UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY

Alokácia predajného sortimentu pri sezónnom dopyte po tovare

BAKALÁRSKA PRÁCA

2012 Magdaléna JANEČKOVÁ

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY

Alokácia predajného sortimentu pri sezónnom dopyte po tovare

BAKALÁRSKA PRÁCA

Študijný program:	Ekonomická a finančná matematika
Študijný odbor:	9.1.9. Aplikovaná matematika
Školiace pracovisko:	Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky
Vedúci práce:	Mgr. Darina Graczová

Bratislava 2012

Magdaléna JANEČKOVÁ

94945654

Univerzita Komenského v Bratislave
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

ZADANIE ZÁVEREČNEJ PRÁCE

Meno a priezvisko študenta: Magdaléna Janečková
Študijný program: ekonomická a finančná matematika (Jednoodborové štúdium, bakalársky I. st., denná forma)
Študijný odbor: 9.1.9. aplikovaná matematika
Typ záverečnej práce: bakalárska
Jazyk záverečnej práce: slovenský

Názov: Alokácia predajného sortimentu pri sezónnom dopyte po tovare

Cieľ: Popísať problematiku alokácie sezónneho alebo "kaziaceho sa" tovaru v predajni a navrhnúť model dopytu po takom tovare. Zostaviť a popísať matematický model v tvare celočíselného batohu použitý na riešenie daného problému. Na základe simulácií porovnať jeho výkonnosť s už známymi modelmi.

Vedúci: Mgr. Darina Graczová

Dátum zadania: 15.10.2011

Dátum schválenia: 27.10.2011

doc. RNDr. Margaréta Halická, CSc.
garant študijného programu

....
študent

....
vedúci

Poďakovanie Touto cestou sa chcem poďakovat svojej vedúcej bakalárskej práce Mgr. Darine Graczovej za výber témy, trpezlivosť, ochotu, pomoc, odborné rady a podnetné pripomienky k písaniu tejto práce.

Ďakujem aj svojej rodine a priateľom za ich trpezlivosť a podporu.

Abstrakt v štátnom jazyku

JANEČKOVÁ, Magdaléna: Alokácia predajného sortimentu pri sezónnom dopyte po tovare [Bakalárska práca], Univerzita Komenského, Fakulta matematiky, fyziky a informatiky, Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky; školiteľka: Mgr. Darina Graczová, Bratislava, 2012

Táto práca je zameraná na hľadanie optimálneho rozmiestnenia tovaru do predajne prostredníctvom určenia indexov pre jednotlivé položky. Používame na to metódu, ktorá rieši "Multi-armed restless bandit" problém. Indexy, po zoradení podľa veľkosti, slúžia na určenie priorít, ktoré vyjadrujú efektivitu ich propagácie. Podľa veľkosti indexov by sa tovar mal zaradiť do predajne. Zaoberáme sa dvojakým spôsobom priradenia indexov pre položky, a to analytickým a numerickým. Hoci numerické riešenie dokáže vyskúšať všetky možné kombinácie alokácie tovarov do predajne, výpočtovo je veľmi náročné. Analytické riešenie, vzhľadom na komplexnosť problému, nie je presné, no ako ukážeme v práci, vykazuje veľmi dobrú aproximačnú schopnosť.
Experimentálne sme otestovali efektívnosť analytickej metódy a dospeli sme k záveru, že analytické riešenie vykazuje odchýlky od numerického riešenia len do troch percent, čo je vzhľadom na jeho jednoduchosť veľmi vysoká úspešnosť.

Kľúčové slová: Problém celočíselného batohu s kaziacimi sa potravinami, Indexácia, Multi-armed restless bandit, Whittlova relaxácia.

Abstract

JANEČKOVÁ, Magdaléna: The allocation of the sales range in seasonal demand for goods[Batchelor Thesis], Comenius University in Bratislava, Faculty of Mathematics, Physics and Informatics, Department of Applied Mathematics and Statistics; Supervisor: Mgr. Darina Graczová, Bratislava, 2012

In our work we investigate the allocation of the sales range in seasonal demand for goods. For the purpose we mark each item with an index. The indexes are results of Multi-armed restless bandit problem. We order indexes by size, where the biggest one is the most effective for promotion and the smallest one is the less appropriate to promote. According to size of indexes, items should be promoted. We describe two alternatives for computing indexes, analitical and numerical way. Numerical index is gain as result of solving combinarotial problem, and that determines it to be computationally intense. Analytical result is not exact, but it is a good approximation as it is shown in our work. We experimentally tested both ways and results were very interesting. Analytical index differs from numerical result just in a small variation (under tree percent), what makes analytical way of computing the preferred way.

Keywords: Knapsack problem for perishable items, Index Policies, Multi-armed Restless Bandit, Whittle Index.

Obsah

Zoznam obrázkov

Zoznam použitých symbolov

i	označenie položky určenej na predaj, $i \in I$
R_i	výnos, ktorý prináša i-ta predaná položka
β	diskontný faktor, $0 < \beta < 1$
α	zachránená hodnota produktov, $\alpha < 1$
p_i, q_i	pravdepodobnosti, že sa položka nepredá $0 < p_i, q_i \leq 1$
W_i	priestor v batohu, ktorý zaberá i-ta položka
s	súčasná perióda
$X_i(s)$	vyjadruje počet zostávajúcich periód do vypršania životnosti tovaru
a_i	binárne vyjadrenie akcie $a_i \in \{0, 1\}$
ν	cena propagácie
π	postup pri propagácii, obsahuje a_i a prislúchajúcu čas t_i

Úvod

Pri návšteve maloobchodnej predajne si veľmi zriedkavo uvedomujeme, koľko námahy viedlo k terajšiemu rozmiestneniu tovarov, určeniu ich ceny, či spôsobu ich propagácie.

Rozmiestnenie tovarov je dlhodobé strategické rozhodnutie. Ako príklad uvedieme oddelenie s pečivom. V supermarketoch sú tieto oddelenia väčšinou v zadných častiach predajne, a to z toho dôvodu, že zákazník je nepriamo nútený prejsť cez veľkú časť predajne. Týmto spôsobom sa zvyšuje pravdepodobnosť, že si zákazník kúpi aj ďalší tovar na ceste k oddeleniu s pečivu. Zoberme si zákazníka, ktorý prišiel len po chlieb. Keby bolo v tomto prípade oddelenie s pečivom blízko pri vchode, zákazník si s veľkou pravdepodobnosťou kúpi len chlieb a opustí predajňu. Akonáhle ale musí prejsť cez celú predajňu vzyšuje sa pravdepodobnosť, že nakúpi aj vopred neplánovaný tovar. Z toho dôvodu, ak supermarket pečie pečivo priamo v predajni, umiestni pece v určenom zadnom priestore. Obdobne to platí napr. pre chladiace boxy na mäso, mliečne výrobky a pod. Preto je naozaj potrebné vhodne si zvoliť rozmiestnenie predajne, lebo neskôr bude veľmi ťažké toto rozhodnutie zmeniť. Jedná sa o prípady, kedy si tovar vyžaduje špeciálny úložný priestor, chladenie, alebo iné vybavenie.

Opačný prípad nastáva pri určovaní ceny a propagácie tovaru. Tieto prípady sú kratkodobými problémami. Umožňuje im to rýchlo a prispôsobivo reagovať na zmeny dopytu. V niektorých predajných odvetviach, je určovanie ceny a propagácia tovaru ešte umocnená ich životnosťou. Máme na mysli prípady, kedy sa jedná o tovar s obmedzeným dátumom expirácie. Tovar môžeme ponúkať len to tohto času, neskôr je už odstránený. Preto, keď sa tovar blíži k dátumu spotreby zvyšujú sa snahy manažéra predať tovar. Dosahuje to buď znižovaním jeho ceny, alebo zvýšením propagácie,t.j umiestnením na lepšie viditeľné miesto v predajni. Zvyčajne sa tým myslia regály pri pokladniach, rohy predajných uličiek a pod.

Práve týmto druhom ovplyvňovanie predajnosti tovarov sa budeme zaoberať v nasledujúcej práci.

1 Objasnenie problému a motivácia

V úvode sme uviedli, že máme niekoľko spôsobou ako môžeme ovplyvniť predajnosť tovarov. Bližšie si opíšeme dva najviac používané spôsoby. Uvedieme podstatu nášho problému a spôsob, ktorým budeme toto zadanie riešiť. Celý koncept ilustrujeme na konktétnych situáciách v predajniach.

1.1 Dynamické určovanie ceny

Dynamické určovanie ceny je štandardným postupom pri vytváraní zisku (napr. znižovaním ceny, keď je dopyt nízky, a zvyšovaním ceny, ak je dopyt vysoký, sa dosiahnu mnohokrát väčšie výnosy ako pri obchodovaní s konštantnou cenou. Znižovanie ceny sa môže pohybovať až do marginálnych výdavkov, avšak nižšie by už byť nemalo, nakoľko by to viedlo k zápornému výnosu).

Dôvody prečo sa, napriek vyššie spomenutým výhodám dynamického predceňovanie, tento spôsob nevyužíva môžu byť nasledovné:

- výdavky spojené s určovaním nových cien (nové cenové štítky, pracovná sila, ktorá určený tovar musí označiť a preceniť a pod.)
- určitá strnulosť pri preceňovaní značkových tovarov. Jedná sa tu o snahu udržať určité cenové povedomie o značke u zákazníkov. Vo všeobecnosti si zákazníci zvyknú priradiť cenovú úroveň k značke tovarov, ktorú budú ochotní akceptovať. Keby sme takýto tovar zlacňovali, po čase už zákazníci nebudú ochotní zaplatiť plnú cenu.
- čakanie na zlacnenie tovarov. Keby sme tovar po čase predávali so zľavou, zákazníci by si mohli zvyknúť počkať s kúpou až do času, kedy sa vyskytne zníženie ceny. Preto je v niektorých prípadoch lepšie predávať len za plnú cenu a tovar nepreceňovať alebo zlacňovať chaoticky, aby nebolo možné predpovedať zmenu ceny.

Ako sme už spomínali maloobchodný predajca sa snaží pri preceňovaní, okrem iného, vyhnúť hlavne takej cene tovarov, ktorá by bola nižšia ako prostriedky vynaložené na jeho získanie, keďže zisk z tohto predaja by bol záporný. Nie je preto prekvapením, že predajca sa bude správať opatrnejšie a konzervatívnejšie pri objednávaní tovaru, aby ostal čo najmenší počet nepredaného tovaru. To ale zvýši pravdepodobnosť a aj trvanie nedostatku tovaru, z dôvodu jeho vypredania. Viaceré štúdie [1],[2], ale ukázali, že reakcie zákazníkov na vypredanosť tovarov má významné negatívne následky na zisk predajcu.

1.2 Dynamická alokácia tovaru

Z vyššie uvedeného vyplýva, že pre predajcu by boli vhodnejšie jemnejšie marketingové nástroje ako tie, ktoré ponúka dynamické preceňovanie tovarov. Týmto nástrojom by mohlo byť dynamické rozmiestňovanie tovarov do propagačného priestoru, kde je vysoká šanca, že si ich zákazníci všimnú a následne kúpia.

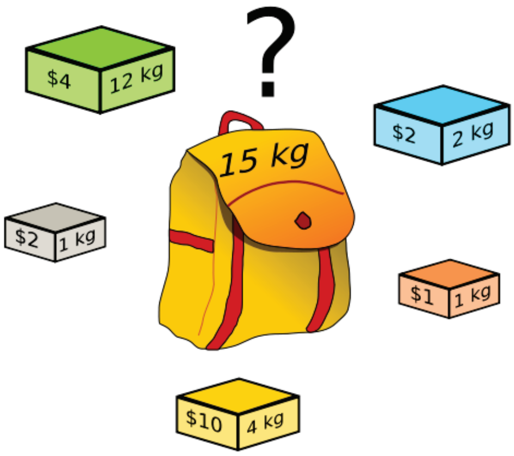
Propagačním priestorom sa myslia regály blízko pri pokladniciach, kde sú zákazníci doslova nútení si ich všimnúť, keďže pri pokladniach strávia nezanedbateľný čas. Tiež to sú police na rohoch predajných uličiek, a pod. Týmto spôsobom sa zameriame na iracionalitu človeka, ktorý sa dá ovplyniť tým, že tovar v predajni uvidí alebo neuvidí. Čo vlastne znamená, že jeho rozhodnutie o kúpe určitého tovaru sa môže zmeniť priamo v predajni, ak tam nájde íný atraktívnejší tovar. Zákazník bude s väčšou pravdepodobnosťou kupovať propagovaný tovar ako ten, ktorý zostal na sklade. Práve týmto spôsobom maximalizácie výnosov predajcu sa budeme zaoberať v riešení problému alokácie sezónneho tovaru.

2 Knapsack problém - Úloha celočíselného batohu

Našou úlohou je ovplyvňovať kúpu tovarov jeho propagáciou alebo ponechaním v sklade. Najvýhodnejšie by bolo, keby sme všetok tovar propagovali, a tým zvýšili pravdepodobnosť predaja pre všetky položky. Tu, ale musíme zaviesť určité obmedzenia, nakoľko predajca nedisponuje neobmedzeným propagačným priestorom. Tieto obmedzenia budú v tvare ohraničenosti batohu, ktorý máme k dispozícii.

Vybrali sme si prirovnanie k batohu z niekoľkých dôvodov. Okrem toho, že sa toto označenie používa v literatúre[4], zameranej na náš problém, už veľmi dlho, aj my ho považujeme za veľmi efektívny opis našeho obmedzenia. Zadefinujeme si preto jeho vlastnosti a spôsob výberu vhodných položiek do batohu.

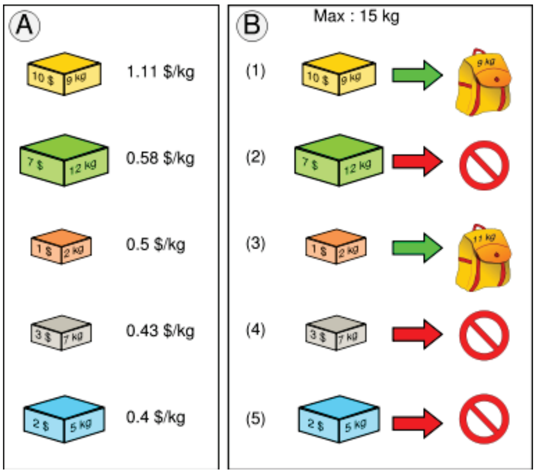
Batoh/knapsack predstavuje obmedzený priestor, ktorý máme k dispozícii. Našou úlohou je čo najlepšie využiť jeho objem.



Obr. 1: Úloha celočíselného batohu

Mohli by sme to prirovnať k baleniu sa na dovolenku. Chceme si zobrať veľké množstvo vecí a oblečenia, ale obmedzujú nás napr. kvóty na veľkosti kufru povolené leteckými spoločnosťami. Vtedy si musíme vytvoriť určitý systém v balení. Priradíme jednotlivým veciam priority a podľa nich vyberáme veci, ktoré nám naozaj poslúžia.

Na obrázku môžeme vidieť ako program postupne vypočíta výnosnosť každej tehly. Podľa toho ich zoradí od najvýhodnejšej po najnevýhodnejšiu. Nasleduje výber, kedy si vyberie tú najlepšiu a pokračuje ďalej. Keď nájde položku síce výhodnú, ale nespĺňajúcu naše odmedzenia (max. nosnosti batohu je 15kg) prejde k nasledujúcej možnosti.



Obr. 2: Určovanie preferencií v celočíselnom batohu

Až kým nepríde k záveru.

Podobný systém využíva aj náš model, ktorý popíšeme v ďalších kapitolách. Zoradí položky podľa priority a postupne bude vyberať tie, ktoré sa do knapsacku hodia. Pri tomto vyberaní nasledujúcich položiek, ale bude brať do úvahy aj obmedzenia v podobe veľkosti priestoru.

3 Úvod do vlastností celočíselného batohu

Problém, ktorý by mohlo byť riešeý pomocou „celočíselného batohu“, si vyžaduje zadefinovať konktrétne vlastnosti jednotlivých prvkov. Fundamentálna vlastnosť položiek v probléme je obmedzená životnosť tovarov. Preto ju opíšeme detailnejšie.

Uvádzame tiež jednoduchý popis problému, aby si čitateľ vedel lepšie logicky pospájať dôležitosť jednotlivých vlastností.

Definícia 3.1. *Problém batohu s tovarom, ktorý má obmedzený dátumom spotreby nazývame "Knapsack problem for perishable inventories- KPPI". Zaoberá sa optimálnym dynamickým rozmiestnením sortimentu kaziacich sa alebo sezónnych tovarov v obmedzenom priestore, tak aby sa maximalizoval zisk predajcu.*

Zisk tvoria celkové očakávané príjmy z predaja a tzv. zachránené hodnoty produktov, pod ktorými rozumieme hodnoty výrobkov, ktorých cena bola znížená oproti pôvodnej cene. Zachránené hodnoty produktov môžu byť aj záporné, a to v prípade, že produkt nebol predaný do doby expirácie a bolo potrebné vynaložiť určité prostriedky na jeho likvidáciu.

Veľmi dôležitým faktorom v KPPI modeli je obmedzený dátum spotreby. Po tomto dátume už tovar nebude možné predať. Môže sa tiež stať, že budeme na tomto produkte strácať, budeme musieť použiť ďalšie prostriedky na jeho likvidáciu. Tovar, o ktorom budeme hovoriť bude buď:

- "kaziaci sa "
  - s veľmi krátkou dobou spotreby: zelenina, ovocie, mliečne výrobky, čerstvé mäso atď;
  - s dlhšou, ale obmedzenou dobou spotreby: trvanlivé mlieko, cestoviny, ryža, konzervy atď;
- sezónny
  - oblečenie: letné, zimné, atď;
  - dovolenky: letné, zimné(Silvestrovské, vianočné);

Ďalším faktorom bude obmedzený priestor v predajni. Týmto problémom sa zaoberá pravdepodobne každý manažér predajne. Je totiž veľmi dôležité, aký tovar sa rozhodne vystaviť priamo v predajni, a ktorý ponechá iba v sklade.

Tovar ponechaný v sklade je možné propagovať na internetovom portáli v, reklamách v médiách a pod, čo by znamenalo, že pravdepodobnosť predaja nemusí byť nutne nižšia akú bude mať vystavený tovar.

Pre tento model budeme, ale predpokladať, že nevystavený tovar bude mať pravdepodobnosť predaja predsa len nižšiu. Môžeme to odôvodniť napríklad tým, že ak príde zákazník do predajne, kde bude vidieť vystavený tovar, bude v pokušení si ho kúpiť a tým sa zvýši pravdepodobnosť predaja, svoje rozhodnutie kúpiť si určitý produkt, zmenil, keď sa dostal do kontaktu s vystaveným tovarom.

4 Aplikácie modelu

Matematika ako veda je veľmi často aplikovaná do bežného života, ale nie vždy to človek vie rozpoznať. Táto časť je určená na priblíženie viacerých špecifických príkladov, kedy sú splnené podmienky KPPI, a teda ich môžeme zaradiť do problému "celočíselného batohu". Týmto poukážeme na praktické využitie problematiky, ktorou sa zaoberáme.

- Umiestnenie oblečenia. Nakoľko oblečenie veľmi podlieha času, v ktorom je ponúkané, zaradzujeme ho do skupiny sezónnych tovarov. Na príčine je hlavne móda. Je zrejmé, že oblečenie sa neznehodnotí časom stráveným v sklade. Vplyvom módy je mu ale priradzovaná hodota práve v predajnom čase. To znamená, že ak je práve ïn "puzdrová sukňa, bude po nej veľký dopyt, jej cena=hodnota bude vysoká, ale po určitom čase (1-2 roky) sa bude dopyt znižovať, bude sa znižovať aj jej cena, pretože ju bude nahrádzať iný druh sukne. Pravdepodobnosť predaja bude preto po určitom čase skoro nulová, aj keď tovar bude nepoškodený a v podstate úplne rovnaký ako bol na začiatku obdobia;

- Predaj dovoleniek. Jedná sa hlavne o predaj letných dovoleniek. Počas letných mesiacov stúpne dopyt po dovolenkách, vtedy bude pravdepodobnosť ich predaja najvyššia, ale po niekoľkých mesiacoch sa pravdepodobnosť výrazne zníži, a tak ak predajca nepredal dovolenku do tohto dátumu, už ju pravdepodobne nepredá;

- Predaj časopisov. Časopisy sú tiež veľmi zaujímavým príkladom sezónneho tovaru. Je po nich veľký dopyt hlavne v dobe vydania, ale akonáhle sa blíží dátum vydania nasledujúceho čísla dopyt po našom produkte klesá. Ak sa časopis nepredá do dátumu vydania nasledujúceho čísla už sa nepredá a je likvidovaný. Pre predavača je teda výhodné časopis vystaviť, aby tak vzýšil pravdepodobnosť, že si ho zákazník všimne a kúpi;

- Predaj ozdôb na špecifické sviatky. Ľudia zvyknú často kritizovať obchodníkov hlavne v období pred Vianocami, kedy sú ozdoby, darčeky a pod. prezentované už mesiac aj dva dopredu. Pre obchodníkov to ale predstavuje výhodu. Niektorí zákazníci si tento tovar kúpia aj takto v predstihu a odchodníci získajú viac času na prezentovanie tovaru. Ďalej môžeme spomenúť sviatky ako Veľká noc, Valentín, Dušičky, Halloween. Všetky tieto sviatky spája dopyt po špecifických ozdobných predmetoch práve pre ten-ktorý sviatok. Či už sú to svetielka, veľkonočné vajíčka, srdiečka, kahance, strašidelné predmety, pre všetky platí, že po vysokom dopyte nasleduje rýchly spád a pokles dopytu až na nule (doba expirácie). Veď kto by si kupoval ozdoby na stromček týždeň po Vianociach;

- Predaj elektrospotrebičov. Pri predaji elektrospotrebičov si zákazník tovar v predajni iba vyberie, ale neodnáša si ho sebou. Preto nie je potrebné, aby bolo vystavených viac kusov tovarov, keďže tovar nie je presúvaný zákazníkom. Zákazníkovi je domov doručený tovar zo skladu;

- Predaj nábytku. Predajne nábytku sú známe tým, že si v nich máte môžnosť prezrieť celé zariadené izby. Predajca tým vyzdvihne možnosť kombinovať jednotlivé kusy nábytku a pod. Zákazník sa teda o kúpe rozhoduje v predajni, ale tovar si objednáva z katalógu. Z toho vyplýva, že by bolo zbytočné vystavovať viac kusov tovaru. Pri kúpe vybraný tovar neopustí predajňu, ale zákazníkovi bude dodaný rovanký tovar zo skladu, tak ako je to uvedené aj pri predchádzajúcom príklade;

- Predaj automobilov. Zákazník má možnosť automobil si v predajni pozrieť, vyskúšať. No pri kúpe nedostane testované vozidlo, ale vozidlo zo skladu. Týmto je zabezpečené, že ak predchádzajúci zákazník neopatrne zaobchádzal s testovaným vozidlom, terajší zákazník dostane vozidlo v 100% stave. Zároveň má možnosť otestovať si všetky funkie a prevedenia vozidla;

- Obchody s návrhárskym oblečením, kde existuje len jeden kus z daného tovaru, kde každý kus je originálom;

- Obchody s hand-made tovarom by sa v určitom zmysle mohli považovať za rovnaký typ problému, diskusiu by mohli vyvolať niektoré časti ponuky, ktoré aj keď sú vytvorené hand-made, teda žiadne 2 kusy nebudú presne rovnaké, predsa by sme ich mohli považovať za identické pre ich veľkú podobnosť;

- Second-hand predajne. Oblečenie ponúkané v týchto typoch predajní sa tu nachádza len v jednotkovom počte, a preto je to veľmi názorný príklad nášho modelu.

5 Bandit problems

V kapitole 2 sme opisovali batoh, do ktorého sme mali pomocou určitého logického postupu vkladať položky. Tento logický postup formulujeme cez výber založený na hodnotách indexov jednotlivých položiek. Na stanovanie indexov nám poslúži "Multi-armed restless bandit" problém. Ten slúži na prideľovanie zdrojov pre zariadenia pri nedokonalej informácii. V našom prípade to bude prideľovanie miesta v predajni jednotlivým položkám.

5.1 One-armed bandit problem

Názov dostal podľa hracieho automatu s názvom "One-Armed Bandit".

Obr. 3: "One-Armed Bandit" problém

Princípom automatu je maximalizovať výhru získanú opakovaným zatiahnutím za páku (základný prvok automatu). Gambler v tomto prípade môže zatiahnuť len za jednu páku v čase t. Princíp spočíva v možnosti dynamického výberu. Môžeme si vybrať medzi dvoma možnosťami:

- okamžitou výhrou
- okamžitou výhrou a zbieraním informácií, z ktorého budeme profitovať neskôr

Gambler na začiatku svojej hry nemá vedomosť o pravdepodobnosti výhry. Nevie teda predpokladať, kedy sa mu ešte oplatí hrať a kedy je dobré prestať. S vyšším počtom odohraných hier sa, ale zvyšujú jeho vedomosti o správaní sa modelu.

Za zbieranie informácií, teda považujeme zvyšujúci sa počet odohraných hier, pri ktorých poznáme výsledok, teda vieme zostrojiť určitú pravdepodobnosť výhry. Podľa nej si gambler zvolí, či sa mu oplatí pri automate hrať ďalej, alebo pôjde skúsiť šťastie k inému stroju.

5.2 Multi-armed bandit problem

"Multi armed bandit" problém môže byť optimálne vyriešený jeho rozložením na viacero "One-Armed Bandit" problémov. Každý z nich bude nezávislý od zvyšných modelov. Následne ich znova zložíme do jedného "multi-armed bandit" problému, ktorého úlohou je nájsť jedného banditu, ktorý bude preferovaný. V každom rozhodovacom čase, by sme si mal vybrať položku s najväčšou hodnotou indexu.

"Multi-armed bandit" má oproti "One-Armed Bandit" viacero úrovní, ktoré poskytujú rôzne výhry. Ozrejmíme si to na nasledujúcich príkladoch.

- Majme kasíno a v ňom viacero herných automatov ("One-Armed Bandits"). Práve tu si príde, gambler otestovať svoje šťastie. Predpokladajme, že v kasíne ostane naveky (čas t počas ktorého bude hrať pôjde limitne do nekonečna), a že hracie automaty bude obsluhovať iba on, nikto iný počas času t nebude meniť stav na hracích automatoch.

  Každú časovú jednotku si musí gambler vybrať stroj, na ktorom bude hrať a potiahnuť za páku. Stoj zareaguje a vynesie mu určitú výhru podľa súčasného stavu (za základe naprogramovania pravdepodobnosti výhry). Gambler týmto spôsobom zisťuje pravdepodobnosti o konkrétnom automate a súčasne na ostatých automatoch ostáva stav rovnaký. Kedykoľvek sa môže presunúť k inému automatu zahrať zopár hier a následne sa rozhodnúť, ktorý z automatov mu podľa pravdepodobností prinesie väčšiu výhru. Cieľ gamblera, je čo najviac maximalizovať svoju výhru (diskontovanú časom) v rámci nekonečného časového horizontu.

- Predstavme si lekára, ktorého začnú navštevovať veľké (nekonečné) množstvá ľudí s neznámou chorobou. Predpokladajme, že každý deň sa lekár musí rozhodnúť pre spôsob liečby, s tým že si vyberá z určitého daného množstva spôsobou liečby.

> Pacient okamžite zareaguje na liečbu a to buď vyliečením alebo smrťou. Lekár teda skúša rôzne spôsoby liečby a na základe získaných údajov informácii sa rozhodne pre určitý druh sliečby. Lekárovou túžbou je vyliečiť čo najviac pacientov, diskontovaných časom, v nekonečnom horizonte.

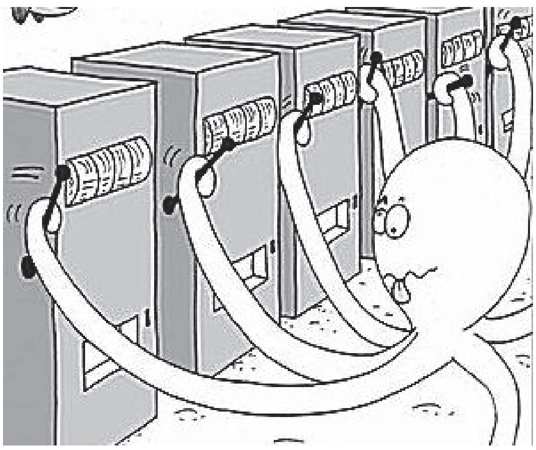
Oba spomenuté príklady naznačujú rovnaký matematický problém a to "Multi-armed bandit" problém. Jeho hlavnou vlastnosťou je statickosť zvyšných banditov, ktorý v daný čas neboli vybraný (zvyšné automaty, spôsoby liečby). Ich stav sa menemí.

V prvom prípade gambler zisťuje, ktorý automat je v priemere najvýnosnejší, a to tak že využíva vždy všetky automaty, z ktorých si vyberá ten s najvyšším indexom. Index je hodnota, ktorá bude slúžiť na porovnanie banditov. Vyšší index znamená väčšiu pravdepodobnosť výhry.

Podobne v druhom prípade, lekár sa učí testovaním spôsobou liečby. Obdobne nájde spôsob, ktorý je v priemere úspešnejší ako zvýšné spôsoby.

5.3 Multi-armed restless bandit problem

V modeli s "restless bandits" sú predpoklady rovnaké ako pri "Multi-armed bandits" až na statickosť. Predpoklad statickosti ostatných banditov sa v restless bandits nenachádza. To znamená, že keď zahrám hru na jednom banditovi, súčasne sa mi zmení stav na všetkých ostatných banditoch.



Obr. 4: "Multi-Armed Bandit" problém

5.3.1 Určovanie indexov

Ako už bolo povedané banditov ohodnocujeme pomocou indexov. My sa budeme zaoberať niektorými základnými typmi a to:

- Gittinsovou indexáciou. Získanú hodnotu nazývame Gittins index value. V tomto spôsobe sa index skladá z dvoch zložiek. Je to súčet výnosu z výhry a určité ohodnotenie získanej informácie.

- Whittlova indexácia. Získavame z nej zovšeobecnenie Gittinsove hodnoty indexov. V tomto indexe sa už nedá presne určiť aká časť z indexu prislúcha hodnote výhry a aká časť určuje získanú informáciu o modeli. Whittlove hodnoty indexov, ale nemusia vždy existovať a niekedy aj keď sa dajú vypočítať neurčujú optimum. No nakoľko sa ukázalo, že hodnoty sa dajú približne určiť a v priemere udáva výsledky veľmi blízko optima, pri ”restless bandits” sa používa Whittlova indexácia. Formálne ju uvedieme v kapitole **??**.

5.4 Použitie

V praxi je ”Multi-Armed Bandit” problém používaný na rozmiestnenie zdrojov medzi konkurenčné projekty, o ktorých nemáme úplnú informáciu. Pod neúplnou informáciou myslíme, že nevieme určiť presné výnosy, ktoré budú plýnúť z jednotlivých rozhodnutí.

V našom prípade to môže byť umiestnenie tovaru. Môžeme sa rozhodnúť ho okamžite vystaviť, tým zväčšíme pravdepodobnosť jeho predaja - okamžitý výnos. Získavame informáciu o tom ako bude vystavenie tovaru vplývať na jeho predajnosť. Alebo sa rozhodneme ho v predajni neumiestniť pre prípad, že v budúcnosti sa jeho hodnote ešte zvýši a bude pre nás výhodnejšie ho predať vtedy.

5.5 Vlastnosti modelu

Každý bandita teda predstavuje jednu položku kaziaceho sa tovaru. Náš model má tieto vlastnosti:

- ”restlessness” - tovar, môže byť predaný aj napriek tomu, že nie je vystavovaný;

- obmedzený časový horizont (dátum expirácie);

- výber viacerých položiek do knapsacku;
- možnosť knapsacku byť naplnený len čiastočne. Nie vždy dokážeme urobiť z tovaru takú kombináciu aby sme zaplnili všetko promočné miesto, väčšinou nám ostanú časti, do ktorých sa už žiadny tovar pre svoju rozlohu nezmestí;

Pri týchto štyroch vlastnostiach, ale vyššie spomenuté indexové pravidlá strácajú vlastnosť optimalizácie a preto vytvárame nový odhadovací model na určovanie optima.

V novom odhadovacom modeli sú dané vhodnejšie podmienky pre restless banditu, aby mohol byť označný indexom, ktorý odráža aj predošlé indexy prisúdené položke. Takto vzniknutý index nazývame tiež "*promotion priority index*" (index pre prioritnú propagáciu) keďže vyjadruje efektívnosť propagácie danej položky. V zásade platí, že ak položka prekročí svojou indexovou hodnotou hodnotu výdavkou spojených s propagáciou, položka sa umiestni na miesto propagácie.

6 Jednoduchý KPPI

V nasledujúcich kapitolách opíšeme jednoduchý model KPPI ("Knapsack problem for Perishable Items"), ktorý bude pracovať s jedným kusom tovaru. Získame tak určitý prehľad a vedomosti potrebné pre porozumenie problému s K kusmi tovaru.

Nakoľko v modeli sa objavuje príliš veľa premenných (tovarov/produktov), ktoré majú rôzny dátum expirácie, môže sa stať, že model, používaný na riešenie "Knapsack problem", bude neprehľadný a bude ťažké sa v ňom orientovať, preto sa v tejto časti budeme zaoberať, jednoduchším modelom, ktorý vznikol odvodením z primárneho modelu a to jeho rozložením na menšie submodeli. Dosiahneme to Lagrangeovou relaxáciou. Je to relaxačná metóda, ktorá aproximuje zložitý problém viazanej optimalizácie jednoduchším problémom. Riešenie je približným riešením pôvodného problému, ale napriek tomu poskytuje užitočné informácie.

Zameriame sa na prípad kedy máme len jeden kus daného produktu v ponuke. Nie je to nevyhnutne iba teoretické riešenie, pretože toto je prípad viacerých predajní ako sme uviedli v kapitole 4.

6.1 Formálne vyjadrenie problému

Predpokladáme, že dopyt zákazníka sa vzťahuje vždy iba na jeden kus tovaru (Bernuolli). Môžeme to predpokladať bez ujmy na všeobecnosti, keďže si môžeme zvoliť ľubovoľne malú dĺžku periódy, počas ktorej sa bude tovar propagovať. Ako dôsledok budeme v jednej časovej perióde propagovať len jede kus tovaru, teda problém bude pre nás analyticky riešiteľný. Tento výrok bude platiť pri splnení určitých predpokladov, ktoré definujeme neskôr.

Základné črty úlohy:

1. predajca disponuje I kusmi kaziaceho sa tovaru, kde $i \in I$;
2. každá i-ta položka môže byť predaná iba počas jej životnosti, t.j. iba v čase 0, 1, . . .$T_i - 1$, kde platí, že $T_i \geq 1$ a $T_i - 1$ je deadline (napr. dátum spotreby pri kaziacom sa tovare, alebo pri sezónnom oblečení to môže byť termín novej kolekcie, ktorá v predajni nahradí tú predošlú);

3. každá položka je k dispozícii až do T_i, čo predstavuje najvyšší možný čas predaja, po uplynutí tohto termínu musí byť tovar odstránený z predajne;

4. ak je položka predaná vynáša zisk(prirážku) R_i>0 v dobe jej predaja (príjmy sú podľa času predaja násobené β, kde $0 \leq \beta \leq 1$);

5. ak položka v čase T_i predaná nie je, prináša hodnotu $\alpha_i.R_i$, kde $\alpha_i \leq 1$ (t.j. koeficient môže byť aj záporný. Táto situacia nastáva vždy vtedy keď na likvidáciu tovaru musíme použiť dalšie zdroje, napr. je to zabezpečenie odvozu, zaplatenie pracovnej sily, ktorá zabezpečí premiestnenie tovarov z predajne a pod.) Pri zlacňovaní bude $0 \leq \alpha_i \leq 1$ z tovaru budeme mať aspoň nejaký úžitok, aj keď zaň nedostaneme plnú sumu;

6. predajca môže ovplyvňovať pravdepodobnosť predaja položiek;

   Predajca môže ovplyvňovať pravdepodobnosť predaja položiek , ich umiestnením resp. neumiestnením v predajni, a to z (1-q_i) do (1-p_i) ich umiestnením na propagačné miesta. Pre tieto pravdepodobnosti platí 0<p_i , $q_i \leq 1$. Formálne zapísané:

   p_i= P {prezentovaná položka i nie je predaná v časovom limite}

   q_i =P {položka i neumiestnená v predajni nie je predaná v časovom limite}

   Definícia 6.1. *Rozdiel medzi $q_i - p_i$ budeme nazývať promotion power, a bude vyjadrovať vzrast pravdepodobnosti predaja vzhľadom na jej propagáciu.*

   Je totiž zrejmé, že ak je výrobok na propagačných miestach, ľudia sú ochotnejší si ho kúpiť a dať mu tak prednosť pred rovnakým výrobkom, ktorý je umiestnený na menej viditeľných miestach, prípadne v sklade, dôvodom je ľudská iracionalita, keďže racionálne správajúci sa kupujúci, by nevidel rozdiel medzi vystaveným a nevystaveným produktom.

7. výhoda propagácie nemôže byť poskytnutá každej položke, nakoľko máme limitovaný priestor "v batohu". Položka i zaberá $W_i \leq W$ priestoru, a pre netrivialitu dodáme, že súčet $\sum_i W_i > W$.

Na manažérovi predajne vtedy ostáva rozhodnúť, ktoré výrobky sa mu oplatí umiestniť na očiach zákazníkov a ktoré naopak ponechá na iných miestach. Môže sa rozhodovať na základe dátumu spotreby, ak je tovar blízko expiračnej doby, je dobré ho umiestniť na dobrú pozíciu, lebo sa tak zvýšia šance na jeho predaj čo znamená, že sa zvýšia šance na príjem R_i a nebude potrebné tovar odstrániť so záporným príjmom(prostriedky použité na likvidáciu). Ďalším aspektom rozhodovania manažéra môže byť výška možného príjmu z vystaveného tovaru, jeho veľkosť, či bude zaberať príliš veľa miesta a pod.

8. na zachytenie dynamiky položiek použijeme stav $X_i(s)$ a bude vyjadrovať počet zostávajúcich periód času do vypršania jeho životnosti, t.j. $X_i(s) = T_i - s$.
   - s<T_i položka ešte nebola predaná a ešte sa nepokazila.
   - X_i(s)=0 položka sa alebo „pokazila“ (prekročila svoju životnosť) s>T_i alebo bola predaná.
9. binárne vyjadrenie akcie $a_i \in \{0, 1\}$, kde akcia $a_i = 1$ predstavuje stav, kedy položka i je počas periódy s propagovaná, ale je dovolená iba pri splnení podmienky $X_i(s)$ (teda položka ešte nebola predaná a neprekročila dátum spotreby)

Na to aby sme mohli definovať „kaziacu“ sa položku ako restless bandit. Definujeme jeho vlastnosti nasledovne:

- stav $X_i = T_i \cup 0$;
- rozhodnutia v čase T_i pre položku i sú $A = \{0, 1\}$, môžeme položku buď propagovať/umiestniť v predajni ($a = 1$) alebo neumiestniť ($a = 0$)
- očakávané jedno-periódové obsadenie priestoru v predajni $W^a_{i,t}$ v čase t a pri akcii a. Pre každý čas $t \in T_i$
  - * $W^1_{i,t} := W_i$;
  - * $W^0_{i,t} := 0$;
  - * $W^0_{i,0} := 0$;

- očakávaná jedno-periódová výnosnosť v $R^a_{i,t}$ v čase t a pri stave položky a. Pre každý čas $t \in T_i \backslash \{1\}$

  * $R^1_{i,t} = R_i(1 - p_i)$;
  * $R^1_{i,1} = R_i(1 - p_i) + \beta\alpha Rq$;
  * $R^0_{i,t} = R_i(1 - q_i)$;
  * $R^0_{i,1} = R_i(1 - q_i) + \beta\alpha Rq$;
  * $R^0_{i,0} = 0$;

- jednoperiódová matica pravdepodobností $P_i^{1|T_i}$ pre prezentovanie tovaru v obchode

*	0	1	$\cdots$	$T_i - 1$	T_i
0	1	0	0	0	0
1	1	0	0	0	0
2	$1-p$	p	0	0	0
$\vdots$	$\vdots$	0	$\ddots$	0	0
T	$1-p$	0	0	p	0

Pričom $P^{1|T_i}_{i,t,s}$ je pravdepodobnosť, že položka sa presunie z času $t \in \chi$ do času $s \in \chi$ počas jednej periódy za predpokladu, že položka je prezentovaná v predajni počas celého času/ doby jej životnosti T_i, teda že a=1. Inak povedané, P je pravdepodobnosť prechodu medzi stavmi. Nulové miesta v P znamenajú, že z T_i sa nemôžem dostať do T_{i-2}, keďže čas ubieha plynulo.

6.2 Spojitosť medzi Multi-armes restless bandit problémom a maticou pravdepodobností P

Predpokladáme, že batoh (predajňu) môžeme kedykoľvek naplniť tovarom. Teda, že množstvo dostupného tovaru je vyššie ako dostupná veľkosť predajne. Nikdy nemôže nastať stav, že by sme boli nútení nechať prázdne miesto v batohu pre nedostatok tovaru, či už by to bolo spôsobené vysokým odberom zo strany zákazníka alebo veľké množstvo tovaru by dosiahlo svoj dátum expirácie a muselo by byť z predajne odstránené. Mohli by sme to prirovnať k veľmi dobrému manažérovi, ktorý dokáže včas odhadnúť možné budúce úbytky tovaru a v predstihu tieto prázdne miesta zabezpečí proti strádaniu.

Pre všetky $a \in A$ definujeme, že pre všetky i platia nasledovné vzťahy:

- $W_{i,0}^{a} = aW_i$;
- $R_{i,0}^{a} = 0$;
- $p_{i,0,0}^{a} = 1$;

Môžeme si tu všimnúť, že matica pravdepodobností obsahuje miesta, ktoré sú voľné.Sú to miesta produktu, ktorý už prekročil dátum spotreby, teda pravdepodobnosť jeho predaja je síce nulová, ale ešte stále je v predajni. Môže sa stať, že presonál v predajni si "pokazený "tovar nevšimne hneď, ale až po určitom čase, preto je možné, že ho vystavujeme aj v stave, kedy už nie je pre zákazníka príťažlivým. Bude to pre nás znamenať model s restless banditom s iba jednou možnosťou stavu s a to 0.

7 Riešenie optimálnej dynamickej propagácie pre tovar s obmedzeným dátumom spotreby

V predchádzajúcich kapitolách sme sa formálne pripravili na vyjadrenie problému. Teraz si popíšeme oba spôsoby riešenia, *numerické* aj *analytické riešenie*. S výsledkami z jednotlivých spôsobov riešenia budeme pracovať v kapitole [9.2], kde budeme navzájom porovnávať ich presnosť.

7.1 Analytické riešenie

Na začiatku tejto kapitoly opíšeme nový pojem-cenu propagácie a zaradíme ju do maximalizácie úlohy. Tým získame konečnú hľadanú maximalizačnú úlohu. Pridáme podrobnejší opis indexácie, a tým túto kapitolu uzavrieme.

7.1.1 Cena propagácie

Ďalšou zmenou v hľadaní optima pri alokácii tovaru, môže byť zaradenie spoplatnenia propagácie. Predajca musí vynaložiť prostriedky ν (cena propagácie) za každú jednotku priestoru, ktorý je využívaný na propagáciu tovaru.

Zadefinujeme novú premennú $\prod$, ktorá bude označovať stav položky v danom čase. Budeme ju zapisovať ako dvojicu čísel, kde prvá číslica bude označovať stav položky. 1 je propagovaná položka, 0 predstavuje nepropagovanú položku. Druhá číslica bude označovať periódu, v ktorej sa stav uskutočňuje, respektíve čas. Ten sa bude pohybovať od 1 až po T_i. Začínajúc v čase t, definujeme očakávaný celkový príjem vzhľadom na rozhodnutie $\pi \in \prod$ ako

$$E_t^{\pi}[\sum_{s=0}^{\infty} \beta^s R_{X(s)}^{a(s)}] - \nu E_t^{\pi}[\sum_{s=0}^{\infty} \beta^s W_{X(s)}^{a(s)}] \qquad (1)$$

kde $X(s)$ je stav v perióde s a $a(s)$ je akcia v perióde s. V rovnici (1) sme tiež použili $\prod$, množinu všetkých náhodných neočakávaných postupov pre riešenie nášho problému.

Je dôležité tiež spomenúť, že táto rovnica sa zaoberá iba jednou položkou. Zisťujeme teda optimálnu stratégiu pre jeden vybraný tovar.

Naším cieľom je teraz nájsť také $\pi^* \in \prod$, zo všetkých postupov, ktoré máme k dispozícii, aby sme maximalizovali (1) pre $t = T$.

7.1.2 Predpoklady

Pre zabezpečenie funkčnosti modelu musíme zaviesť niekoľko predpokladov, ktoré zabezpečia väčšiu prehľadnosť. Budeme teda predpokladať, že:

1. pre promotion power platí vzťah: $q - p > 0$;
2. pre zachránené hodnoty produktov platí vzťah: $(1 - q) - \alpha(1 - \beta q) \geq 0$

Predpokladáme, že pravdepodobnosť predaja sa propagáciou zvyšuje. Pre ich cenu propagácie platí: $\nu \geq 0$ a zároveň $q - p \leq 0$. Ich propagácia sa nám teda ekonomicky nevypláca. Obmedzenie pre zachráneé hodnoty produktov sme zaradili kvôli dosiahnutiu monotónnosti. Môžeme si tiež všimnúť,že:

- pre β=1, obmedzenie $(1 - q) - \alpha(1 - \beta q) \geq 0$ sa zredukuje na $\alpha \leq 1$. To v praxi znamená, že náklady na odstránenie nemôžu viesť k vyššiemu zisku ako pri ich normálnom predaji;
- pre $\beta < 1$ je $\alpha \leq 0$. Uvažujeme, že tovar nie je možné predať ani so zľavou, naopak je potrebné vynaložiť prostriedky na jeho odstránenie z predajne. Výnos bude záporný.

7.1.3 Whittlova relaxácia

Whittlova relaxácia bola v skrátenej verzii opísaná už v 5.3.1. Možnosť umiestniť tovar v predajni je ohraničená dátumom expirácie daného tovaru. Každý tovar teda charakterizuje aj jeho dátum expirácie. Pre nekonečné množstvo tovarov, bude platiť, že budeme pracovať s nekonečným množstvom ohraničení. Whittlova relaxácia spočíva v tom, že nahradíme nekonečné množstvo ohraničení tovarov jediným, ktoré bude aplikovateľné v priemere pre všetky položky. Teraz ju formálne vyjadríme, ale bližšie sa ňou nebudeme zaoberať, keďže to nie je cieľom tejto práce.
Whittlova relaxácia KPPI je nasledovná:

$$\max_{\pi \in \prod_{X,a}} \mathbb{E}_0^{\pi} \left[\sum_{i \in I} \sum_{s=0}^{\infty} \beta^s R_{i,X_i(s)}^{a_i(s)} \right]$$

ak platí

$$\mathbb{E}_0^{\pi} \left[\sum_{i \in I} \sum_{s=0}^{\infty} \beta^s W_{i,X_i(s)}^{a_i(s)} \right] = \frac{W}{1 - \beta}$$

WR môže byť vyriešená Lagrangeovou metódou. Nech ν je Lagrangeový multiplikátor pre ohraničenie, potom Lagrangeova relaxácia pre WR je nasledová:

$$\max_{\pi \in \prod_{X,a}} \mathbb{E}_0^\pi \left[\sum_{i \in I} \sum_{s=0}^{\infty} \beta^s R_{i,X_i(s)}^{a_i(s)} \right] - \nu \left(\mathbb{E}_0^\pi \left[\sum_{i \in I} \sum_{s=0}^{\infty} \beta^s W_{i,X_i(s)}^{a_i(s)} \right] - \frac{W}{1-\beta} \right)$$

Whittlovej relaxácie, ale nemusí viesť k riešeniu KPPI. Hlavným dôvodom je fakt, že Whittlova relaxácia pracuje s odhadnutými priemernými hodnotami. Čo môže viesť k tomu, že nájdené optimum bude prekračovať rozmery predajne, čo problém KPPI nedovoľuje.

Whittlova relaxácia je navrhnutá na riešenie optimalizácie úlohy celočíselného batohu, ktorého rozmery sa časom menia a prispôsobujú. Náš pôvodný problém KPPI, naproti tomu hľadá riešenie pre batoh s fixnými rozmermi.

7.2 Indexovateľnosť a hodnoty indexov

O položke hovoríme ako o indexovateľnej (sme schopní priradiť jej index), ak pre všetky $t \in \tau$, vieme nájsť také $-\infty \leq \nu_t \leq \infty$, že pre všetky časy $t \in \tau$ platí:

- ak $\nu_t \geq \nu$, vtedy je optimálne propagovať danú položku v čase t;
- ak $\nu_t \leq \nu$, vtedy je optimálne nepropagovať danú položku v čase t;

Funcia $t \mapsto \nu_t$ sa nazýva index.

ν_t sa nazýva index value.

Za podmienky vyššie uvedených predpokladov platí niekoľko ďalších dôležitých vlastností modelu a to:

1.

Veta 7.1 (Indexovateľnosť a monotónnosť času). *Parametrizovaná kaziaca sa položka je indexovateľná, a jej index pre $t \in \tau$ môžeme získať z nasledovnej rovnice:*

$$\nu_t^* = \frac{R}{W}[(1-q) - \alpha(1-\beta q)] - \frac{[(1-q) - \alpha(1-\beta q)](1-\beta q)}{(1-\beta q) + (\beta q - \beta p)(\beta p)^{t-1}} \tag{2}$$

Je dôležité tiež spomenúť, že index je nerastúci zvhľadom k tomu že t klesá s časom (približuje sa doba expirácie);

2. Pre každý $t \in \tau$ platí

   - Pre hodnotu indexu ν platí, že $\nu > 0$ a je priamo úmerná $\frac{R}{W}$;
   - položka, s menšou pravdepodobnosťou predaja počas stavu kedy nie je propagovaná ($(1-q)s$), má vyššiu hodnota indexu ako iná položka, ak všetko ostatné zostáva pre obe položky rovnaké. Ak sa dve položky teda líšia iba pravdepodobnosťou predaja počas stavu nepropagácie, platí vyššie uvedený vzťah;

3. Pre optimálny začiatok propagácie τ^* platí:

   $\tau^* := \max\{\tau \in T : \nu_t^* > \nu$ pre všetky $t \in \tau$ také, že $t \leq \tau\}$

   Ďalej môžeme tvrdiť, že optimálny začiatok propagácie v čase τ^* je konečný práve vtedy, ak platí:

   $$\frac{R}{W}\frac{(1-\beta\alpha)}{\nu}(q-p) > 1$$

   Z toho môžeme odvodiť, že ak:

   - τ^* je konečné, potom τ^* je hranica, od ktorej bude index value väčšia ako promotion cost ν. τ^* teda predstavuje hranicu, od ktorej sa nám oplatí propagácia až to $\tau = 1$. Nie je výhodné ju propagovať v inom čase;
   - τ^* nie je ohraničená. Index value v stave 1 je $\nu_1^* \leq \nu$ z čoho vyplýva, že nikdy nie je optimálne položku propagovať;

   Z toho vyplýva dôležitý záver a to, že: keď je raz položka vybraná na propagáciu, ostane v tomto stave až do času, kedy je buď predaná alebo pokazená

4. Špeciálne vlastnosti index value;

   - (Undiscounted index) Ak je promočná sila kladná a zároveň $\beta = 1$, hodnota indexu pre $t \in \tau$ je

   $$\nu_t^* = \frac{R}{W}(1-\alpha)(1-p)\left[1 - \frac{(1-q)}{(1-q)+(q-p)p^{t-1}}\right];$$

- (Myopic index) Ak je promotion power kladná a zároveň $\beta = 0$, index value pre $t \in \tau$ je
$$\nu_t^* = \frac{R}{W}(q-p);$$
- (Index pre nekaziaci sa tovar) Ak je promotion power kladná, index value pre nekaziaci sa tovar je:
$$\nu_\infty^* = \frac{R}{W}\frac{(1-\beta)(q-p)}{1-\beta q};$$
- Ak je promotion power kladná, potom index value pre kaziacu sa položku s nulovým výnosom a očakávanou salvage value -c<0 je
$$\nu_t = \frac{c}{W}(1-\beta p)\left[1 - \frac{(1-\beta q)}{(1-\beta q)+(\beta q-\beta p)(\beta p)^{t-1}}\right];$$

7.3 Numerické riešenie

Naším cieľom je porozumieť obom analytickému aj numerickému spôsobu riešenia problému. Teraz opíšeme spôsob numerického riešenia, aby sme neskôr mohli oba spôsoby porovnávať, a rozhodnúť, ktorý z nich je efektívnejší. Numerické riešenie spočíva v použití kombinatorickej úlohy, kedy optimalizujeme alokáciu tovaru vzhľadom na všetky možné kombinácie tovaru v danom čase. Hlavná nevýhoda numerického riešenia je nutnosť otestovať všetky možné kombinácie rozmiestnenia tovaru, čo je časovo aj výpočtovo veľmi náročné. Po otestovaní všetkých možností sme schopný priradiť jednotlivým možnostiam presné hodnoty indexov. A podľa indexov vyberáme vhodné položky do predajne. Toto riešenie je teda exaktné, ale neefektívne.

Predpokladajme, že výnosy z knapsack-problému υ_i pre všetky položky sú získavané zo zvťahu:
$$\upsilon_i := W_i \nu_{i,T_i}^*$$

Ďalej majme 0-1 knapsack problém určený nasledovnými vzťahmi:

$$\max_z \sum_{i \in I} z_i \upsilon_i;$$

vzhľadom na $\sum_{i \in I} z_i W_i \leq W$; a $z_i \in \{0,1\}$pre všetky $i \in I$;

Kde $z = (z_i : i \in I)$ je vektor binárnych rozhodnutí, ktoré určujú či položka je vybraná na propagáciu alebo nie je vybraná. Tento problém budeme označovať ako Knapsack problem KP.

Je potrebné spomenúť, že optimálne riešenie z^* nie je automaticky optimálnym riešením aj pre KPPI. Pri KPPI rozdelíme celkový objem tovaru na menšie skupiny. Problém sa zmení na kombinatorickú úlohu, kde hľadáme takú skupinu, ktorá bude minimalizovať celkové výdavky spojené s nepropagovaním položiek, kým ostatné položky nezaberajú viac ako W jednotiek priestoru. Keďže celkové výdavky sú konštantné, tento problém je ekvivalentný k problému, kde vyberáme skupinu tovarov na propagovanie, tak aby sme maximalizovali celkový zisk z propagovaných položiek, pričom platí, že ich celkový objem nepresiahne W.

V špeciálnom prípade kedy KPPI redukujeme na KP, tak $T_i = 1, q_i = 1, p_i = 0$ pre všetky $i \in \tau$ potom každé optimálne riešenie z^* knapsack problému (KP) je optimálnym riešením aj pre KPPI.

8 KPPI s k položkami tovaru

Do modelu KPPI opísaného v kapitole 6 pridáme alebo zmeníme niekoľko predpokladov za účelom rozšírenia modelu. S novým modelom budeme uvažovať o K_i kusoch položiek tovarov v obchode. Týmto spôsobom rozšírime použitie nášho modelu aj na bežné predajne, nie len tie opísané v kapitole 4.

8.1 Vlastnosti KPPI s k položkami tovaru

Vlatnosti KPPI s K_i kusmi tovarov:

1. predajca disponuje I počtom druhov kaziaceho sa tovaru, kde $i \in I$. Nech K_i je počet kusov i-teho tovaru;
2. každá perióda času $s \in H := \{0, 1, ..., H\}$, kde $H < \infty$ predstavuje dobu kedy sa predajca rozhoduje o umiestení resp. odstránení tovaru z obchodu;
3. všetky kusy tovarov nemôžu byť vystavené v predajni súčasne. A to kvôli obmedzenému priestoru predajne C. Každá položka tovaru i zaberá priestor o veľkosti $W_i \leq C$. Teda platí $\sum_i K_i W_i \gg C$;
4. každý tovar môže byť predajný len počas jeho životnosti, teda od $0, 1, ...T_i - 1$, kde $T_i \in [1, H]$ je dátum spotreby pre všetky kusy tovarov z i-teho druhu. V tomto čase už tovar nemôže byť predaný, ale musí byť odstránený z predajne;
5. ak je položka predaná prináša výnos $R_i > 0$ v prislúchajúcom čase. Výnosy sú násobené $\beta \in [0, 1]$ podľa času, v ktorom boli získané, aby sme na záver mohli jednotlivé výnosy sčítať a tým dostať ucelený pohľad na celkový výnos;
6. ak položka predaná nie je prináša v čase T_i zachránenú hodnotu $\alpha_i R_i$, kde $\alpha_i < 1$ (môže byť aj záporná);
7. pre väčšiu prehľadnosť budeme predpokladať, že zákazník si môže kúpiť len jeden kus z i-teho druhu tovaru. Môžeme to urobiť bez ujmy na všeobecnosti nakoľko dĺžku periódy, v ktorej sa zákazník rozhoduje o kúpe, môžeme dať ľubovoľne malú. Dôležitým dôsledkom tohto predpokladu je, že budeme vystavovať len jeden kus kovaru z i-teho druhu nakoľko si zákazník nekúpi viac ako jeden kus;

8. ak produkt i nie je vystavený v danom čase, potom pravdepodobnosť jeho predaja je $1 - q_i$. Ak je položka vystavená pravdepodobnosť predaja sa zvýši na $1 - p_i$ $(0 < p_i < q_i < 1)$. Teda:

   * p_i je pravdepodobnosť, že žiadna položka tovaru i nebude predaná napriek tomu, že tovar bude vystavený
   * q_i je pravdepodobnosť, že žiadna položka tovaru i nebude predaná, keď tovar nebude vystavený

9. zásoba K_i položiek i-teho druhu tovaru je definovaná nasledovne:

   * definujeme $N_i := (T_i \times K_i) \bigcup \{0\}$, kde $T_i := \{1, ..., T_i\}$, $K_i := \{1, ..., K_i\}$ a $T_i \times K_i$ je Karteziánsky súčin T_i a K_i. $t \in T_i$ predstavuje počet zostávajúcich periód do dátumu expirácie, $k \in K_i$ predstavuje počet zostávajúcich položiek z i-teho druhu tovaru;
   * definujeme $A := \{0, 1\}$. Kde 1 predstavuje propagáciu tovaru a 0 predstavuje nepropagovanie;
   * očakávané jedno periódové obsadenie priestoru v predajni označujeme ako $W_{i,n}^a$. Pre každé $n = (t, k) \in T_i \times K_i$ platí:
     ◦ $W_{t,k}^1 := W_i$
     ◦ $W_{t,k}^0 := 0$
     ◦ $W_{i,0}^1 = W_{i,0}^0 := 0$
   * očakávanú jedno periódový výnos definujeme ako $R_{i,n}^a$. Pre každé (t, k), kde $k \in K_i$ a $t \in T_i - \{1\}$ platí:
     ◦ $R_{i,(t,k)}^1 := R_i(1 - p_i)$
     ◦ $R_{i,(1,k)}^1 := R_i(1 - p_i) + \beta\alpha_i R_i(p_i + k - 1)$
     ◦ $R_{i,0}^1 := 0$
     ◦ $R_{i,(t,k)}^0 := R_i(1 - q_i)$
     ◦ $R_{i,(1,k)}^0 := R_i(1 - q_i) + \beta\alpha_i R_i(q_i + k - 1)$
     ◦ $R_{i,0}^0 := 0$

* jedno periódovú maticu pravdepodobnosti $P_i^{1|N_i}$, kde propagujeme K_i položiek

	0	$(1,1)$	$\dots$	$(T_i-1,1)$	$(T_i,1)$	$(1,2)$	$\dots$	$(T_i-1,2)$	$(T_i,2)$
0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
$(1,1)$	1	0	0	0	0	0	0	0	0
$(2,1)$	$1-p_i$	0	0	0	0	0	0	0	0
$\vdots$	$\vdots$	0	$\ddots$	0	0	0	0	0	0
$(T_i,1)$	$1-p_i$	0	0	p_i	0	0	0	0	0
$(1,2)$	1	0	0	0	0	0	0	0	0
$(2,2)$	0	$1-p_i$	0	0	0	p_i	0	0	0
$\vdots$	0	0	$\ddots$	0	0	0	$\ddots$	0	0
$(T_i,2)$	0	0	0	$1-p_i$	0	0	0	p_i	0

Matica pre $K_i > 2$ sa dá ľahko odvodiť použitím rovnakých blokov matice. Jednoperiódovú maticu $P_i^{0|N_i}$ môžeme dostať z $P_i^{1|N_i}$ ak substituujeme p_i cez q_i.

8.2 Predpoklady KPPI s k položkami

V tejto časti sa zameriame na odvodenie indexov pre položky s k kusmi tovarov. Tento problém je oveľa komplexnejší a náročnejší ako problém, v ktorom sme do úvahy brali len jeden kus tovaru, opísaný v kapitole 7.2. Počiatočné definovanie si vyžaduje oveľa striktnejšie predpoklady a presnosť riešenia tohto problému sa oproti jendo-položkovému riešeniu znižuje.

Definujeme novú triedu množín, ktorá bude obsahovať len preukázetaľne indexovateľné prvky. Pre tieto prvky vieme vytvoriť algoritmus, ktorý bude schopný efektívne im priraďovať hodnoty indexov. Takúto triedu množín budeme nazývať *časovo monotónna nestriktná trieda* a budeme ju označovať F. Pre tieto prvky bude možné problém riešiť aj analyticky. Definujeme ju nasledovne:

$F := \{S \subseteq T \times K : \text{pre všetky}(t,k) \in S, S \supseteq S_{(t,k)}\}$,

kde $S_{(t,k)} := \{(s,l) : s \leq t \text{ a } k-(t-s) \leq l \leq k\}$.

Táto trieda poskytuje iba čiastočné zoradenie množín podľa dátumu spotreby.

Každé nasledujúce vyjadrenie a zadefinovanie novej premennej bude podliehať týmto dvom predpokladom:

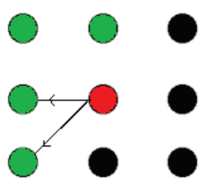
- kladná promočná sila. $q-p>0$. Propagovaná položka má väčšiu pravdepodobnosť predaja ako tá, ktorá je v sklade;
- ohraničená očakávaná zachránená hodnota $\alpha \leq 0$ pre $\beta \leq 1$

Veta 8.1 (Indexácia)**.** *Ak je položka je indexovateľná, tak hodnota indexu pre stav $(t,k) \in T \times K$ je:*

$$\nu^*_{(t,k)} = \begin{cases} \frac{R}{W}(1-p)\left[1 - \frac{1-q+(q-p)\beta^t\alpha}{1-p}\right] & t \leq k \\ \frac{R}{W}(1-p)\left[1 - \frac{1-q+ p^{t-k}(q-p)\beta^t\alpha \sum_{i=0}^{k-1} \binom{t-k-1+i}{i}(1-p)^i}{1-p- (q-p)\beta^k(1-p)^k \sum_{i=0}^{t-k-1} \binom{k-1+i}{i}(\beta p)^i}\right] & t > k \end{cases} \tag{3}$$

Pre $t \leq k$ hodnota indexu $\nu^*_{(t,k)}$ nezávisí od aktuálneho počtu položiek k. Dôvodom je, že predpokladáme, že môžeme predať len jeden kus položky i počas jednej periódy. Z toho vyplýva, že môžeme predať najviac t kusov položiek tovaru i predtým ako vyprší ich dátum spotreby. Zvyšný počet kusov $k-t$ sa určite pokazí, nakoľko nemáme toľko času, aby sme všetky kusy predali. Z tohto prípadu vieme usúdiť, že ak $t<k$ bude predajca určite stratový, minimálne o položky, o ktorých vieme už teraz povedať, že nebudú predané, ale pokazia sa.

Pre ilustráciu triedy množín F uvádzame obrázok:



Obr. 5: Trieda množín F

Pre množinový index položky platí, že pre každý stav (znázornený červenou farbou) bude platiť, že určené stavy (znázornené zelenou farbou) budú analogicky tiež indexovateľné. Index sa budeme vedieť odvodiť z (3).

9 Heuristické metódy pre KPPI

Na začiatku si predstavíme dve heuristické metódy pre KPPI. V krátkosti opíšeme spôsob ich riešenia a vlastnosti. Uvedieme výsledky experimentu zapísaného v práci [6]. Na základe týchto experimentov ďalej popíšeme závery, ktoré plynú z vypočítaných výsledkov.

Hodnota indexu pre jednotlivé položky doteraz vyjadrovala rýchlosť, za ktorú sa nám vrátia prostriedky, ktoré sme použili na propagovanie položky. V tejto časti navrhujeme hodnotu indexu určovať podľa ceny propagácie na jednotku priestoru.

Majme časovú periódu $s \in [0, H]$ a k nej prislúchajúci stav $X(s)$. Nech $\widetilde{I} \subseteq I$ je množina tovarov, ktoré neprekročili dátum spotreby a k dispoziícii je minimálne jeden kus tovaru, t.j. $i \in \widetilde{I}$ vtedy a len vtedy, ak platí $X_i(s) \neq 0$. Potom pre všetky $i \in \widetilde{I}$ vieme vypočítať hodnotu indexu podľa 3. Na základe týchto poznatkov môžeme definovať *knapsack problem ceny* ako:

$v_i^{(s)} := W_i v^*_{i,X_i(s)}$

Knapsack problém 0-1 teda rieši maximalizáciu: $\max\limits_{y^{(s)}} \sum\limits_{i \in \widetilde{I}} y_i^{(s)} v_i^{(s)}$, kde $\sum\limits_{i \in \widetilde{I}} y_i^{(s)} W_i \leq C$ a $y_i^{(s)} \in \{0, 1\}$ pre všetky $i \in \widetilde{I}$. Kde $y^{(s)} := (y_i^{(s)})_{i \in \widetilde{I}}$ je vektor binárnych rozhodntí, ktoré nám hovoria o tom, či položka bola vybraná na propagáciu alebo nie.

Navrhujeme nastedujúce heuristics pre riešenie KPPI:

- *"Index-Knapsack" (IK) heuristika* : Vypočítať ceny $v_i^{(s)}$ pre $s = 0$ a vyriešiť Knapsack problem(KP).

- *Indexové pravidlo(IR)*: Vypočítať hodnoty indexov $v^*_{i,X_i(s)}$ pre s=0 a následne vybrať produkty, ktoré sa budú propagovať. Vyberáme odnajväčšieho po najmenší, až kým sa nenaplní kapacita priestoru, alebo kým sa nám neminú produkty.

Všimnime si, že zložitosť týchto tvoch riešení je oveľa menšia, ako to bolo pri predchádzajúcom riešení.

Indexové pravidlo si vyžaduje iba priradenie indexu každému produktu prostredníctvom lineárneho-časového algoritmu, a zoradenie takto označených prvkov.

Pri IK heuristic vypočítame ceny (rovnako ako pri vypočítavaní hodnôt indexov) a riešime jednoduchý knapsack problem, pre ktorý poznáme vhodné výpočtové algoritmy.

Absolútny rozdiel medzi týmito dvoma spôsobmi riešenia môže byť ľudoboľne veľký, ale limitne by mali konvergovať k približne rovnakým výsledkom. Je to spôsobné tým, že limitne sa rozmery jednotlivých tovarov budú rovnať a tiež sa stráca problém nespojitosti (pretože tak ako počet položiek aj rozmery batohu sa zväčšujú).

9.1 Experimentálna štúdia

V tejto podkapitole budeme pracovať s výsledkami simulácií pre rôzne hodnoty vstupných parametrov. Uvedené výpočty a výsledky boli vydané v [6], kedy sa oba spôsoby testovali.

Dvojic čísel (I, H) predstavuje počet kusov tovaru a časový horizont. Napríklad $I = 2, 3, 4, 5$ a $H = 2, 4, ..., 16$ alebo $I = 2, 3$ a $H = 20, 24, ..., 32$. Náhodne sme vybrali príklady takýchto dvojíc. Definovali sme $\alpha_i = -1/2$ pre každý produkt i a $T_i := H$. Pre každý produkt sme náhodne vygenerovali počet jednotiek K_i, tak aby $K_i \leq T_i$. Z čisto technickch príčin (aby výpočet netrval dlhšie ako 10 minút), sme zaviedli ohraničenia $K_i < 10$, $\sum\limits_i K_i \leq 20$.

Nec príchody zákazníkov majú Poissonovo rozdelenie, nech λ_i^0 a λ_i^1 sú priemery príchodov pre nepropagované a propagované produkty. Tieto hodnoty nasledovne ohraničíme: $2/3K_i < \lambda_i^1 T_i \leq 2K_i$ pre oba $a \in \{0, 1\}$. Zabezpečíme tým, že pravdepodobnosť predaja všetkých kusov tovaru i pred dátumm expirácie každého produktu je v prijateľnom intervale, nakoľko $\lambda_i^1 T_i$ je očakávaný počet príchodov zákazníka počas životnosti produktu. Pravdepodobnosti, že sa z tovaru nepredá ani jeden kus sú: $q_i = e^{-\lambda_i^0}$ a $p_i = e^{-\lambda_i^1}$. Takto sme vygenerovali rovnomerne rozdelené parametre: $W_i \in [10, 25]$; $R_i \in [10, 50]$; $T_i \in [2, T]$;
$K_i \in [1, \max(T_i, 9)]$; $\lambda_i^0, \lambda_i^1 \in (\frac{2}{3}\frac{K_i}{T_i}, 2\frac{K_i}{T_i}]$.

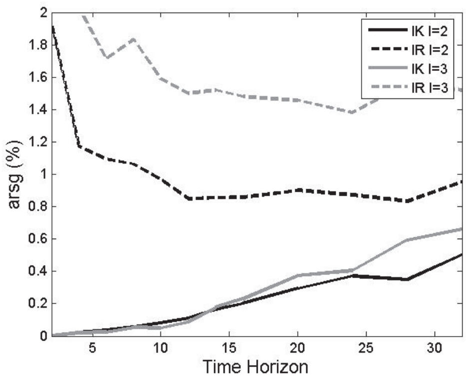
Rovnomerne rozdelené rozmery batohu C sú generované ako:

$$C \in [\max\{W_i\}, \max(\max\{W_i\}, 40\%. \sum_i W_i)].$$

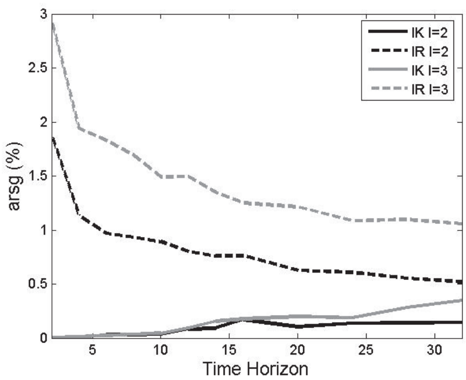
Zameriame sa na $\beta = 1$, pretože je najviac pravdepodobné, že sa v praxi vyskytne práve tento prípad. Pre $\beta \approx 1$ sú výsledky podobé. Pre $\beta \to 0$ sa presnosť heuristických metód zlepšuje.

9.2 Výsledky experimentu

Zamieriame sa na výsledky experimentu s $I = 2$ a $I = 3$ produktami, pretože sú výpočtovo najviac prístupné a poskytujú najviac informácií. Rovnaké problémy sme testovali na oboch spôsoboch riešenia, numerickom aj analytickom riešení.



Obr. 6: Porovnanie heuristík na základe numerických výpočtov



Obr. 7: Porovnanie heuristík na základe indexov

Výsledky numericky vypočítaných (presných) indexov sú označené v obr.5, a výsledky analyticky vypočítaných (približných) indexov sú označené v obr.6. Problém s $I = 2$ sú zobrazené čiernou, $I = 3$ sivou farbou. IK heuristc je naznačená plnou čiarou, IR heuristic s prerušovanou.

Vo všetkých prípadoch je priemerný rozdiel výpočtov menší ako 3%.
Môžeme si tiež všimnúť, že index-knapsack heuristic (IK) vykazuje významne lepšie výsledky ako indexové pravidlo (IR).
Rozdiel vo výsledkoch je bežný pre malé časové úseky. Ukazuje sa, že so zvýšujúcim sa časovým horizontom sa výsledky líšia čoraz menej. Naviac obrázok ukazuje, že medzi výsledkami presných a približných hodnôt indexov je len veľmi nepatrný rozdiel.

10 Možné obmeny KPPI

Detailne sme prebrali problém celočíselného batohu, keď sa jednalo len o jeden kus z daného druhu tovaru. O niečo menej podrobnejšie sme sa zaoberali problémom KPPI, keď sme zobrali do úvahy k kusov z jedného druhu tovaru. Teraz by sme radi načrtli niektoré návrhy ďalšieho vylepšovania modelu, ktoré môžu neskôr slúžiť ako podnety pre ďalšie štúdium tejto problematiky.

1. *Zavedenie korelácie medzi jednotlivé položky z rovnakého druhu tovaru.* Je preto rozumné implementovať znižovanie pravdepodobnosti kúpi tovaru, ak tovar rovnakého druhu bol už prestým kúpený. S ďalším kúpeným kusom tovaru sa bude pravdepodobnosť kúpi znižovať.

   Ak si zákazník kúpi kilo jabĺk, ďalšie kilo si už kúpi s menšou pravdepodobnosťou, keďže už bude zvažovať, či sa mu druhé kilo jabĺk nepokazí, kým ho stihne skonzumovať a pod;

2. *Zavedenie korelácie medzi jednotlivé druhy tovarov.* Kúpa jedného druhu tovaru by mohla zvyšovať/znižovať pravdepodobnosť kúpi iného druhu tovaru. Tieto tovary by boli navzájom komplementárne (kávovar+zrnková káva) alebo substitučné (zrnková+rozpustná káva).

   Kúpa kávovaru by zvýšila pravdepodobnosť kúpy zrnkovej kávy, ale znížila by pravdepodobnosť kúpy rozpustnej kávy;

3. *Zavedenie závislosti medzi pravdepodobnosťou predaja a počtom periód, ktoré nám ostávajú do doby expirácie.* So znižovaním sa počtu periód ostávajúcich do pokazenia sa tovaru, sa bude znižovať aj jeho pravdepodobnosť predaja. Doteraz sme predpokladali, že tovar, ktorému ostáva už len jedna perióda do doby expirácie má rovnakú pravdepodobnosť predaja ako tovar, ktorý má počet periód do expirácie T_i. A to aj napriek tomu, že zákazník kúpou prvého tovaru získa len jednu periódu na jeho užívanie, no po tomto čase sa tovar znehodnotí.

   Zákazník si s menšou pravdepodobnosťou kúpi letné oblečenie na konci sezóny, keďže už nebude mať toľko príležitostí toto oblečenie nosiť. Za predpokladu, že sa jeho cena nemení (neberieme do úvahy výpredaje) je pre zákazníka lepšie si oblečenie kupovať na začiatku sezóny, kedy získa oveľa viac času na jeho užívanie;

4. *Zavedenie závislosti medzi počtom propagovaných substitučných materiálov a pravdepodobnosťou predaja tovaru.* Čím väčší počet substitučných tovarov bude vystavených, tým menšia bude pravdepodobnosť kúpi jednotlivej položky.

   Ako sme už v predošlých kapitolách uviedli 1.2, ak by sme brali do úvahy iraci onalitu kupujúceho, mohlo by to ovplyvniť jeho výber tovaru pri kúpe. Zákazník, ktorý navštívi predajňu, kde je vystavený veľký počet tovarov sa bude ťažšie rozhodovať, lebo pre neho nebude ľahké vybrať si z takého veľkého počtu.

Záver

V našej práci sme sa zaoberali základnými metódami riešenia Problému naplnenia celočíselného batohu sezónnym tovarom. V reálnom živote sa jedná o predajňu, v ktorej je manažér nútený rozhodovať o propagácii tovaru vzhľadom na jeho dátum expirácie. Môže pri tom zvoliť niekoľko stratégií, napr. minimalizuje výdavky spojené s odstraňonavím tovarov, ktoré prekročili dátum spotreby, atď. Tento problém sme definovali formálne, oboznámili sme čitateľa so základnými predpokladmi, definíciami a vlastnosťami modelu.

V prvých častiach sme sa dostatočne detailne zaoberali vysvetľovaním modelu, ktorý berie do úvahy jeden kus tovaru z jedného druhu. Uviedli sme dva spôsoby ovpyvňovania pravdepodobnosti predaja, a to *dynamické určovanie ceny* a *dynamickú alokáciu tovaru*. Z porovnania ich efektívnosti vzhľadom na časový horizont, sme dospeli k záveru, že z krátkodobého hľadiska je výhodnejšie zamerať sa na dynamickú alokáciu tovaru, kapitola(1).

Na riešenie tohto problému sme sa rozhodli použiť model, ktorý sa zaoberá *problémom naplnenia celočíselného batohu sezónnym tovarom*.

Definovali sme pojem batohu, upresnili sme nutné predpoklady na možnosť aplikácie modelu, a jeho praktické využitie sme ilustrovali na reálnych príkladoch zo života.

Na optimálne naplnenie batohu je nutné priradiť jednotlivým položkám index, ktorým sa vyjadrí efektivita propagácie daného tovaru. Spôsob priraďovania indexu sme riešili "Multi-armed restless bandit" problémom, ktorý na indexáciu používa Whittlovu relaxáciu. V tejto časti bolo veľmi zaujímavé pozorovať, ako sa priraďujú jednotlivým položkám indexy, napr. ak bolo v predajni viac položiek ako zostávajúcich periód do dátumu expirácie, hodnota indexu sa pri zvyšovaní počtu položiek už nemenila, ale zostala rovnaká ako hodnota indexu, ktorá bola určená pri rovnakom počte tovaru a zostávajúcich periód. Naproti tomu zmena počtu položiek, ak ich počet bol menší ako počet zostávajúcich periód do dátumu expirácie, sa prejavovala na indexe veľmi výrazne.

Nasledovalo formálne definovanie *Knapsack problemu* a načrtnutie jeho riešenia. Na porovnanie sme uviedli aj krátky popis numerického riešenia, ktorý prináša takmer presné výsledky.

Náš základný model sme následne rozšírili o $K-1$ počet položiek na jeden druh tovaru. Definovali sme heuristcké metódy- *Index Knapsack heuristic IK* a Index Rule IR. Opísali a aplikovali sme ich na riešenie tohto zložitejšieho problému. Porovali sme výsledky a presnosť jednotlivých riešení a dospeli sme k záveru, že z dlhodobého hľadiska obe metódy vykazujú približne rovnakú presnosť riešenia, ich výsledky k sebe navzájom konvergujú. Z krátkodobého hľadiska je výhodnejšie používať IK spôsob riešenia. Ako významný fakt, ale uvádzame, že tieto analytické riešenia sa od numerických riešení líšili len veľmi malými výchylkami. Ak zoľadníme časovú náročnosť a nepraktickost numerického riešenia, analytické riešenia sa ukazujú ako oveľa efektívnejšie a prakticky využiteľné.

Nakoľko je tento problém, reálnym problémom vyskytujúcim sa v predajniach so sezónnym tovarom, jeho matematické riešenie bolo možné aplikovať. Tento experiment sa uskutočnil v obchodnom reťazci ZARA [3] a skutočne po aplikovaní modelu na predajňu sa dosahovali väčšie výnosy ako pri náhodnom rozmiestnení tovaru. Je potrebné ešte dodať, že model bol pozmenený vzhľadom sa niektoré reštrikcie, ale v podstatných aspektoch sa držal klasického modelu. Prácu uzatvárame uvedením niekoľkých možných vylepšení modelu, ktoré môžu slúžiť ako námety na ďalšie riešenie toho problému.

Zoznam použitej literatúry

[1] Campo, K., Gijsbrechts, E., 2006: *Retail assortment, self and stockout management: Issues, interplay and future challenges*, Journal of Retailing 82, 3/2006, 215-228

[2] Campo, K., Gijsbrechts, E., 2005: *Retail assortement, shelf and stockout management: Issues, interplay and future challenges*, Applied Stochastic Models in Business and Industry 21, 2005, 383-392

[3] Caro, F., Gallien J., 2007: *Inventory Management of a Fast-Fashion Retail Network*, UCLA Anderson School of Managemnt, Los Angeles, MIT Sloan School of Managemnt, Cambridge, 2007

[4] Dantzig, T., 1930:*Number the language of science*, Penguin Group, New York, USA, 1930

[5] Gittins, J.C., Glazebrook, K., Weber,R., 2011: *Multi-Armed Bandit Allocation Indices*, Wiley-Blackwell, 2011

[6] Graczová, D., Jacko P., 2011: *Knapsack Problem for Perishable Inventories*, submitted to Operations research, 09/2011

[7] Jacko, P., 2010: *Knapsack Problem for Perishable Items, Index-Knapsack Heuristic, and Nearly-Optimal Revenue Management*, submitted to europian Journal of Operational Research, 12/2010

[8] Jacko, P., 2010: *Restless Bandits Approach to the Job Scheduling Problem and its Extensions*, Modern Trends in Controlled Stochastic Processes, ed. A.B.Piunovskiy, Luniver Press, 2010, 248-467

[9] Elmaghraby, W., Keskinocak ,P., 2003: Dinamic pricing in the presence of inventory considerations: Research overview, current practices, and future directions. Management science,2003, 49(10), 1287-1309

[10] Novák, V., 2011:*Index policies for dynamic and stochastic problems*: Bakalárska práca. Bratislava: UK,2011.49s

[11] Whittle, P., 1988: *Restless bandits: Activity allocation in a changing world*, A Celebration of Applied Probability, J. Gani (Ed.), Journal of Applied Probability, 1988, 25A:287-298