Wienerovho procesu

$$\mathrm{E}[W_t] = \mathrm{E}[W_t - W_0] = 0,$$

$$\mathrm{Var}[W_t)] = \mathrm{Var}[W_t - W_0] = t.$$

Pre kovarianciu Wienerovho procesu $W_t$ a $W_s$, pričom $t < s$, platí

$$\mathrm{Cov}[W_t, W_s] = \mathrm{Cov}[W_t, W_t + W_s - W_t] = \mathrm{Var}[W_t] = t$$




***Obr. 1.1:*** *3 náhodné realizácie Wienerovho procesu*

**Definícia 3.** *Nech* $\{W_t \mid 0 \leq t\}$ *je Wienerov proces a* $\boldsymbol{Y}_0$ *je kladná konštanta. Potom proces* $\{\boldsymbol{Y}_t \mid 0 \leq t\}$

$$\boldsymbol{Y}_t(\omega) = \boldsymbol{Y}_0 \mathrm{e}^{W_t}, \quad 0 \leq t,$$

*sa nazýva geometrický Wienerov proces.*

## 1.2 Kvadratická variácia a nediferencovateľnosť

Dôležitou vlastnosťou trajektórií Wienerovho procesu je ich nediferencovateľnosť skoro všade. Táto vlastnosť vyplýva z jeho nenulovej kvadratickej variácie.

**Definícia 4.** *Nech množina* $\Pi = \{t_0, t_1, \ldots, t_n\}$ *je delenie intervalu* $[0, T]$*, také, že* $0 = t_0 \leq t_1 \leq \ldots \leq t_n = T$*. Normu delenia* $\Pi$ *označme*

$$\|\Pi\| = \max_{k=0,\ldots,n-1} (t_{k-1} - t_k).$$

*Potom kvadratická variácia funkcie* $f$ *na intervale* $[0, T]$ *je*

$$\langle f \rangle [0, T] = \lim_{\|\Pi\| \to 0,\ n \to \infty} \sum_{k=0}^{n-1} \left( f(t_{k+1}) - f(t_k) \right)^2 .$$

Kvadratická variácia pre po častiach diferencovateľné funkcie je rovná nule. Vyplýva to z Lagrangeovej vety o strednej hodnote, ktorá hovorí, že ak je funkcia $f$ diferencovateľná na intervale $(a, b)$, potom existuje bod $c \in (a, b)$, pre ktorý platí:

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$$

Nech bod $t_k^* \in \langle t_k, t_{k+1} \rangle$. Potom pre kvadratickú variáciu diferencovateľnej funkcie na intervale $[a, b]$ platí:

$$\begin{aligned} \langle f \rangle [a, b] &= \lim_{\|\Pi\| \to 0,\ n \to \infty} \sum_{k=0}^{n-1} \left( f(t_{k+1}) - f(t_k) \right)^2 = \lim_{\|\Pi\| \to 0,\ n \to \infty} \sum_{k=0}^{n-1} \left( f'(t_k^*) \right)^2 (t_{k+1} - t_k)^2 \\ &\leq \lim_{\|\Pi\| \to 0,\ n \to \infty} \|\Pi\| \sum_{k=0}^{n-1} \left( f'(t_k^*) \right)^2 (t_{k+1} - t_k) = \lim_{\|\Pi\| \to 0} \|\Pi\| \int_0^T \left( f'(t) \right)^2 \mathrm{d}t = 0 \end{aligned}$$

Kvadratická variácia na intervale $[a, b]$ je nezáporné číslo, a teda z nerovnosti vyplýva, že je rovná nule. Kvadratická variácia funkcie sa rovná súčtu kvadratických variácií na intervaloch, a teda je tiež nulová. Nasledujúca lema hovorí, že trajektórie Wienerovho procesu majú nenulovú kvadratickú variáciu, rovnú dĺžke časového úseku, a teda nie sú ani len po častiach diferencovateľné.

**Lema 5.** *Pre Wienerov proces platí*

$$\lim_{\|\Pi\|\to 0,\ n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \left(W_{t_{k+1}} - W_{t_k}\right)^2 = T,$$

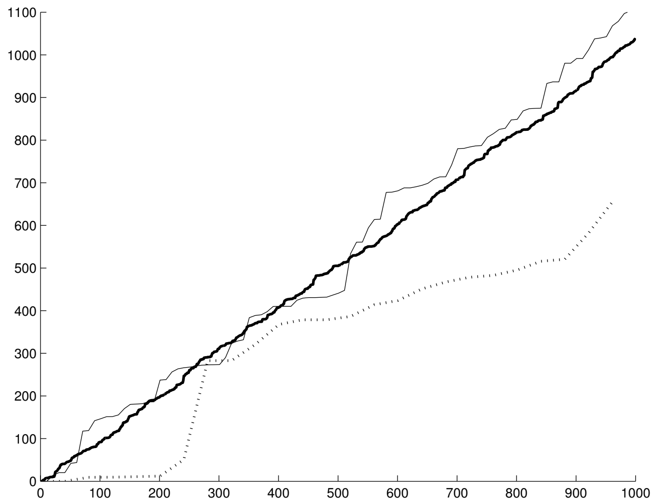
*pričom konvergencia je v zmysle $L^2(\Omega, P)$, čo je priestor merateľných funkcií s konečnou normou definovanou takto*

$$\|f\| := \sqrt{\int_\Omega f^2 \mathrm{d}P} = \sqrt{\mathrm{E}[f^2]}.$$

Uvedená lema hovorí, že súčty štvorcov prírastkov Brownovho pohybu konvergujú k dĺžke časového intervalu, na ktorom prírastky sčitujeme, čím sa akoby strácala náhodnosť. Tento fakt môžeme napísať ako

$$(\mathrm{d}W_t)^2 = \mathrm{d}t. \tag{1.1}$$

Na obrázku 1.2 je znázornená konvergencia súčtu druhých mocnín prírastkov Wienerovho procesu pri postupnom zjemňovaní časového delenia. Táto konvergencia je ilustrovaná troma ukážkami pre rôzne hrubé delenie časového intervalu. Hrubá čiara zodpovedá deleniu časového intervalu na 1000 častí, tenká na 100 častí a bodkovaná na 25 častí.




***Obr. 1.2:*** *Konvergencia súčtu druhých mocnín prírastkov Wienerovho procesu*

## 1.3 Itōv integrál a izometria

Dôležitým elementom stochastického kalkulu je Itōv integrál. V tejto práci sa budeme stretávať s integrálmi v tvare $\int_0^T f(t)\mathrm{d}W(t)$, tzv. Itōv integrál. Pre merateľnú funkciu $f:(0,T)\to\mathbb{R}$ môžeme napísať Itōv integrál ako

$$\int_0^T f(t)\mathrm{d}W(t).$$

Treba si uvedomiť, že na rozdiel od Riemannovho integrálu pre hladké funkcie reálnej premennej nemožno Itōv integrál definovať pomocou derivácie ako

$$\int_0^T f(t)\mathrm{d}W(t) = \int_0^T f(t)W'(t)\mathrm{d}t,$$

pretože funkcia $W(t)$ nie je diferencovateľná s pravdepodobnosťou 1 v žiadnom bode. Pri zavedení pojmu Itōv integrál začneme tak, že ho definujeme pre funkcie, ktoré sú z jeho hľadiska elementárne. Pre konštantnú funkciu $f(t)\equiv k$ je Itōv integrál rovný

$$\int_0^T f(t)\mathrm{d}W(t) = k\int_0^T \mathrm{d}W(t) = kW(T) - kW(0) = kW(T).$$

Kedže $W(T)$ je Wienerov proces, uvedený integrál je náhodnou premennou s normálnym rozdelením

$$\mathcal{N}(0,k^2T) = \mathcal{N}\left(0, \int_0^T f^2(t)\mathrm{d}t\right)$$

Z toho môžeme definovať Itōv integrál pre merateľné funkcie reálnej premennej nasledovne:

**Definícia 6.** *[9] Nech $f:(0,T)\to\mathbb{R}$ je merateľná funkcia a platí $\int_0^T f^2(t)\mathrm{d}(t)) < \infty$. Potom Itōv integrál $\int_0^T f(t)\mathrm{d}W(t)$ definujeme takto:*

$$\int_0^T f(t)\mathrm{d}W(t) := \lim_{\|\Pi\|\to 0,\ n\to\infty} \sum_{i=0}^{n-1} f(t_i)\left(W(t_{i+1}) - W(t_i)\right). \tag{1.2}$$

Pre strednú hodnotu vo výraze (1.2) platí

$$\mathrm{E}\left[\sum_{i=0}^{n-1} f(t_i)\left(W(t_{i+1}) - W(t_i)\right)\right] = \sum_{i=0}^{n-1} f(t_i)\mathrm{E}[W(t_{i+1}) - W(t_i)] = 0,$$

pretože vieme, že stredná hodnota prírastkov Wienerovho procesu je nulová. Prírastky $\mathrm{d}W(t_i)$ sú nezávislé normálne rozdelené náhodné veličiny, a teda pre disperziu sumy platí

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}\left[\sum_{i=0}^{n-1} f(t_i)\left(W(t_{i+1}) - W(t_i)\right)\right] &= \sum_{i=0}^{n-1} f^2(t_i)\mathrm{Var}[W(t_{i+1}) - W(t_i)] \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} f^2(t_i)(t_{i+1} - t_i),\end{aligned}$$

a ak prejdeme k limite, pre $\|\Pi\| \to 0$, $n \to \infty$, dostávame

$$\mathrm{E}\left[\left(\int_0^T f(t)\mathrm{d}W(t)\right)^2\right] = \int_0^T f(t)^2\mathrm{d}t \tag{1.3}$$

Rovnosť (1.3) sa nazýva *Itōva izometria*. Pre Itōv integrál teda platí nasledujúca lema.

**Lema 7.** *[9] Itōv integrál $\int_0^T f(t)\mathrm{d}W(t)$ má normálne rozdelenie*

$$\mathcal{N}\left(0, \int_0^T f^2(t)\mathrm{d}t\right).$$

Pri zavedení Itōvho integrálu $\int_0^T X_t(\omega)\mathrm{d}W_t(\omega)$ pre funkcie $\boldsymbol{X}_t(\omega)$, ktoré sú samy o sebe stochastickým procesom

$$(t, \omega) \to X_t(\omega),$$

môžeme spraviť ich aproximáciu funkčnou hodnotou v nejakom bode deliaceho intervalu. Pre ľavý krajný bod je aproximačná funkcia

$$L_t(\omega) = \sum_{i=0}^{n-1} X_{i/n}(\omega)\chi_t(i/n, (i+1)/n)$$

a pre pravý

$$R_t(\omega) = \sum_{i=0}^{n-1} X_{i+1/n}(\omega)\chi(t_{i/n}, t_{(i+1)/n}),$$

kde $\chi(t_{i/n}, t_{(i+1)/n})$ je charakteristická funkcia intervalu $\langle t_{i/n}, t_{(i+1)/n})$. Potom integrál $\int_0^T X_t(\omega)dW_t(\omega)$ môžeme napísať ako limitu súčtov

$$\sum_{i=0}^{n-1} L_t(\omega)(W_{t_{i+1}}(\omega) - W_{t_i}(\omega)) \qquad \text{resp.} \qquad \sum_{i=0}^{n-1} R_t(\omega)(W_{t_{i+1}}(\omega) - W_{t_i}(\omega)).$$

Problémom však je fakt, že daný integrál závisí od voľby bodu z deliaceho intervalu, v ktorom aproximujeme funkciu $X_t(\omega)$. V knihe [7][str.142] je ukázané, že pre výber ľavého bodu konverguje stredná hodnota integrálu k nule, zatiaľ čo pre pravý bod k dĺžke príslušného intervalu $T$:

$$\mathrm{E}\left[\int_0^T L_t(\omega)\mathrm{d}W_t(\omega)\right] = 0 \tag{1.4}$$

$$\mathrm{E}\left[\int_0^T R_t(\omega)\mathrm{d}W_t(\omega)\right] = T$$

Teda ak k sebe nekonvergujú stredné hodnoty, nemôžu k sebe konvergovať ani integrály a pre rôzne voľby bodov môžeme dostať vo všeobecnosti rôzne výsledky.

Štandardnými výbermi z deliaceho intervalu $\langle t_i, t_{i+1}\rangle$ je ľavý bod $t_i$, pre ktorý dostávame *Itōv integrál*

$$\int_0^T X_t(\omega)\mathrm{d}W_t(\omega),$$

a stredný bod $(t_i + t_{i+1})/2$, pre ktorý dostávame *Stratonovichov integrál*, označený

$$\int_0^T X_t(\omega) \circ \mathrm{d}W_t(\omega).$$

Pre Stratonovichov integrál fungujú integračné formulky podobne ako v prípade Riemannovho integrálu.

Po zavedení pojmu Itōv integrál môžeme definovať stochastickú diferenciálnu rovnicu nasledovne:

**Definícia 8.** *[9]*

*Stochastická diferenciálna rovnica (SDR) je diferenciálna rovnica, v ktorej jeden alebo viacero členov je stochastickým procesom. SDR môžeme zapísať pomocou Itōvho integrálu ako*

$$X_{t+s} - X_t = \int_t^{t+s} \mu(X_u, u)\mathrm{d}u + \int_t^{t+s} \sigma(X_u, u)\mathrm{d}W_u,$$

*čo možno ekvivalentne zapísať v diferenciálnom tvare ako*

$$\mathrm{d}X_t = \mu(X_t, t)\mathrm{d}t + \sigma(X_t, t)\mathrm{d}W_t.$$

SDR teda pozostávajú z deterministickej a náhodnej zložky a ich riešením je opäť stochastický proces. Obzvlášť dôležité sú SDR pre funkcie, v ktorých je jedna alebo viacero náhodných premenných, určených nejakou inou SDR. Na otázku, ako bude vyzerať SDR pre vývoj funkcie $f(X_t, t)$, ak poznáme SDR pre $X_t$, odpovedá Itōva lema, ktorá je dôležitým výsledkom stochastického kalkulu.

## 1.4 Itōva lema

**Veta 9** (Itōva lema [4]). *Nech $f(x, t)$ je dostatočne hladká funkcia dvoch premenných, pričom $X_t$ je riešením SDR*

$$\mathrm{d}X_t = \mu(X_t, t)\mathrm{d}t + \sigma(X_t, t)\mathrm{d}W_t,$$

*kde $W_t$ je Wienerov proces. Potom*

$$\mathrm{d}f(X_t, t) = \frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}X_t + \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2(X_t, t)\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)\mathrm{d}t,$$

*dôsledkom čoho funkcia f vyhovuje SDR*

$$\mathrm{d}f = \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \mu(X_t, t)\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{2}\sigma^2(X_t, t)\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)\mathrm{d}t + \sigma(X_t, t)\frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}W_t.$$

Dôkaz, resp. odvodenie Itóvej lemy sa dá nahliadnúť cez Taylorov rozvoj funkcie $f$:

$$\mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial t}\mathrm{d}t + \frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}X_t + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\mathrm{d}X_t^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial t}\mathrm{d}X_t\mathrm{d}t + \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}\mathrm{d}t^2\right) + o(\mathrm{d}t),$$

kde $o(\mathrm{d}t)$ sú ostatné členy vyššieho rádu. Pre $\mathrm{d}X_t$ platí

$$\mathrm{d}X_t^2 = \sigma^2\mathrm{d}W_t^2 + 2\mu\sigma\mathrm{d}W_t\mathrm{d}t + \mu^2\mathrm{d}t^2,$$

z čoho využitím vzťahu (1.1) pre $\mathrm{d}W_t$ dostávame

$$\mathrm{d}X_t^2 \approx \sigma^2\mathrm{d}t + O(\mathrm{d}t^{3/2}) + O(\mathrm{d}t^2).$$

Podobne pre výraz $\mathrm{d}X_t\mathrm{d}t$ dostaneme:

$$\mathrm{d}X_t\mathrm{d}t = \mu\mathrm{d}t^2 + \sigma\mathrm{d}W_t\mathrm{d}t = O(\mathrm{d}t^2) + O(\mathrm{d}t^{3/2}).$$

Členy, ktoré obsahujú $\mathrm{d}t$ vyššieho rádu ako jedna, idú k nule, a teda diferenciál funkcie $f$ môžeme napísať ako:

$$\mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}X_t + \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2(X_t,t)\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)\mathrm{d}t.$$

Nakoniec za $\mathrm{d}X_t$ dosadíme $\mu(X_t,t)\mathrm{d}t + \sigma(X_t,t)\mathrm{d}W_t$ a dostávame SDR pre funkciu $f$ z Itōvej lemy.

## 1.5 Martingaly a Girsanova veta

Martingal predstavuje model hry, resp. sekvenciu náhodných premenných, pre ktorú platí, že očakávanie ďalšej hodnoty je rovnaké ako súčasná hodnota. Teda vedomosť o minulých hodnotách nie je výhodou a nemá vplyv na hráčovo očakávanie. Martingalom je napríklad hra, v ktorej sa hráč snaží uhádnúť, aké číslo padne na kocke. Oproti tomu hra, v ktorej hráč tipuje, akú kartu si vytiahne z balíčka bez vrátenia, nie je martingalom, lebo vedomosť toho, aké karty už boli vytiahnuté, zvyšuje pravdepodobnosť úspechu (napr. ak je v balíčku posledná karta, tak pravdepodobnosť úspechu je 100%). Na presné definovanie martingalu bude potrebné zaviesť pojmy ako *merateľnosť*, *podmienená stredná hodnota* a *filtrácia*.

**Definícia 10.** *[9] Stochastický proces* $\omega \to \boldsymbol{X}_t(\omega)$; $\omega \in \Omega$ *na pravdepodobnostnom priestore* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *s hodnotami v* $\mathbb{R}^n$*, sa nazýva* $\mathcal{F}$*-merateľný, ak*

$$\boldsymbol{X}_t^{-1}(U) := \{\omega \in \Omega;\ \boldsymbol{X}_t(\omega) \in U\} \in \mathcal{F}$$

*pre všetky otvorené množiny* $U \in \mathbb{R}^n$.

**Definícia 11.** *[8] Nech na pravdepodobnostnom priestore* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *pre náhodnú premennú* $X : \Omega \to \mathbb{R}$ *platí* $\mathrm{E}[|X|] < \infty$. *Nech* $\mathcal{H} \subset \mathcal{F}$ *je* $\sigma$*-algebra (*$\mathcal{H}$ *je teda menej bohatá ako* $\mathcal{F}$*). Potom podmienená stredná hodnota* $\mathrm{E}[X|\mathcal{H}]$ *je náhodná premenná s nasledujúcimi vlastnosťami:*

*i)* $\mathrm{E}[X|\mathcal{H}]$ *je* $\mathcal{H}$*-merateľná*

*ii)* $\int_h \mathrm{E}[X|\mathcal{H}]\mathrm{d}P = \int_h X\mathrm{d}P$*, pre všetky* $h \in \mathcal{H}$*.*

Podmienená stredná hodnota je teda stredná hodnota závislá od príslušnej $\sigma$-algebry, ktorá predstavuje informáciu o realizovaných hodnotách v príslušnom čase. Nasledujúca veta hovorí o základných vlastnostiach podmienenej strednej hodnoty.

**Veta 12.** *[8] Nech* $X$ *a* $Y$ *sú náhodné veličiny s konečnou strednou hodnotou na pravdepodobnostnom priestore* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$*. Ďalej nech* $a$, $b \in \mathbb{R}$ *a* $\mathcal{G}$, $\mathcal{H}$ *sú* $\sigma$*-algebry, pre ktoré platí*

$$\mathcal{G} \subset \mathcal{H} \subset \mathcal{F}$$

*Potom platí:*

*i)* $\mathrm{E}[aX + bY|\mathcal{H}] = a\mathrm{E}[X|\mathcal{H}] + b\mathrm{E}[Y|\mathcal{H}]$

*ii)* $\mathrm{E}[\mathrm{E}[X|\mathcal{H}]] = \mathrm{E}[X]$

*iii)* $\mathrm{E}[\mathrm{E}[X|\mathcal{H}]|\mathcal{G}] = \mathrm{E}[X|\mathcal{G}]$

*iv) ak* $X$ *je* $\mathcal{H}$*-merateľná, potom* $\mathrm{E}[X|\mathcal{H}] = X$

*v) ak* $Y$ *je* $\mathcal{H}$*-merateľná, potom* $\mathrm{E}[YX|\mathcal{H}] = Y\mathrm{E}[X|\mathcal{H}]$

Teraz môžeme prejsť k definícii filtrácie a martingalu.

**Definícia 13.** *[9] Filtráciou na pravdepodobnostnom priestore* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *je systém* $\sigma$*-algebier* $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$, $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}$*, takých, že*

$$s < t \Rightarrow \mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$$

*Stochastický proces* $\{\boldsymbol{X}_t\}_{t\geq 0}$ *na* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *sa nazýva martingal vzhľadom na mieru* $P$ *a filtráciu* $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$*, ak*

*i)* $\boldsymbol{X}_t$ *je* $\mathcal{F}_t$*-merateľný pre všetky* $t$*,*

*ii)* $\mathrm{E}[|\boldsymbol{X}_t|] < \infty$ *pre všetky* $t$*,*

*iii)* $\mathrm{E}[\boldsymbol{X}_s|\mathcal{F}_t] = \boldsymbol{X}_t$ *pre všetky* $s \geq t$*.*

Martingal sa vždy vzťahuje k určitej pravdepodobnostnej miere $P$ a filtrácii $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$. Filtráciou sa obvykle rozumie prirodzený systém do seba zapadajúcich $\sigma$-algebier. Filtráciu generovanú Wienerovým procesom budeme označovať $\mathcal{F}_t^W$. Niekedy sa martingal vzhľadom na mieru $P$ označuje ako $P$-martingal.

**Veta 14.** *[7] Nech* $\{\boldsymbol{X}_t\}_{0\leq t\leq T}$ *a* $\{\boldsymbol{Y}_t\}_{0\leq t\leq T}$ *sú stochastické procesy na pravdepodobnostnom priestore* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *a nech pre* $t \in [0, T]$ *platí*

$$\boldsymbol{Y}_t = \mathrm{E}(\boldsymbol{X}_T|\mathcal{F}_t).$$

*Potom* $\{\boldsymbol{Y}_t\}_{0\leq t\leq T}$ *je* $P$*-martingalom vzhľadom na filtráciu* $\{\mathcal{F}_t\}_{0\leq t}$*.*

*Dôkaz:* Využitím vlastnosti podmienenej strednej hodnoty $iii)$ z vety 12 pre $0 \leq t \leq s \leq T$ dostávame

$$\boldsymbol{Y}_t = \mathrm{E}(\boldsymbol{X}_T|\mathcal{F}_t) = \mathrm{E}(\mathrm{E}(\boldsymbol{X}_T|\mathcal{F}_s)|\mathcal{F}_t) = \mathrm{E}(\boldsymbol{Y}_s|\mathcal{F}_t),$$

z čoho vyplýva, že $\{\boldsymbol{Y}_t\}_{0\leq t\leq T}$ je martingal. □

Dôležitú úlohu budú hrať $\mathcal{F}_t^W$-adaptované procesy, ktoré informačne sledujú Wienerov proces. $\mathcal{F}_t^W$-adaptovanosť teda znamená, že daný proces nepredbieha prúd informácií, ktorý predstavuje filtrácia $\mathcal{F}_t^W$.

Ako uvidíme ďalej, pri oceňovaní derivátov budeme ich cenu rátať ako diskontovanú strednú hodnotu z budúceho vývoja podkladového aktíva. Avšak táto stredná hodnota nebude počítaná pri pôvodnej pravdepodobnostnej miere, ale pri tzv. bezrizikovej miere $Q$, ktorá zaručí spravodlivú, bezarbitrážnu cenu derivátu. Existenciu miery $Q$ zaručuje nasledujúca veta.

**Veta 15** (Girsanova veta [7])**.** *Nech $W_t(\omega)$, $0 \leq t \leq T$, je Wienerov proces na $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ a $\gamma_t(\omega)$ je $\mathcal{F}_t^W$-adaptovaný proces, pričom platí*

$$\mathrm{E}_P\left[\exp\left(\frac{1}{2}\int_0^T \gamma_t^2(\omega)\mathrm{d}t\right)\right] < \infty.$$

*Potom existuje miera $Q$ na $(\Omega, \mathcal{F})$ taká, že*

*i)* *$P$ a $Q$ su ekvivalentné, teda platí $P(x) > 0 \Leftrightarrow Q(x) > 0$,*

*ii)* $\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}P}(\omega) = \exp(-\int_0^T \gamma_t(\omega)\mathrm{d}W_t(\omega) - \frac{1}{2}\int_0^T \gamma_t^2(\omega)\mathrm{d}t)$,

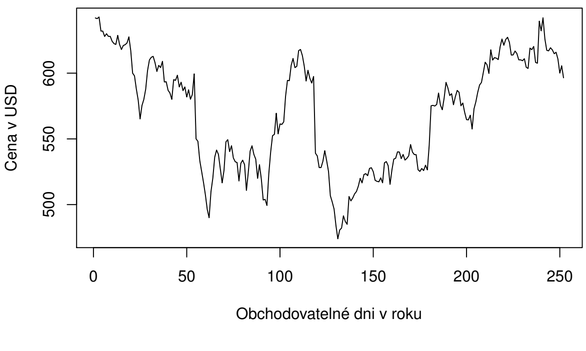
*iii)* $\tilde{W}_t(\omega) = W_t(\omega) + \int_0^t \gamma_s(\omega)\mathrm{d}s$ *je Wienerov proces na* $(\Omega, \mathcal{F}, Q)$.

V predchádzajúcej vete sa výraz $\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}P}(\omega)$ nazýva Radon-Nikodymova derivácia miery $Q$ vzhľadom na mieru $P$.

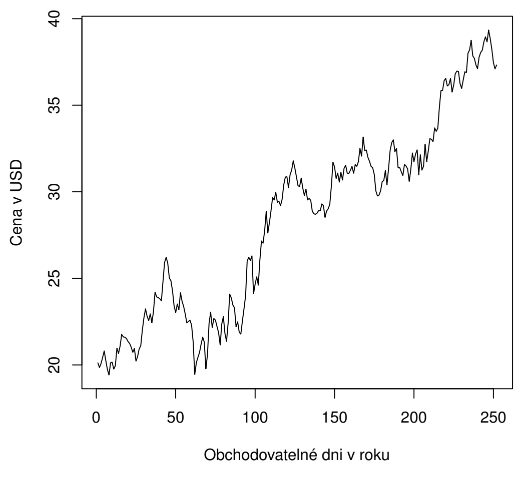
Kapitola **2**

# *Úvod do oceňovania finančných derivátov*

Finančný derivát je cenný papier, ktorého hodnota závisí od podkladového aktíva. V tejto kapitole ukážeme, ako sa oceňujú opcie, teda finančné deriváty, ktorých podkladovým aktívom sú akcie. Najprv ukážeme základný princíp oceňovania derivátov pomocou binomického stromu. Potom prejdeme k Black-Scholesovej oceňovacej formulke a nakoniec ukážeme oceňovanie derivátov pomocou martingalov, kde využijeme stochastický kalkulus z prvej kapitoly. Finančné nástroje majú stochastický charakter. Príkladom je náhodný vývoj ceny akcie, pričom $\boldsymbol{X}_t(\omega)$ je cena akcie v čase $t$ a trajektóriou je množina cien akcie $\{\boldsymbol{X}_t;\ t \in T\}$ za časové obdobie $T$. Na obrázkoch 2.1 a 2.2 je zobrazený vývoj ceny akcie (trajektória) firmy Google Inc. a General Motors za rok 2011.




***Obr. 2.1:*** *Cena akcie Google Inc.*




***Obr. 2.2:*** *Cena akcie General Motors*

## 2.1 Binomický strom

### 2.1.1 Jednokrokový binomický strom

Predpokladajme, že chceme určiť hodnotu európskej kúpnej opcie $f_0$ v čase $t = 0$ na akciu s hodnotou $S_0$, pričom cena príslušnej akcie môže za malý časový úsek $\mathrm{d}t$ buď vzrásť na hodnotu $S_2$, alebo klesnúť na hodnotu $S_1$. Ďalej predpokladáme, že pri raste ceny akcie bude mať opcia hodnotu $f_2$ a pri poklese hodnotu $f_1$. Pri určení $f_0$ využijeme portfólio, ktoré zostavíme vypísaním (predajom) jednej kúpnej opcie a kúpením $\alpha$ akcií, teda jeho hodnota v čase $t = 0$ sa bude rovnať:

$$\alpha S_0 - f_0.$$

Ďalej požadujeme, aby toto portfólio bolo bezrizikové, to znamená, že jeho hodnota bude rovnaká bez ohľadu na to, či cena akcie stúpne alebo klesne, teda v čase $\mathrm{d}t$ platí:

$$\alpha S_2 - f_2 = \alpha S_1 - f_1$$

a počet akcií je

$$\alpha = \frac{f_2 - f_1}{S_2 - S_1}.$$

Ale zároveň pre toto bezrizikové portfólio musí platiť, že jeho výnos je rovnaký ako výnos iného bezrizikového aktíva na trhu (napr. US Treasury Bonds), inak by došlo k arbitráži. Označme bezrizikovú úrokovú mieru $r$. Potom hodnota portfólia v čase $t = 0$ sa rovná diskontovanej hodnote portfólia v čase $dt$:

$$\alpha S_0 - f_0 = \mathrm{e}^{-r\mathrm{d}t}(\alpha S_2 - f_2) = \mathrm{e}^{-r\mathrm{d}t}(\alpha S_1 - f_1).$$

Z toho pre $f_0$ platí

$$\begin{aligned}
f_0 &= \alpha S_0 + \mathrm{e}^{-r\mathrm{d}t}(f_2 - \alpha S_2) \\
&= \frac{f_2 - f_1}{S_2 - S_1} S_0 + \mathrm{e}^{-r\mathrm{d}t}\left(f_2 - \frac{f_2 - f_1}{S_2 - S_1} S_2\right) \\
&= \mathrm{e}^{-r\mathrm{d}t}\left(\frac{f_2 S_0 \mathrm{e}^{r\mathrm{d}t} - f_1 S_0 \mathrm{e}^{r\mathrm{d}t} + f_1 S_2 - f_2 S_1}{S_2 - S_1}\right) \\
&= \mathrm{e}^{-r\mathrm{d}t}\left[\frac{S_0 \mathrm{e}^{r\mathrm{d}t} - S_1}{S_2 - S_1} f_2 + \left(1 - \frac{S_0 \mathrm{e}^{r\mathrm{d}t} - S_1}{S_2 - S_1}\right) f_1\right] \\
&= \mathrm{e}^{-r\mathrm{d}t} q f_2 + (1 - q)\mathrm{e}^{-r\mathrm{d}t} f_1,
\end{aligned}$$

kde

$$q = \frac{S_0 \mathrm{e}^{r\mathrm{d}t} - S_1}{S_2 - S_1}$$

je rizikovo neutrálna pravdepodobnosť. Z toho vyplýva, že súčasná cena opcie $f_0$ je diskontovanou strednou hodnotou pri rizikovo neutrálnych pravdepodobnostiach z budúcich cien opcie.

### 2.1.2 Odvodenie viackrokového binomického stromu

Viackrokový binomický strom budeme skladať z postupnosti jednokrokových stromov. Na to, aby sme sa dostali ku koncovým cenám opcie (v čase expirácie), potrebujeme modelovať vývoj ceny podkladového aktíva, t.j. akcie. Potom z možných koncových cien akcie $S_j^T$ ($j = 0, 1, \ldots n$ pri $n$-krokovom strome) ľahko vypočítame koncové ceny opcie $f_j^T$ na základe vzorca:

$$f_j^T = \max(S_j^T - K, 0), \tag{2.1}$$

kde K je tzv. realizačná cena (strike price). Nakoniec súčasnú cenu opcie spočítame ako diskontovanú strednú hodnotu pri rizikovo neutrálnych pravdepodobnostiach z $f_j^T$.

### 2.1.3 Modelovanie vývoja ceny akcie

Cenu akcie budeme modelovať podľa Coxovho-Rossovho-Rubinsteinovho modelu [3], v ktorom sa predpokladá, že cena akcie za čas $\mathrm{d}t$ buď vzrastie o hodnotu $U$ alebo klesne o hodnotu $D$:

$$\begin{aligned} U &= \mathrm{e}^{\sigma\sqrt{\mathrm{d}t}}, \\ D &= \mathrm{e}^{-\sigma\sqrt{\mathrm{d}t}}, \end{aligned}$$

kde $\sigma$ je volatilita akcie, ktorú budeme počítať z historických dát cien akcie

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{t=1}^{n}(Y_t - \bar{Y})^2}. \tag{2.2}$$

Tu

$$Y_t = \frac{S_t - S_{t-1}}{S_{t-1}}$$

je relatívny prírastok ceny akcie za jeden deň, $\bar{Y}$ je ich priemer a $n$ je počet dní obdobia, za ktoré meriame (dennú) volatilitu. Keďže budeme ďalej počítať s ročným úrokom $r$ a takisto časovými intervalmi vzhľadom na rok ($1$ deň$=1/252$ rok), treba aj dennú volatilitu prepočítať na ročnú, a to vynásobením odmocninou z počtu obchodovateľných dní v roku (priemerne $252$ dní).

Cena akcie $S_0$ teda môže za čas $\mathrm{d}t$ vzrásť na hodnotu $S_0 \times U$ $(= S_0\mathrm{e}^{\sigma\sqrt{\mathrm{d}t}})$ s pravdepodobnosťou $q$ alebo klesnúť na $S_0 \times D$ $(= S_0\mathrm{e}^{-\sigma\sqrt{\mathrm{d}t}})$ s pravdepodobnosťou $1-q$, kde pre rizikovo neutrálnu pravdepodobnosť platí

$$q = \frac{S_0\mathrm{e}^{r\mathrm{d}t} - S_0\mathrm{e}^{-\sigma\sqrt{\mathrm{d}t}}}{S_0\mathrm{e}^{\sigma\sqrt{\mathrm{d}t}} - S_0\mathrm{e}^{-\sigma\sqrt{\mathrm{d}t}}} = \frac{\mathrm{e}^{r\mathrm{d}t} - \mathrm{e}^{-\sigma\sqrt{\mathrm{d}t}}}{\mathrm{e}^{\sigma\sqrt{\mathrm{d}t}} - \mathrm{e}^{-\sigma\sqrt{\mathrm{d}t}}} = \frac{\mathrm{e}^{r\mathrm{d}t} - D}{U - D}$$

V ďalšom kroku sa posunieme do času $\mathrm{d}t$ a zopakujme postup pre dve nové ceny $S_0 \times U$ a $S_0 \times D$, čím dostaneme ceny v čase $2\mathrm{d}t$, atď. Tento postup opakujeme dovtedy, kým $n.\mathrm{d}t = T$, čím dostaneme $n$-krokový binomický strom. Napr. 4-krokový binomický strom pre cenu akcie by vyzeral takto:

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & S_0 & & & & \\
 & & & S_0 \times U & & S_0 \times D & & & \\
 & & S_0 \times U^2 & & S_0 \times U \times D & & S_0 \times D^2 & & \\
 & S_0 \times U^3 & & S_0 \times U^2 \times D & & S_0 \times U \times D^2 & & S_0 \times D^3 & \\
S_0 \times U^4 & & S_0 \times U^3 \times D & & S_0. \times U^2 \times D^2 & & S_0 \times U \times D^3 & & S_0 \times D^4 \\
\binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4}
\end{array}$$

Kombinačné čísla pod koncovými cenami určujú počet ciest, ktorými sa cena $S_0$ mohla dostať do danej koncovej ceny v čase $t = T$.

Vo všeobecnosti pre $n$-krokový binomický strom platí, že pravdepodobnosť, že koncová cena akcie bude

$$S_j^T = S_0 \times U^j \times D^{n-j}, \quad j = 0, 1, \ldots n,$$

je

$$P(S_j^T) = \binom{n}{j}.q^j.(1-q)^{n-j}.$$

Ku koncovým cenám akcie teraz môžeme priradiť príslušné ceny opcie podľa (2.1). Samozrejme platí, že $P(f_j^T) = P(S_j^T)$. Nakoniec súčasnú cenu opcie $f_0$ vypočítame ako diskontovanú strednú hodnotu pri rizikovo neutrálnej pravdepodobnosti $q$ z cien opcie $f_j^T$

$$f_0 = \mathrm{e}^{-rT} \sum_{j=0}^{n} f_j^T.P(f_j^T) = \mathrm{e}^{-rT} \sum_{j=0}^{n} f_j^T.\binom{n}{j}.q^j.(1-q)^{n-j}$$

### 2.1.4 Aplikácia modelu na akciu firmy Apple Inc.

Ukážeme, ako sa ocení európska kúpna opcia na akciu Apple Inc. ku dňu 25.novembra 2011 s dobou expirácie dva týždne (9.decembra 2011) a realizačnou cenou $365$\$, pričom otváracia cena akcie 25.novembra bola $368.42$\$.

Cenu akcie modelujeme v čase od 25.11. do 9.12. pomocou 10-krokového binomického stromu, keďže v danom čase bolo 10 obchodovateľných dní, počas ktorých sa cena akcie mohla hýbať. To znamená, že $\mathrm{d}t = 1/252$ a $T = 10.\mathrm{d}t = 10/252$

V prvom kroku vypočítame ročnú volatilitu $\sigma$ akcií Apple Inc. z historických cien akcie za posledný mesiac podľa (2.2) a ročnú bezrizikovú úrokovú mieru $r$ stanovíme ako ročný výnos amerických vládnych dlhopisov s maturitou 10 rokov. Volatilita je $\sigma = 0.19$ a bezrizikový úrok je $r = 0.02$. Potom skok ceny akcie hore a dole je

$$U = \mathrm{e}^{\sigma\sqrt{\mathrm{d}t}} = 1.0120, \qquad D = \mathrm{e}^{-\sigma\sqrt{\mathrm{d}t}} = 0.9881$$

a rizikovo neutrálna pravdepodobnosť q

$$q = \frac{\mathrm{e}^{r\mathrm{d}t} - D}{U - D} = 0.5003$$

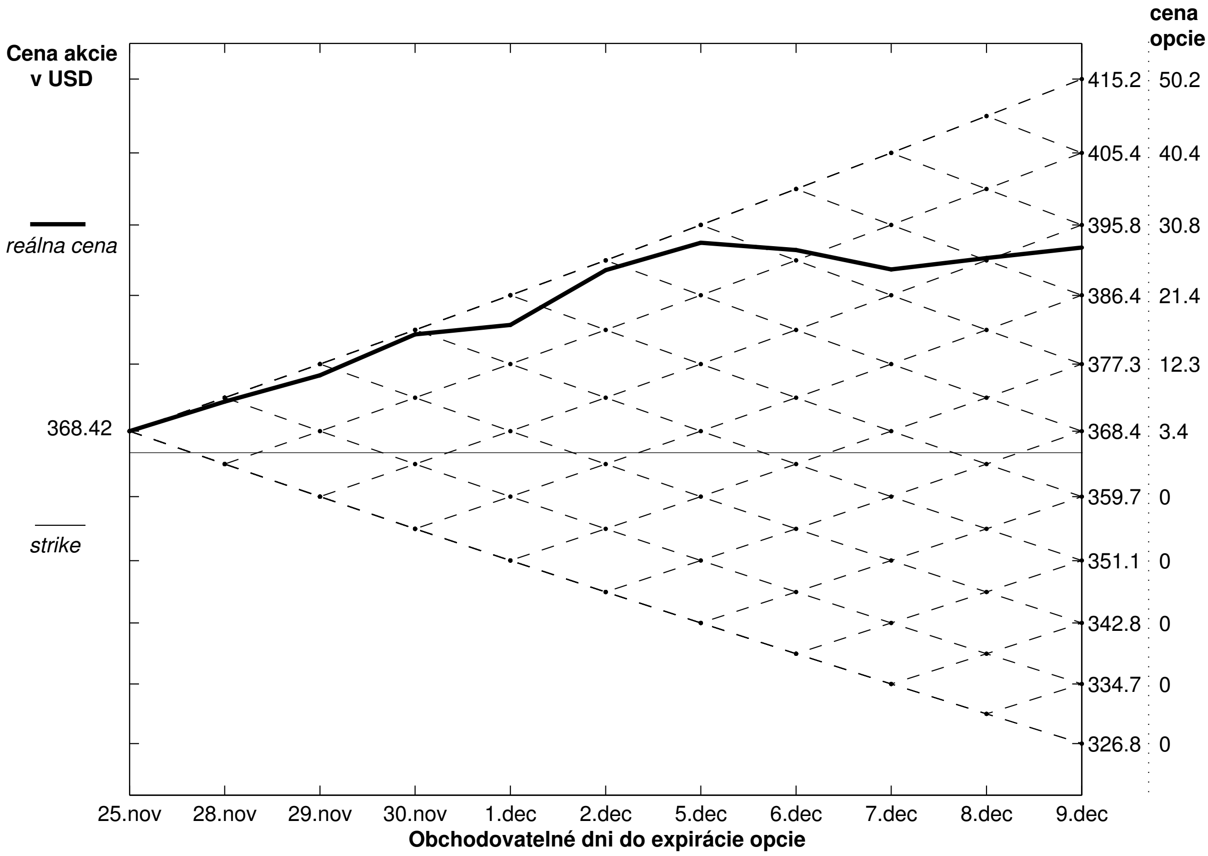
Na obrázku 2.3 sú znázornené koncové ceny akcie a príslušné ceny opcie, z ktorých spočítame cenu opcie $f_0$ dňa 25.novembra ako diskontovanú strednú hodnotu z cien opcie $f_j^T$ dňa 9.decembra, pri bezrizikovej pravdepodobnosti $q$.

Cena tejto opcie sa teda rovná

$$f_0 = \mathrm{e}^{-rT} \sum_{j=0}^{10} \binom{10}{j} .q^j .q^{10-j} .f_j^T = 7.70\$$$

Réalna cena opcie bola zhruba o $25\%$ vyššia v priebehu celého dňa. Táto nepresnosť oceňovacieho modelu spočíva v tom, že v ňom nie sú zohľadnené očakávania na trhu, ani napríklad transakčné náklady.

Ak je skutočná cena akcie Apple Inc. (hrubá krivka na obrázku 2.3) v priebehu životnosti opcie v cenovom rozpätí binomického stromu, potom to znamená, že strom bol dobre nakalibrovaný. Ak by skutočná cena akcie prekročila hranice stromu, znamenalo by to, že volatilita je v skutočnosti väčšia ako odhadnutá historická volatilita použitá na generovanie stromu, a teda strom by mal byť širší (čím väčšia volatilita, tým širší strom).




***Obr. 2.3:*** *10-krokový binomický strom pre ocenenie európskej kúpnej opcie na akciu Apple Inc.*

## 2.2 Black-Scholesov vzorec

Prelom v obchodovaní a oceňovaní finančných derivátov nastal v roku 1973, keď Fisher Black a Myron Scholes publikovali [1] tzv. Black-Scholesov vzorec na ocenenie opcií európskeho typu. Black a Scholes odvodili parciálnu diferenciálnu rovnicu, ktorá určuje cenu derivátu použitím zaisťovacieho bezrizikového princípu. Riešením tejto rovnice je Black-Scholesov vzorec, ktorý sa stal populárnym vďaka tomu, že je funkciou niekoľkých priamo pozorovateľných parametrov.

Odvodenie Black-Scholesovho vzorca sa stalo tradičnou súčasťou literatúty o oceňovaní finančných derivátov a môžeme ho nájsť napr. v klasickej knihe od Kwoka [5]. V nasledujúcom texte ukážeme, ako sa dá odvodiť parciálna diferenciálna rovnica pre cenu európskej kúpnej opcie použitím priebežného zaisťovania. Uvažujme prípad, keď niekto vypíše (predá) kúpnu opciu na akciu. Cena akcie môže vzrásť vysoko nad realizačnú cenu, a tým spôsobiť vypisovateľovi opcie veľkú stratu. Ako poistenie voči takejto strate si vypisovateľ kúpi príslušnú akciu, a teda strata spôsobená vypísaním opcie je vykompenzovaná držaním akcie, ktorej cena rastie. Takáto zaistená pozícia teda pozostáva z nákupu a predaja určitého množstva akcií a opcií tak, aby prípadný pokles v jednej položke bol vykompenzovaný nárastom v druhej položke. Tento princíp zabezpečeného portfólia bol známy už predtým, ale až Black a Scholes si uvedomili, že výnos z tohto portfólia by sa mal rovnať bezrizikovej úrokovej miere.

Predpokladajme, že cena podkladového aktíva (akcie) je daná rovnicou

$$\mathrm{d}S_t = \mu S_t \mathrm{d}t + \sigma S_t \mathrm{d}W_t, \tag{2.3}$$

kde $\mu$ je očakávaný výnos a $\sigma$ je volatilita ceny akcie (predpokladáme, že sú konštantné). Ďalej predpokladajme, že vývoj ceny akcie predstavuje náhodný výber z lognormálneho rozdelenia, t.j. $C_t = S_t/S_{t-1},\quad t = 1, 2, \ldots, T$, sú i.i.d. náhodné premenné s lognormálnym rozdelením a parametrami $\mu$ a $\sigma^2$. Náhodná premenná $Y_t = \ln C_t, t = 1, 2, \ldots, T$ má teda normálne rozdelenie a rovnaké parametre $\mu$ a $\sigma^2$. Z Itôvej lemy dostávame

$$\begin{aligned}\mathrm{d}Y_t &= 0\mathrm{d}t + \frac{1}{S_t}\mathrm{d}S_t - \frac{1}{2S_t^2}\sigma^2 S_t^2 \mathrm{d}t \\ &= \mu \mathrm{d}t + \sigma \mathrm{d}W_t - \frac{1}{2}\sigma^2 \mathrm{d}t,\end{aligned}$$

a teda

$$\begin{aligned}Y_t &= Y_0 + \mu t + \sigma W_t - \frac{1}{2}\sigma^2 t \\ \ln S_t &= \ln S_0 + \mu t + \sigma W_t - \frac{1}{2}\sigma^2 t,\end{aligned}$$

z čoho dostávame riešenie rovnice (2.3) v podobe geometrického Wienerovho procesu:

$$S_t = S_0 \exp\left(\mu t + \sigma W_t - \frac{1}{2}\sigma^2 t\right). \tag{2.4}$$

Vytvorme zaistené portfólio pozostávajúce z predaja jednej európskej kúpnej opcie a nákupu $\alpha_t$ akcií (množstvo akcií sa priebežne mení). Potom hodnota portfólia $H(S_t, t)$ je

$$H(S_t, t) = -V + \alpha_t S_t,$$

kde $V = V(S_t, t)$ je cena kúpnej opcie v závislosti od ceny akcie. Použitím Itōvej lemy pre stochastickú funkciu $V(S_t, t)$ dostávame jej diferenciál

$$\mathrm{d}V = \frac{\partial V}{\partial S_t}\mathrm{d}S_t + \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S_t^2}\right)\mathrm{d}t.$$

Z toho dostávame

$$\begin{aligned} -\mathrm{d}V + \alpha_t \mathrm{d}S_t &= \left(-\frac{\partial V}{\partial t} - \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S_t^2}\right)\mathrm{d}t + \left(\alpha_t - \frac{\partial V}{\partial S_t}\right)\mathrm{d}S_t \\ &= \left[-\frac{\partial V}{\partial t} - \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S_t^2} + \left(\alpha_t - \frac{\partial V}{\partial S_t}\right)\mu S_t\right]\mathrm{d}t + \left(\alpha_t - \frac{\partial C}{\partial S_t}\right)\sigma S_t \mathrm{d}W_t, \end{aligned}$$

a potom zisk $\Pi$ z tohto portfólia v čase $t$ môžeme zrátať ako

$$\begin{aligned} \Pi(H(S_t, t)) &= \int_0^t -\mathrm{d}V + \int_0^t \alpha_u \mathrm{d}S_u \\ &= \int_0^t \left[-\frac{\partial V}{\partial u} - \frac{1}{2}\sigma^2 S_u^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S_u^2} + \left(\alpha_u - \frac{\partial V}{\partial S_u}\right)\mu S_u\right]\mathrm{d}u \\ &\quad + \int_0^t \left(\alpha_u - \frac{\partial V}{\partial S_u}\right)\sigma S_u \mathrm{d}W_u. \end{aligned}$$

Z poslednej rovnosti vidno, že náhodnosť zisku spôsobuje člen

$$\int_0^t \left(\alpha_u - \frac{\partial V}{\partial S_u}\right)\sigma S_u \mathrm{d}W_u.$$

Ak v každom čase $u < t$ zvolíme počet akcií rovný $\alpha_u = \frac{\partial V}{\partial S_u}$, potom vypadne stochastický člen a zisk sa stane deterministickým. Tento zisk by sa mal rovnať zisku z držania bezrizikového portfólia, aby sa zamedzilo arbitráži. Hodnota bezrizikového portfólia $H^*$, ktorého zloženie sa mení v čase, je $-V + \frac{\partial V}{\partial S_u} S_u$. Potom deterministický zisk z tohto portfólia v čase $t$ je

$$\Pi(H^*(S_t, t)) = \int_0^t r\left(-V + \frac{\partial V}{\partial S_u} S_u\right)\mathrm{d}u,$$

kde $r$ je bezriziková úroková miera. Z rovnosti deterministických ziskov $\Pi(H(S_t, t))$ a $\Pi(H^*(S_t, t))$ teda dostávame

$$-\frac{\partial V}{\partial u} - \frac{1}{2}\sigma^2 S_u^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S_u^2} = r\left(-V + \frac{\partial V}{\partial S_u} S_u\right), \quad 0 < u < t,$$

čo znamená, že cena opcie $V(S_t, t)$ je daná rovnicou

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S_t^2} + r S_t \frac{\partial V}{\partial S_t} - rV = 0.$$

Rovnakú rovnicu by sme dostali aj pre predajnú európsku opciu. Ak teda označíme cenu európskej opcie ako $V = V(S_t, t)$ a predpokladáme, že akcia priebežne vypláca dividendu, ktorej ročná miera je $D$, potom cena opcie je opísaná rovnicou

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S_t^2} + (r - D)S_t \frac{\partial V}{\partial S_t} - rV = 0, \quad S_t > 0, \quad t \in [0, T], \tag{2.5}$$

pričom terminálová (koncová) podmienka v čase expirácie pre kúpnu európsku opciu s realizačnou cenou $K$ je

$$V(S_T, T) = \max(S_T - K, 0) \tag{2.6}$$

a pre predajnú európsku opciu je

$$V(S_T, T) = \max(K - S_T, 0), \tag{2.7}$$

keďže cena opcie je nezáporné číslo. Rovnica 2.5 sa nazýva Black-Scholesova rovnica a jej riešením je

$$V(S_t, t) = S_t.\Phi\left(\frac{\ln\frac{S_t}{K} + r(T-t) + \frac{1}{2}\sigma^2(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right) \tag{2.8}$$

$$- Ke^{-r(T-t)}.\Phi\left(\frac{\ln\frac{S_t}{K} + r(T-t) - \frac{1}{2}\sigma^2(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right). \tag{2.9}$$

Prechod od parabolickej parciálnej diferenciálnej rovnice (2.5) k vzorcu (2.8) spočíva v postupnosti niekoľkých transformácií na základný tvar parabolickej rovnice a následnom aplikovaní Greenovej funkcie. Celý postup sa nachádza v učebnici [11]. Tento model oceňovania európskych opcií má však nedostatky v podobe týchto nereálnych predpokladov:

i) neexistencia transakčných nákladov a daní

ii) možnosť kúpiť alebo predať ľubovoľné množstvo každého cenného papiera

iii) existencia konštantnej bezrizikovej úrokovej miery

iv) ceny akcie sa vyvíjajú podľa rovnice 2.3 v podobe geometrického Wienerovho procesu

v) akcie nevyplácajú dividendy a ich volatilita je konštantná.

Aj napriek týmto obmedzeniam je Black-Scholesov model považovaný za základ pre oceňovanie finančných derivátov.

## 2.3 Ocenenie opcií pomocou martingalov

Viackrokový binomický strom z predošlej časti predstavoval diskrétny model ocenenia derivátov, ktorých cenu sme spočítali ako diskontovanú strednú hodnotu z budúcich hodnôt pri bezrizikovej úrokovej miere $Q$. V tejto časti prejdeme k spojitému modelu oceňovania opcií pomocou martingalov a ukážeme, že vylúčenie arbitráže v oceňovacom modeli derivátov je zaručené existenciou bezrizikovej pravdepodobnostnej miery, ktorá vyplýva z toho, že diskontovaný proces vývoja ceny derivátu je martingalom pri tejto miere.

Za predpokladu, že cena akcie je popísaná binomickým stromom, platila pre cenu derivátu $V_0$ s platnosťou $T$ oceňovacia formulka

$$V_0 = \mathrm{E}_Q(\mathrm{e}^{-rT} V_T),$$

kde $E_Q$ je stredná hodnota pri bezrizikovej miere $Q$ a $V_T$ je náhodná premenná predstavujúca koncový payoff. Potom pre cenu derivátu v čase $t < T$ platí

$$V_t = \mathrm{E}_Q(\mathrm{e}^{-r(T-t)} V_T | \mathcal{F}_t), \tag{2.10}$$

kde $\mathcal{F}_t$ predstavuje informáciu v čase $t$. Ak prepíšeme túto formulku do tvaru

$$\mathrm{e}^{-rt} V_t = \mathrm{E}_Q(\mathrm{e}^{-rT} V_T | \mathcal{F}_t),$$

a označíme $M_t = \mathrm{e}^{-rt} V_t$, potom podľa vety 14 je $M_t$ martingal vzhľadom na mieru $Q$. Ak označíme hodnotu peňažného dlhopisu v čase $t$ ako $B_t = \mathrm{e}^{rt}$, potom hodnota $\mathrm{e}^{-rt} V_t$ predstavuje relatívnu cenu derivátu vzhľadom na cenu peňažného dlhopisu. Cenný papier (v tomto prípade peňažný dlhopis), ku ktorému sa vzťahujú ceny ostatných aktív, sa nazýva *numeraire*. V ďalšom ukážeme, že oceňovacia formulka 2.10 platí aj v spojitom prípade, kde cena akcie je popísaná pomocou Wienerovho procesu. Hľadanie bezrizikovej miery $Q$ je ale náročnejšie a bude vyžadovať Girsanovu vetu.

## 2.3.1 Princíp bezarbitrážnej ceny

Najprv cez samofinancovanú obchodnú stratégiu zdôvodníme, prečo existencia miery $Q$, pri ktorej sú relatívne ceny derivátov vzhľadom na peňažný dlhopis martingalom, zaručuje bezarbitrážnu cenu derivátu. Predpokladajme, že na trhu existuje $k+1$ cenných papierov, s ktorými sa obchoduje do času $T$. Neistota na trhu je modelovaná pravdepodobnostným priestorom $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ s filtráciou $\{\mathcal{F}_t\}_{0 \le t \le T}$, kde ceny cenných papierov $S^i$, $i = 0, 1, \ldots, k$ sú $\mathcal{F}_t$-adaptované stochastické procesy. Obchodná stratégia je vektor stochastických procesov $(x_0(t), x_1(t), \ldots, x_k(t))^T$, kde $x_i(t)$, $i = 0, 1, \ldots, k$ je počet jednotiek $i$-teho cenného papiera v portfóliu v čase $t$. Potom hodnota portfólia v čase $t$ je

$$H(t) = \sum_{i=0}^{k} x_i(t) S_t^i, \quad 0 \le t \le T,$$

a zisk z tohto portfólia je

$$\Pi(t) = \sum_{i=0}^{k} \int_0^t x_i(u) \mathrm{d}S_u^i, \quad 0 \le t \le T.$$

Toto portfólio je samofinancované, čo znamená, že počas celého časového intervalu $[0, T]$ neprichádzajú ani neodchádzajú z portfólia žiadne ďalšie finančné prostriedky, a teda zmena hodnoty portfólia súvisí len so zmenou hodnoty pôvodných cenných papierov v portfóliu. Samofinancovanosť teda možno zapísať rovnicou

$$H(t) = H(0) + \Pi(t), \quad 0 \le t \le T.$$

Nech cenný papier s hodnotou $B_t = e^{rt}$ predstavuje peňažný dlhopis úročený bezrizikovou úrokovou mierou $r$. Tento dlhopis budeme považovať za numeraire. Potom diskontovaný proces vývoja ceny $i$-teho cenného papiera je

$$S_t^{i^*} = S_t^i / B_t, \quad i = 1, 2, \ldots, k,$$

a predstavuje martingal vzhľadom na bezrizikovú mieru $Q$. Diskontovaná hodnota portfólia $H^*(t) = H(t)/B_t$ je potom tiež $Q$-martingal, pričom samofinancovanosť sa zachová pri diskontácii. Pre diskontovaný zisk potom platí

$$\Pi^*(t) = H(t) - H(0) \quad 0 \le t \le T.$$

Predpokladajme, že na danom pravdepodobnostnom priestore $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ existuje ekvivalentná bezriziková miera $Q$ k miere $P$. Potom diskontovaná hodnota portfólia $H^*(t)$ generovaná samofinancovanou stratégiou je $Q$-martingal, a teda platí $V_0^* = \mathrm{E}_Q(V_T^*)$. Ďalej predpokladajme, že začneme s nulovou hodnotou portfólia $V_0 = V_0^* = 0$ a zároveň tvrdíme, že $V_T^* \ge 0$, čo predstavuje arbitráž. Keďže platí $0 = V_0^* = \mathrm{E}_Q(V_T^*)$ a $Q(\omega) > 0$, potom pre $V_T^*$ dostávame, že sa musí rovnať nule. Ak by sme pripustili $V_T^* \ge 0$, pričom pri niektorých realizáciách je $V_T^* > 0$, potom $\mathrm{E}_Q(V_T^*) > 0$ a to je spor. Teda $V_T^* = 0$ a tým je existencia arbitráže vylúčená.

Označme koncový payoff derivátu ako $V_T$. Potom $V_T$ je $\mathcal{F}_T$-merateľná náhodná premenná, generovaná samofinancovanou stratégiou. Za predpokladu existencie ekvivalentnej bezrizikovej miery $Q$ je cena derivátu $V_t$ $Q$-martingal, a teda dostávame vzťah pre jeho bezarbitrážnu cenu:

$$V_t = B_t V_t^* = B_t \mathrm{E}_Q[V_T^* | \mathcal{F}_t] = B_t \mathrm{E}_Q[V_T / B_T) | \mathcal{F}_t],$$

pričom $B_t = \mathrm{e}^{rt}$, a teda

$$V_t = \mathrm{E}_Q[\mathrm{e}^{-r(T-t)} V_T | \mathcal{F}_t],$$

čím sme vlastne dostali oceňovaciu formulku (2.10). Koncový payoff $V_T$ je nejakou funkciou $f$ koncovej ceny akcie $S_T$, ako napr. (2.6) a (2.7). Potom za predpokladu konštantného úroku môžeme oceňovaciu formulku napísať ako

$$V_t = \mathrm{e}^{-r(T-t)} \mathrm{E}_Q[f(S_T) | \mathcal{F}_t]. \tag{2.11}$$

## 2.3.2 Bezarbitrážna miera Q

V tejto časti ukážeme, ako nájsť mieru $Q$, pri ktorej sú diskontované procesy cien aktív $Q$-martingalom. Uvažujme oceňovací model, v ktorom sú dva cenné papiere, rizikové podkladové aktívum (akcia) a peňažný dlhopis úročený bezrizikovou úrokovou mierou $r$. Ceny týchto aktív v pôvodnej pravdepodobnostnej miere $P$ sú dané rovnicami:

$$\frac{\mathrm{d}S_t}{S_t} = \mu \mathrm{d}t + \sigma \mathrm{d}W_t \tag{2.12}$$

$$\frac{\mathrm{d}B_t}{B_t} = r\mathrm{d}t$$

Ak za numeraire zvolíme peňažný dlhopis, potom diskontovaný proces ceny akcie je $S_t^* = S_t/B_t$. Z Itōvej lemy dostávame pre diferenciál $S_t^*$:

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}S_t^* &= \frac{\partial S_t^*}{\partial S_t}\mathrm{d}S_t + \frac{\partial S_t^*}{\partial B_t}\mathrm{d}B_t + \frac{\partial S_t^*}{\partial t}\mathrm{d}t + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 S_t^*}{\partial S_t^2}\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{M_t}\mathrm{d}S_t - \frac{S_t}{B_t^2}\mathrm{d}M_t \\
&= \frac{\mu S_t \mathrm{d}t + \sigma S_t \mathrm{d}W_t}{M_t} - \frac{r S_t M_t \mathrm{d}t}{M_t^2} \\
&= (\mu - r)S_t^*\mathrm{d}t + \sigma S_t^* \mathrm{d}W_t,
\end{aligned}$$

to znamená, že

$$\frac{\mathrm{d}S_t^*}{S_t^*} = (\mu - r)\mathrm{d}t + \sigma \mathrm{d}W_t. \tag{2.13}$$

Riešenie tejto diferenciálnej rovnice má podľa (2.4) tvar

$$S_t^* = S_0^* \exp\left((\mu - r)t + \sigma W_t - \frac{1}{2}\sigma^2 t\right).$$

Z toho vidíme, že diskontovaný proces ceny akcie $S_t^*$ nie je martingalom pri miere $P$, pretože obsahuje drift $\mu - r$. Preto treba nájsť mieru $Q$, vzhľadom na ktorú bude $S_t^*$ martingalom. Ukážeme, že stochastické procesy bez driftovej zložky sú martingalom pri danej miere spojenej s pravdepodobnostným popisom Wienerovho procesu.

Pre cenu akcie uvažujme bezdriftovú diferenciálnu rovnicu

$$\frac{\mathrm{d}S_t}{S_t} = \sigma \mathrm{d}W_t,$$

pričom z predchádzajúceho vieme, že jej riešenie má tvar

$$S_t = S_0 \exp\left(\sigma W_t - \frac{1}{2}\sigma^2 t\right).$$

Na to, aby sme ukázali, že $S_t$ je martingal, budeme potrebovať nasledujúce tvrdenie, známe z teórie pravdepodobnosti.

**Lema 16.** *Náhodná premenná $X$ má normálne rozdelenie $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ pri pravdepodobnostnej miere $P$ práve vtedy, ak platí*

$$\mathrm{E}_P(\exp(\alpha X)) = \exp\left(\alpha\mu + \frac{\alpha^2}{2}\sigma^2\right), \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}.$$

Pre $u < t$ spočítame strednú hodnotu z $S_t$ za podmienky filtrácie $\mathcal{F}_u$ nasledovne:

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}[S_t|\mathcal{F}_u] &= \mathrm{E}\left[S_0 \exp\left(\sigma W_t - \frac{1}{2}\sigma^2 t\right)\right] \\
&= \mathrm{E}\left[S_0 \exp\left(\sigma W_u - \frac{1}{2}\sigma^2 u\right) \exp\left(-\frac{1}{2}\sigma^2(t-u)\right) \exp(\sigma(W_t - W_u))|\mathcal{F}_u\right] \\
&= S_0 \exp\left(\sigma W_u - \frac{1}{2}\sigma^2 u\right) \exp\left(-\frac{1}{2}\sigma^2(t-u)\right) \mathrm{E}\left[\exp(\sigma(W_t - W_u))|\mathcal{F}_u\right],
\end{aligned}$$

pričom vieme, že prírastok Wienerovho procesu $W_t - W_u$ je normálna náhodná premenná s parametrami $\mu = 0$ a $\sigma^2 = t - u$. Potom využitím lemy 16 dostávame pre posledný člen v rovnici

$$\mathrm{E}\left[\exp(\sigma(W_t - W_u))|\mathcal{F}_u\right] = \exp\left(\frac{1}{2}\sigma^2(t-u)\right),$$

a teda

$$\mathrm{E}[S_t|\mathcal{F}_u] = S_0 \exp\left(\sigma W_u - \frac{1}{2}\sigma^2 u\right) = S_u,$$

čo znamená, že $S_t$ je martingal.

Vráťme sa teraz k hľadaniu miery $Q$, vzhľadom na ktorú je diskontovaný proces $S_t^*$ martingal. Použijeme Girsanovu vetu, pričom predpokladáme, že za funkciu $\gamma(t)$ v Radon-Nikodymovej derivácii miery $Q$ vzhľadom na $P$ zvolíme konštantu

$$\gamma(t) = \gamma = \frac{\mu - r}{\sigma}.$$

Potom podľa Girsanovej vety platí, že Radon-Nikodymova derivácia je

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}P}(\omega) &= \exp\left(-\int_0^T \gamma_t(\omega) dW_t(\omega) - \frac{1}{2}\int_0^T \gamma_t^2(\omega) dt\right) = \exp\left(-\gamma W_T(\omega) - \frac{1}{2}\gamma^2 T\right) \\ &= \exp\left(-\left(\frac{\mu - r}{\sigma}\right) W_T(\omega) - \frac{1}{2}\left(\frac{\mu - r}{\sigma}\right)^2 T\right)\end{aligned}$$

a

$$\tilde{W}_t(\omega) = W_t(\omega) + \int_0^t \gamma_s(\omega)\mathrm{d}s = W_t(\omega) + \gamma t = W_t(\omega) + \frac{\mu - r}{\sigma} t$$

je Wienerov proces na $(\Omega, \mathcal{F}, Q)$. Potom platí

$$\mathrm{d}\tilde{W}_t = \mathrm{d}W_t + \frac{\mu - r}{\sigma}\mathrm{d}t, \tag{2.14}$$

z čoho dostávame dosadením za $\mathrm{d}W_t$ do vzťahu (2.13), že pre diskontovaný proces ceny akcie $S_t^*$ platí

$$\frac{\mathrm{d}S_t^*}{S_t^*} = \sigma \mathrm{d}\tilde{W}_t,$$

a teda $S_t^*$ je vzhľadom na mieru $Q$ stochastickým procesom bez driftu, z čoho vyplýva, že je $Q$-martingalom.

Ak do rovnice (2.12) dosadíme $\mathrm{d}W_t$ zo vzťahu (2.14), dostávame, že cena akcie pri bezrizikovej miere $Q$ je daná rovnicou

$$\frac{\mathrm{d}S_t}{S_t} = r\mathrm{d}t + \sigma \mathrm{d}\tilde{W}_t, \tag{2.15}$$

kde driftom (očakávaný výnos) je bezriziková úroková miera $r$, čo je v súlade s bezarbitrážnym princípom.

### 2.3.3 Black-Scholesova rovnica a martingaly

Na záver ukážeme súvislosť medzi oceňovaním derivátu pomocou Black-Scholesovej rovnice a martingalov. Využijeme pri tom Feynman-Kacovu formulu, ktorá uvádza vzťah medzi parabolickými parciálnymi diferenciálnymi rovnicami (PPD) a stochastickými procesmi.

**Veta 17** (Feynman-Kacova formula). *Pre náhodnú premennú $V : \mathbb{R} \times [0,T] \to \mathbb{R}$ uvažujme nasledovnú PPD rovnicu*

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \mu(x,t)\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{1}{2}\sigma^2(x,t)\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - R(x,t)V + h(x,t) = 0,$$

*ktorá je definovaná pre $\forall\ x \in \mathbb{R}$, $t \in [0,T]$, pričom platí koncová podmienka*

$$V(x,T) = f(x),$$

*kde $\mu$, $\sigma$, $R$, $f$ a $h$ sú známe funkcie. Potom riešenie tejto rovnice sa dá napísať ako podmienená stredná hodnota*

$$V(x,t) = \mathrm{E}\left[\int_t^T \mathrm{e}^{-\int_t^s R(X_u)\mathrm{d}u} h(X_s,s)\mathrm{d}s + \mathrm{e}^{-\int_t^T R(X_u)\mathrm{d}u} f(X_T)|X_t = x\right],$$

*kde $X_t$ je stochastický proces daný rovnicou*

$$\mathrm{d}X_t = \mu(X_t,t)\mathrm{d}t + \sigma(X_t,t)\mathrm{d}W_t.$$

Predpokladajme teda, že cena derivátu $V_t$ je daná Black-Scholesovou rovnicou

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS\frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0.$$

Vo Feynman-Kacovej formule zavedieme

$$x = S,\ \ R(x,t) = r,\ \ h(x,t) = 0,\ \ \mu(x,t) = rS,\ \ \sigma^2(x,t) = \sigma^2 S^2,$$

a za $X_t$ zvolíme proces vývoja ceny akcie $S_t$ pri bezrizikovej miere $Q$, ktorá je daná rovnicou (2.15). Potom dostávame, že riešenie Black-Scholesovej rovnice sa dá napísať ako

$$V(S,t) = \mathrm{E}\left[\mathrm{e}^{-r(T-t)} f(S_T)|S_t = S\right],$$

čo je v súlade s oceňovacou formulkou (2.11), ktorú sme dostali pomocou $Q$-martingalov.

KAPITOLA **3**

# *Simulačné oceňovanie opcií*

V tejto kapitole ukážeme, ako sa dá oceniť európska kúpna opcia pomocou stochastických simulácií. V prvej časti budeme predpokladať, že volatilita ceny akcie a bezriziková úroková miera sú konštantné. V druhej časti zmeníme predpoklad konštantnej úrokovej miery a budeme ju modelovať pomocou stochastickej diferenciálnej rovnice súčasne s cenou akcie.

## 3.1 Oceňovanie európskej kúpnej opcie pri pevnej úrokovej miere

V tejto časti ukážeme fungovanie simulačného oceňovania opcie pri pevnom úroku, ktoré bude založené na simulačnom modelovaní vývoja ceny akcie. Pre vývoj ceny akcie budeme uvažovať stochastickú diferenciálnu rovnicu

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t, \tag{3.1}$$

pričom vieme, že riešenie tejto rovnice je

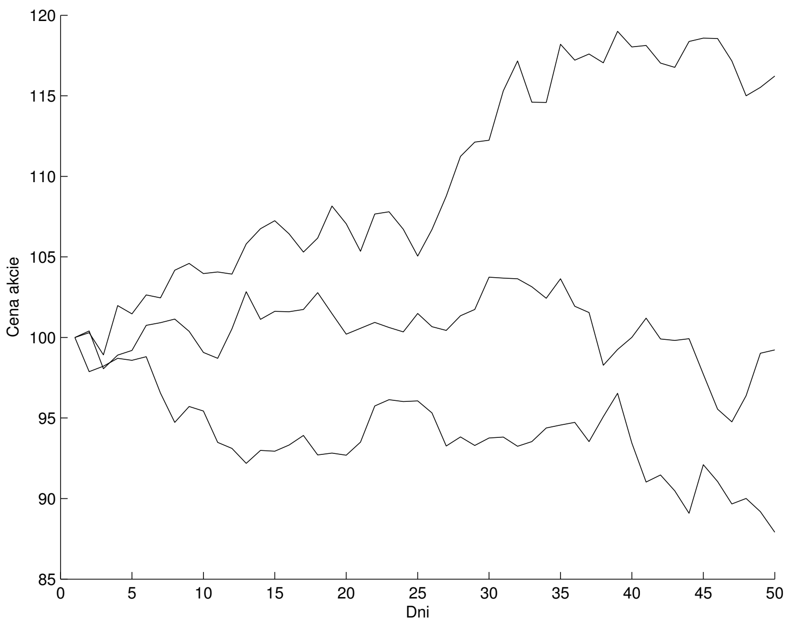
$$S_t = S_0 \exp\left(\mu t + \sigma W_t - \frac{1}{2}\sigma^2 t\right).$$

Podľa predchádzajúceho vzťahu budeme postupne generovať ceny akcie až do času expirácie $t = T$. Následne vyčíslime koncové ceny opcie, ako v prípade binomického stromu, a vypočítame cenu opcie v čase $t = 0$ ako diskontovanú strednú hodnotu z koncových cien. Stredná hodnota bude aproximovaná aritmetickým priemerom, pričom vychádzame zo zákona veľkých čísel. V predchádzajúcej kapitole sme ukázali, že v rizikovo neutrálnom svete sa $\mu$ (očakávaný výnos akcie) rovná bezrizikovej úrokovej miere $r$, preto rovnica na postupné generovanie cien akcie bude

$$S_{t_2} = S_{t_1} \exp\left(\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(t_2 - t_1) + \sigma Z_{t_1}\right), \tag{3.2}$$

kde

$$Z_{t_1} = W_{t_2} - W_{t_1}, \qquad 0 \le t_1 \le t_2 \le T \tag{3.3}$$




***Obr. 3.1:*** *3 ukážky náhodného vývoja ceny akcie*

má rozdelenie $\mathcal{N}(0, t_2 - t_1)$.

Na obrázku 3.1 sú znázornené $3$ ukážky náhodného procesu vývoja cien akcie, vygenerované podľa (3.2).

Ocenenie opcie spravíme pre rôzne počiatočné hodnoty akcie, z ktorých potom zostrojíme graf, na ktorom bude vidieť, ako súvisí cena opcie s cenou akcie. Výsledné ceny porovnáme s cenami vypočítanými podľa Black-Scholesovej rovnice pre rovnaké vstupné parametre.

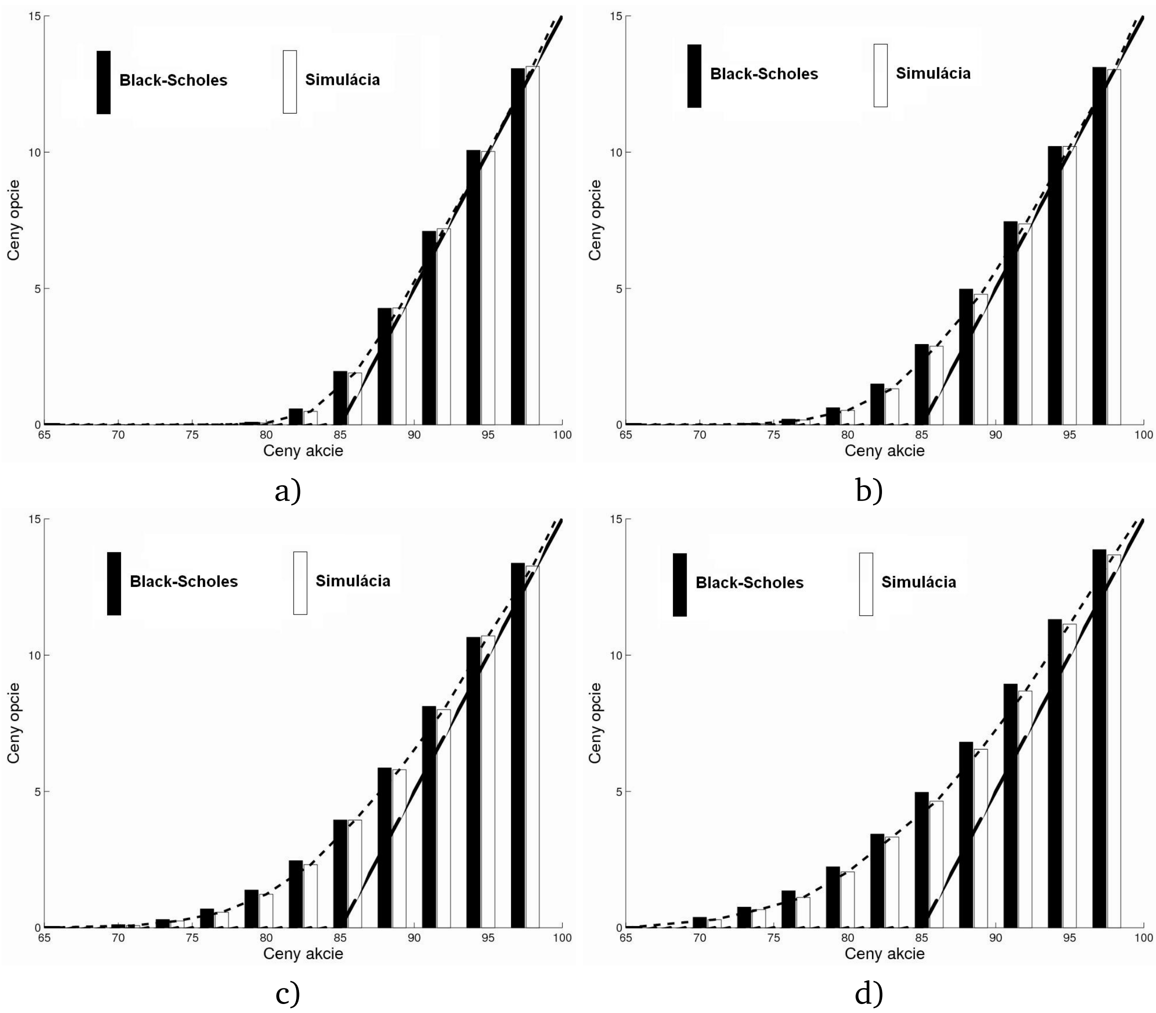
Uvažujme 10 počiatočných cien akcie: $71$, $74$, $77$, $80$, $83$, $86$, $89$, $92$, $95$, $98$ v čase $t = 0$ a realizačnú cenu opcie 85. Pre každú počiatočnú cenu spravíme $n$ simulácií vývoja ceny až do času $t = T$, čím dostaneme $n$ koncových cien opcie pre každú počiatočnú cenu akcie. Počiatočná cena opcie k danej akcii potom bude aritmetickým priemerom z diskontovaných koncových cien opcie.

Parametre, ako volatilita ceny akcie $\sigma$, bezriziková úroková mieru $r$ a maturita opcie $T$, sme zvolili rovnako ako v prípade ocenenia opcie na akciu firmy Apple Inc.:

$$\sigma = 0.19, \quad r = 0.02, \quad T = 10.$$

Na obrázku 3.2 je znázornená cena opcie v čase $t = 0$ pre rôzne počiatočné ceny akcie a rôznu veľkost volatility akcie. Ak by sme robili grafy postupne pre časy $t = 1, 2, \ldots, T$, videli by sme, že cena opcie získaná simuláciou (prerušovaná čiara) konverguje ku koncovému výplatnému diagramu (plná čiara).

Z obrázku 3.2 je vidieť, že cena vypočítaná simuláciou (biele stĺpce) a Black-Scholesovou rovnicou (čierne stĺpce) je takmer rovnaká, teda simulácia ponúka dobrý odhad ceny opcie. Výpočty sú spravené pri počte simulácií $n = 5000$. Tento počet simulácií sa prejavil ako dostatočný, kedže väčší počet simulácií nepriniesol spresnenie výsledku. Ďalej môžeme pozorovať, že počiatočná cena opcie rastie so

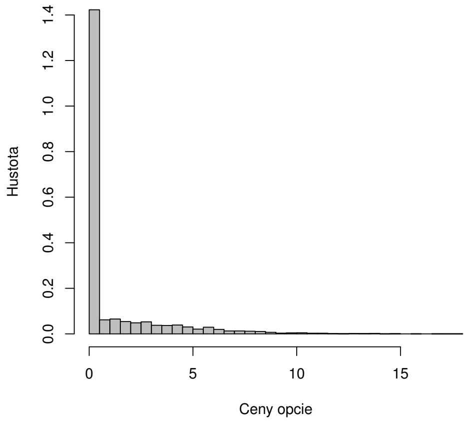



*Obr. 3.2: Cena opcie s realizačnou cenou* $85$ *v závislosti od počiatočnej ceny a volatility akcie. Na grafe a), b), c) a d) je volatilita ceny akcie postupne* $20\%$, $35\%$, $50\%$ *a* $65\%$

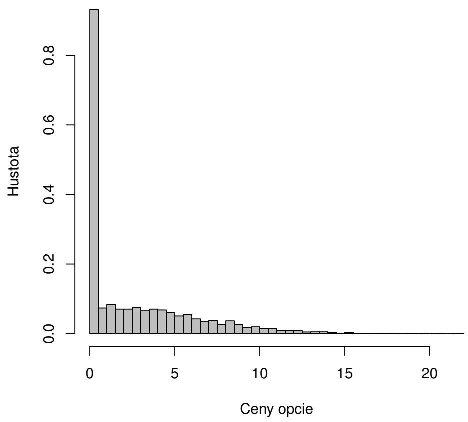
zvyšujúcou sa volatilitou, čo možno interpretovať tak, že opcia na rizikovejšiu akciu má väčšiu opčnú prémiu.

Na obrázku 3.3 sú znázornené rozdelenia cien opcií, z ktorých sme počítali strednú hodnotu pre rôzne počiatočné ceny akcie $S_0$. Z histogramov vidno, že pre nižšie počiatočné ceny akcie má prevažné zastúpenie nulová cena opcie, čo zodpovedá počtu simulácií, v ktorých cena opcie neprekročila realizačnú cenu. Takýto prístup k oceňovaniu nám dáva ďalšie informácie o rozdelení ceny opcie. Môžeme takto empiricky odhadnúť ďalšie pravdepodobnostné vlastnosti ceny opcie, napr. medián.

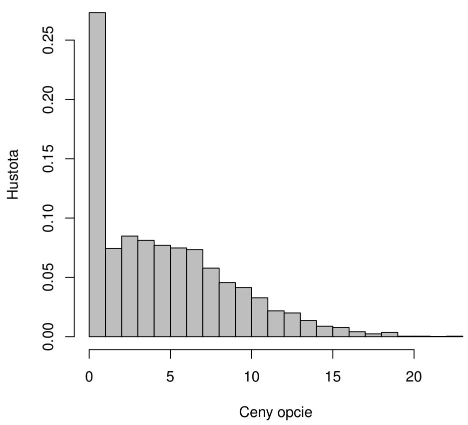
Pre porovnanie, simuláciami sme dostali cenu opcie na akciu Apple Inc. z druhej kapitoly v rozmedzí od $7.10\$$ do $7.50\$$.



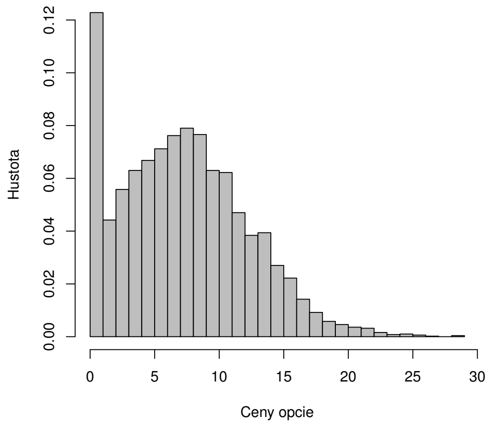

$S_0 = 83$



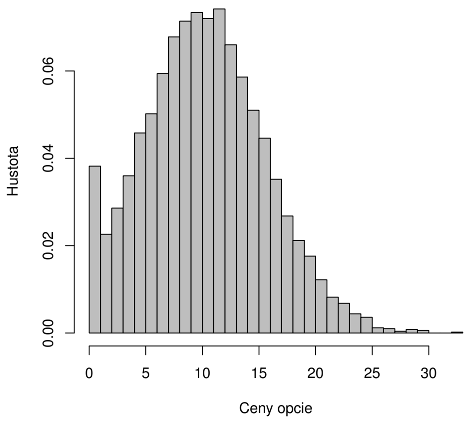

$S_0 = 86$



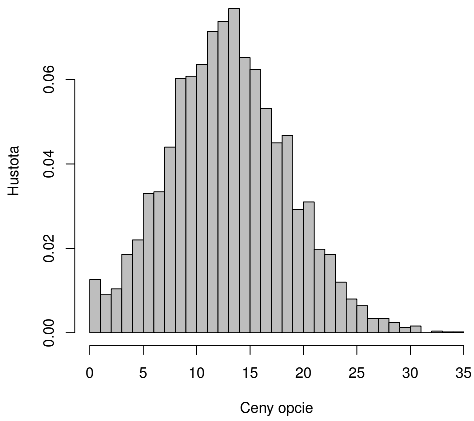

$S_0 = 89$




$S_0 = 92$




$S_0 = 95$

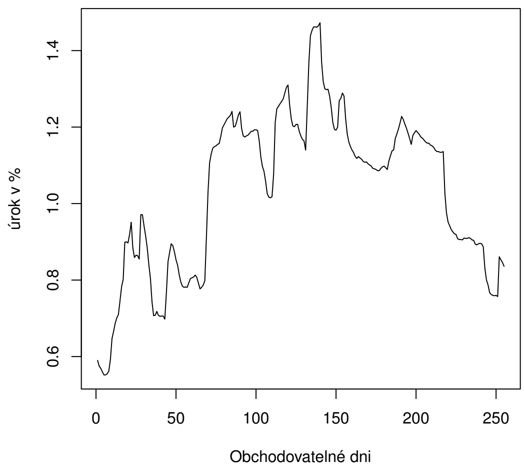



$S_0 = 98$

***Obr. 3.3:*** *Rozdelenie ceny opcie pre rôzne počiatočné ceny akcie* $S_0$

## 3.2 Oceňovanie opcií pri stochastickej úrokovej miere

V predchádzajúcej kapitole sme predpokladali, že úroková miera je počas životnosti opcie konštantná. To však v reálnom svete neplatí, a teda model na ocenenie opcie spresníme predpokladom, že úroková miera je tiež stochastickým procesom. Cena opcie teda bude závisieť od vývoja ceny akcie a krátkodobej úrokovej miery. Stochastický charakter úrokovej miery je vidieť na obrázku (3.4), ktorý znázorňuje vývoj týždenného Euriboru za rok 2011.




***Obr. 3.4:*** *Vývoj medzibankovej úrokovej miery Euribor za rok 2011*

### 3.2.1 Modely vývoja úrokovej miery

V tejto časti ukážeme niektoré modely vývoja krátkodobej úrokovej miery. Tieto modely môžeme rozdeliť na jednofaktorové a viacfaktorové, podľa predpokladu, že úroková miera závisí od jedného alebo viacerých faktorov. Kvôli jednoduchosti sa budeme venovať jednofaktorovému modelu, v ktorom predpokladáme, že krátkodobá úroková miera $r$ je daná stochastickou diferenciálnou rovnicou

$$\mathrm{d}r_t = \mu(t, r_t)\mathrm{d}t + \sigma(t, r_t)\mathrm{d}W_t.$$

Obvykle sa za deterministickú (trendovú) funkciu $\mu(t, r_t)$ volí funkcia tvaru $\kappa(\theta - r_t)$, kde $\kappa, \theta > 0$ sú konštanty. Takéto stochastické procesy sa nazývajú mean-reversion procesy, v ktorých je úroková miera priťahovaná k jej dlhodobému priemeru $\theta$, pričom rýchlosť návratu k tomuto priemeru je daná parametrom $\kappa$. Táto oscilácia úrokovej miery je v súlade s ekonomickým javom, že úrokové miery sa zdajú byť priťahované k dlhodobému trendu. Tento jav možno vysvetliť tým, že pri raste úrokových mier sa znižuje dopyt po pôžičkách a spomaľuje sa ekonomický rast, čo následne vedie k tendencii zníženia úrokových mier. Aby sme videli, že je to naozaj tak, vypočítame limitu strednej hodnoty daného procesu pre $t \to \infty$. Platí

$$\mathrm{E}[\mathrm{d}r_t] = \mathrm{dE}[r_t] = \mathrm{E}[\kappa(\theta - r_t)\mathrm{d}t] + \mathrm{E}[\sigma(t, r_t)\mathrm{d}W_t] = \kappa(\theta - \mathrm{E}[r_t])\mathrm{d}t, \tag{3.4}$$

kde člen $\mathrm{E}[\sigma(t, r_t)\mathrm{d}W_t]$ je nulový, pretože $\sigma(t, r_t)$ a $\mathrm{d}W_t$ sú nezávislé a $\mathrm{E}[\mathrm{d}W_t] = 0$, teda

$$\mathrm{E}[\sigma(t, r_t)\mathrm{d}W_t] = \mathrm{E}[\sigma(t, r_t)]\mathrm{E}[dW_t] = 0.$$

Je vidieť, že riešením (3.4) je $\mathrm{E}[r_t] = \theta + \mathrm{e}^{-\kappa t}(\mathrm{E}(r_0) - \theta)$. Potom pre $t \to \infty$ dostávame, že $\mathrm{E}[r_t]$ je rovné parametru $\theta$.

Ak v takomto mean reversion procese budeme predpokladať konštantnú volatilitu $\sigma = \sigma(t, r_t)$, dostaneme tzv. *Vašíčkov model*

$$\mathrm{d}r_t = \kappa(\theta - r_t)\mathrm{d}t + \sigma\mathrm{d}W_t,$$

ktorý bol publikovaný v pôvodnom článku [12]. Tento model použijeme neskôr pri modelovaní vývoja úrokovej miery. Treba poznamenať, že nerealistický predpoklad konštantnej volatility prináša nevýhodu modelu v tom, že úroková miera sa môže dostať do záporných hodnôt.

Tento problém rieši *Coxov-Ingersollov-Rossov model* [2], v ktorom volatilita nie je konštantná, ale úmerná odmocnine úroku

$$\mathrm{d}r_t = \kappa(\theta - r_t)\mathrm{d}t + \sigma\sqrt{r_t}\mathrm{d}W_t.$$

Ak sa hodnota $r_t$ priblíži k nule, potom aj volatilita $\sigma\sqrt{r}$ je takmer nulová, a teda prírastky v procese vývoja $r_t$ sú rovné len deterministickej časti $\kappa(\theta - r_t)\mathrm{d}t$, ktorá je kladná pre $r_t \approx 0$ a spôsobuje, že úroková miera sa od nuly odráža hore. Navyše pre všetky $t$ platí [11]

$$P[r_t = 0] = 0, \text{ ak } \frac{2\kappa\theta}{\sigma^2} \geq 1.$$

## 3.3 Simulačné oceňovanie európskej kúpnej opcie

V tejto časti použijeme na ocenenie opcie model, v ktorom budeme súčasne modelovať cenu akcie $S$ a výšku krátkodobej úrokovej miery $r$. Predpokladajme, že $S$ a $r$ sú dané systémom stochastických diferenciálnych rovníc:

$$\begin{aligned} \mathrm{d}S_t &= (r_t - D)S_t\mathrm{d}t + \sigma_s S_t \mathrm{d}W_t^s \\ \mathrm{d}r_t &= \kappa(\theta - r_t)\mathrm{d}t + \sigma_r \mathrm{d}W_t^r, \end{aligned} \tag{3.5}$$

pričom pre vývoj $r$ sme použili Vašíčkov model. Parameter $D$ v rovnici pre vývoj ceny akcie označuje percentuálnu veľkosť dividendy, ktorú pravidelne vypláca akcia. Kvôli jednoduchosti predpokladajme, že akcia nevypláca dividendy, teda $D = 0$. Aby sme dostali riešenie v tvare geometrického Brownovho pohybu pre cenu akcie, tak ako v kapitole s pevnou úrokovou mierou, zaveďme pre prvú rovnicu transformáciu $f = \ln S$. Z Itóvej lemy dostávame

$$\mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial t}\mathrm{d}t + \frac{\partial f}{\partial r}\mathrm{d}r + \frac{\partial f}{\partial S}\mathrm{d}S + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial r^2}\sigma_s^2 S^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial S^2}\sigma_s^2 S^2\right)\mathrm{d}t,$$

kde parciálne derivácie podľa $t$ a $r$ sú nulové, lebo $f$ je len funkciou $S$, preto

$$\begin{aligned} \mathrm{d}f &= \frac{\partial f}{\partial S}\mathrm{d}S + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}\sigma_s^2 S^2 \mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{S}\left(rS\mathrm{d}t + \sigma_s S \mathrm{d}W_s\right) - \frac{1}{2}\frac{1}{S^2}\sigma_s^2 S^2 \mathrm{d}t \\ &= \left(r - \frac{1}{2}\sigma_s^2\right)\mathrm{d}t + \sigma_s \mathrm{d}W_s \end{aligned}$$

To znamená, že systém (3.5) prejde na tvar

$$\begin{aligned} \mathrm{d}S_t &= \left(r - \frac{1}{2}\sigma_s^2\right)\mathrm{d}t + \sigma_s \mathrm{d}W_t^s \\ \mathrm{d}r_t &= \kappa(\theta - r_t)\mathrm{d}t + \sigma_r \mathrm{d}W_t^r. \end{aligned}$$

Ďalej predpokladajme, že procesy $\mathrm{d}W_t^s$ a $\mathrm{d}W_t^r$ sú závislé, s korelačným koeficientom $\rho$. Na to, aby sme mohli počítať s nezávislými procesmi $\mathrm{d}W_t^1$ a $\mathrm{d}W_t^2$, spravíme úpravu:

$$\begin{pmatrix} \mathrm{d}W_t^s \\ \mathrm{d}W_t^r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \rho & \sqrt{1-\rho^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{d}W_t^1 \\ \mathrm{d}W_t^2 \end{pmatrix}.$$

To znamená, že konečný tvar systému bude

$$\mathrm{d}\begin{pmatrix} \ln S_t \\ r_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_t - \frac{1}{2}\sigma_s^2 \\ \kappa\theta - \kappa r_t \end{pmatrix}\mathrm{d}t + \begin{pmatrix} \sigma_S & 0 \\ \sigma_r\rho & \sigma_r\sqrt{1-\rho^2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathrm{d}W_t^1 \\ \mathrm{d}W_t^2 \end{pmatrix}$$

$$= \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\kappa \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \ln S_t \\ r_t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\sigma_s^2 \\ \kappa\theta \end{pmatrix}\right]\mathrm{d}t + \begin{pmatrix} \sigma_S & 0 \\ \sigma_r\rho & \sigma_r\sqrt{1-\rho^2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathrm{d}W_t^1 \\ \mathrm{d}W_t^2 \end{pmatrix},$$

čo možno skrátene zapísať ako

$$\mathrm{d}\boldsymbol{X}_t = (\mathbf{A}\boldsymbol{X}_t + \boldsymbol{b})\mathrm{d}t + \boldsymbol{\Sigma}\mathrm{d}\boldsymbol{W}_t, \tag{3.6}$$

kde $\boldsymbol{W}_t$ je 2-rozmerný Wienerov proces, t.j. $W_t^1$ a $W_t^2$ sú nezávislé 1-rozmerné Wienerove procesy.

Rovnicu (3.6) vyriešime zavedením transformácie

$$\boldsymbol{Y}(\boldsymbol{X}_t, t) = \mathrm{e}^{-\mathbf{A}t}\boldsymbol{X}_t. \tag{3.7}$$

Ak označíme Jacobiho maticu derivácie funkcie $\boldsymbol{Y}(x,t)$ ako $\mathbf{J}$, potom z Itōvej lemy dostávame

$$\mathrm{d}\boldsymbol{Y} = \frac{\partial \boldsymbol{Y}}{\partial t}\mathrm{d}t + \mathbf{J}\mathrm{d}\boldsymbol{X}_t = -\mathbf{A}\mathrm{e}^{-\mathbf{A}t}\boldsymbol{X}_t\mathrm{d}t + \mathrm{e}^{-\mathbf{A}t}\mathrm{d}\boldsymbol{X}_t,$$

pričom sme využili, že druhá derivácia $\boldsymbol{Y}$ podľa $\boldsymbol{x}$ je nulová v dôsledku linearity transformácie. Ďalej za $\mathrm{d}\boldsymbol{X}_t$ dosadíme vzťah (3.6) a dostávame

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\boldsymbol{Y}_t &= -\mathbf{A}\mathrm{e}^{-\mathbf{A}t}\boldsymbol{X}_t\mathrm{d}t + \mathrm{e}^{-\mathbf{A}t}(\mathbf{A}\boldsymbol{X}_t + \boldsymbol{b})\mathrm{d}t + \mathrm{e}^{-\mathbf{A}t}\boldsymbol{\Sigma}\mathrm{d}\boldsymbol{W}_t \\ &= \mathrm{e}^{-\mathbf{A}t}\boldsymbol{b}\mathrm{d}t + \mathrm{e}^{-\mathbf{A}t}\boldsymbol{\Sigma}\mathrm{d}\boldsymbol{W}_t. \end{aligned}$$

Diferenciál $\mathrm{d}\boldsymbol{Y}_t$ z predchádzajúcej rovnice možno ekvivalentne vyjadriť v integrálnom tvare ako

$$\boldsymbol{Y}_t - \boldsymbol{Y}_{t_0} = \int_{t_0}^{t} \mathrm{e}^{-\mathbf{A}s}\boldsymbol{b}\mathrm{d}s + \int_{t_0}^{t} \mathrm{e}^{-\mathbf{A}s}\boldsymbol{\Sigma}\mathrm{d}\boldsymbol{W}_s.$$

Ak za $\boldsymbol{Y}_t$ a $\boldsymbol{Y}_{t_0}$ dosadíme podľa vzťahu (3.7), dostávame riešenie rovnice (3.6) v tvare

$$\boldsymbol{X}_t = \mathrm{e}^{\mathbf{A}(t-t_0)}\boldsymbol{X}_{t_0} + \int_{t_0}^{t} \mathrm{e}^{\mathbf{A}(t-s)}\boldsymbol{b}\mathrm{d}s + \int_{t_0}^{t} \mathrm{e}^{\mathbf{A}(t-s)}\boldsymbol{\Sigma}\mathrm{d}\boldsymbol{W}_s. \tag{3.8}$$

Náhodným členom na pravej strane výrazu (3.8) je Itōv integrál $\int_{t_0}^{t} \mathrm{e}^{\mathbf{A}(t-s)}\boldsymbol{\Sigma}\mathrm{d}\boldsymbol{W}_s$, ktorý má podľa lemy 7 normálne rozdelenie

$$\mathscr{N}\left(0, \int_{t_0}^{t} \mathrm{e}^{\mathbf{A}(t-s)}\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{\Sigma}^T(\mathrm{e}^{\mathbf{A}(t-s)})^T\mathrm{d}s\right).$$

To znamená, že riešenie (3.8) má normálne rozdelenie so strednou hodnotou

$$\mathrm{E}[\boldsymbol{X}_t] = \mathrm{e}^{\mathbf{A}(t-t_0)}\boldsymbol{X}_{t_0} + \int_{t_0}^{t} \mathrm{e}^{\mathbf{A}(t-s)}\boldsymbol{b}\mathrm{d}s$$

a variančnou maticou

$$\mathrm{Var}[\boldsymbol{X}_t] = \int_{t_0}^{t} \mathrm{e}^{\mathbf{A}(t-s)}\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{\Sigma}^T(\mathrm{e}^{\mathbf{A}(t-s)})^T\mathrm{d}s.$$

Z tohto rozdelenia budeme súčasne generovať ceny akcie a výšku úrokovej miery. Postup oceňovania bude podobný ako v predchádzajúcej časti s konštantným úrokom.

Uvažujme $10$ počiatočných cien akcie: $71$, $74$, $77$, $80$, $83$, $86$, $89$, $92$, $95$, $98$ v čase $t = 0$ a realizačnú cenu opcie 85. Pre každú počiatočnú cenu akcie vykonáme $n = 5000$ simulácií vývoja ceny akcie a úrokovej miery až do času $t = T$, čím dostaneme $n$ koncových cien opcie $V_T^i$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Všetky koncové ceny $V_T^i$ diskontujeme do času $t = 0$ príslušným úrokom, ktorý predstavuje priemerný úrok pre danú simuláciu. Počiatočnú cenu opcie k danej akcii vypočítame ako

$$V_0 = \mathrm{E}[\mathrm{e}^{-\int_0^T r_s ds}V_T^i] = \mathrm{E}[\mathrm{e}^{-\sum_{j=1}^{n} r_j dt}V_T^i] = \mathrm{E}[\mathrm{e}^{-N\bar{r}dt}V_T^i] = \frac{\sum_{i=1}^{n} \mathrm{e}^{-\bar{r}T}V_T^i}{n},$$

čo je aritmetický priemer z diskontovaných koncových cien opcie.

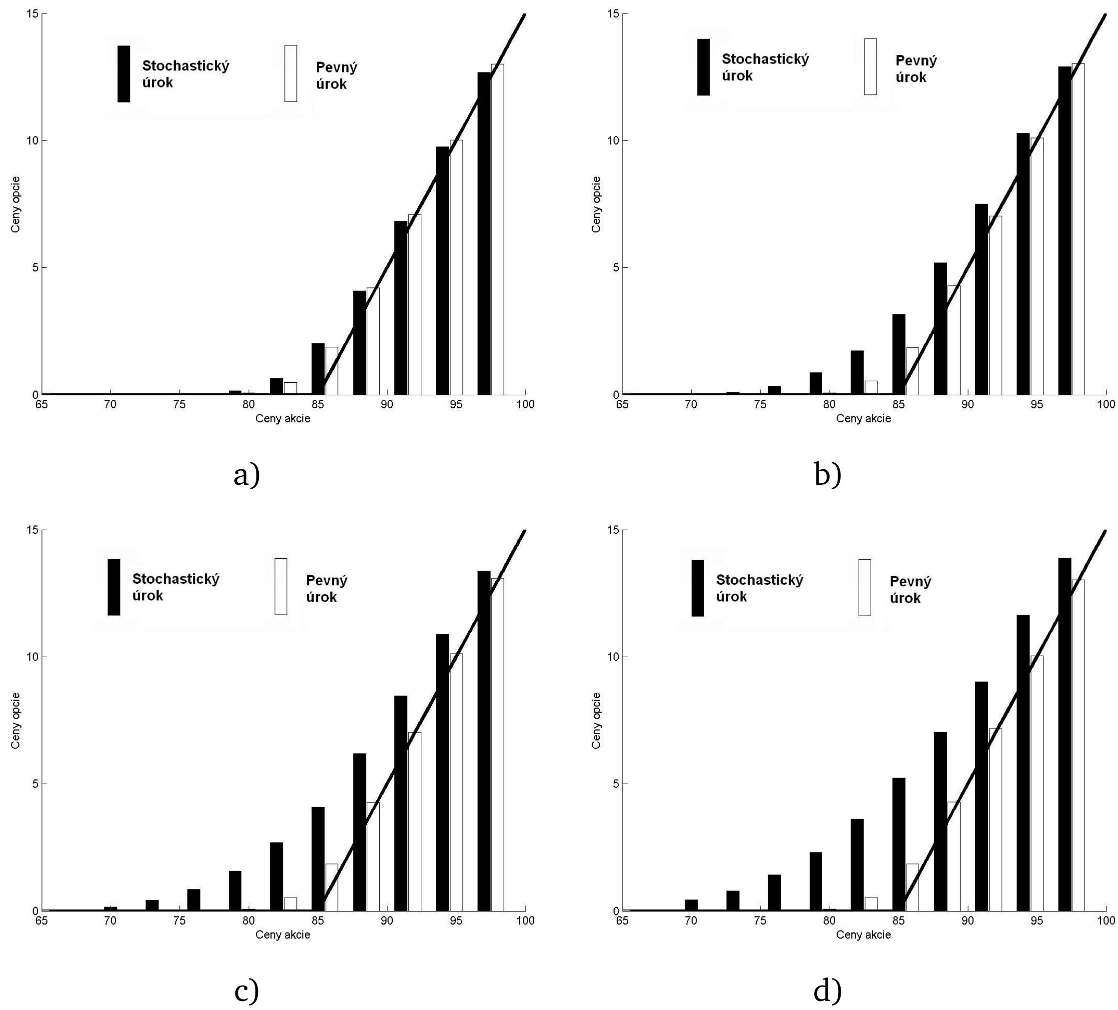
Aby sme mohli porovnať simulácie s konštantným a stochastickým úrokom, zvolili sme rovnaké parametre. To znamená, že volatilita ceny akcie $\sigma$, maturita opcie $T$, počiatočná úroková miera $r_0$ a limitná (dlhodobá) úroková miera $\theta$ je

$$\sigma = 0.19, \quad T = 10, \quad r_0 = \theta = 0.02,$$

teda $r_0$ a $\theta$ sú rovné bezrizikovému úroku z predchádzajúcej časti s konštantným úrokom.

Ďalšie parametre boli zvolené nasledovne:

$$\kappa = 40, \quad \rho = 0.5.$$




***Obr. 3.5:*** *Cena opcie s realizačnou cenou 85 v závislosti od počiatočnej ceny akcie a volatility úroku. Na grafe a), b), c) a d) je volatilita úroku postupne* $2.5\%$*,* $3.0\%$*,* $3.5\%$ *a* $4.0\%$

Na obrázku 3.5 je znázornená cena opcie v čase $t = 0$, pre rôzne počiatočné ceny akcie a rôznu veľkosť volatility úroku. Je vidieť, že čím vyššia je volatilita úrokovej miery, tým vyššia je cena opcie. Tento výsledok možno interpretovať tak, že s narastajúcou volatilitou stúpa riziko, a teda aj cena opcie.

# *Záver*

V predloženej bakalárskej práci sme sa zaoberali simulačným oceňovaním finančných derivátov. Naším východiskom pri oceňovaní finančných derivátov bolo využitie rizikovo neutrálnej miery, ktorá je vhodná pri stochastických simuláciách.

Jadrom práce je simulačná analýza vplyvu stochastickej úrokovej miery na cenu európskej kúpnej opcie. Ukázalo sa, že vyššia volatilita bezrizikového úroku sa na cene opcie prejaví nárastom jej ceny. Stochastické simulácie sú tu dôležité preto, lebo analytická kvantifikácia tejto ceny je pri zložitejších modeloch veľmi náročná.

# *Bibliografia*


[1] Black F., Scholes M.: *The pricing of options and corporate liabilities*, The Journal of Political Economy 81, 637-654, 1973.

[2] Cox J.C., Ingersoll J.E., Ross S.A.: *A Theory of the Term Structure of Interest Rates*, Econometrica 53, 385-408, 1985.

[3] Cox J.C., Ross S.A., Rubinstein M.: *Option pricing: A simplified approach, Journal of Financial Economics 7*, 229–263. 1979.

[4] Itō, K.: *On a Formula Concerning Stochastic Differentials*, Nagoya Math. Journal 3, 55–65, 1951.

[5] Kwok Y.K.: *Mathematical Models of Financial Derivatives*, Springer-Verlag, New York, 1998.

[6] McLeish L.: *Monte Carlo Simulation & Finance*, John Wiley & Sons, Inc., Hoboken, 2005.

[7] Melicherčík I., Olšárová L., Úradníček V.: *Kapitoly z finančnej matematiky*, EPOS, Bratislava, 2005.

[8] Neubrun T., Riečan B.: *Integral, measure and ordering*, Kliwer Academic Publishers, Dordrecht, 1997.

[9] Oksendal B.: *Stochastic Differential Equations*, 6th edition, Springer-Verlag, New York, 2003.

[10] Ševčovič D.: *Parciálne diferenciálne rovnice a ich aplikácie*, IRIS, 2008.

[11] Ševčovič D.: *Analytické a numerické metódy oceňovania finančných derivátov*, STU, Bratislava, 2009.

[12] Vašíček O.: *An Equilibrium Characterization of the Term Structure*, Journal of Financial Economics 5, 177-188, 1977.

# *Listing programov*

*Všetky kódy sú naprogramované v Matlabe 6.5*

***Listing 3.1:*** Načítanie vstupných dát

```
vol=0.19;         % rocna volatilita akcie
dt=1/252;         % casovy interval 1 den
r=0.02;           % bezrizikova urokova miera
K=365;            % strike price
S0=368.42;        % sucasna hodnota akcie
dni=10;           % pocet dni do maturity
T=dt*dni;         % maturita v dnoch
e=exp(1);
```

***Listing 3.2:*** Ocenenie európskej kúpnej opcie binomickým stromom

```
function [cena]=BinStrom(K,S0,vol,dt,dni,r)
SK=[1:dni+1];    % mozne ceny akcie v case maturity
f=[1:dni+1];     % mozne ceny opcie v case maturity
up=e^(vol*sqrt(dt));      % skok ceny akcie hore
down=1/up;                % skok ceny akcie dole
q=(e^(r*dt)-down)/(up-down); % rizikovo neutralna P
for i=0:dni SK(i+1)=S0*(up^i)*(down^(dni-i)); end
for i=1:dni+1
     f(i)=SK(i)-K;
    if (f(i)<0) f(i)=0; end
end
suma=0;
for i=0:dni
    suma=suma +
    f(i+1)*(q^i)*((1-q)^(dni-i))* nchoosek(dni,i);
end
cena=e^((-r)*dt*dni)*suma;      %sucasna cena opcie
```

***Listing 3.3:*** *Ocenenie európskej kúpnej opcie Black-Scholesovým vzorcom*

```
function [cena]=BlackScholes(K,S0,vol,dt,dni,r)
d1=(log(S0/K)+r*T+1/2*vol^2*T)/(vol*sqrt(T));
d2=(log(S0/K)+r*T-1/2*vol^2*T)/(vol*sqrt(T));
dist1=normcdf(d1,0,1);
dist2=normcdf(d2,0,1);
cena=S0*dist1 - K*e^(-r*T)*dist2;
```

***Listing 3.4:*** *Simulačné ocenenie európskej kúpnej opcie pri pevnej úrokovej miere*

```
K=85;
S0=[1:10];
for i=1:10 S0(i)=68+i*3; end
S=zeros(10,dni);
V=zeros(10,5000);
for i=1:10 S(i,1)=S0(i); end
for p=1:5000
     for j=1:10
        for i=2:dni
            nah=randn*sqrt(dt);
            expon=(r-1/2*vol^2)*dt + vol*nah;
            S(j,i)=S(j,i-1)*e^expon;
        end
        V(j,p)=S(j,dni)-K;
        if V(j,p)<0 V(j,p)=0; end
        V(j,p)=e^(-r*T)*V(j,p);
  end
end
Sz=[1:10];
for j=1:10
     Sz(j)=0;
    for p=1:5000 Sz(j)=Sz(j)+ V(j,p); end
    Sz(j)=Sz(j)/5000;   %koncove ceny opcii
end
```

***Listing 3.5:*** *Simulačné ocenenie európskej kúpnej opcie pri stochastickej úrokovej miere*

```
sim=5000     %pocet simulacii
dni=10;
sigs=0.19;
sigr=0.025;
dt=1/252;
k=40;
the=0.02;
ro=0.5;
r0=0.02;
Aplus=pinv([0,1;0,-k]);
b=[-sigs^2/2;k*the];
```

```
I=[1,0;0,1];
eA=[1,(1-e^(-k*dt))/k;0,e^(-k*dt)];
eAs=[dt,dt/k-(e^(-k*dt)/k^2);0,e^(-k*dt)/k];
d11=sigr^2*dt+2*sigr*sigs*ro*((k*dt-1)/k^2)+
(k*dt-1.5)/k^2+2*sigr*sigs*ro*e^(-k*dt)/k^2+
2*sigr^2*e^(-k*dt)-sigr^2*e^(-2*k*dt)/(2*k^2);
d12=sigr*sigs*ro/k+sigr^2/(2*k^2)-
sigr*sigs*e^(-k*dt)/k-sigr^2*(e^(-k*dt)/k^2-
e^(-2*k*dt)/(2*k^2));
d21=d12;
d22=(sigr^2/2*k)*(1-e^(-2*k*dt));
D=[d11,d12;d21,d22];
DX=chol(D);
K=85;
S0=[1:10];
for i=1:10 S0(i)=log(68+i*3); end;
V=zeros(10,sim);
for i=1:10 S(i,1)=S0(i); end
for p=1:sim
     for j=1:10
         X=zeros(dni,2);
         X(1,:)=[S0(j),r0];
         for i=2:dni
              EX=eA*X(i,:)'+eAs*b;
              X(i,:)=X(i-1,:)+EX'+randn(1,2)*DX;
         end
         V(j,p)=e^X(dni,1)-K;
         if V(j,p)<0 V(j,p)=0; end
         SXr=0;
         for i=1:dni SXr=SXr+X(i,2); end
         r=SXr/dni;
         if r<0 r=0; end
         V(j,p)=e^(-r*T)*V(j,p);
     end
end
Sz2=[1:10];
for j=1:10
     Sz2(j)=0;
    for p=1:sim Sz2(j)=Sz2(j)+ V(j,p); end
    Sz2(j)=Sz2(j)/sim;        %koncove ceny opcii
end
```