

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY



PREČO CHODÍ ČLOVEK V KRUGU A AKO NA TO
VPLÝVA JEHO RÝCHLOSŤ ?

BAKALÁRSKA PRÁCA

2012

Michal JÁNOŠI

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY

**PREČO CHODÍ ČLOVEK V KRUHU A AKO NA TO
VPLÝVA JEHO RÝCHLOSŤ ?**

BAKALÁRSKA PRÁCA

Študijný program: Ekonomická a finančná matematika
Študijný odbor: 1114 Aplikovaná matematika
Školiace pracovisko: Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky
Vedúci práce: Mgr. Katarína Boďová, PhD.
Evidenčné číslo: 169c2979-5bf4-41b0-9bad-7b0ac022397c



Univerzita Komenského v Bratislave
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

ZADANIE ZÁVEREČNEJ PRÁCE

Meno a priezvisko študenta: Michal Jánoši
Študijný program: ekonomická a finančná matematika (Jednoodborové štúdium, bakalársky I. st., denná forma)
Študijný odbor: 9.1.9. aplikovaná matematika
Typ záverečnej práce: bakalárska
Jazyk záverečnej práce: slovenský

Názov: Prečo chodí človek v kruhu a ako na to vplýva jeho rýchlosť?

Cieľ: Rozšírenie existujúceho modelu a jeho numerické a analytické štúdium.

Literatúra: Souman, J.L. a kol, Walking Straight into Circles, 2009, <http://veda.sme.sk/c/5000414/pravdivy-pribeh-o-kruhoch.html>

Anotácia: V minuloročnej bakalárskej práci bol navrhnutý jednoduchý matematický model, ktorý poskytol vysvetlenie na prvú otázku z názvu a teoreticky potvrdil, že typický človek, ktorý sa snaží ísť rovno dopredu a nemá pri tom žiaden orientačný bod (slnko, hviezdy), zväčša bude vykazovať kruhové trajektórie. Cieľom práce je poskytnúť matematickú odpoveď aj na druhú podotázku v názve a to pomocou zavedenia ďalšej premennej do modelu a následným skúmaním jeho správania.

Vedúci: Mgr. Katarína Boďová, PhD.

Dátum zadania: 15.10.2011

Dátum schválenia: 27.10.2011

doc. RNDr. Margaréta Halická, CSc.
garant študijného programu

.....
študent

.....
vedúci

Pod'akovanie Touto cestou by som sa rád poďakoval svojej vedúcej bakalárskej práce Mgr. Kataríne Boďovej, PhD. za pomoc, trpezlivosť, ochotu a cenné odborné rady, ktoré mi pomáhali pri písaní tejto práce. Ďakujem aj svojej rodine a kamarátom za ich podporu a trpezlivosť.

Čestné prehlásenie Čestne prehlasujem, že na bakalárskej práci som pracoval samostatne na základe vlastných teoretických poznatkov, konzultácií a odbornej literatúry uvedenej v Zozname použitej literatúry.

Miesto, Dátum

Meno Priezvisko

Abstrakt v štátnom jazyku

JÁNOŠI Michal: *Prečo chodí človek v kruhu a ako na to vplýva jeho rýchlosť* [Bakalárska práca], Univerzita Komenského v Bratislave, Fakulta matematiky, fyziky a informatiky, Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky; školiteľ: Mgr. Katarína Boďová, PhD., Bratislava, 2012, 47 s.

V mojej bakalárskej práci sa zaoberám rozšírením existujúceho matematického modelu vytvoreného v bakalárskej práci J. Dzúrika [6] popisujúceho správanie sa človeka pri chôdzi pri predpoklade, že sa snaží udržiavať priamy smer. Nový model je vytváraný aj na základe dát poskytnutých J. Soumanom, analyzovaných v jeho experimentálnej štúdií [9] a oproti modelu J. Dzúrika [6] zahŕňa aj vplyv rýchlosti chôdze na celkový tvar trajektórie chôdze. Pomocou diferenciálnych rovníc vytváram matematický model a simulujem správanie človeka pri tomto type chôdze. Cieľom mojej bakalárskej práce je numericky a analyticky študovať vytvorený model, sledovať závislosť modelu od rýchlosti chôdze a porovnať ho so skutočnosťou.

Kľúčové slová: diferenciálne rovnice, matematický model, numerický simulácie, chôdza v kruhu, náhodnosť

Abstract

JÁNOŠI Michal: *Why do people walk in circles and how does their velocity influence it?* [Bachelor Thesis], Comenius University in Bratislava, Faculty of Mathematics, Physics and Informatics, Department of Applied Mathematics and Statistics; Supervisor: Mgr. Katarína Boďová, PhD., Bratislava, 2012, 47 p.

My bachelor thesis deals with expanding of existing mathematical model created in bachelors thesis written by J. Dzurik [6] describig behaviour of a person, which tries to maintain straight direction while walking blindfolded. Our new model is based also on data provided by J. Souman analyzed in his experimental study [9] and besides model of J. Dzurik [6] also includes influence of velocity on shape of walking trajetory. I am simulating behaviour of person in such type of walking by using difference equations. Objective of the thesis is to study model both numerically and analytically, to observe dependance of model on velocity and to compare this model with reality.

Keywords: walking in circles, randomness, difference equations, mathematical modelling, numerical simulations

Obsah

| | |
|--|-----------|
| Úvod | 9 |
| 1 Analýza dát | 11 |
| 1.1 Popis reálneho pohybu | 11 |
| 1.2 Analýza uhlových výchýliek | 12 |
| 1.2.1 Histogramy uhlových výchýliek | 16 |
| 1.2.2 Závislosť uhlovej výchýlky od predošlého pohybu | 17 |
| 1.2.3 Súhrn analýzy uhlových výchýliek | 20 |
| 1.3 Analýza reálnych dĺžiek krokov a výchýliek | 21 |
| 1.3.1 Model návratu k strednej hodnote | 21 |
| 1.3.2 Parametre chôdze - časť 1 | 22 |
| 1.3.3 Vzťah dĺžky kroku, rýchlosti a frekvencie chôdze | 23 |
| 1.3.4 Parametre chôdze - časť 2 | 23 |
| 1.4 Analýza rezíduí lineárneho modelu | 26 |
| 1.5 Zhrnutie analýzy dát | 30 |
| 2 Predpoklady modelov | 31 |
| 3 Návrhy modelov a simulácie | 33 |
| 3.1 Popis navrhnutých modelov | 33 |
| 3.2 Metodika simulácií | 35 |
| 3.3 Simulácie prechádzok | 36 |
| 3.3.1 Simulácia A | 37 |
| 3.3.2 Simulácia B | 39 |
| 3.3.3 Simulácia C | 41 |
| 3.3.4 Simulácia D | 43 |
| 3.4 Závěry zo simulácií | 44 |
| Záver | 45 |
| Zoznam použitej literatúry | 47 |

Úvod

Chôdza človeka v priestore je ovplyvňovaná veľkým počtom faktorov. Od poznania miesta, kade sa človek pohybuje, tvaru terénu po ktorom sa človek pohybuje, poveternostných podmienok, až k veciam ako genetické predispozície človeka - väčšia dĺžka alebo sila v jednej z nôh. Veľmi dôležitým faktorom je aj miera informácie, ktorou človek disponuje a pomáha mu v navigácii napríklad v neznámom priestore. Ak sa má človek dostať na jedno miesto z iného, ktoré ešte nepozná a nemôže sa spoliehať na svoju pamäť, potrebuje k úspešnej realizácii pomôcku, ktorá by ho navigovala. Bez navigácie stráca schopnosť pohybovať sa podľa svojich predstáv. Príkladom navigácie môžu byť: mapa, kompas, GPS, hory, slnko, mesiac, hviezdy, piesočné duny, mach, zvuky okolia. Ako sa navyše ukazuje, človek sa bez dostatočnej navigácie nevie pri pohybe orientovať v priestore. Bez akejkoľvek navigácie, napríklad so zavretými očami (alebo v lese za zamračeného počasia, či na púšti v noci), doslova stráca schopnosť kráčať v priamom smere. V knihe *Why people get lost* of Paula Dudchenka [5] sú zaznamenané príbehy ľudí, ktorí tento jav spozorovali, ale nedokázali vysvetliť. Dokonca je uvedené, že človek nevie so zavretými očami rovnako plávať rovno, dokonca ani nevie udržať pri šoférovaní vozidlo v priamom smere. Pri pozorovaní pohybu človeka v opisovaných podmienkach neexistuje žiaden presne určiteľný systém, podľa ktorého sa pohybuje.

Na mieste je otázka, prečo človek nevie udržať priamy smer pri takto opísanej chôdzi. Jedným z možných vysvetlení je prítomnosť takzvaného šumu - vedome neovplyvniteľnej zložky. Ide o nedokonalosť spracovania informácie na úrovni zmyslov človeka, ktorá je spôsobená neschopnosťou správne vyhodnotiť podnety z okolia. Šum môže vznikáť aj na úrovni neurónov, pri nedokonalom predávaní informácie medzi synapsami. U každého človeka je toto spracovanie individuálne a preto je vo všeobecnosti správanie pri chôdzi nepredpovedateľné.

Podobnosť s týmto javom môžeme pozorovať aj u zvierat. M. Bicak sa vo svojej dizertačnej práci [2] venuje popisu mechanike chôdze u mravcov, pričom súčasťou práce je aj sledovanie náhodnosti, nesystematickej zložky, v ich pohybe. Experimenty naznačujú, že mravce menia smer pohybu náhodne podľa normálneho rozdelenia. Tieto prechádzky by sme mohli označiť pojmom korelované náhodné prechádzky. Náhodné

a korelované náhodné prechádzky matematicky približuje vo svojej publikácii E. Codling. [4]. Korelovaná náhodná prechádzka je taká, pri ktorej subjekt pri pohybe volí veľkosť svojej nasledujúcej výchylky s istou pravdepodobnosťou - ale tak, aby zachoval približný smer svojej chôdze. Teda volí veľkosť nasledujúcej výchylky z nejakého náhodného rozdelenia. Rovnako volí aj dĺžku kroku. Proces vyberania uhlovej výchylky a dĺžky kroku budeme modelovať aj v našej práci.

Popísať fenomén z úvodu tejto časti sa v experimentálnej štúdii s názvom *Walking straight into circles* [9] snažil J. Souman. Skupinu dobrovoľníkov nechal kráčať s prikrytými očami po trávnom poli a každú sekundu zaznamenával pomocou GPS polohu ich pohybu. Trasy ich prechádzok nemali žiaden zjavný systém. Dáta o ich pohyboch poskytol pre účely tejto práce poskytol J. Souman osobne.

Hlavnou úlohou našej práce budú analýza získaných dát o trajektóriách použitých v práci [9], vytvorenie čo najjednoduchšieho a najzrozumiteľnejšieho matematického modelu berúc do úvahy aj vplyv rýchlosti chôdze na zmenu smeru trajektórie a následné porovnanie a vyhodnotenie modelu spolu s porovnaním so skutočnosťou.

1 Analýza dát

1.1 Popis reálneho pohybu

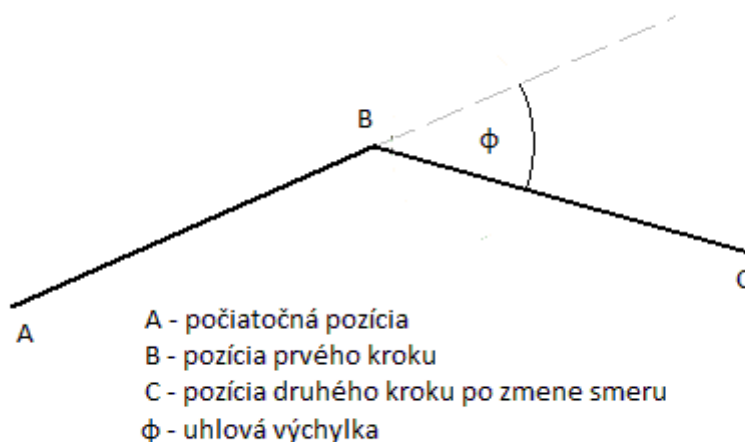
V tejto podkapitole práce sa venujeme samotnej analýze dát, ktoré boli poskytnuté J. Soumanom a pôvodne boli použité v experimentálnej štúdii [9]. Na úvod sa pozrieme na reálny popis pohybu. Ako bolo povedané v úvode, pohyb človeka je jednak ovplyvňovaný jeho subjektívnym vyhodnotením situácie (systematická zložka pohybu), teda najlepším výberom ďalšieho smerovania chôdze podľa vlastného uváženia a na druhej strane vstupuje do situácie aj zložka náhodná (šum, nesystematická zložka). Pod subjektívnou zložkou teda chápeme výber smeru a dĺžky nasledujúceho kroku podľa zhodnotenia kroku predchádzajúceho. Ak má človek pocit, že sa príliš vychýlil od priameho smeru, koriguje toto vyhodnotenie voľbou kroku v smere opačnom. V prípadoch ak si je istý svojou chôdzou, môže ju vylepšovať predĺžením kroku respektíve zvýšením rýchlosti chôdze. Šum, teda nesystematická zložka, vstupuje do modelu formou náhodnej premennej. Rovnako, ako si človek podľa uváženia vyberá smer chôdze, tak si nemusí uvedomovať iné faktory, ktoré ho v pohybe rozptyľujú. Ako bolo uvedené, môže ísť od nerovnosti terénu, po ktorom človek kráča, až po biologické faktory, ako zabudnutie počiatočého smeru chôdze, nedokonalým vyhodnotením situácie na úrovni ľudských vnemov, alebo dokonca fyziologickou stavbou človeka - väčšou silou v jednej z nôh, prípadne rôzna dĺžkou nôh. Vyšetrenie toho, ako táto náhodná zložka vyzerá, nám pomôže spresniť model. Na modelovanie pohybu použijeme nasledujúci matematický model vo forme stochastickej diferencnej rovnice:

$$\phi_{n+1} = F(\phi_n) + G(\xi_n) \quad (1)$$

V rovnici (1) vystupujú nasledovné symboly:

- ϕ_n - uhlová výchylka v n-tom kroku od prechádzajúceho smeru chôdze
- $G(\xi_n)$ - náhodná perturbácia smeru chôdze v n-tom kroku
- $F(\phi_n)$ - funkcia odozvy modelujúca systematickú zložku modelu

Cieľom tejto kapitoly je na základe reálnych dát určiť zmysluplne tvar funkcie odozvy, ako aj náhodnej zložky pohybu.



Obr. 1: Znázornenie uhlovej výchylky Φ

Na obrázku 1 je znázornená uhlová výchylka Φ , ktorá určuje veľkosť uhla medzi polpriamkou získanou predĺžením úsečky AB a úsečkou BC. ϕ znázorňuje veľkosť zmeny smeru medzi dvomi po sebe nasledujúcimi krokmi. Postupnosť jednotlivých krokov (pozícií) tvorí cestu, po ktorej sa človek pohybuje. Túto cestu nazývame trajektória pohybu. Ak máme k dispozícii trajektóriu pohybu, ľahko určíme jednotlivé uhlové výchylky prislúchajúce zmenám smeru. Práve tieto výchylky budeme podrobovať analýze.

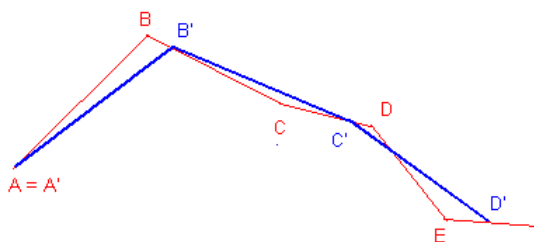
Dôležitou súčasťou analýzy je stanovenie správnych parametrov matematického modelu. Budeme sledovať tvar trajektórie, rozloženie a vývoj uhlových výchýliek krokov, vplyv pevnej dĺžky kroku na uhlové výchýlky. Jednotlivé veličiny študujeme pomocou histogramov a priemerných kvantít.

1.2 Analýza uhlových výchyliek

V tejto časti popíšeme trajektórie na základe dát poskytnutých J. Soumanom [9]. Trajektórie boli získané z pohybu účastníkov experimentu prostredníctvom lokalizačnej služby GPS. Účastníci mali za úlohu kráčať po trávinatej ploche letiska v Poltringene, Nemecko, so zakrytými očami čo najpriamejšie. Na znemožnenie orientácie pomocou sluchu im boli do uší vložené štuple a na hlavy im boli nasadené klobúky, aby necítili ani žiar slnka. Experiment trval približne 50 minút; šiesti účastníci kráčali v intervaloch

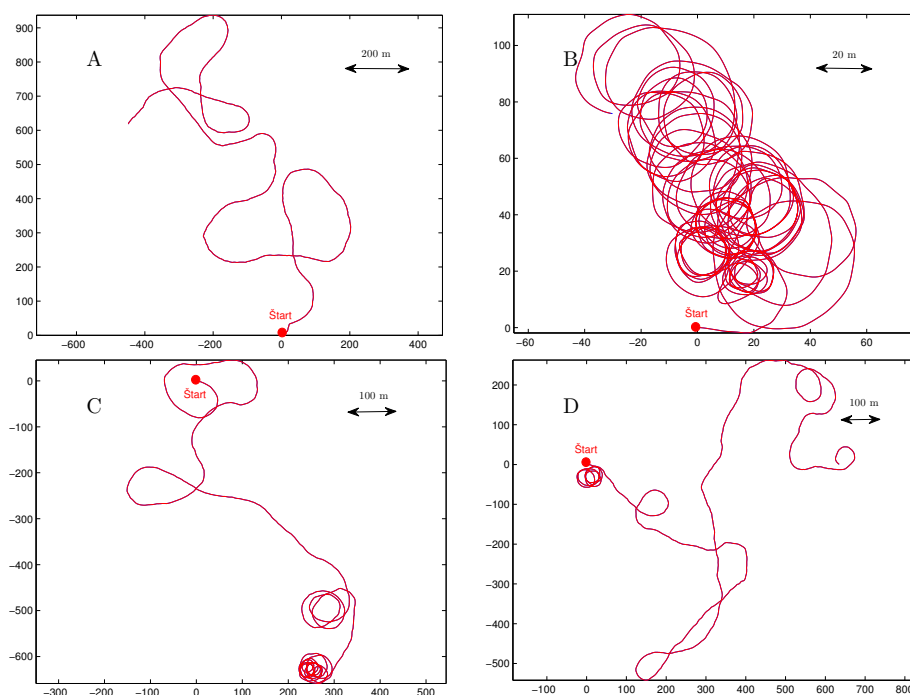
10-krát 5 minút, pričom počas každej minútovej prestávky boli vidiac presunutí na štart ďalšieho úseku chôdze. V práci reprezentujú túto metodiku účastníci A,B a D. Ostatní účastníci kráčali v intervaloch 5-krát 10 minút (v práci pôjde o účastníka C). Vizuálny kontakt s okolím pri prerušení, nevádi, keďže pri jednej trajektórii išlo o 4 zastavenia, ktoré v porovnaní s približne 2000 krokmi pri celkovej trajektórii tvoria len štatisticky bezvýznamných 0,25 % nepresných dát. Ak ale dosiahli hranicu trávinatej plochy pred vypršaním časového limitu, boli presunutí bez možnosti videnia a pokračovali v tomto časovom úseku.

Ďalej treba poznamenať, že zdrojové dáta boli tvorené zaznamenávaním polohy človeka prostredníctvom GPS v každej sekunde jeho pohybu. Teda s frekvenciou 1 Hz. Avšak nemáme informáciu o dĺžke krokov v týchto časových rozstupoch a môžeme takmer s určitosťou povedať, že neboli konštantné. Preto sme kvôli porovnávaniu museli túto trajektóriu aproximovať novou, s konštantnou dĺžkou kroku, aby sme rozložili GPS dáta na jednotlivé kroky, a taktiež aby sme mohli skúmať vplyv dĺžky kroku na celkový pohyb. Rediskretizácii trajektórií sa špeciálne venovali aj P. Bovet a S. Benhamou [3]. Porovnávali rôzne hodnoty konštantných dĺžiek krokov použitých na rediskretizáciu dát a ich vplyv na štandardnú odchýlku uhlových výchylek so strednou hodnotou 0. Výsledkom je, že pri väčších dĺžkach krokov, je štandardná odchýlka väčšia. Pri rediskretizácii vznikne menej výchylek, ktoré sú ale väčšie. Aproximácia kopíruje trasu v tom zmysle, že nové zmeny smeru sú od seba rovnako ďaleko a ležia na pôvodnej trajektórii. Je zrejmé, že menšia dĺžka kroku (cca. 0,2 m) zaručí viac krokov, ktoré budú mať viac menších (dokonca nulových) uhlových výchylek, ako keď by sme robili kroky veľké (cca. 1,2 m).



Obr. 2: Aproximácia pôvodnej (červenej) trajektórie novou (modrou) s konštantnou dĺžkou kroku

Na obrázku 2 vidíme ako sa aproximuje pôvodná trajektória s nekonštantnou dĺžkou kroku novou s konštantnou dĺžkou kroku. Proces aproximácie pozostáva z určenia polohy po sebe nasledujúcich bodov (B' , C' , D') tak, aby boli vždy nasledujúce dva od seba rovnako vzdialené a ležali na pôvodnej trajektórii. Bod B' sme našli vhodnou lineárnou kombináciou bodov B a C . Následne sme tento postup aplikovali na zvyšok trajektórie. Takto získavame možnosť prepočítať a prispôsobiť novú trajektóriu ľubovoľnej dĺžke kroku.

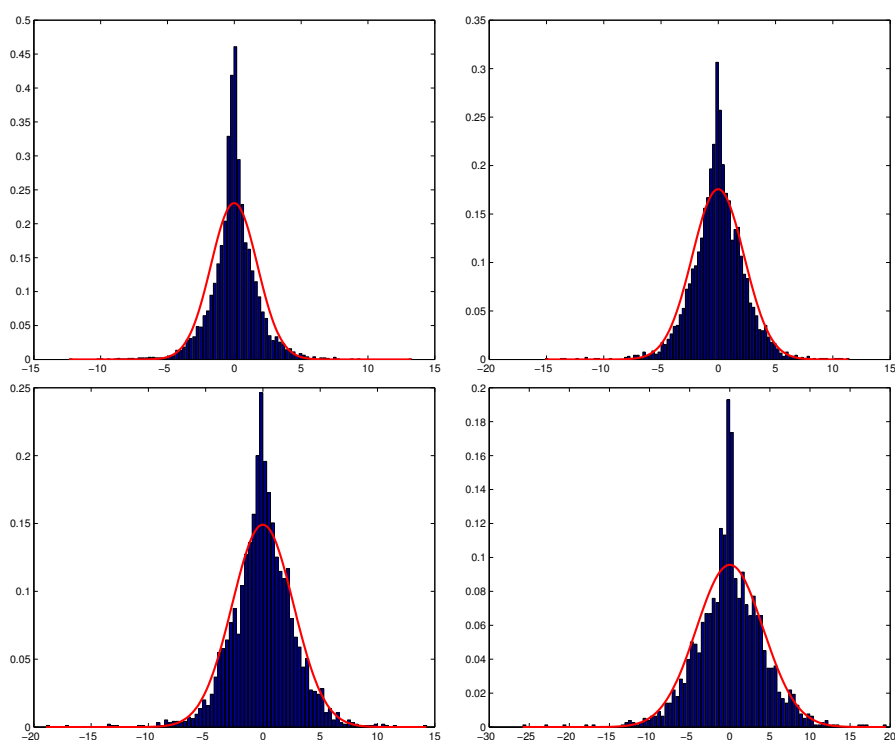


Obr. 3: Trajektórie štyroch účastníkov experimentu. Vľavo hore prvý, vpravo hore druhý, ľavo dole tretí a vpravo dole štvrtý chodec. Účastník C ako jediný kráčal v piatich intervaloch po 10 minút. Ostatní kráčali v desiatich intervaloch po 5 minút.

Na obrázku 3 sú znázornené štyri trajektórie tvorené dátami zo štúdie J. Soumana [9]. V prípade prvého účastníka A ide o pomerne usporiadaný pohyb. Až trikrát sa v jeho pohybe vyskytla slučka, pričom nie je zrejмый žiaden smer, ktorý by mohol aspoň jemne preferovať. V jeho pohybe sa vyskytujú slučky oboma smermi. Toto sa určite nedá povedať o účastníkovi B. Pohyboval sa na oveľa menšom priestore, pričom prešiel približne rovnakú vzdialenosť. Je zrejмый veľké cyklenie a preferencia ľavej strany. Toto cyklenie poukazuje na možné biologické nedokonalosti chodca: jednu nohu mohol mať kratšiu, prípadne v nej mohol mať menej sily. Tretí účastník začal podobne ako ten prvý s jemnými zmenami smeru a bez zjavnej preferencie. V závere jeho pohybu však prišlo cyklenie sa smerom doprava. Vzor dopĺňa účastník D, ktorý začal preferenciou pravej strany a zjavným cyklením, ale postupom času pohyb korigoval a tak v závere opäť nevieme určiť preferenciu strany, pričom pohyb je rovnejší.

1.2.1 Histogramy uhlových výchýliek

V tejto časti znázorníme histogramy rozdelení rôzne veľkých odchýliek. Sledujeme uhlové výchýlky postupne pri dĺžke krokov 0,7 m, 1 m, 1,2 m a 2 metre. Typická dĺžka kroku je približne 75-90 cm tj. 0,75 - 0,9 m. Interval $I = [0,7, 1,5]$ teda zahŕňa všetky rozumné hodnoty dĺžky kroku. Menšie hodnoty nemá zmysel uvažovať, lebo by sa nejednalo o chôdzu ako takú. Čím menšie kroky sme volili, tým viac sme pozorovali malých, nulových uhlových výchýliek; pri krokoch väčších to bolo naopak. Preto nám postačí zamerať sa na interval I .



Obr. 4: Histogramy pri dĺžkach krokov $k = 0,7$: $\mu_1 = -0,0086$, $\sigma_1 = 1,7317$, pri $k = 1$: $\mu_2 = -0,0101$, $\sigma_2 = 2,2715$, pri $k = 1,2$: $\mu_3 = -0,0080$, $\sigma_3 = 2,6756$ a pri $k = 2$: $\mu_4 = 0,0058$, $\sigma_4 = 4,1717$. Červená krivka znázorňuje graf hustoty normálneho rozdelenia s parametrami μ_i (stredná hodnota) a σ_i (štandardná odchýlka).

Na obrázku 4 sú histogramy rozloženia uhlových výchýliek pre dĺžky krokov z intervalu I pre trajektóriu prvého uchádzača experimentu. Dáta sme odhadli normálnym rozdelením $\sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, keďže sú uhlové výchýlky rozložené okolo nuly takmer symetricky a zároveň sú pri nule vyskytujúce sa najčastejšie. V zmysle MVO metódy (metóda maximálnej vierohodnosti), aby bol tento odhad čo najlepší, sme vyjadrili

stredné hodnoty a štandardné odchýlky pre každú zo skúmaných dĺžiek krokov k . Potom sme k týmto grafom nakreslili krivky hustoty normálneho rozdelenia s danými parametrami. Predpis hustoty normálneho $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ je :

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad (2)$$

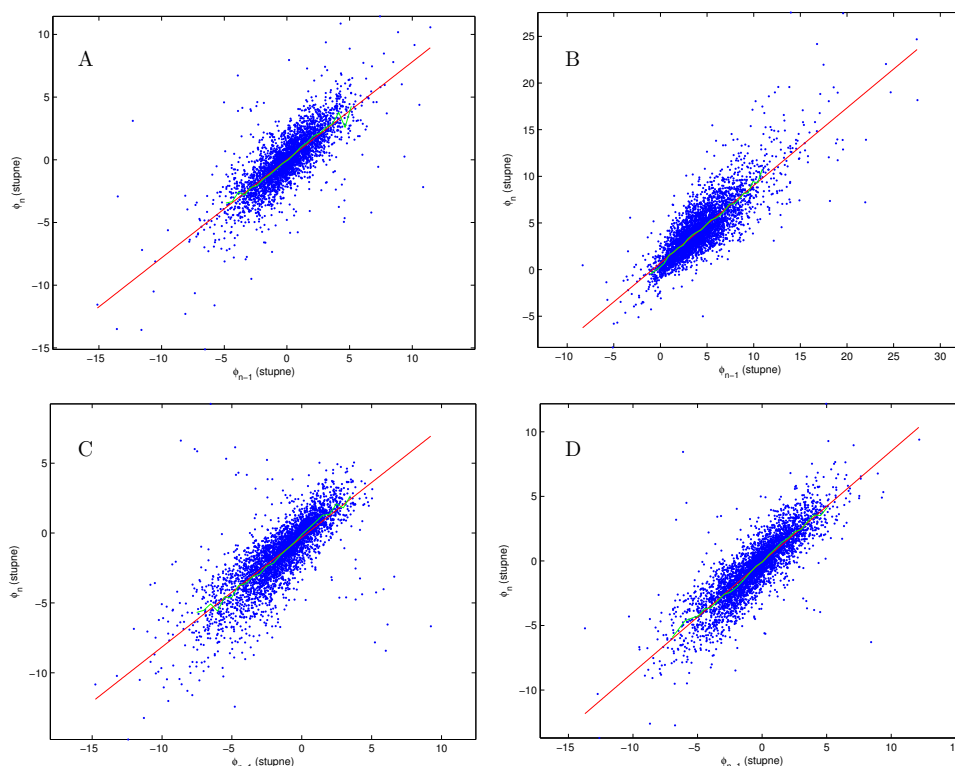
Pri porovnaní grafov zisťujeme, že pri väčšom kroku sa špic histogramu znižuje a $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ rozdelenie lepšie aproximuje rozloženie uhlových výchyliek. Ak by sme testovali ešte väčšiu dĺžku, odhad sa zlepší, avšak pri reálnej chôdzi je takýto krok problém realizovať, preto sa obmedzíme hodnotou maximálne 2 m. Pri skúmaných dátach krok definujeme ako vzdialenosť prejdenú za jednu sekundu. Jemnejšie delenie týchto trajekórií nemáme k dispozícii a preto bude táto definícia vhodná pre nasledujúcu časť. Prišli sme k záveru, že odchýlka sa nedá aproximovať dostatočne dobre normálnym rozdelením. Budeme musieť tento čisto normálny model rozšíriť.

1.2.2 Závislosť uhlovej výchylky od predošlého pohybu

Predpokladajme, že uhlová výchylka nezávisí na histórii pohybu človeka, iba na predošlej uhlovej výchylke. Podľa vzťahu (1), kde náhodnú zložku volíme čo najjednoduchšie. Potom má diferenčný stochastický model popisujúci pohyb človeka nasledujúci tvar:

$$\phi_{n+1} = F(\phi_n) + \epsilon\xi_n \quad (3)$$

V rovnici (3) vystupuje ϕ_n ako predchádzajúca uhlová výchylka, ϕ_{n+1} ako nasledujúca uhlová výchylka, $F(\phi_n)$ ako funkcia odozvy pre systematickú zložku pohybu, ξ_n predstavuje náhodnú premennú s normálnym rozdelením $\mathcal{N}(0, 1)$, a ϵ vyjadruje silu náhodnosti. Ak by sme vedeli závislosť medzi uhlovými výchylkami rozumne popísať, mohli by sme ju použiť pri vytváraní modelu. Pozrime sa na to, ako vyzerá táto závislosť graficky pre zistenie formy funkcie odozvy $F(\cdot)$. Nasledujú teda grafy pre jednotlivé trajektórie, tentokrát však len pre rozumnú dĺžku kroku rovnú 1 metru.

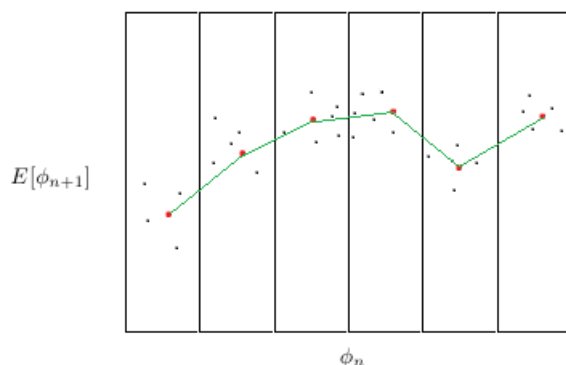


Obr. 5: Závislosť ϕ_n od ϕ_{n-1} . Regresné priamky majú sklon približne 1.

Ako vidíme, bez bližšieho popisu by vznikli len zhluky bodov bez možnosti určenia hustoty bodov v grafe. Aby sme mohli túto hustotu určiť, do grafov sme pridali dve čiary. Jedna je priamka znázorňujúca lineárny regresný model, použijúc metódu najmenších štvorcov, kde sa snažíme minimalizovať súčty štvorcov odchýliek jednotlivých bodov od samotnej priamky. Výpočet ukazuje, že sklony týchto priamok sú približne 1. Konštatujeme, že odchýlky sú rovnomerne porozkladané na oboch stranách priamky. Druhou, zelenou, lomenou čiarou určíme priemernú výšku odchýlky.

$$E[\phi_{n+1}] = E[F(\phi_n)] + \epsilon E[\xi_n] = F(\phi_n) \quad (4)$$

Podľa predpokladu (4) budeme skúmať stredné hodnoty, teda priemery. Proces priemerovania je nasledovný.

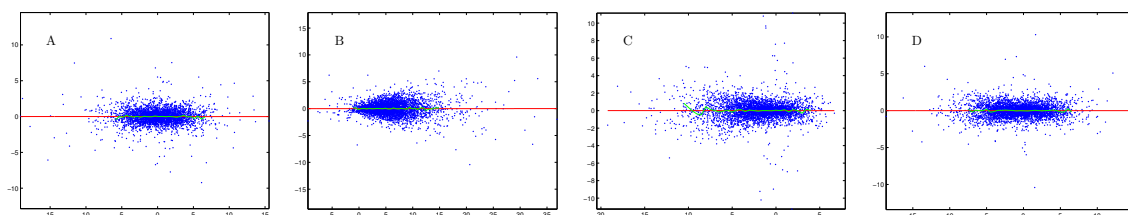


Obr. 6: Spriemerované body.

Z grafu sme zľava doprava postupne brali na osi X intervaly s dĺžkou 0,5, spravili aritmetický priemer hodnôt ($E[\phi_{n+1}]$, očakávanú nasledujúcu odchýlku), ktoré sa v tomto intervale nachádzali a zaznačili. Tieto body sú označené červenou farbou. Samotná krivka spájajúca tieto body je zelená. Druhý postup nám nezdokonalil pôvodný regresný odhad. Sklon tejto čiary kopíruje regresnú priamku a dáva návod modelovať funkciu odozvy ako funkciu lineárnu. Treba si uvedomiť, že priemerovanie bolo založené na projekcii z osi X. Podľa predpokladu :

$$\phi_{n+1} \approx \phi_n \quad (5)$$

sa môžeme na závislosť výchyliiek pozrieť pri projekcii priemerovaní na os $x = y$.



Obr. 7: Závislosť ϕ_n od ϕ_{n-1} . Závislosť bola projekčnou maticou otočená o -45 stupňov (z osi $x = y$ sa stala os x).

Účelom pozorovania priemerov bolo zistiť, či v okolí bodu $[0,0]$ nevznikne anomália, tj. či priemerová čiara bude pripomínať priamku, alebo či bude pripomínať inú krivku, ktorá by nám mohla lepšie popísať závislosť malých odchýliek pri chôdzi. Pre sledovanie rozloženia hustoty bodov v rôznych častiach roviny grafu sme sledovali aj projekcie z iných osí. Očakávali sme smernicu regresnej priamky a priemerov v okolí nuly. Tento predpoklad sa potvrdil aj znázornením, respektíve výpočtom. Žiadna anomália sa teda nepotvrdila. Závislosť dvoch po sebe idúcich uhlových výchyliek teda budeme modelovať ako lineárnu funkciu odozvy.

1.2.3 Súhrn analýzy uhlových výchyliek

V predchádzajúcich podkapitolách sme reálne dáta podrobili rôznym skúmaniam, ktoré nám pomôžu pri zostavení modelu. Počas sledovania celkových trajektórií, početností uhlových výchýliek a závislostí uhlových výchýliek, môžeme pristúpiť na tieto závery:

- Do modelu musíme pridať konštantný člen, tzv. bias (β) aby sme mohli simulovať preferenciu účastníka experimentu vychýľovať sa do jednej strany. Túto konštantu sme mohli pozorovať hlavne pri druhej trajektórii, kde je preferencia ľavej strany zrejme.
- Pri sledovaní histogramov sme si všimli, že nie sú dostatočne dobre popísané normálnym rozdelením, najmä v okolí najmenších odchýliek. Preto ich nemôžeme modelovať ako normálne a model musíme zložiť s niečím komplikovanejším. Na to slúžia práve odhadované funkcie odozvy.
- Pri sledovaní závislosti predchádzajúcej a nasledujúcej výchylky sme pomocou regresie a priemerovaní zistili, že systematická zložka modelu bude mať tvar lineárnej funkcie.

$$\phi_{n+1} = \beta + \gamma\phi_n$$

Toto zistenie je potešujúce v zmysle jednoduchosti modelu a aj v zmysle odhadovaní parametrov deterministickej časti modelu, ktoré su pri lineárnej funkcii len dva (β, γ). Náhodná časť modelu bude reprezentovaná náhodnou

premennou s normálnym rozdelením, ktorého variancia ϵ^2 bude odhadnutá z rozdelenia rezíduí.

1.3 Analýza reálnych dĺžiek krokov a výchyliiek

V predchádzajúcej časti sme sa venovali analýze uhlových výchyliiek pri rôznych konštantných dĺžkach krokov. V tejto kapitole sa budeme venovať analýze reálnych dĺžiek krokov, preto budeme pracovať s neprepočítavanou trajektóriou, ale budeme používať reálne súradnice trajektórie pohybu s ich prislúchajúcimi uhlovými výchyilkami. Budeme zisťovať predpis funkcie odozvy (systematickej zložky) pre dĺžku kroku podobným spôsobom, ako to bolo pri analýzach s konštantným krokom. Krok stále definujeme ako vzdialenosť, ktorú človek prejde za 1 sekundu.

1.3.1 Model návratu k strednej hodnote

Model návratu k strednej hodnote (z ang. mean reversion process) je typ lineárneho modelu, v našom prípade funkcie odozvy, ktorý vyhodnocuje vstupné parametre tak, že výstupom je hodnota, ktorá sa pohybuje v okolí priemeru (strednej hodnoty), teda v okolí očakávaného výsledku. Tento výsledok je v našom prípade priemerná dĺžka kroku a priemerná uhlová výchylika. Znamená to v praxi toľko, že človek nebude neustále predlžovať alebo nebude neustále krok skracovať, ale dĺžky jeho krokov sa budú prirodzene vracieť k priemernej dĺžke. Ak by človek išiel veľmi pomaly, radšej krok zväčší a naopak. Matematický zápis nám poskytne nasledujúca rovnica.

$$L_{n+1} = L_n + c^L(L^* - L_n) + \epsilon_n^L \xi_n \quad (6)$$

$$L_{n+1} = (1 - c^L)L_n + c^L L^* + \epsilon_n^L \xi_n \quad (7)$$

Rovnica 7 je príkladom mean reversion procesu. Všimnime si zátvorku $(L^* - L_n)$, kde L^* označuje priemernú dĺžku kroku. Ak platí $L^* < L_n$, potom je predchádzajúci krok dlhší ako priemerný, potom $(L^* - L_n) < 0$ a teda podľa funkčného predpisu 7 sa k nasledujúcemu kroku L_{n+1} prirátá záporný a -násobok teda sa tento krok skrátí. Ak by bola situácia opačná, tj. $L^* > L_n$, nasledujúci krok by bol predĺžený.

Podobná úvaha sa dá aplikovať aj na závislosť uhlových výchyliiek, kde by sme

boli radi, aby stredná hodnota vyjadrovala bias - asymetriu chôdze. Predpis bude nasledovný.

$$\phi_{n+1} = \phi_n + c^\phi(\phi^* - \phi_n) + \epsilon_n^\phi \xi_n \quad (8)$$

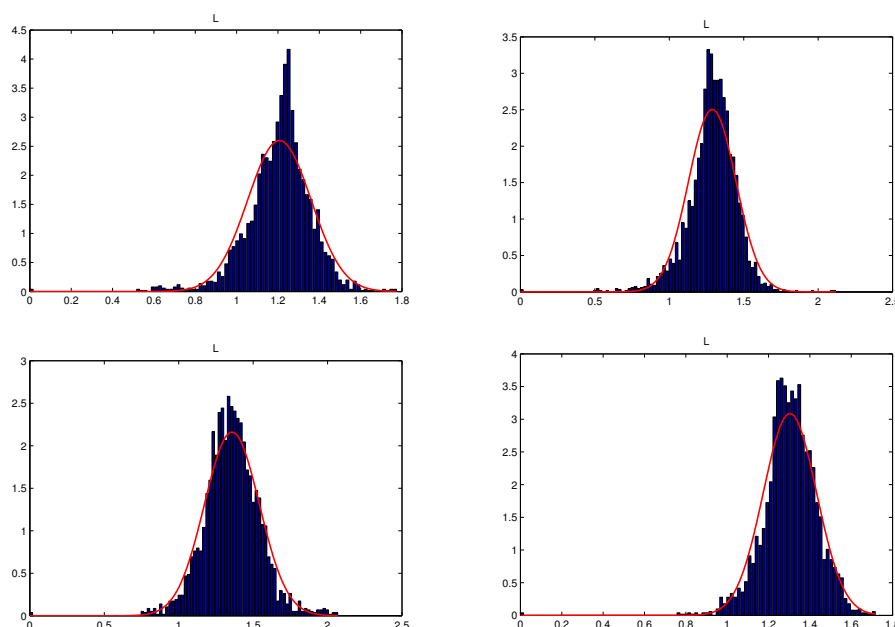
$$\phi_{n+1} = (1 - c^\phi)\phi_n + c^\phi\phi^* + \epsilon_n^\phi \xi_n \quad (9)$$

Rovnica 9 je lineárna, keďže člen $c^\phi\phi^*$ je konštanta. Splňa teda aj prepoklad z kapitoly o analýze uhlových výchyliiek. V oboch modelovaných veličinách sa vraciame k priemeru (strednej hodnote). Teraz jednotlivé parametre modelu vyčíslime a zistíme, či sa modely správajú podľa očakávania.

1.3.2 Parametre chôdze - časť 1

V tejto časti pristúpime k vyhodnocovaniu parametrov chôdze trajektórií pohybu chodcov 3, kde už však pracujeme s neprerátanou trajektóriou a dĺžka krokov zodpovedá reálnemu pohybu pre novo definovaný krok.

Keďže skúmame dĺžky krokov, pozrime sa aj na histogramy pre jednotlivé trajektórie.



Obr. 8: Rozdelenia dĺžiek krokov. Grafy korešpondujú s obrázkom 3. Priemerná dĺžka kroku (úseku) je približne 1,2 - 1,3 m. Červenou je znázornený graf hustoty normálneho rozdelenia.

Z histogramov 8 sa dajú vyčítať priemerné dĺžky krokov. Treba však zahrnúť aj

spôsob merania súradníc, ktoré sa merali každú sekundu pohybu. Dĺžka úseku je približne 1,2 - 1,3 m. To znamená pohyb priemernou rýchlosťou 1,2 - 1,3 m/s. Človek však vykoná za jednu sekundu o čosi viac ako 1 krok. Vzťah medzi dĺžkou kroku, frekvenciou a rýchlosťou chôdze, ktorá nás zaujíma a následne ich priemerné hodnoty skúmajú štúdie P. Murraya a J. Bertrama [8, 1].

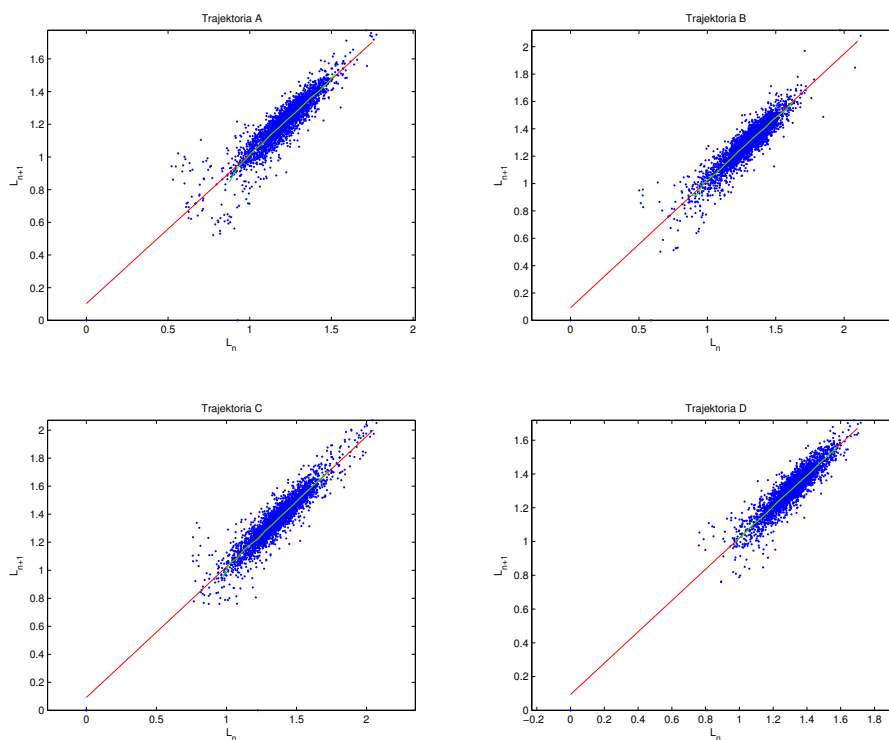
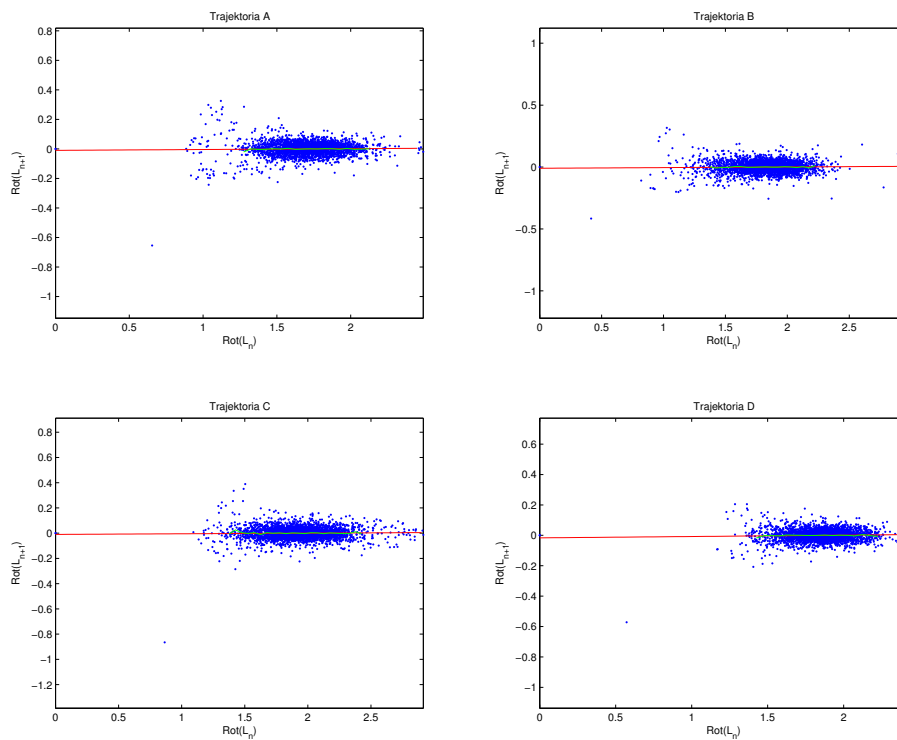
1.3.3 Vzťah dĺžky kroku, rýchlosti a frekvencie chôdze

Podľa štúdie Walking Patterns of Normal Men od P. Murraya [8] je priemerná dĺžka kroku zdravého muža 0,79 m, čo podľa štúdie zodpovedá frekvencii 1,95 kroku za sekundu. V prípade štúdie J. Soumana [9] je to o niečo málo menej, ale toto sa dá priradiť ťažšiemu terénu na zdolávanie (trávnatá lúka). Pozrime sa samotné vzťahy medzi týmito veličinami. John Bertram v svojej štúdií [1] skúma pohyb 5 mužov a 5 žien na bežiacom páse v troch sériách pokusov. Pri prvom museli účastníci kráčať pri rôznych rýchlostiach, ale pri vždy pri rovnakej frekvencii (tempo bolo udržiavané metronomom). Týmto spôsobom bol získaný vzťah medzi frekvenciou a rýchlosťou. Podobne boli zafixované na konštantnej hodnote aj rýchlosť (bola udržiavaná samotným pásom) a dĺžka kroku (bola udržiavaná naznačenými čiarami na páse). Výsledky ukazujú, že dĺžka kroku je úmerná rýchlosti. Teda ak človek zväčší krok, je mu prirodzenejšie zachovať frekvenciu a teda zvýšiť rýchlosť, ako zachovať rýchlosť, ale frekvenciu znížiť.

Toto je výhodné aj z hľadiska našej práce, kde stačí modelovať dĺžku kroku, čo má rovnaký efekt, ako modelovanie rýchlosti - ktorej vplyv na chôdzu pozorujeme.

1.3.4 Parametre chôdze - časť 2

Pri odhadovaní parametrov budeme postupovať podobne ako v prvej časti, pomocou metódy regresie a metódy priemerovaní.

Obr. 9: Závislosť L_{n+1} a L_n .Obr. 10: Projekcia závislosti L_{n+1} a L_n na os $x=y$.

Lineárna závislosť nám dovoľuje odhadovať parametre nasledovných rovníc:

$$L_{n+1} = a^L L_n + b^L \quad (10)$$

$$\phi_{n+1} = \gamma^\phi \phi_n + \beta^\phi \quad (11)$$

kde

$$a^L = 1 - c^L$$

$$b^L = c^L L^*$$

$$\gamma^\phi = 1 - c^\phi$$

$$\beta^\phi = c^\phi \phi^*$$

Ak budeme poznať tieto parametre, vyrátame aj priemerné dĺžky krokov L^* , ϕ^* pomocou vzťahov $L^* = \frac{b^L}{1-a^L}$ a $\phi^* = \frac{\beta^\phi}{1-\gamma^\phi}$.

| Chodec | γ^ϕ | β^ϕ | a^L | b^L | ϕ^* | L^* |
|---------------|---------------|--------------|--------|--------|----------|--------|
| Trajektória A | 0,7697 | -0,0098 | 0,9150 | 0,1022 | -0,0427 | 1,2024 |
| Trajektória B | 0,8514 | 0,7947 | 0,9283 | 0,0921 | 5,3474 | 1,2836 |
| Trajektória C | 0,8371 | -0,3201 | 0,9321 | 0,0918 | -1,97 | 1,3512 |
| Trajektória D | 0,8609 | -0,0871 | 0,9277 | 0,0939 | -0,63 | 1,2974 |

Tabuľka 1: Tabuľka odhadnutých hodnôt parametrov.

Tabuľka obsahuje spočítané parametre. O dvoch účastníkoch vieme s istotou povedať, aký trend majú ich chôdze, lebo poznáme optimálne uhlové výchylky. Sledovaním trajektórií na obrázku 3 sa tento predpoklad potvrdzuje. Účastník B má vo svojom pohybe zjavnú preferenciu ľavej strany a účastník C zjavnú preferenciu pravej strany. U ostávajúcich účastníkov je bias natoľko malý, že sa ani v jednom prípade neprejavil. Optimálna výchylka je preto z tabuľky 1 pre stranu preferujúcich účastníkov 5,4 a -2 stupne. Ostatní účastníci nepreferujú žiadnu stranu počas celého ich pohybu. Koeficient b^ϕ pri nich vyšiel veľmi blízko hodnote 0. V ďalšej časti budeme štatisticky vyhodnocovať správnosť predpisu sledovaním štatistík rezíduí (odchýliek modelu od skutočnosti).

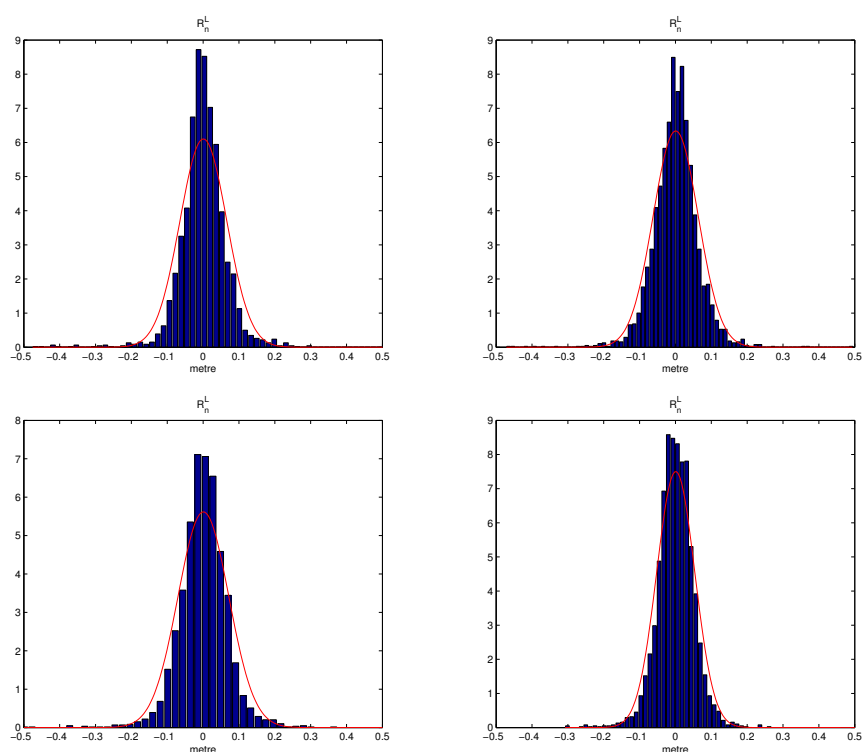
1.4 Analýza rezíduí lineárneho modelu

Rezíduá ako odchýlky modelu od reality sa dajú získať ako rozdiel reálnej uhlovej výchylky ϕ_{n+1}^R a namodelovanej uhlovej výchylky ϕ_{n+1}^M , ktorú získame dosadením výchylky ϕ_n^R do modelu. Vektor rezíduí Res^ϕ získame, ak tento rozdiel vypočítame ku každej uhlovej výchylke v chôdzi.

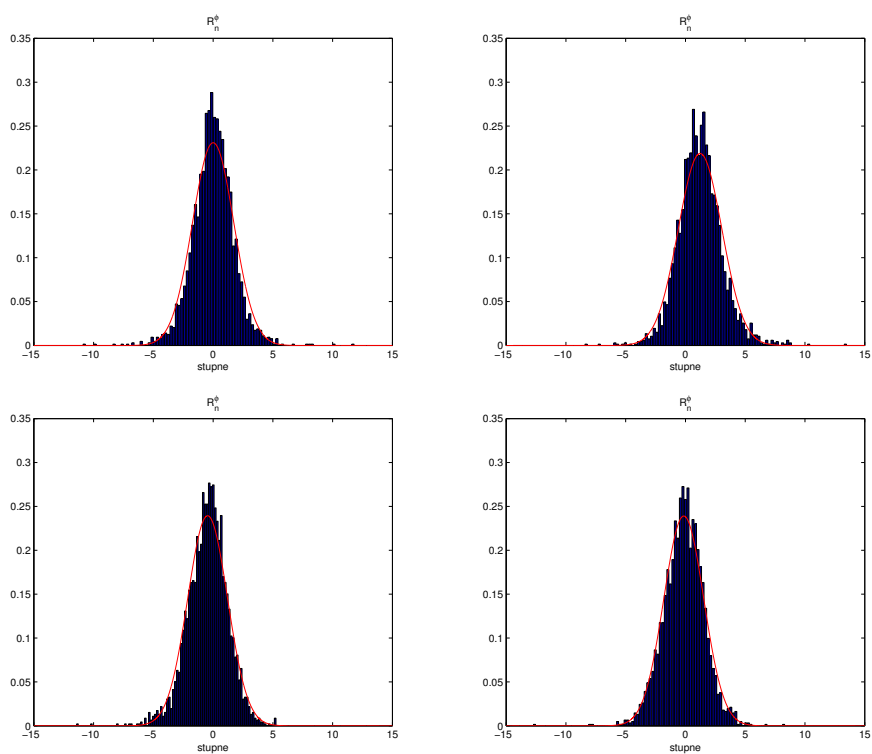
$$Res^X = \begin{pmatrix} X_2^R \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ X_N^R \end{pmatrix} - a \begin{pmatrix} X_1^R \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ X_{N-1}^R \end{pmatrix} - bI \quad (12)$$

Dosadením L resp. ϕ za X do rovnice (12) dostávame požadované vzorce.

Analýza charakteru rezíduí nám odhalí chybovosť modelu, čím možme preskúmať jeho relevantnosť. Pristúpime k skúmaniu vývoja rezíduí v čase a k skúmaniu ich závislosti od samotných dĺžok krokov a uhlových výchylek. Týmto vieme potvrdiť, alebo vyvrátiť systematickú závislosť medzi týmito veličinami. Dôležitou časťou bude aj zistenie variancie rezíduí pre odhad parametra ϵ .

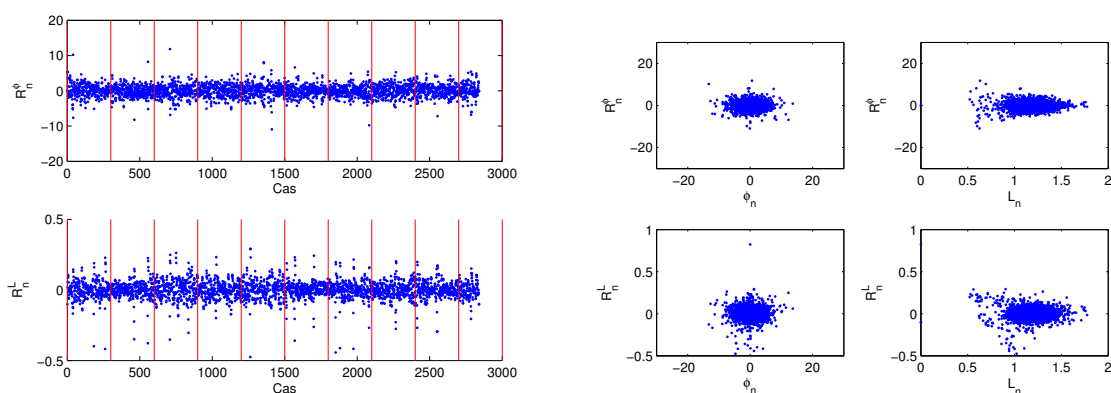


Obr. 11: Histogramy rezíduí pre model dĺžok krokov postupne pre všetkých 4 chodcov.

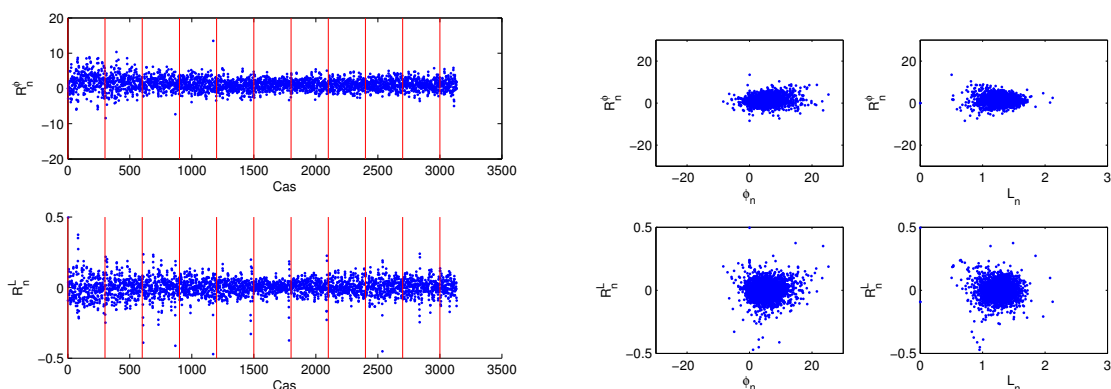


Obr. 12: Histogramy rezíduí pre model uhlových výchylek postupne pre všetkých 4 chodcov.

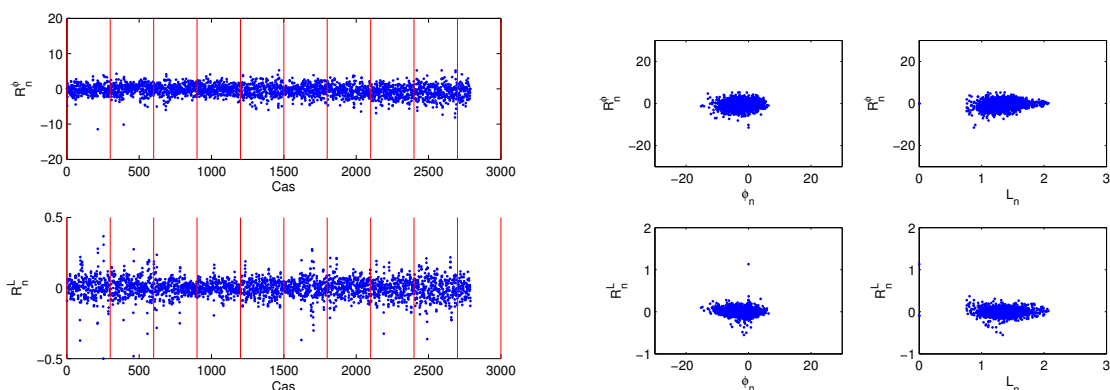
Histogramy 11 naznačujú normalitu so strednou hodnotou nula. Ukazuje sa, že rezíduá sa naozaj správajú podľa predpokladu, tj. úseky nemali extrémne veľkú, alebo extrémne malú neprirodzenú dĺžku (vracali sa k priemernej). Navrhnutý mean reverting proces je vhodný. Pohľad na rezíduá 12 odhaľuje ich normalitu. Majú potešujúci charakter tým, že ich stredná hodnota je skoro nula. Modelované hodnoty sú okolo reálnych porozkladané rovnomerne po oboch stranách. Lineárna špecifikácia modelu s normálnou nesystematickou zložkou sa teda ukazuje vhodnou. Skúmame vývoj rezíduí v čase a ich závislosti na dĺžkach úsekov a uhlových výchylkách.



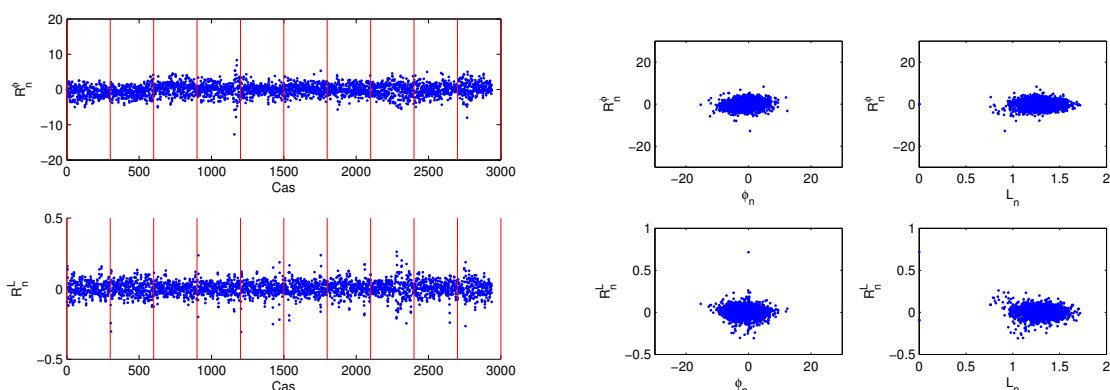
Obr. 13: Vývoj rezíduí prvého chodca v čase a jednotlivé závislosti. Červené úsečky znázorňujú časy prerušenia chôdze a premiestnenia uchádzača.



Obr. 14: Vývoj rezíduí druhého chodca v čase a jednotlivé závislosti. Červené úsečky znázorňujú časy prerušenia chôdze a premiestnenia uchádzača.



Obr. 15: Vývoj rezíduí tretieho chodca v čase a jednotlivé závislosti. Červené úsečky znázorňujú časy prerušenia chôdze a premiestnenia uchádzača.



Obr. 16: Vývoj rezíduí štvrtého chodca v čase a jednotlivé závislosti. Červené úsečky znázorňujú časy prerušenia chôdze a premiestnenia uchádzača.

Všetky predchádzajúce analýzy pre chodcov majú približne rovnaký charakter. Rezíduá sú ohraničené a v dlhodobom pohľade nevykazujú rozdielne správanie. Nachádzajú sa v nich však jemné štrukturálne zmeny, kde na malých úsekoch vykazujú väčšiu disperziu. Jedným z možných vysvetlení môže byť prerušenie 5 (10) minútového úseku chôdze s následným premiestnením. Preto sa v grafoch nachádzajú červeným prerušenia každých 300 sekúnd pohybu, ktorý podľa štúdie [9] má trvať 3000 sekúnd (t.j. 50 minút). Tieto prerušenia časovo nesúhlasia so štrukturálnymi zmenami. Tento rozdiel môže vznikáť aj nie presným meraním usekov, alebo nedispozíciou presných údajov pre daných 3000 sekúnd, lebo ako je vidieť, niektoré z prechádzok trvajú dlhšie aj kratšie ako tento počet sekúnd. Je aj možné, že chodci sa

v určitých okamihoch odchyľili od predpokladaného správania sa a zmenili tým koeficienty lineárneho modelu. Aj keď sme nevedeli presne vyhodnotiť príčinu zvýšeného rozptylu dát, ich početnosť je vzhľadom na celkovú trajektóriu pohybu zanedbateľná. Závislosť rezíduí dĺžok krokov aj uhlových výchyliek na jednotlivých dĺžkach a výchylkách nemá žiaden systematický charakter. Tento pohľad má pre náš model zlepšujúci, respektíve objasňujúci charakter.

Určením rozptylu rezíduí pre obe veličiny vieme povedať, aký má mať rozptyl náhodný člen pri modeloch. Náhodnú zložku s normálnym rozdelením $\mathcal{N}(0, 1)$ prenásobíme odmocninou variácie rezíduí a získame tak náhodnú premennú s požadovaným rozptylom. V tabuľke sú vyjadrené hodnoty parametrov $\epsilon^\phi, \epsilon^L$:

| Chodec / Parametre | Trajektória A | Trajektória B | Trajektória C | Trajektória D |
|--------------------|---------------|---------------|---------------|---------------|
| ϵ^ϕ | 1,7270 | 1,8238 | 1,6666 | 1,6689 |
| ϵ^L | 0,0654 | 0,0629 | 0,0710 | 0,0532 |

Tabuľka 2: Tabuľka parametrov simulácií.

1.5 Zhrnutie analýzy dát

- Na začiatku sme vyslovili predpoklad na lineárny model systematickej zložky modelu. Jedným aspektom tohto modelu, mala byť vlastnosť vracania sa k priemernej hodnote. Analýzou dát sme dospeli k záveru, že takýto model sa dá zostaviť a je vhodný pre ďalšiu analýzu. Nepodarilo sa nám preukázať vzájomnú závislosť dĺžky kroku a uhlovej výchylky. Jedným z predpokladov ďalších modelov bude aj vzájomná interakcia týchto veličín. Je zrejmé, že ak človek zväčší krok a teda zrýchli, jeho zotrvačnosť pohybu spôsobí, že priamy smer udrží oveľa ľahšie a je tým eliminovaný šum, teda náhodná zložka v pohybe. Ak človek spomalí, táto závislosť by mala platiť opačne. Takýto pohyb by mohol byť sledovaný aj ak by ho chodec nemal za osobný cieľ udržiavať rovnomerný.
- V ďalšej časti sme zistili aj vhodné priemerné hodnoty dĺžky kroku, ktoré boli v súlade so štúdiou P. Murraya [8] a budeme ich aplikovať pri simuláciách.

2 Predpoklady modelov

V kapitole 1 sme sa zaoberali skúmaním dát [9], ktoré nám poskytli základné poznatky pre tvorenie matematického modelu. Našli sme vhodné funkcie odozvy, zistili sme optimálne dĺžky krokov, vyhodnotili sme rozdelenia dĺžok krokov a uhlových výchyliek. Ďalej vieme v akom tvare bude do modelu vstupovať náhodnosť a odhad jej veľkosti. Reálnu chôdzu ovplyvňuje viac faktorov, ktoré sme nemohli na základe trajektórií vyšetriť a ktoré nám v istej miere skresľujú reálne dáta. Tieto premenné môžu byť napríklad rôznorodosť povrchu pri pohybe, poveternostné podmienky, rôzne subjektívne vyhodnotenia situácie pri pohybe účastníkov experimentu. Tieto faktory sa prakticky nedajú vyhodnotiť, preto do modelu pri jeho tvorení nebudú zasahovať. Keby sme aj vedeli nejako tieto premenné vyhodnotiť a zahrnúť, zbytočne model skomplikujú a ten stratí na prehľadnosti a jednoduchosti. Strata týchto faktorov ale neovplyvní celkové porovnanie navrhovaných modelov medzi sebou, keďže sa táto chyba pri vzájomnom porovnávaní stratí.

Od modelov očakávame, že sa budú správať podľa jednoduchých logických pravidiel a hlavne budú odrážať reálne vyhodnotenie situácie človeka pri chôdzi.

- Ak má človek pocit, že ide správnym smerom, má tendenciu predĺžiť krok, aby sa rýchlejšie priblížil k cieľu. Ak však v takomto pohybe spraví väčšiu výchylku do niektorej zo strán a uvedomí si to, zneistie, a teda svoju rýchlosť zníži, aby mohol vykonať korekciu do správneho smeru. Ak ostane pri pomalom pohybe spokojný so svojou výchylkou, krok predĺži a situáciu vyhodnocuje ďalej. Ak sa už nevychyľuje, krok predlžuje, ak áno, tak rýchlosť zvyšuje len opatrne, alebo vôbec, pokiaľ nebude spokojný. Tento proces prebieha počas celého pohybu.
- Keď hovoríme o rýchlosti pohybu, dôležitým faktorom je aj zotrvačnosť, ktorou človek disponuje. Pri väčšej rýchlosti má človek vyššiu zotrvačnosť a teda je zmenšovaný vplyv šumu v uhlovej výchylke, lebo človeka vo veľkej rýchlosti vyvedie z miery okolitý vplyv ľahšie, ako toho, ktorý kráča pomaly.
- Ďalšou vhodnou vlastnosťou je aj ovplyvňovanie dĺžky kroku na základe uhlovej výchylky. Ak je výchylka blízka nule, k dĺžke kroku ešte navyše prirátame

kladnú hodnotu, ak je príliš veľká ešte viac skrátime krok. Preto by sme radi do niektorých alternatív modelu zahrnuli aj tieto vlastnosti.

- Všetky modely zároveň musia modelovať pohyb v rozumných hraniciach. Dĺžka kroku je limitovaná biologickými danosťami človeka. Uhlová výchylka sa musí takisto podriaďovať hraniciam, lebo človek vedome neurobí extrémnu zmenu smeru (viac ako 45°). Do modelov zahrnieme samozrejme aj náhodnosť, zložku, ktorú človek vyhodnotiť a ovplyniť nevie.

Na základe predpokladov môžeme prejsť k sledovaniu rôznych špecifikácií modelov a k ich porovnávaniu.

3 Návrhy modelov a simulácie

Snahe namodelovať pohyb organizmov, presnejšie motýľov, sa venovali v publikácii [7] P. Kareiva a N. Shigesada. Ich cieľom bolo vyvinúť vzorec, ktorý viaže počet krokov pohybu a očakavanú kvadráturu vzdialenosti od štartu pohybu. Predpokladom pre tento proces bol fakt, že organizmy by sa mohli správať podľa mechanizmu jednoduchej korelovanej prechádzky. Pracujú s pravdepodobnostnými rozdeleniami dĺžok krokov a uhlových výchyliet a prvými dvoma momentami ich stredných hodnôt. Vzorec, ktorý v štúdiu [7] odvodili je nasledovný:

$$E(R_n^2) = nE(l^2) + 2E(l)^2 \frac{(c - c^2 - s^2)n - c}{(1 - c)^2 + s^2} + 2E(l)^2 \frac{2s^2 + (c + s^2)^{\frac{n+1}{2}}}{[(1 - c)^2 + s^2]^2} \gamma \quad (13)$$

kde

$$\begin{aligned} c &= E(\cos(\phi)), \\ s &= E(\sin(\phi)), \\ \gamma &= [(1 - c)^2 + s^2] \cos[(n + 1)\alpha] - 2s(1 - c) \sin[(n + 1)\alpha], \\ \alpha &= \arctan \frac{s}{c} \end{aligned}$$

V tejto práci sa zameriame na navrhnutie modelu simulácie celej prechádzky. Tento model nebude empiricky odvodeným vzorcom, ale pôjde o nastavenie a zvolenie modelu, ktorý by zodpovedal skutočnosti. Po navrhnutí modelov sa bude dať prípadne vypočítať hodnota $E(R_n^2)$. Táto sa bude dať porovnávať s empirickou hodnotou zistenou z rovnice (13).

3.1 Popis navrhnutých modelov

V tejto podsekcii predstavíme sériu modelov, prostredníctvom ktorých budeme modelovať prechádzky. Do modelov budeme postupne pridávať predpoklady vyslovené v kapitole 2, začínajúc najjednoduchším modelom, prechádzajúc k zložitejším.

Model I (konštantný krok):

$$L_{n+1} \equiv L^* \quad (14)$$

$$\phi_{n+1} = \beta^\phi + \gamma^\phi \phi_n + \epsilon^\phi \xi_n^\phi \quad (15)$$

Prvý model je postavený na základe bakalárskej práce J. Dzúrika [6]. Krok, ktorým človek kráča je konštantný a tento model bude referenčný voči ostatným pri sledovaní vplyvu rýchlosti pohybu. Uhlová výchylka spĺňa základný predpoklad modelu. Voľba ϵ^ϕ bude ovplyvňovať veľkosť náhodnosti ξ_n^ϕ pri určovaní výchylky. Model II (nezávislosť L, ϕ):

$$L_{n+1} = L_n + c^L(L^* - L_n) + \epsilon^L \xi_n^L \quad (16)$$

$$\phi_{n+1} = \beta^\phi + \gamma^\phi \phi_n + \epsilon^\phi \xi_n^\phi \quad (17)$$

Pri modeli II už nie je krok L konštantný, podlieha predpokladom modelov. Nastavujeme pri ňom aj priemernú dĺžku kroku a ϵ^L ako veľkosť vplyvu náhodnosti. Model III (jednostranná závislosť $\phi_{n+1}(L_n, \phi_n)$):

$$L_{n+1} = L_n + c^L(L^* - L_n) + \epsilon^L \xi_n^L \quad (18)$$

$$\phi_{n+1} = \beta^\phi + \gamma^\phi \phi_n + \tau(K - L_n) \epsilon^\phi \xi_n^\phi \quad (19)$$

Do Modelu III zahrňame ďalší z predpokladov modelu a to zotrvačnosť. Koeficient náhodnosti je v tomto prípade $\tau(K - L_n) \epsilon^\phi \xi_n^\phi$, teda klesá s rastúcou dĺžkou kroku, čo spĺňa predpoklady modelu.

Model IV (jednostranná závislosť $L_{n+1}(L_n, \phi_n)$):

$$L_{n+1} = L_n + c^L(L^* - L_n) + q \cos(\phi_n) + \epsilon^L \xi_n^L \quad (20)$$

$$\phi_{n+1} = \beta^\phi + \gamma^\phi \phi_n + \epsilon^\phi \xi_n^\phi \quad (21)$$

Model IV kopíruje, čo sa funkcie odozvy uhlovej výchylky týka, model II. Do modelu je v tomto prípade zahrnutý vplyv dĺžky kroku veľkosťou uhlovej výchylky. Model III má tento faktor naopak. Funkcia \cos je vhodná z toho hľadiska, že je symetrická, a že pri nulových hodnotách uhlovej výchylky ϕ_n vracia hodnoty blízke 1. Koeficient q nastavuje maximálnu dĺžku kroku, akú sme ochotní nastaviť v prípade, že chodec dodržiava presne priamy smer.

Model V (vzájomná závislosť L, ϕ):

$$L_{n+1} = L_n + c^L(L^* - L_n) + q \cos(\phi_n) + \epsilon^L \xi_n^L \quad (22)$$

$$\phi_{n+1} = \beta^\phi + \gamma^\phi \phi_n + \tau(K - L_n) \epsilon^\phi \xi_n^\phi \quad (23)$$

Posledný model vychádza kombináciou modelu III a IV. V tomto prípade sa teda navzájom ovplyvňujú dĺžka kroku a uhlová výchylka. Model by mal byť z hľadiska stavby najlepší a simulácia by mala vykazovať najlepšiu trajektóriu.

3.2 Metodika simulácií

V práci budeme simulovať 5 modelov predstavených v predchádzajúcej podkapitole. Aby sme ich mohli verne porovnať, spoločné koeficienty budú musieť mať nastavené rovnako. Ďalej je dôležité, aby každý z modelov reagoval na rovnakú náhodnosť v dĺžke krokov a veľkosti uhlových výchýliek. Ak medzi modelmi nebude signifikantný rozdiel, potom nebudeme pozorovať rozdielny tvar trajektórií. Preto sme najskôr vygenerovali 2 náhodné vektory z rozdelenia $\sim \mathcal{N}(0, 1)$, oba s dĺžkou požadovanej prechádzky. Každá zložka týchto vektorov reprezentuje náhodnosť pre daný krok prechádzky. Náhodnosť je samozrejme ovplyvňovaná hodnotami koeficientov ϵ^L a ϵ^ϕ . Ostatné koeficienty nastavíme podľa hodnôt zistených z reálnych dát. Koeficienty ovplyvňujúce vzájomnú interakciu dĺžky kroku a uhlovej výchýliek nastavíme tak, aby sa tieto veličiny nachádzali v rozumných hodnotách. Dĺžky kroku budú patriť do intervalu $[0, 1; 1, 5]$ m. Dĺžka kroku 1,5 m sa dá prirovnať už k behu. Naopak, 0,1 m, čo je 10 cm sú kroky s dĺžkou pol stopy. Pomalší pohyb nás v tomto prípade teda už nezaujímá.

Simulácie boli robené pre prechádzky s dĺžkou 3000 krokov. Pri týchto hodnotách sa najlepšie prejavili rozdiely medzi modelmi. Pri výrazne menšom počte krokov sme pri príbuzných modeloch nemuseli sledovať zmeny. Naopak, pri väčšom počte strácali grafy trajektórií prehľadnosť. Pomocou grafov sme sledovali vplyv modelov na celkový tvar trajektórie a na jednotlivé rozdelenia dĺžok krokov a uhlových výchýliek, aby sme mohli porovnať charakter modelov v prípade, že sa tvary trajektórií na prvý pohľad podobajú.

Koeficient $\tau(K - L_n)$ volíme tak, aby nadobúdala hodnotu 1, ak $L_n = L^*$. V tom prípade je krok priemerný, náhodnosť týmto koeficientom ovplyvňovať nechceme. Oba koeficienty ϵ^L a ϵ^ϕ sú nastavené tak, aby bol rozptyl šumu zhodný s reálnym rozptylom dĺžok krokov a uhlových výchýliek zistených v prvej kapitole.

3.3 Simulácie prechádzok

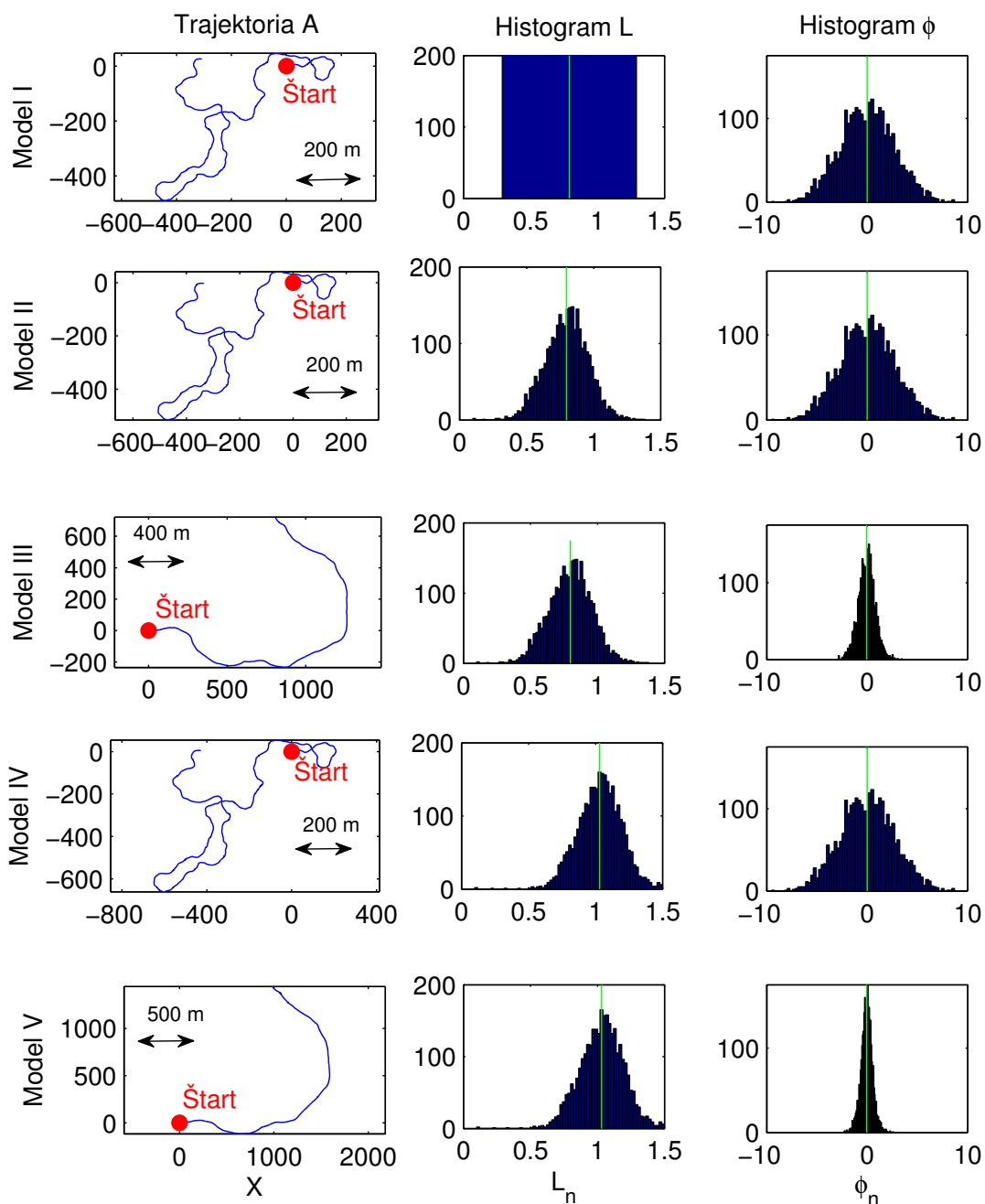
V nasledujúcej tabuľke sú parametre pre jednotlivé simulácie.

| Chodec / Parametre | Simulácia A | Simulácia B | Simulácia C | Simulácia D |
|--------------------|-------------|-------------|-------------|-------------|
| β^ϕ | -0,0098 | 0,7947 | -0,3201 | -0,0871 |
| γ^ϕ | 0,7697 | 0,8514 | 0,8371 | 0,8609 |
| ϵ^ϕ | 1,7270 | 1,8238 | 1,6666 | 1,6689 |
| ϵ^L | 0,0654 | 0,0629 | 0,0710 | 0,0532 |
| L^* | 0,79 | 0,79 | 0,79 | 0,79 |
| c^L | 0,085 | 0,0717 | 0,0679 | 0,0723 |
| τ | 0,44 | 0,44 | 0,44 | 0,44 |
| K | 1,5 | 1,5 | 1,5 | 1,5 |
| q | 0,02 | 0,02 | 0,02 | 0,02 |

Tabuľka 3: Tabuľka parametrov simulácií.

Pri opakovanom simulovaní jednotlivých prechádzok vychádzali v dôsledku iného generovania vektorov šumu rôzne tvary trajektórii. Charakter týchto trajektórii ostával ale rovnaký z pohľadu počtu cyklení a prejdenej dĺžky aj pri porovnaní jednotlivých modelov medzi sebou. Preto do práce zahrňame vhodné simulácie, kde sa dajú rozdiely najlepšie porovnať.

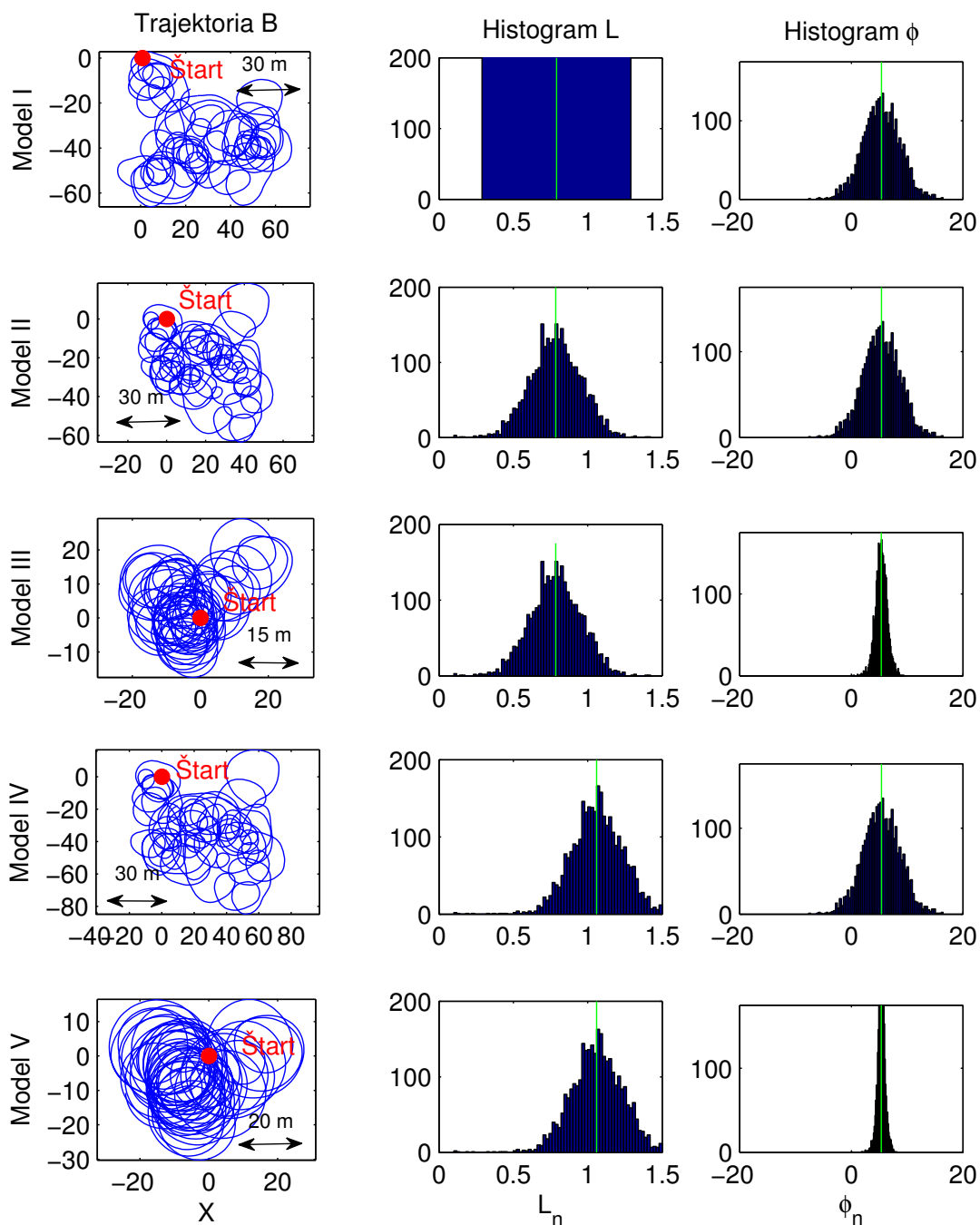
3.3.1 Simulácia A



Obr. 17: Simulácie pre 5 typov modelov. Znáznornené sú jednotlivé trajektórie a zodpovedajúce rozdelenia dĺžok krokov a uhlových výchylek.

Trajektória modelu I zodpovedá parametrami simulácie pohybu prvého účastníka experimentu. Pre jeho trasu bola príznačná nejednoznačná preferencia žiadnej zo strán, čo môžeme povedať aj o týchto simuláciach. V našom prípade majú trajektórie modelov I, II a IV rovnakú sadu uhlových výchyliek. O jediný rozdiel medzi trajektóriami sa stará rozdielna dĺžka kroku, čo je potvrdené aj histogramami. V prípade modelu II, kde sa dĺžka kroku nastavovala len podľa predchádzajúcej dĺžky kroku dospievame k záveru, že sa tento proces nepostaral o zlepšenie a uhladenie trajektórie. Je to dané aj procesom vracania sa k strednej hodnote, kde sa stredná hodnota dĺžky kroku tohto modelu rovná prakticky dĺžke priemerného kroku a teda kroku pri modeli I. V modeli IV, kde je veľkosť kroku ovplyvňovaná veľkosťou uhlovej výchylky, je zrejмый rozdiel v dĺžke trajektórie. Treba si všimnúť, že v niektorých úsekoch boli výchylky skoro nulové a práve tu nastáva najväčšie predĺženie trajektórie. Priemerná dĺžka kroku je nad 0,79 m. Zaujímavé tvary nadobúdajú trajektórie modelov III a V. V nich bola náhodnosť v uhlovej výchylke ovplyvňovaná dĺžkou kroku; navyše v modeli V platila aj opačná závislosť. Pri modeli III vidíme zjavné zlepšenie sa držania priameho smeru. Je to dané tým, že od začiatku chcel účastník nabrať rýchlosť a postupom času táto dokázala eliminovať náhodnosť natoľko, že sa v nasledujúcom pohybe prakticky nevychyľoval z priameho smeru, ako to je možné vidieť pri trajektóriach modelov I, II a IV. Pri modeli V sa podľa predpokladu ešte dokonca navýši dĺžka kroku oproti modelu IV, keďže tu platí aj vplyv dĺžky kroku uhlom. A teda ak je krok ešte väčší, šum je potláčaný o to viac a teda táto simulácia dodržiava veľmi dobrý smer. Všetky závery potvrdzujú histogramy, kde je jasne vidieť, ktorá trajektória mala vyšší rozptyl pri veľkosti uhlovej výchylky, a ktorá mala akú priemernú hodnotu dĺžky kroku.

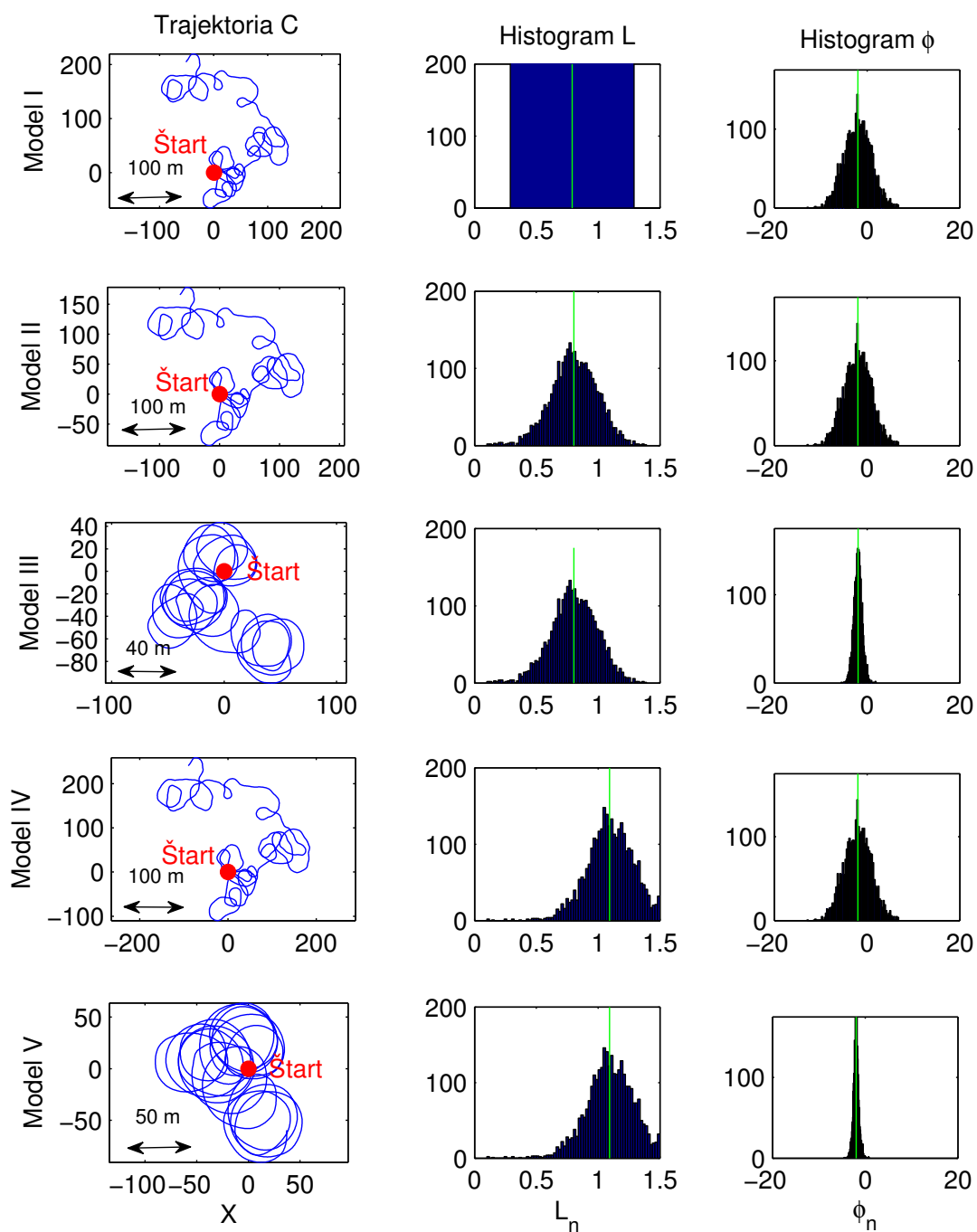
3.3.2 Simulácia B



Obr. 18: Simulácie pre 5 typov modelov. Znáznornené sú jednotlivé trajektórie a zodpovedajúce rozdelenia dĺžok krokov a uhlových výchylek.

V druhom prípade bola simulovaná preferencia chôdze v smere doprava. Rovnako ako druhý účastník experimentu. V modeloch vidíme rovnakú preferenciu pravej strany. Pre trajektórie modelov I, II a IV vidíme vplyv šumu na chôdzu. Cyklenie nenastáva na jednom mieste, účastník neustále mení smer. Model IV ale vykazuje len jemné predĺženie oproti I a II. Priemerný krok je v tomto prípade nad priemerom krokom 0,79m. Zaujímavejšia situácia vzniká pri modeloch III a IV, ktoré sa oveľa viac podobajú realite. V týchto prípadoch sa totiž podarilo eliminovať šum rovnako ako pri prvej trajektórii. Preto sa preferencia strany preukáže lepšie, pričom sa model V dokonca pohybuje na skoro rovnakej ploche ako model III. Môže to byť vysvetlené tým, že trajektória modelu III bola ovplyvňovaná náhodnosťou o čosi viac, a preto bola viac náchylná na vytváranie rovnejších úsekov, ktoré by celkovú zabranú plochu zväčšovali. Aj keď model V v simulácii A vykazoval zlepšenie oproti modelu III, v tomto prípade to neplatí. O správnosti týchto úvah nás presvedčia aj histogramy.

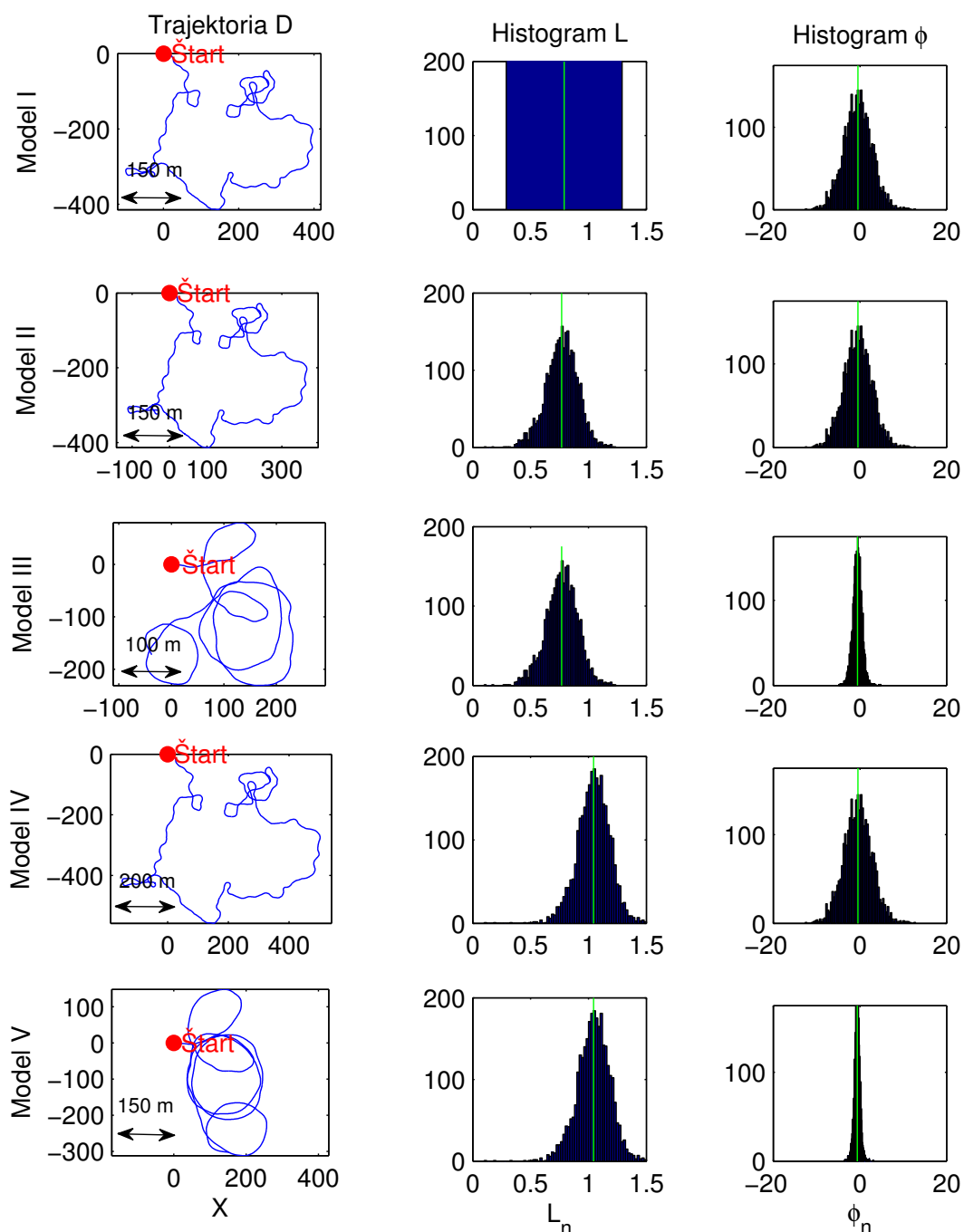
3.3.3 Simulácia C



Obr. 19: Simulácie pre 5 typov modelov. Znázornené sú jednotlivé trajektórie a zodpovedajúce rozdelenia dĺžok krokov a uhlových výchylek.

Pri reálnej trajektórii pohybu tretieho účastníka vidíme zo začiatku viac cyklení a náhlych uhlov smeru s následným vyrovnávaním smeru. Jeho prechádzka vyzerá ako kombinácia správania sa prvého a druhého účastníka. V našich modeloch bolo badať zjavné cyklenie do jedného smeru hneď na začiatku. Postupom času sa cyklenie vytratilo a vracalo sa náhodne počas chôdze, následne sa opäť trajektória vyrovnala. Rozdiely medzi modelmi I, II a IV nie sú na prvý pohľad viditeľné. V modeli IV sa len prejavila väčšia priemerná dĺžka kroku. Rozdelenie uhlových výchylek je pre všetky 3 modely podľa ich návrhov rovnaký. Zaujímavejší pohľad prinášajú trajektórie modelov III a V. Model III, sa podobne ako pri predchádzajúcej simulácii, rozprestiera na približne rovnakej ploche ako model V. Je to dané tým, že model III neeliminuje náhodnosť v uhle natoľko, aby sa prejavila len preferencia voči jednej strane na začiatku, či konci chôdze. Model V príliš realitu nevystihol a správa sa rovnako ako v predchádzajúcej kapitole. Zatiaľ pozorovanie vyzerá tak, že ak má chodec naozaj reálnu zrejmu preferenciu v smere, náhodnosť je v jeho prípade nevýrazná a držanie tohto smeru je spôsobené istými genetickými predispozíciami. Preto takéhoto chodca najlepšie vystihuje model V. Ak má však chodec nejasné držanie smeru a prejavuje sa pomerne veľký šum, najlepší pre simuláciu je model IV.

3.3.4 Simulácia D



Obr. 20: Simulácie pre 5 typov modelov. Znáznornené sú jednotlivé trajektórie a zodpovedajúce rozdelenia dĺžok krokov a uhlových výchylek.

Model sme nastavovali podľa prechádzky štvrtého chodca, ktorý sa správal podobne ako chodec tretí. Cyklenia však prichádzali až na konci prechádzky, pričom od začiatku nebolo schopné určiť systém prechádzky. V našom prípade sa modely I, II a IV správajú rovnako, ako sme boli zvyknutí. Model IV pokryl väčšiu plochu, keďže bola zväčšená dĺžka priemerného kroku. Modely III a V opäť dokázali eliminovať náhodnosť v pohybe a trajektórie sú rovné. Predpoklad vyslovený pri simulácii C sa potvrdil. V prechádzke sme nevideli žiaden systém a preto túto prechádzku najlepšie pripomínajú modely I, II a IV.

3.4 Závěry zo simulácií

- Postupne sme testovali na 4 rôznych nastaveniach parametrov simulácie pre 5 modelov. Tieto modely vykazovali žiadnu, jednostrannú, alebo úplnú vzájomnú závislosť funkcií odozvy pre dĺžku kroku a veľkosť uhlovej výchylky.
- Zistili sme, že modely IV a V vhodne simulovali pohyb, ak mali modelovať prechádzku so zjavnou preferenciou jednej strany. Modely II a III naopak preukazovali lepšie vlastnosti, ak sme žiadnu preferenciu nevedeli vyčítať.
- Modely IV a V odpovedali na zvýšenú rýchlosť elimináciou náhodnosti natoľko, že sa skoro vôbec neprejavovala a preto boli trasy najrovnejšie.
- Zvoliť jediný model, ktorý by bol vhodný, však nie je na základe pozorovaní možné. Niektoré lepšie reagovali na systém v pohybe, iné boli vhodné, ak mal chodec prechádzku zjavne ovplyvnenú náhodnosťou.

Záver

V práci sme sa postupne zaoberali skúmaním dát a následne navrhovaním konkrétnych modelov ktoré opisujú správanie sa človeka pri chôdzi bez možnosti videnia. Celý proces analýzy dát zabral najväčšiu časť celého zostavovania práce. Bolo dôležité správne ohodnotiť a získať čo najviac informácií z poskytnutých dát.

V úvodnej kapitole sme aproximovali trajektórie reálneho pohybu chodcov, aby sme zistili charakter uhlových výchyliek pre rôzne dĺžky krokov. Normalita výchyliek nám dala odpoveď na otázku v akom rozmedzí sa budú výchylky pohybovať a akú formu bude mať náhodná zložka modelu. Následne sme projektovali závislosť dvoch po sebe nasledujúcich uhlových výchyliek pre zistenie možnej formy funkcie odozvy pre ich nastavovanie počas simulácií pohybu. Pomocou regresnej priamky a opísanej metódy priemerovaní sme zistili, že lineárny model bude pre naše účely dostačujúci. V prípade dĺžky krokov sme objasnili pojem modelu vracania sa k strednej hodnote, kde sa človek prirodzene pri chôdzi vracia k optimálnej priemernej dĺžke kroku. Tento model nebol po upravení nič iné ako opäť lineárny.

Po určení funkcionálnych foriem oboch modelov sme pristúpili k odhadovaniu jednotlivých parametrov modelov. Pre tento účel sme nevychádzali z aproximovaných trajektórií, ale z trajektórií reálnych. Keďže sme funkcie odozvy plánovali ako lineárne, najlepšou metódou na zisťovanie parametrov bola opäť lineárna regresia. Po odhadnutí parametrov pre trajektórie každého zo štyroch uchádzačov experimentu sme pristúpili k porovnávaniu namodelovaných a reálnych uhlových výchyliek a dĺžiek krokov pomocou rezíduí. Rezíduá znázorňovali v konkrétnych modeloch náhodnú zložku. Odhadnutie variancií oboch rezíduí nám pomohlo dať odpoveď na otázku, ako veľmi má byť pri modelovaní rozptýlená náhodná zložka modelu. Všetky vypočítané parametre vstupovali následne v ďalšej kapitole do navrhnutých modelov.

Následne sme si stanovili pravidlá, podľa ktorých sa mali modely správať. Ďalej sme eliminovali také faktory ovplyvňujúce chôdzu, ktoré sme nevedeli matematicky vyhodnotiť. Po zhodnotení faktov sme boli schopní navrhnúť 5 rôznych modelov s mierne rozličným správaním. Prvý z nich zachovával dĺžku kroku konštantnú a uhlová výchylka ňou nebola ovplyvnená. Druhý z modelov mal už dĺžku kroku variabilnú. V treťom modeli sme pristúpili k jednostrannej intrakcii medzi oboma veličinami. Dĺžka

kroku vplývala na uhlovú výchylku. Štvrtý model mal túto interakciu obmenenú. Posledný model kombinoval predchádzajúce dva, teda obe veličiny sa ovplyvňovali navzájom.

Simulovaním štyroch prechádzok piatimi rôznymi modelmi sme prišli na zaujímavé výsledky. Tri z navrhnutých modelov reagovali lepšie, ak pri reálnej trajektórii nebolo možné badať preferenciu v smere pohybu a prejavovala sa najmä nesystematická zložka pohybu. Dva zložitejšie modely naopak pracovali lepšie, ak sme pri reálnych trajektóriách sledovali v pohybe účastníkov systém v podobe preferencie jednej zo strán. Pri zvýšení dĺžky kroku vykazovali priamejšie trajektórie modely zahrňajúce vplyv dĺžky kroku na uhlovú výchylku. Vtedy bola nesystematická, náhodná zložka eliminovaná vo veľkej miere a teda nedochádzalo k cykleniu, ak nemal chodec preferenciu chôdze do jednej zo strán.

V práci sme boli schopní navrhnúť sériu modelov dostatočne dobre popisujúcu skutočnosť. Modely sa samozrejme dajú ďalej modifikovať, pričom by sme do nich mohli pridávať ďalšie faktory, ako členitosť, respektíve náročnosť pohybu po povrchu, poveternostné podmienky pri pohybe, genetické predispozície človeka. Bolo by zaujímavé sledovať aj pohyb človeka a následné úpravy pohybu pri čiastočnej informovanosti o priebehu chôdze, napríklad občasným odhlaľovaním začiatku chôdze, alebo občasnou informáciou o celkovej výchylke pri chôdzi.

Tieto parametre sú už ale predmetom zložitejšieho skúmania. V našej práci išlo o návrh čo najjednoduchšieho a najzrozumiteľnejšieho modelu, čo sa napokon podarilo.

Zoznam použitej literatúry

- [1] J.E.A. Bertram and A. Ruina. Multiple walking speed–frequency relations are predicted by constrained optimization. *Journal of theoretical Biology*, 209(4):445–453, 2001.
- [2] M. Bicak. *Agent-Based Modelling of Decentralized Ant Behaviour using High Performance Computing*. PhD thesis, University of Sheffield, 2011.
- [3] P. Bovet and S. Benhamou. Spatial analysis of animals’ movements using a correlated random walk model*. *Journal of theoretical biology*, 131(4):419–433, 1988.
- [4] E.A. Codling, M.J. Plank, and S. Benhamou. Random walk models in biology. *Journal of the Royal Society Interface*, 5(25):813–834, 2008.
- [5] P.A. Dudchenko. *Why people get lost: the psychology and neuroscience of spatial cognition*. Oxford Univ Pr, 2010.
- [6] J. Dzúrik. Prečo chodí človek v kruhu. Bakalárska práca, FMFI UK, Bratislava 2011.
- [7] PM Kareiva and N. Shigesada. Analyzing insect movement as a correlated random walk. *Oecologia*, 56(2):234–238, 1983.
- [8] M.P. Murray, A.B. Drought, and R.C. Kory. Walking patterns of normal men. *The Journal of Bone and Joint Surgery (American)*, 46(2):335–360, 1964.
- [9] J.L. Souman, I. Frissen, M.N. Sreenivasa, and M.O. Ernst. Walking straight into circles. *Current Biology*, 19(18):1538–1542, 2009.