UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY

Geometrické aplikácie kvaterniónov

BAKALÁRSKA PRÁCA

2012 Ivan Justus

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY

Geometrické aplikácie kvaterniónov

BAKALÁRSKA PRÁCA

Študijný program:	Ekonomická a finančná matematika
Študijný odbor:	9.1.9. Aplikovaná matematika
Školiace pracovisko:	Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky
Vedúci práce:	RNDr. Dušan Krajčovič, CSc.

Bratislava 2012 **Ivan Justus**

Univerzita Komenského v Bratislave
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

PRIHLÁŠKA NA ZÁVEREČNÚ PRÁCU

Meno a priezvisko študenta: Ivan Justus
Študijný program: ekonomická a finančná matematika (Jednoodborové štúdium, bakalársky I. st., denná forma)
Študijný odbor: 9.1.9. aplikovaná matematika
Typ záverečnej práce: bakalárska
Jazyk záverečnej práce: slovenský

Názov: Geometrické aplikácie kvaterniónov

Cieľ: Nájsť vzťah medzi lineárnymi zobrazeniami a kvaterniónami.

Vedúci: RNDr. Dušan Krajčovič, CSc.
Katedra: FMFI.KAMŠ - Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky

Dátum schválenia: 27.10.2011

podpis študenta

Abstrakt

JUSTUS, Ivan: Geometrické aplikácie kvaterniónov [Bakalárska práca], Univerzita Komenského v Bratislave, Fakulta matematiky, fyziky a informatiky, Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky; školiteľ: Dušan Krajčovič, CSc., Bratislava, 2012, 43 s.

V našej práci sa zaoberáme vzťahom medzi rotáciou v $\mathcal{R}^3$ a kvaterniónmi. Nahliadneme na idey skryté za vzťahmi pre násobenie bázových vektorov kvaterniónov. Potom, ako ukážeme, že za istých okolností možno na násobenie kvaterniónov nahliadať ako na rotáciu vektorov, popíšeme spôsob, ako vyjadriť rotáciu v $\mathcal{R}^3$ použitím kvaterniónov, a následne analyzujeme vlastnosti takéhoto vyjadrenia. Ďalej z tohto vyjadrenia odvodíme rotačnú maticu a porovnáme ju s rotačnou maticou získanou použitím iba operáciami s vektormi. Ukážeme aj numericky stabilný algoritmus popisujúci, ako z rotačnej matice získať kvaternión určujúci túto rotáciu.

Kľúčové slová: Kvaternión, Rotácia pomocou kvaterniónov, Rotácia v $\mathcal{R}^3$, Rotačná matica, Ortogonálne násobenie

Abstract

JUSTUS, Ivan: Geometrical applications of quaternions [Bachelor Thesis], Comenius University in Bratislava, Faculty of Mathematics, Physics and Informatics, Department of Applied Mathematics and Statistics; Supervisor: Mgr. RNDr. Dušan Krajčovič, CSc., Bratislava, 2012, 43 p.

In our work we discuss the relationship between rotation in $\mathcal{R}^3$ and quaternions. We take a look on ideas behind the rules for multiplication of quaternion basis vectors. After we show, that under some conditions quaternion multiplication can be thought as vector rotation, we describe a way, how to handle the rotation in $\mathcal{R}^3$ using quaternion multiplication, and consequently we analyze the properties of such an expression of rotation. Then we derive a rotation matrix from this expression and compare it to rotation matrix obtained by classical vector calculus. We also show a numerically stable algorithm, how to obtain a quaternion associated with this rotation from the rotation matrix.

Keywords: Quaternion, Quaternion rotation, Rotation in $\mathcal{R}^3$, Rotation matrix, Orthogonal multiplication

Obsah

Úvod

Pre opis pohybu tuhého telesa okolo pevného bodu bolo v minulosti predložených niekoľko kinematických parametrov, ako napríklad parametre Rodriguesa a Hamiltona, parametre Cayleyho - Kleina, Eulerove - Krylovove uhly a smerové kosínusy. V tých časoch sa vedci snažili v prvom rade o získanie vhodnej, jednoduchej formy rovníc, ktoré by opisovali tento pohyb. Nedávno sa situácia trochu zmenila, pretože sa začali používať počítače a všetky tieto vedomosti nadobudli praktický význam pri opisovaní rôznych uhlov mechaniky. Súčasne sa začali hľadať nové prostriedky na vyjadrenie kinetických rovníc a súradníc, pretože opísané spôsoby boli spojené s trigonometrickými operáciami, ktoré značne znižujú efektívnosť využitia počítačov a numerickú stabilitu výpočtov. A práve použitie kvaterniónov umožňuje vytvoriť veľmi elegantný a názorný formalizmus umožňúci použiť Rodriguesove a Hamiltonove parametre. Tento formalizmus je založený na reprezentácii ortogonálnej transformácie v tvare násobenia kvaterniónov.

To je aj obsahom tejto práce, v ktorej sme sa zamerali na dve úlohy. Využijúc teoretické vedomosti o kvaterniónoch sme prakticky popísali algoritmus, ktorý umožňuje vyjadriť ortogonálnu transformáciu na základe zadania kvaterniónu, a takisto sme popísali algoritmus, ktorý vedie od ortogonálnej transformácie ku kvaterniónu, ktorý ju vyjadruje. Naviac sme vytvorili program v jazyku Matlab, ktorý na základe operácii s kvaterniónmi umožňuje otáčanie ľubovoľného telesa v trojrozmernom priestore.

Práca je členená na tri kapitoly. Prvá kapitola okrem toho, že prináša základné definície a pojmy o kvaterniónoch, uvádza aj Hurwitzovu vetu, ktorá tvrdí, že rozšírenie algebry komplexných čísel je možné iba v priestoroch dimenzie 4 a 8. Druhá kapitola je venovaná vzťahom medzi ortogonálnymi transformáciami a kvaterniónmi. Tretia kapitola obsahuje konkrétne algoritmy, ktoré popisujú prechod od týchto transformácii ku kvaterniónom a späť. Okrem toho je v prílohe uvedený zdrojový kód uvedeného programu a ukážka jeho použitia.

1 Kvaternióny

V tejto kapitole definujeme kvaternióny, uvedieme historické pozadie ich objavu a načrtneme idey, ktoré sa skrývajú za ich vzťahmi. Popíšeme aj operácie na množine kvaterniónov.

1.1 Objav

Kvaternióny boli prvým objaveným príkladom nekomutatívneho poľa, čiže telesa. Objavil ich v roku 1843 sir Rowan Hamilton. Pokúšal sa nájsť spôsob, ako definovať násobenie v trojrozmernom vektorovom priestore tak, aby ostali zachované vlastnosti, na ktoré sme zvyknutí pri bežnom násobení. Po niekoľkoročnom rozmýšlaní, počas ktorého sa ho jeho synovia ráno pri raňajkách pýtavali, či už problém vyriešil, ho cestou do Kráľovskej akadémie zrazu napadlo riešenie jeho problému. Všetky problémy zmiznú, keď upustí od komutatívnosti násobenia a použije nie trojrozmerný, ale štvorrozmerný priestor. Toto náhle zistenie naňho natoľko zapôsobilo, že vzťahy pre ich násobenie vyryl do mosta, kde ho to napadlo.

K týmto uvahám ho viedla snaha o rozšírenie roviny komplexných čísel v nasledovnom zmysle. Komplexné číslo $z \in \mathcal{C}, z = a + b\mathrm{i}$ možno chápať ako $(a, b)^T$, čiže ako vektor v $\mathcal{R}^2$ v báze $(1, \mathrm{i})$. Násobenie komplexných čísel je potom operácia (zobrazenie) $F : \mathcal{R}^2 \times \mathcal{R}^2 \to \mathcal{R}^2$, a násobenie komplexným číslom $e^{\mathrm{i}\theta}$ s jednotkovou normou je rotácia $\rho_\theta(z)$ vektorov v rovine

$$\rho_\theta(z) = z' = e^{\theta\mathrm{i}} z \tag{1}$$

Hamilton sa pokúšal nájsť podobnú operáciu pre rotáciu v trojrozmernom priestore.

1.2 Odvodenie vzťahov

Skúsme nájsť podobnú operáciu F , ktorá by bola analógiou násobenia v $\mathcal{R}^n$. Komplexné násobenie

$$\odot : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \to \mathcal{C}, \tag{2}$$

ktoré môžme chápať ako operáciu F v $\mathcal{R}^2$, je definované vzťahom

$$\boldsymbol{z_1} \odot \boldsymbol{z_2} = \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 a_2 - b_1 b_2 \\ a_1 b_2 + a_2 b_1 \end{pmatrix} , \begin{matrix} a_1 + b_1 \mathrm{i} = \boldsymbol{z_1} \in \mathcal{C} \sim \mathcal{R}^2 \\ a_2 + b_2 \mathrm{i} = \boldsymbol{z_2} \in \mathcal{C} \sim \mathcal{R}^2 \end{matrix} \tag{3}$$

Ide o predĺženie násobenia reálnych čísel, lebo operáciu $\odot$ sme vyjadrili pomocou násobenia (a sčítania) reálnych čísel. Dá sa dokázať, že je to jediný spôsob, ako definovať násobenie v $\mathcal{R}^2$ tak, aby $(\mathcal{R}^2, \odot)$ bola grupa. Motivovaní snahou predĺžiť takto zavedené násobenie komplexných čísel

$$\mathcal{C} \times \mathcal{C} \to \mathcal{C} \sim \mathcal{R}^2 \times \mathcal{R}^2 \to \mathcal{R}^2 \tag{4}$$

skúsme nájsť operáciu F

$$F : \mathcal{R}^n \times \mathcal{R}^n \to \mathcal{R}^n \tag{5}$$

pre $n > 2$ tak, aby sme zachovali čo najviac z vlastností bežného násobenia.

1.2.1 Ortogonálne násobenie

Aké vlastnosti by F mala spĺňať ? Hoci názory sa líšia, väčšina sa zhoduje v tom, že by mala byť bilineárna, t.j. lineárna v oboch argumentoch.

$$F(\alpha \boldsymbol{x_1} + \beta \boldsymbol{x_2}, \boldsymbol{y}) = \alpha F(\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{y}) + \beta F(\boldsymbol{x_2}, \boldsymbol{y}) \tag{6}$$

$$F(\boldsymbol{x}, \alpha \boldsymbol{y_1} + \beta \boldsymbol{y_2}) = \alpha F(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y_1}) + \beta F(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y_2}), \tag{7}$$

kde $\alpha, \beta \in \mathcal{R}, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x_2}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{y_1}, \boldsymbol{y_2} \in \mathcal{R}^n$. To zodpovedá distributívnosti a homogenite. Ďalej, namiesto asociatívnosti (s čím sa ťažko technicky narába) vyžadujeme, aby F bola normovaná, t.j. aby platilo

$$||F(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})|| = ||\boldsymbol{x}||||\boldsymbol{y}|| \tag{8}$$

Výhodou tejto vlastnosti je, že prepája algebru s geometriou - dĺžka súčinu dvoch vektorov bude súčin dĺžok týchto vektorov. Zobrazenie s týmito vlastnosťami budeme volať ortogonálne násobenie.

Definícia 1.1. *Normované bilineárne zobrazenie $F : \mathcal{R}^n \times \mathcal{R}^n \to \mathcal{R}^n$ sa nazýva ortogonálne násobenie.*

Vlastnosti, ktoré sme od F vyžadovali, zdá sa nemajú súvis s dimenziou priestoru. Mohli by sme očakávať, že ortogonálne násobenie bude definované na $\mathcal{R}^n$ pre všetky n. Avšak Hurwitz a Radon v roku 1898 ukázali nasledovnú vec:

Veta 1.2. *Ortogonálne násobenie $F : \mathcal{R}^n \times \mathcal{R}^n \to \mathcal{R}^n$ existuje iba pre $n = 1, 2, 4, 8$.*

Dôkaz tohto tvrdenia je mimo rozsah tejto práce. Dokážeme iba, že n musí byť párne.

Dalo by sa namietať, že predsa v každej dimenzii existuje akési násobenie - skalárny a vektorový súčin. Skalárny súčin však nie je "pravé" násobenie lebo jeho výsledkom je číslo, nie vektor (a existuje veľa vektorov $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}, \boldsymbol{y} \neq \boldsymbol{0}$ takých, že $\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{y} = \boldsymbol{0}$). Vektorový súčin tiež nie je vhodný, lebo je antikomutatívny - nemôžeme napríklad formovať druhé mocniny ($\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$).

1.2.2 Ortonormálne bázy v $\mathcal{R}^n$

Zoberme vektory

$$\boldsymbol{e_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{e_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \cdots \quad \boldsymbol{e_n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

tvoriace ortonormálnu bázu a definujeme vektory

$$\boldsymbol{u_i^\alpha} = F(\boldsymbol{e_\alpha}, \boldsymbol{e_i}) \in \mathcal{R}^n \quad , i, \alpha = 1, 2, \cdots, n \tag{9}$$

Grécke a latinské písmená používame na rozlíšenie medzi horným a dolným indexom (F nie je symetrická operácia).

Veta 1.3. *Pre pevné α je $\{\boldsymbol{u_i^\alpha}\}_{i=1}^n$ ortonormálna báza.*

Ortonormálnu bázu priestoru $\mathcal{R}^n$ tvorí n vektorov jednotkovej dĺžky, ktoré sú na seba navzájom kolmé. Potrebujeme teda dokázať, že $\boldsymbol{u_i^\alpha}$ majú dĺžku jedna. To nie je zložité:

$$||\boldsymbol{u_i^\alpha}|| = ||F(\boldsymbol{e_\alpha}, \boldsymbol{e_i})|| = ||\boldsymbol{e_\alpha}||||\boldsymbol{e_i}|| = 1 \cdot 1 = 1 \tag{10}$$

Ešte treba ukázať, že sú na seba aj navzájom kolmé. Pre ľubovoľné $i, k, i \neq k$ platí

$$||\boldsymbol{u_i^\alpha} + \boldsymbol{u_k^\alpha}||^2 = ||\boldsymbol{u_i^\alpha}||^2 + ||u_{\boldsymbol{k}}^{\boldsymbol{\alpha}}||^2 + 2(\boldsymbol{u_i^\alpha})^T\boldsymbol{u_k^\alpha} = 2 + 2(\boldsymbol{u_i^\alpha})^T\boldsymbol{u_k^\alpha}, \tag{11}$$

a zároveň

$$\begin{aligned} ||\boldsymbol{u_i^\alpha} + \boldsymbol{u_k^\alpha}||^2 &= ||F(\boldsymbol{e_\alpha}, \boldsymbol{e_i}) + F(\boldsymbol{e_\alpha}, \boldsymbol{e_k})||^2 = ||F(\boldsymbol{e_\alpha}, \boldsymbol{e_i} + \boldsymbol{e_k})||^2 = \\ &= ||\boldsymbol{e_\alpha}||^2||\boldsymbol{e_i} + \boldsymbol{e_k}||^2 = 1 \cdot \sqrt{2}^2 = 2 \end{aligned} \tag{12}$$

Z (11) , (12) vyplýva

$$(\boldsymbol{u_i^\alpha})^T \boldsymbol{u_k^\alpha} = 0 \tag{13}$$

Dokázali sme, že $\boldsymbol{u_i^\alpha}$ sú jednotkovej dĺžky a navzájom ortogonálne, tvoria teda ortonormálnu bázu. Podobne by sme dokázali, že pre pevné i je $\{\boldsymbol{u_i^\alpha}\}_{\alpha=1}^n$ ortonormálna báza. Zafixujme teraz α, β a zoberme dve ortonormálne bázy $\{\boldsymbol{u_i^\alpha}\}_{i=1}^n$, $\{\boldsymbol{u_i^\beta}\}_{i=1}^n$ a matice, ktorých riadky tvoria tieto bázové vektory označme U^α, U^β . Z lineárnej algebry vieme, že matica prechodu z jednej ortonormálnej bázy do druhej je ortogonálna matica. Označme ju $P^{\beta\alpha}$. Máme

$$U^\beta = P^{\beta\alpha} U^\alpha, \tag{14}$$

čo po zložkách dáva

$$\boldsymbol{u_i^\beta} = \sum_{k=1}^n p_{ik}^{\beta\alpha} \boldsymbol{u_k^\alpha} \tag{15}$$

Veta 1.4. *Pre $\alpha \neq \beta$ je $P^{\beta\alpha}$ kososymetrická matica, teda*

$$(P^{\beta\alpha})^T = -P^{\beta\alpha} \tag{16}$$

Aby sme to ukázali, zoberme $i \neq k$ a spočítajme

$$||F(\boldsymbol{e_\alpha} + \boldsymbol{e_\beta}, \boldsymbol{e_i} + \boldsymbol{e_k})||^2 = ||\boldsymbol{e_\alpha} + \boldsymbol{e_\beta}||^2 ||\boldsymbol{e_i} + \boldsymbol{e_k}||^2 = \sqrt{2}^2 \cdot \sqrt{2}^2 = 4 \tag{17}$$

To sa dá zrátať aj týmto spôsobom:

$$\begin{aligned} ||F(\boldsymbol{e_\alpha} + \boldsymbol{e_\beta}, \boldsymbol{e_i} + \boldsymbol{e_k})||^2 =& ||F(\boldsymbol{e_\alpha}, \boldsymbol{e_i}) + F(\boldsymbol{e_\alpha}, \boldsymbol{e_k}) + F(\boldsymbol{e_\beta}, \boldsymbol{e_i}) + F(\boldsymbol{e_\beta}, \boldsymbol{e_k})||^2 = \\ =& ||\boldsymbol{u_i^\alpha} + \boldsymbol{u_i^\beta} + \boldsymbol{u_k^\alpha} + \boldsymbol{u_k^\beta}||^2 = \\ =& ||\boldsymbol{u_i^\alpha}||^2 + ||\boldsymbol{u_i^\beta}||^2 + ||\boldsymbol{u_k^\alpha}||^2 + ||\boldsymbol{u_k^\beta}||^2 + 2(\boldsymbol{u_k^\alpha})^T \boldsymbol{u_i^\beta} + 2(\boldsymbol{u_i^\alpha})^T \boldsymbol{u_k^\beta} + \\ & + 2(\boldsymbol{u_k^\alpha})^T \boldsymbol{u_i^\alpha} + 2(\boldsymbol{u_k^\alpha})^T \boldsymbol{u_k^\beta} + 2(\boldsymbol{u_i^\alpha})^T \boldsymbol{u_i^\beta} + 2(\boldsymbol{u_i^\beta})^T \boldsymbol{u_k^\beta} = \\ =& 1 + 1 + 1 + 1 + 2\left[(\boldsymbol{u_k^\alpha})^T \boldsymbol{u_i^\beta} + (\boldsymbol{u_i^\alpha})^T \boldsymbol{u_k^\beta}\right] + \\ & + 2\left[(\boldsymbol{u_k^\alpha})^T \boldsymbol{u_i^\alpha} + (\boldsymbol{u_k^\alpha})^T \boldsymbol{u_k^\beta} + (\boldsymbol{u_i^\alpha})^T \boldsymbol{u_i^\beta} + (\boldsymbol{u_i^\beta})^T \boldsymbol{u_k^\beta}\right] = \\ =& 4 + 2\left[(\boldsymbol{u_k^\alpha})^T \boldsymbol{u_i^\beta} + (\boldsymbol{u_i^\alpha})^T \boldsymbol{u_k^\beta}\right], \end{aligned} \tag{18}$$

pričom posledná rovnosť vyplýva z (13). Dostali sme

$$(\boldsymbol{u_i^\alpha})^T\boldsymbol{u_k^\beta} + (\boldsymbol{u_k^\alpha})^T\boldsymbol{u_i^\beta} = 0 \quad ,\alpha \neq \beta, i \neq k \tag{19}$$

Do tohto vzťahu dosadíme (15):

$$(\boldsymbol{u_i^\alpha})^T\left(\sum_{l=1}^{n} p_{kl}^{\beta\alpha}\boldsymbol{u_l^\alpha}\right) + (\boldsymbol{u_k^\alpha})^T\left(\sum_{l=1}^{n} p_{il}^{\beta\alpha}\boldsymbol{u_l^\alpha}\right) = 0 \tag{20}$$

a úpravou

$$p_{ki}^{\beta\alpha}(\boldsymbol{u_i^\alpha})^T\boldsymbol{u_i^\alpha} + \left(\sum_{l\neq i} p_{kl}^{\beta\alpha}(\boldsymbol{u_i^\alpha})^T\boldsymbol{u_l^\alpha}\right) + p_{ik}^{\beta\alpha}(\boldsymbol{u_k^\alpha})^T\boldsymbol{u_k^\alpha} + \left(\sum_{l\neq k}^{n} p_{il}^{\beta\alpha}(\boldsymbol{u_k^\alpha})^T\boldsymbol{u_l^\alpha}\right) = 0 \tag{21}$$

$$p_{ki}^{\beta\alpha}||\boldsymbol{u_i^\alpha}||^2 + \left(\sum_{l\neq i} p_{kl}^{\beta\alpha}\cdot 0\right) + p_{ik}^{\beta\alpha}||\boldsymbol{u_k^\alpha}||^2 + \left(\sum_{l\neq k}^{n} p_{il}^{\beta\alpha}\cdot 0\right) = 0 \tag{22}$$

$$p_{ki}^{\beta\alpha} + p_{ik}^{\beta\alpha} = 0 \tag{23}$$

získame

$$p_{ki}^{\beta\alpha} = -p_{ik}^{\beta\alpha}, \tag{24}$$

čo v maticovom zápise dáva

$$(P^{\beta\alpha})^T = -P^{\beta\alpha}, \tag{25}$$

čo bolo treba dokázať. Ak poslednú rovnosť prenásobíme $-P^{\beta\alpha}$, vzhľadom k tomu, že je to ortogonálna matica, máme

$$(P^{\beta\alpha})^2 = -I \tag{26}$$

1.2.3 Komplexné štruktúry

$P^{\beta\alpha}$ je teda komplexná štruktúra na $\mathcal{R}^n$. Vo všeobecnosti pod komplexnou štruktúrou rozumieme lineárne zobrazenie $J : \mathcal{R}^n \to \mathcal{R}^n$ reprezentované ortogonálnou maticou takou, že $J^2 = -I$. Komplexná štruktúra zachováva skalárny súčin

$$\boldsymbol{v}_1^T\boldsymbol{v}_2 = (J(\boldsymbol{v}_1))^T J(\boldsymbol{v}_2) \quad ,\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \in \mathcal{R}^n \tag{27}$$

aj dĺžku vektorov

$$||\boldsymbol{v}_1|| = ||J(\boldsymbol{v}_1)|| \tag{28}$$

Okrem formálnej podobnosti s imaginárnou jednotkou $\mathrm{i}^2 = -1$ možno J vnímať ako rotáciu vektorov v $\mathcal{R}^n$ o uhol $\frac{\pi}{2}$. To nás vedie k overovaniu nasledujúceho tvrdenia.

Veta 1.5. *Vektory* $\boldsymbol{v}_1$ *a* $J(\boldsymbol{v}_1)$, $\boldsymbol{v}_1 \neq \mathbf{0}$ *sú na seba kolmé a majú rovnakú dĺžku.*

Toto vidno, lebo ich skalárny súčin

$$\boldsymbol{v}_1^T J(\boldsymbol{v}_1) = (J(\boldsymbol{v}_1))^T J(J(\boldsymbol{v}_1)) = (J(\boldsymbol{v}_1))^T(-\boldsymbol{v}_1) = -\boldsymbol{v}_1^T J(\boldsymbol{v}_1) \tag{29}$$

sa musí rovnať nule. Keďže $||J(\boldsymbol{v}_1)|| = ||\boldsymbol{v}_1||$, môžme rotovať $\boldsymbol{v}_1$ použitím bázy $\{\boldsymbol{v}_1, J(\boldsymbol{v}_1)\}$ takto :

$$R_\theta(\boldsymbol{v}_1) = \boldsymbol{v}_1 \cos\theta + J(\boldsymbol{v}_1)\sin\theta \quad ,\theta \in \mathcal{R} \tag{30}$$

Takže ak máme na $\mathcal{R}^n$ komplexnú štruktúru J , môžme na ňom definovať násobenie vektorov komplexným číslom takto

$$z\boldsymbol{v}_1 = a\boldsymbol{v}_1 + bJ(\boldsymbol{v}_1) \quad ,a + bi = z \in \mathcal{C} \tag{31}$$

Máme teda rovinu, označme ju σ_1, generovanú $\boldsymbol{v_1}$, $J(\boldsymbol{v_1})$. Núka sa otázka, či sa celé $\mathcal{R}^n$ dá rozložiť na navzájom kolmé roviny σ_1 , σ_2 , $\cdots$ Ukazuje sa, že je to možné. Ak zobiereme $\boldsymbol{v_2}$ kolmý na σ_1 , zistíme, že $J(\boldsymbol{v_2})$ je kolmý na $\boldsymbol{v_1}$ aj na $J(\boldsymbol{v_1})$:

$$(J(\boldsymbol{v_2}))^T\boldsymbol{v_1} = (J(J(\boldsymbol{v_2})))^T J(\boldsymbol{v_1}) = -(\boldsymbol{v_2})^T J(\boldsymbol{v_1}) = 0 \tag{32}$$

$$(J(\boldsymbol{v_2}))^T J(\boldsymbol{v_1}) = (J(J(\boldsymbol{v_2})))^T J(J(\boldsymbol{v_1})) = (-\boldsymbol{v_2})^T(-\boldsymbol{v_1}) = 0 \tag{33}$$

Rovinu generovanú $\boldsymbol{v_2}$, $J(\boldsymbol{v_2})$, ktorá je kolmá na σ_1 , označíme σ_2. Ak budeme takto postupovať ďalej, rozložíme nakoniec $\mathcal{R}^n$ na

$$\mathcal{R}^n = \sigma_1 + \sigma_2 + \cdots + \sigma_m, \tag{34}$$

pričom J je v kažej rovine otočenie o $\frac{\pi}{2}$. Máme $n = 2m$, takže $\mathcal{R}^n$ bude priestor párnej dimenzie.

Zatiaľ sme zistili , že $J^\tau = P^{\tau\alpha}$, $\tau = 1, 2, \cdots, n-1$ sú analógiou imaginárnej jednotky v $\mathcal{R}^n$, lebo ich druhá mocnina je rovná $-I$. Oproti $\mathcal{C}$ ich tu však máme viac ako jednu. O tom, aký je medzi nimi vzťah, hovorí nasledujúce tvrdenie.

Veta 1.6. J^τ , $\tau = 1, 2$, $\cdots$, $n-1$ *sú navzájom antikomutatívne lineárne zobrazenia na* $\mathcal{R}^n$.

Dokážme to. Do (19) dosadíme (15), ale tentoraz zameníme iné členy.

$$(\boldsymbol{u_i^\alpha})^T \left(\sum_{l=1}^{n} p_{kl}^{\beta\alpha} \boldsymbol{u_l^\alpha} \right) + \left(\sum_{l=1}^{n} p_{kl}^{\alpha\beta} \boldsymbol{u_l^\beta} \right)^T \boldsymbol{u_i^\beta} = 0 \tag{35}$$

Opäť použitím (13) zistíme, že

$$p_{ki}^{\beta\alpha} + p_{ki}^{\alpha\beta} = 0, \tag{36}$$

čo pre matice znamená

$$P^{\beta\alpha} = -P^{\alpha\beta} \tag{37}$$

Zafixujeme α, β, γ a znovu použijeme zmenu bázy, ale rozdielnymi spôsobmi.

$$\boldsymbol{u_i^\gamma} = \sum_{j=1}^{n} p_{ij}^{\gamma\beta} \boldsymbol{u_j^\beta} \tag{38}$$

$$\boldsymbol{u_i^\gamma} = \sum_{l=1}^{n} p_{il}^{\gamma\alpha} \boldsymbol{u_l^\alpha} = \sum_{l=1}^{n} p_{il}^{\gamma\alpha} \left(\sum_{j=1}^{n} p_{lj}^{\alpha\beta} \boldsymbol{u_j^\beta} \right) = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{l=1}^{n} p_{il}^{\gamma\alpha} p_{lj}^{\alpha\beta} \right) \boldsymbol{u_j^\beta} \tag{39}$$

Máme

$$p_{ij}^{\gamma\beta} = \sum_{l=1}^{n} p_{il}^{\gamma\alpha} p_{lj}^{\alpha\beta} \tag{40}$$

alebo

$$P^{\gamma\beta} = P^{\gamma\alpha} P^{\alpha\beta} \tag{41}$$

Z toho pomocou (37) získame

$$-P^{\gamma\beta} = P^{\gamma\alpha} P^{\beta\alpha}, \tag{42}$$

alebo iným postupom použitím (25) a (37)

$$(P^{\gamma\beta})^T = (P^{\gamma\alpha} P^{\alpha\beta})^T \tag{43}$$

$$-P^{\gamma\beta} = (-P^{\alpha\beta})(-P^{\gamma\alpha}) \tag{44}$$

$$-P^{\gamma\beta} = -P^{\beta\alpha} P^{\gamma\alpha}, \tag{45}$$

a kombinovaním oboch postupov máme

$$P^{\gamma\alpha} P^{\beta\alpha} = -P^{\beta\alpha} P^{\gamma\alpha}, \tag{46}$$

takže $P^{\gamma\alpha}$ a $P^{\beta\alpha}$ sú antikomutatívne. Použitím takéhoto postupu aj pre zvyšné matice zmeny bázy dostaneme množinu

$$J_1^\tau, J_2^\tau, \cdots, J_{n-1}^\tau \tag{47}$$

navzájom antikomutatívnych komplexných štruktúr na $\mathcal{R}^n$.

Teraz zúžme pohľad a uvažujme ortogonálne násobenie v $\mathcal{R}^4$.

Veta 1.7. *Komplexné štruktúry J_1, J_2, J_3 spĺňajú $J_1 \circ J_2 = \pm J_3$*

Aby sme ukázali, že je tomu tak, zoberieme zobrazenie

$$U = J_1 \circ J_2 \circ J_3 \tag{48}$$

(U tiež zachováva skalárny súčin aj dĺžku, lebo vznikne zložením troch takýchto zobrazení) a overíme, že U je komutatívne s J_i , $i = 1, 2, 3$ a navyše $U^2 = I$. Vypočítame pre $i = 1$.

$$U \circ J_1 = J_1 \circ J_2 \circ J_3 \circ J_1 = (-1) \cdot (-1) \cdot J_1 \circ J_1 \circ J_2 \circ J_3 = J_1 \circ U \tag{49}$$

Podobne by sme overili komutatívnosť pre ostatné i. Druhú vlastnosť overíme tiež priamym výpočtom.

$$U^2 = J_1 \circ J_2 \circ J_3 \circ J_1 \circ J_2 \circ J_3 = J_1^2 \circ J_2 \circ J_3 \circ J_2 \circ J_3 = -J_1^2 \circ J_2^2 \circ J_3^2 = -(-I)(-I)(-I) = I \tag{50}$$

Takže $U^2 = I$, čo značí, že druhé mocniny jeho vlastných hodnôt sú 1 . Vlastné hodnoty U sú teda ± 1 . Označme

$$V_+ = \{v \in \mathcal{R}^4 | U(v) = v\} \tag{51}$$

a

$$V_- = \{v \in \mathcal{R}^4 | U(v) = -v\} \tag{52}$$

Tieto podpriestory sú navzájom ortogonálne, takže platí

$$\mathcal{R}^4 = V_- \oplus V_+ \tag{53}$$

Vzhľadom k tomu, že J_i je komutatívne s U , sú V_- a V_+ invariantné podpriestory zobrazení J_i . Ukážme to pre V_+. Zoberieme $v \in V_+ \subset \mathcal{R}^4$.

$$U(J_i(v)) = J_i(U(v)) = J_i(v) \tag{54}$$

Podobným postupom ukážeme tvrdenie pre V_- . Čiže naše tri komplexné štruktúry sú nielen na $\mathcal{R}^4$, ale sú súčasne aj na V_- a V_+ . Vieme, že dimenzia V_- aj V_+ je párna, čiže je to buď 0 , 2 , alebo 4 . Lenže 2 to byť nemôže, lebo na dvojrozmernom priestore je komplexná štruktúra jednoznačne určená jej orientáciou (otočenie o $\frac{\pi}{2}$ v niektorom z dvoch smerov). Tri antikomutatívne komplexné štruktúry tam teda nemôžu koexistovať. Takže V_+ aj V_- sú prázdna množina alebo celé $\mathcal{R}^4$. Zmysel má iba uvažovať $\mathcal{R}^4$. Takže z definícii V_+ a V_-

$$U = \pm I \tag{55}$$

$$J_1 \circ J_2 \circ J_3 = \pm I \tag{56}$$

$$J_1 \circ J_2 = \mp J_3, \tag{57}$$

z (56) do (57) sme sa dostali zložením s J_3 . Či si zvolíme + alebo - si môžme vybrať bez toho, aby sme zmenili celú štruktúru(vzťahy). Predpokladajme napríklad, že J_1, J_2, J_3 sú také, že

$$J_1 \circ J_2 = J_3 \tag{58}$$

Indexy by sme mohli poprehadzovať, je to len označenie (inými slovami tento vzťah ostáva v platnosti aj pre iné kombinácie indexov).

V predošlej časti sme zistili, že existencia ortogonálneho násobenia v $\mathcal{R}^4$ v ňom implikuje existenciu troch komplexných štruktúr J_1, J_2, J_3 spĺňajúcich

$$J_1^2 = J_2^2 = J_3^2 = -I \tag{59}$$

$$J_1 \circ J_2 = -J_2 \circ J_1 = J_3 \tag{60}$$

$$J_2 \circ J_3 = -J_3 \circ J_2 = J_1 \tag{61}$$

$$J_3 \circ J_1 = -J_1 \circ J_3 = J_2 \tag{62}$$

Analogicky k tomu, ako je $\mathcal{R}^2$ komplexifikovaný komplexnou jednotkou $\mathrm{i} = (0,1)^T$ spĺňajúcou $\mathrm{i}^2 = -1$, zavedieme vektory zodpovedajúce komplexným štruktúram J_1, J_2, J_3

$$J_1 \sim \mathrm{i} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^T \tag{63}$$

$$J_2 \sim \mathrm{j} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^T \tag{64}$$

$$J_3 \sim \mathrm{k} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^T \tag{65}$$

a aj spôsob ich násobenia zodpovedajúci (59) - (62)

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1 \tag{66}$$

$$ij = -ji = k \tag{67}$$

$$jk = -kj = i \tag{68}$$

$$ki = -ik = j \tag{69}$$

Pridaním

$$\mathbf{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^T \tag{70}$$

dostaneme štyri lineárne nezávislé vektory $\mathbf{1}, \mathrm{i}, \mathrm{j}, \mathrm{k}$. $\boldsymbol{q} \in \mathcal{R}^4$ možno vzhľadom k tomu napísať ako

$$\boldsymbol{q} = q_0\mathbf{1} + q_1\mathrm{i} + q_2\mathrm{j} + q_3\mathrm{k} \quad , q_0, q_1, q_2, q_3 \in \mathcal{R} \tag{71}$$

1.3 Definícia

Vektorový priestor $\mathcal{R}^4$ vyjadrený v báze $\mathbf{1}, \mathrm{i}, \mathrm{j}, \mathrm{k}$ označíme $\mathcal{H}$. Prvky tohto priestoru voláme *kvaternióny.*

Definícia 1.8. *Kvaternión je štvorrozmerný objekt tvaru*

$$\mathsf{q} = q_0\mathbf{1} + q_1\mathrm{i} + q_2\mathrm{j} + q_3\mathrm{k} = q_0 + q_1\mathrm{i} + q_2\mathrm{j} + q_3\mathrm{k} \quad q_0, q_1, q_2, q_3 \in \mathcal{R}, \tag{72}$$

pričom v poslednom výraze sme $\mathbf{1}$ *nepísali, a pre* $\mathrm{i}, \mathrm{j}, \mathrm{k}$ *platia vzťahy (66) - (69) .*

Dá sa dokázať, že množina kvaterniónov tvorí teleso, čiže nekomutatívne pole. V ďalšej časti popíšeme operácie na tejto množine.

1.4 Operácie v $\mathcal{H}$

1.4.1 Sčítanie a násobenie

Dva kvaternióny q , r

$$\mathsf{q} = q_0 + q_1\mathrm{i} + q_2\mathrm{j} + q_3\mathrm{k}$$

$$\mathsf{r} = r_0 + r_1\mathrm{i} + r_2\mathrm{j} + r_3\mathrm{k}$$

sčítame po zložkách

$$\mathsf{q} + \mathsf{r} = q_0 + r_0 + (q_1 + r_1)\mathrm{i} + (q_2 + r_2)\mathrm{j} + (q_3 + r_3)\mathrm{k} \tag{73}$$

Pre súčin kvaterniónov platí

$$\begin{aligned} \mathsf{qr} =& q_0r_0 - q_1r_1 - q_2r_2 - q_3r_3 + (q_0r_1 + q_1r_0 + q_2r_3 - q_3r_2)\mathrm{i}+ \\ &+ (q_0r_2 + q_2r_0 + q_3r_1 - q_1r_3)\mathrm{j} + (q_0r_3 + q_3r_0 + q_1r_2 - q_2r_1)\mathrm{k} \end{aligned} \tag{74}$$

Násobenie kvaterniónov je nekomutatívne

$$\mathsf{qr} \neq \mathsf{rq} \tag{75}$$

Príklad 1.9. *Nech*

$$\begin{aligned} m =& 1 - \sqrt{3}\mathrm{i} - \mathrm{j} - 5\mathrm{k} \\ n =& 5 + \frac{20}{21}\mathrm{i} - 2\mathrm{j} + 3\sqrt{2}\mathrm{k} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} mn =& \left(1 - \sqrt{3}\mathrm{i} - \mathrm{j} - 5\mathrm{k}\right)\left(5 + \frac{20}{21}\mathrm{i} - 2\mathrm{j} + 3\sqrt{2}\mathrm{k}\right) = 1\cdot 5 + \sqrt{3}\cdot\frac{20}{21} - 1\cdot 2 + 5\cdot 3\sqrt{2}+ \\ &+ \left(1\cdot\frac{20}{21} - \sqrt{3}\cdot 5 - 1\cdot 3\sqrt{2} - 5\cdot 2\right)\mathrm{i} + \left(-1\cdot 2 + \sqrt{3}\cdot 3\sqrt{2} - 1\cdot 5 - 5\cdot\frac{20}{21}\right)\mathrm{j}+ \\ &+ \left(1\cdot 3\sqrt{2} + \sqrt{3}\cdot 2 + 1\cdot\frac{20}{21} - 5\cdot 5\right)\mathrm{k} = 3 + \sqrt{3}\cdot\frac{20}{21} + 15\sqrt{2}+ \\ &+ \left(-\frac{190}{21} - 5\sqrt{3} - 3\sqrt{2}\right)\mathrm{i} + \left(-\frac{247}{21} + 3\sqrt{6}\right)\mathrm{j} + \left(-\frac{505}{21} + 3\sqrt{2} + 2\sqrt{3}\right)\mathrm{k} \end{aligned} \tag{76}$$

Násobenie kvaterniónov je asociatívne. Nech $\mathsf{q}, \mathsf{r}, \mathsf{t}$ sú tri kvaternióny. Potom ich súčin je rovný

$$\mathsf{qrt} = (\mathsf{qr})\mathsf{t} = \mathsf{q}(\mathsf{rt}) \tag{77}$$

1.4.2 Vlastnosti kvaterniónov

Reálna časť kvaterniónu q je q_0, značíme ju $\mathrm{Re}(\mathsf{q})$. *Imaginárna časť* q je $q_1\mathrm{i} + q_2\mathrm{j} + q_3\mathrm{k}$, značíme ju $Im(\mathsf{q}) = \underline{\mathsf{q}}$. Kvaternión s nulovou reálnou časťou nazývame *rýdzoimaginárny.*

Združený kvaternión ku kvaterniónu q je

$$\overline{\mathsf{q}} = q_0 - q_1\mathrm{i} - q_2\mathrm{j} - q_3\mathrm{k} = q_0 - \underline{\mathsf{q}} \tag{78}$$

Platí

$$\overline{\mathsf{qr}} = \overline{\mathsf{r}}\,\overline{\mathsf{q}} \tag{79}$$

Združený kvaternión k súčinu viacerých kvaterniónov spočítame nasledovne

$$\overline{\mathsf{qrt}} = \overline{(\mathsf{qr})\mathsf{t}} = \bar{\mathsf{t}}\overline{\mathsf{qr}} = \bar{\mathsf{t}}\bar{\mathsf{r}}\,\bar{\mathsf{q}} \tag{80}$$

Norma kvaterniónu q je

$$||\mathsf{q}|| = \sqrt{\mathsf{q}\bar{\mathsf{q}}} = \sqrt{\bar{\mathsf{q}}\mathsf{q}} = \sqrt{q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2} \quad , ||\mathsf{q}|| \in \mathcal{R} \tag{81}$$

Kvaternión s jednotkovou normou voláme jednotkový. Norma súčinu kvaterniónov je rovná súčinu noriem týchto kvaterniónov.

$$||\mathsf{qrt}|| = \sqrt{\mathsf{qrt}\overline{\mathsf{qrt}}} = \sqrt{\mathsf{qrt}\bar{\mathsf{t}}\,\bar{\mathsf{r}}\,\bar{\mathsf{q}}} = \sqrt{||\mathsf{q}||^2||\mathsf{r}||^2||\mathsf{t}||^2} = ||\mathsf{q}||||\mathsf{r}||||\mathsf{t}|| \tag{82}$$

Inverzný kvaternión q^{-1} ku kvaterniónu q je taký, ktorý spĺňa

$$\mathsf{q}^{-1}\mathsf{q} = \mathsf{q}^{-1}\mathsf{q} = 1 \tag{83}$$

Je to kvaternión

$$\mathsf{q}^{-1} = \frac{\bar{\mathsf{q}}}{||\mathsf{q}||^2} \tag{84}$$

Pre normu inverzného kvaterniónu platí

$$||\mathsf{q}^{-1}|| = \sqrt{\frac{\bar{\mathsf{q}}}{||\mathsf{q}||^2}\frac{\mathsf{q}}{||\mathsf{q}||^2}} = \sqrt{\frac{||\mathsf{q}||^2}{||\mathsf{q}||^4}} = \frac{1}{||\mathsf{q}||} \tag{85}$$

Inverzný kvaternión k súčinu kvaterniónov zrátame týmto spôsobom

$$(\mathsf{qrt})^{-1} = \frac{\overline{\mathsf{qrt}}}{||\mathsf{qrt}||^2} = \frac{\bar{\mathsf{t}}\,\bar{\mathsf{r}}\,\bar{\mathsf{q}}}{||\mathsf{q}||^2||\mathsf{r}||^2||\mathsf{t}||^2} = \mathsf{t}^{-1}\mathsf{r}^{-1}\mathsf{q}^{-1} \tag{86}$$

Pretože násobenie kvaterniónov je nekomutatívne, na vyriešenie sústav

$$\mathsf{ax} = \mathsf{b} \qquad\qquad \mathsf{xa} = \mathsf{b} \tag{87}$$

$\mathsf{a}, \mathsf{b}, \mathsf{x} \in \mathcal{H}$, použijeme delenie (násobenie inverzným kvaterniónom) zľava a zprava

$$\mathsf{x} = \mathsf{a}^{-1}\mathsf{b} \qquad\qquad \mathsf{x} = \mathsf{b}\mathsf{a}^{-1} \tag{88}$$

Príklad 1.10. *Nech*

$$a = -1 + 2\mathrm{i} + \mathrm{j} + \frac{1}{2}\mathrm{k}$$
$$b = 3 - 2\mathrm{i} + 10\mathrm{j} + \frac{14}{5}\mathrm{k}$$

Vyriešime sústavu $\mathsf{xa} = \mathsf{b}$

$$
\begin{aligned}
\mathsf{xa} &= \mathsf{b}\\
\mathsf{x}\left(-1+2\mathrm{i}+\mathrm{j}+\frac{1}{2}\mathrm{k}\right) &= 3-2\mathrm{i}+10\mathrm{j}+\frac{14}{5}\mathrm{k}\\
\mathsf{x}\left(-1+2\mathrm{i}+\mathrm{j}+\frac{1}{2}\mathrm{k}\right)\frac{-1-2\mathrm{i}-\mathrm{j}-\frac{1}{2}\mathrm{k}}{\frac{25}{4}} &= \frac{\left(3-2\mathrm{i}+10\mathrm{j}+\frac{14}{5}\mathrm{k}\right)\left(-1-2\mathrm{i}-\mathrm{j}-\frac{1}{2}\mathrm{k}\right)}{\frac{25}{4}}\\
\mathsf{x} =&\frac{4}{25}\Bigg[-3\cdot 1-2\cdot 2+10\cdot 1+\frac{14}{5}\cdot\frac{1}{2}+\left(-3\cdot 2+2\cdot 1-10\cdot\frac{1}{2}+\frac{14}{5}\cdot 1\right)\mathrm{i}+\\
&+\left(-3\cdot 1-2\cdot\frac{1}{2}-10\cdot 1-\frac{14}{5}\cdot 2\right)\mathrm{j}+\left(-3\cdot\frac{1}{2}+2\cdot 1+10\cdot 2-\frac{14}{5}\cdot 1\right)\mathrm{k}\Bigg]=\\
=&\frac{4}{25}\left(\frac{22}{5}-\frac{31}{5}\mathrm{i}-\frac{98}{5}\mathrm{j}+\frac{177}{10}\mathrm{k}\right)=\frac{88}{125}-\frac{124}{125}\mathrm{i}-\frac{392}{125}\mathrm{j}+\frac{354}{125}\mathrm{k}
\end{aligned}
\tag{89}
$$

1.4.3 Polárny tvar

Kvaternióny sa podobne ako komplexné čísla dajú previesť na polárny tvar.

$$
\begin{aligned}
\mathsf{q} =& q_0+\underline{\mathsf{q}} = ||\mathsf{q}||\left(\frac{q_0}{||\mathsf{q}||}+\frac{\underline{\mathsf{q}}}{||\mathsf{q}||}\right) = ||\mathsf{q}||\left(\frac{q_0}{||\mathsf{q}||}+\frac{\underline{\mathsf{q}}}{||\underline{\mathsf{q}}||}\frac{||\underline{\mathsf{q}}||}{||\mathsf{q}||}\right) =\\
=& r\left(\cos\theta+\mathsf{u}\sin\theta\right),
\end{aligned}
\tag{90}
$$

kde

$$r = ||\mathsf{q}|| \qquad \mathsf{u} = \frac{\underline{\mathsf{q}}}{||\underline{\mathsf{q}}||} \tag{91}$$

$$\sin\theta = \frac{||\underline{\mathsf{q}}||}{r} \qquad \cos\theta = \frac{q_0}{r} \tag{92}$$

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{||\underline{\mathsf{q}}||}{q_0} \qquad \operatorname{cotg}\theta = \frac{q_0}{||\underline{\mathsf{q}}||} \tag{93}$$

Keďže

$$\mathsf{u}^2 = \left(\frac{\underline{\mathsf{q}}}{||\underline{\mathsf{q}}||}\right)^2 = \frac{\underline{\mathsf{q}}\left(-\overline{\underline{\mathsf{q}}}\right)}{||\underline{\mathsf{q}}||^2} = -1, \tag{94}$$

na umocnenie kvaterniónu v polárnom tvare môžme použiť De Moivreho vzorec.

$$\mathsf{q}^n = \left(r\left(\cos\theta+\mathsf{u}\sin\theta\right)\right)^n = r^n(\cos n\theta+\mathsf{u}\sin n\theta) \tag{95}$$

Príklad 1.11. *Prevedieme* $q = 25+9\mathrm{i}-12\mathrm{j}-20\mathrm{k}$ *na polárny tvar*

$$||q|| = \sqrt{25^2+9^2+12^2+20^2} = \sqrt{1250} \tag{96}$$

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{\sqrt{9^2+12^2+20^2}}{25} = \frac{\sqrt{625}}{25} = \frac{25}{25} = 1 \qquad \theta = \frac{\pi}{4} \tag{97}$$

$$q = \sqrt{1250}\left(\cos\frac{\pi}{4} + \left(\frac{9\mathrm{i} - 12\mathrm{j} - 20\mathrm{k}}{25}\right)\sin\frac{\pi}{4}\right) \tag{98}$$

Odmocniny sa týmto vzorcom počítajú podobne ako z komplexných čísel, ale s jedným rozdielom.

Ak hľadáme odmocninu z q , $\underline{\mathsf{q}} \neq 0$, zo vzorca

$$\sqrt[n]{\mathsf{q}} = \mathsf{q}^{\frac{1}{n}} = r^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{1}{n}\theta + \mathsf{u}\sin\frac{1}{n}\theta\right) \tag{99}$$

máme riešenie s

$$\mathsf{s} = r^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{\theta + 2k\pi}{n} + \mathsf{u}\sin\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) \quad k = 0, 1, \cdots, n-1 \tag{100}$$

tak ako v $\mathcal{C}$.

Ak $\underline{\mathsf{q}} = 0$,

$$\mathsf{s} = r^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{2k\pi}{n} + \mathsf{g}\sin\frac{2k\pi}{n}\right) \qquad , a > 0, k = 0, 1, \cdots, n-1 \tag{101}$$

$$\mathsf{s} = r^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{(2k+1)\pi}{n} + \mathsf{g}\sin\frac{(2k+1)\pi}{n}\right) \qquad , a < 0, k = 0, 1, \cdots, n-1 \tag{102}$$

a g je ľubovoľný rýdzoimaginárny jednotkový kvaternión .

Príklad 1.12. *Hľadáme tretiu odmocninu z kvaterniónu* $q = 25 + 9\mathrm{i} - 12\mathrm{j} - 20\mathrm{k}$ *. Hľadáme teda kvaternión* s *spĺňajúci* $s^3 = q$ *. Z príkladu (1.11) vieme, že*

$$q = \sqrt{1250}\left(\cos\frac{\pi}{4} + \left(\frac{9\mathrm{i} - 12\mathrm{j} - 20\mathrm{k}}{25}\right)\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

Riešenia sú tri

$$s_1 = \sqrt[6]{1250}\left(\cos\frac{\pi}{12} + \left(\frac{9\mathrm{i} - 12\mathrm{j} - 20\mathrm{k}}{25}\right)\sin\frac{\pi}{12}\right) \tag{103}$$

$$s_2 = \sqrt[6]{1250}\left(\cos\frac{9\pi}{12} + \left(\frac{9\mathrm{i} - 12\mathrm{j} - 20\mathrm{k}}{25}\right)\sin\frac{9\pi}{12}\right) = \tag{104}$$

$$= \sqrt[6]{1250}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + \left(\frac{9\mathrm{i} - 12\mathrm{j} - 20\mathrm{k}}{25}\right)\sin\frac{3\pi}{4}\right) \tag{105}$$

$$s_3 = \sqrt[6]{1250}\left(\cos\frac{17\pi}{12} + \left(\frac{9\mathrm{i} - 12\mathrm{j} - 20\mathrm{k}}{25}\right)\sin\frac{17\pi}{12}\right) \tag{106}$$

1.4.4 Skalárny a vektorový súčin

Ak stotožníme $\mathcal{R}^4$ a $\mathcal{H}$ bijekciou

$$q_0 + q_1\mathrm{i} + q_2\mathrm{j} + q_3\mathrm{k} = \mathsf{q} \Longleftrightarrow \boldsymbol{q} = \begin{pmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix}, \tag{107}$$

môžme na vyjadrenie kvaterniónového násobenia využiť skalárny a vektorový súčin. Rýdzoimaginárny kvaternión sa dá "vyrobiť" takto

$$\mathsf{qr} - \mathsf{rq} = (0, 2\underline{\boldsymbol{q}} \times \underline{\boldsymbol{r}}), \tag{108}$$

kde q, r sú na ľavej strane kvaternióny a na pravej strane vektory. Ak q , r sú rýdzoimaginárne, tak

$$-\left(\mathsf{qr} + \mathsf{rq}\right) = 2\boldsymbol{q}^T\boldsymbol{r} \tag{109}$$

a

$$\mathsf{qr} = \frac{\mathsf{qr} + \mathsf{rq}}{2} + \frac{\mathsf{qr} - \mathsf{rq}}{2} = (-\boldsymbol{q}^T\boldsymbol{r}, \boldsymbol{q} \times \boldsymbol{r}) \tag{110}$$

1.4.5 Kvaternión ako dvojica komplexných čísel

Kvaternión q sa dá vyjadriť pomocou dvoch komplexných čísel

$$q_0 + q_1\mathrm{i} + q_2\mathrm{j} + q_3\mathrm{k} = (q_0 + q_1\mathrm{i}) + (q_2 + q_3\mathrm{i})\mathrm{j} = w + z\mathrm{j} \quad , w, z \in \mathcal{C} \tag{111}$$

v báze $(1, \mathrm{j})^T$. $\mathcal{H}$ je teda $\mathcal{C} \times \mathcal{C}$ a $dim(\mathcal{H})_{\mathcal{C}} = 2$.

2 Otáčanie vektorov v $\mathcal{R}^3$

Teraz popíšeme otáčanie vektorov v $\mathcal{R}^4$ a v $\mathcal{R}^3$ pomocou súčinu kvaterniónov - to, načo boli pôvodne vymyslené. V ďalšej časti budeme voľne zamieňať kvaternión a k nemu prislúchajúci vektor.

2.1 Násobenie kvaterniónov ako otáčanie vektorov

Pozrime sa na súčin dvoch jednotkových kvaterniónov ako na rotáciu vektorov. Nájdime maticu L_{q} zobrazenia

$$\Gamma : \mathcal{H} \to \mathcal{H}, \quad \Gamma(\mathsf{r}) = \mathsf{qr} \tag{112}$$

aj maticu R_{q} zobrazenia

$$\Phi : \mathcal{H} \to \mathcal{H}, \quad \Phi(\mathsf{r}) = \mathsf{rq} \tag{113}$$

Myslíme tým maticu, ktorou musíme vynásobiť vektor zodpovedajúci kvaterniónu r , aby vznikol vektor zodpovedajúci qr , resp. rq . Bázové vektory zobrazenie Γ transformuje na

$$\Gamma(1) = (q_0 + q_1\mathrm{i} + q_2\mathrm{j} + q_3\mathrm{k})\mathbf{1} = q_0 + q_1\mathrm{i} + q_2\mathrm{j} + q_3\mathrm{k} \tag{114}$$

$$\Gamma(\mathrm{i}) = (q_0 + q_1\mathrm{i} + q_2\mathrm{j} + q_3\mathrm{k})\mathrm{i} = -q_1 + q_0\mathrm{i} + q_3\mathrm{j} - q_2\mathrm{k} \tag{115}$$

$$\Gamma(\mathrm{j}) = (q_0 + q_1\mathrm{i} + q_2\mathrm{j} + q_3\mathrm{k})\mathrm{j} = -q_2 - q_3\mathrm{i} + q_0\mathrm{j} + q_1\mathrm{k} \tag{116}$$

$$\Gamma(\mathrm{k}) = (q_0 + q_1\mathrm{i} + q_2\mathrm{j} + q_3\mathrm{k})\mathrm{k} = -q_3 + q_2\mathrm{i} - q_1\mathrm{j} + q_0\mathrm{k} \tag{117}$$

Z toho matica násobenia zľava je

$$L_{\mathsf{q}} = \begin{pmatrix} q_0 & -q_1 & -q_2 & -q_3 \\ q_1 & q_0 & -q_3 & q_2 \\ q_2 & q_3 & q_0 & -q_1 \\ q_3 & -q_2 & q_1 & q_0 \end{pmatrix}, \tag{118}$$

takže $L_{\mathsf{q}}\boldsymbol{r} = \boldsymbol{qr}$. Takým istým postupom dostaneme tvar

$$R_{\mathsf{q}} = \begin{pmatrix} q_0 & -q_1 & -q_2 & -q_3 \\ q_1 & q_0 & q_3 & -q_2 \\ q_2 & -q_3 & q_0 & q_1 \\ q_3 & q_2 & -q_1 & q_0 \end{pmatrix} \tag{119}$$

Stĺpce aj riadky týchto matíc sú navzájom ortogonálne. Ak q je jednotkový kvaternión, norma každého riadku aj stĺpca matíc R_{q} , L_{q} je 1, a teda sú to ortogonálne matice. Navyše $L_{\overline{\mathsf{q}}} = L_{\mathsf{q}}^T$ a podobne $R_{\overline{\mathsf{q}}} = R_{\mathsf{q}}^T$. Keďže $L_{\mathsf{q}}^T L_{\mathsf{q}} = ||\mathsf{q}||^2 I$,

$$det^2(L_{\mathsf{q}}) = det(L_{\mathsf{q}}^T L_{\mathsf{q}}) = (||\mathsf{q}||^2)^4 = ||\mathsf{q}||^8 \tag{120}$$

a teda $det(L_{\mathsf{q}}) = \pm||\mathsf{q}||^4$. Ale z Laplaceovho rozvoja determinantu L_{q} vieme, že sa tam vyskytuje q_0^4 a teda platí

$$det(L_{\mathsf{q}}) = (q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2)^2 \tag{121}$$

To isté platí aj pre R_{q}. Z toho vidno, že ak je q jednotkový, determinanty týchto matíc sú rovné 1, a teda patria do triedy matíc $SO(4)$ (špeciálne ortogonálne 4×4 matice). Každá z matíc, ktoré patria do tejto triedy, predstavuje nejakú rotáciu. Násobenie kvaterniónom je teda skutočne nejaká rotácia v $\mathcal{R}^4$, ako sme predpokladali.

2.2 Vzorec pre otáčanie v $\mathcal{R}^3$

Viac nás ale zaujímajú rotácie v $\mathcal{R}^3$. Nasledujúca veta hovorí, ako rotovať vektory v $\mathcal{R}^4$ tak, aby sa jedna zložka vektora nemenila - čiže rotovať v $\mathcal{R}^3$.

Veta 2.1. *Nech q a r sú dva kvaternióny. Potom*

$$\mathsf{r}' = \mathsf{q}\mathsf{r}\mathsf{q}^{-1} \tag{122}$$

je kvaternión, ktorého norma a reálna časť sa rovná norme a reálnej časti r . Imaginárnu časť r' dostaneme otočením imaginárnej časti r okolo osi, ktorou bude imaginárna časť q o dvojnásobný uhol polárneho tvaru q . To znamená, že ak $\mathsf{q} = ||\mathsf{q}||(\cos\frac{\theta}{2} + \underline{\mathsf{q}}\sin\frac{\theta}{2})$, potom vektor $\underline{\mathbf{r}}'$ získame otočením vektora $\underline{\mathbf{r}}$ okolo osi $\underline{\mathbf{q}}$ o uhol θ .

Jej význam spočíva v tom, že ak chceme otočiť nejaký vektor v $\mathcal{R}^3$, stotožníme ho s rýdzoimaginárnym kvaterniónom r , os otáčania stotožníme s imaginárnou časťou a kosínus polovičného uhla, o ktorý chceme otáčať s reálnou časťou kvaterniónu q, a použijeme vyššie uvedený vzorec.

Na dokázanie, že transformácia (122) nemení reálnu časť r využijeme, že pre akékoľvek dva kvaternióny platí $Re(\mathsf{wt}) = Re(\mathsf{tw})$:

$$Re((\mathsf{qr})\mathsf{q}^{-1}) = Re(\mathsf{q}^{-1}\mathsf{qr}) = Re(\mathsf{r}) \tag{123}$$

Rovnaká norma pôvodného a nového kvaterniónu súvisí s normovanosťou násobenia

$$||\mathsf{r}'|| = ||\mathsf{q}\mathsf{r}\mathsf{q}^{-1}|| = ||\mathsf{q}||||\mathsf{r}||||\mathsf{q}||^{-1} = ||\mathsf{r}|| \tag{124}$$

Na ďalšie dokazovanie aj na nasledujúce výpočty budeme v súvislosti so vzorcom (122) používať jednotkový q. Na jeho norme totiž nezáleží - ak by sme miesto neho zvolili $a\mathsf{q}$, $a \in \mathcal{R}$

$$a\mathsf{q}\mathsf{r}(a\mathsf{q})^{-1} = a\mathsf{q}\mathsf{r}\frac{1}{a}\mathsf{q}^{-1} = \mathsf{q}\mathsf{r}\mathsf{q}^{-1} \tag{125}$$

Na dokázanie, že $\underline{\boldsymbol{r}}'$ je vektor $\underline{\boldsymbol{r}}$ otočený okolo osi $\underline{\boldsymbol{q}}$ o uhol θ predpokladajme, že os otáčania je k , čiže $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^T$. To je bez ujmy na všeobecnosti - ak by bola totiž os iný vektor, pomocou ortogonálnej matice ju prevedieme na $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^T$ zachovajúc uhly medzi vektormi. Pre akýkoľvek vektor stačí spočítať uhol medzi jeho projekciou do roviny tvorenej i, j a projekciou vektora vzniknutého jeho rotáciou do tejto roviny, lebo $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^T$ je invariantný podpriestor zobrazenia $P(r) = (q_0 + q_3\mathrm{k})\mathsf{r}(q_0 - q_3\mathrm{k})$:

$$(q_0 + q_3\mathrm{k})\mathrm{k}(q_0 - q_3\mathrm{k}) = (q_0 + q_3\mathrm{k})(q_0 - q_3\mathrm{k})\mathrm{k} = \mathrm{k} \tag{126}$$

Predpokladajme teda, že máme vektor $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} m & n & 0 \end{pmatrix}^T$. Roložíme ho ešte na $\begin{pmatrix} m & 0 & 0 \end{pmatrix}^T + \begin{pmatrix} 0 & n & 0 \end{pmatrix}^T = \boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2$. Otočením $\boldsymbol{x}$ okolo osi $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^T$

$$\begin{aligned}\left(\cos\frac{\theta}{2} + \sin\frac{\theta}{2}\mathrm{k}\right)\left(m\mathrm{i} + n\mathrm{j}\right)\left(\cos\frac{\theta}{2} - \sin\frac{\theta}{2}\mathrm{k}\right) &= \left(\cos\frac{\theta}{2} + \sin\frac{\theta}{2}\mathrm{k}\right)\left(m\mathrm{i}\right)\left(\cos\frac{\theta}{2} - \sin\frac{\theta}{2}\mathrm{k}\right) + \\ &+ \left(\cos\frac{\theta}{2} + \sin\frac{\theta}{2}\mathrm{k}\right)\left(n\mathrm{j}\right)\left(\cos\frac{\theta}{2} - \sin\frac{\theta}{2}\mathrm{k}\right)\end{aligned} \tag{127}$$

otáčame postupne samotnú os i

$$\begin{aligned}&\left(\cos\frac{\theta}{2} + \sin\frac{\theta}{2}\mathrm{k}\right)\left(m\mathrm{i}\right)\left(\cos\frac{\theta}{2} - \sin\frac{\theta}{2}\mathrm{k}\right) = \left(m\cos\frac{\theta}{2}\mathrm{i} + m\sin\frac{\theta}{2}\mathrm{j}\right)\left(\cos\frac{\theta}{2} - \sin\frac{\theta}{2}\mathrm{k}\right) = \\ &= m\cos^2\frac{\theta}{2}\mathrm{i} + 2m\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\mathrm{j} - m\sin^2\frac{\theta}{2}\mathrm{i} = m\left(\cos\theta\mathrm{i} + \sin\theta\mathrm{j}\right)\end{aligned} \tag{128}$$

a os j

$$\begin{aligned}&\left(\cos\frac{\theta}{2} + \sin\frac{\theta}{2}\mathrm{k}\right)\left(n\mathrm{j}\right)\left(\cos\frac{\theta}{2} - \sin\frac{\theta}{2}\mathrm{k}\right) = \left(n\cos\frac{\theta}{2}\mathrm{j} - n\sin\frac{\theta}{2}\mathrm{i}\right)\left(\cos\frac{\theta}{2} - \sin\frac{\theta}{2}\mathrm{k}\right) = \\ &= n\cos^2\frac{\theta}{2}\mathrm{j} - 2n\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\mathrm{i} - n\sin^2\frac{\theta}{2}\mathrm{j} = n\left(\cos\theta\mathrm{j} - \sin\theta\mathrm{i}\right)\end{aligned} \tag{129}$$

a dostaneme

$$\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{x}'_1 + \boldsymbol{x}'_2 = m \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \\ 0 \end{pmatrix} + n \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \\ 0 \end{pmatrix} \tag{130}$$

Otáčanie vektora $\boldsymbol{x}$, ktorý je lineárnou kombináciou osí i, j , sme rozložili na otáčanie týchto osí. Výsledkom je vektor, ktorý je tou istou lineárnou kombináciou *otočených* osí (o ten istý uhol ako pôvodné otáčanie), takže veta (2.1) je dokázaná.

Príklad 2.2. *Vektor* $\begin{pmatrix} 5 & 7 & 9 \end{pmatrix}^T$ *otočíme okolo* $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^T$ *o uhol* $\frac{2\pi}{3}$ *. Otáčaný vektor stotožníme s rýdzoimaginárnym kvaterniónom* r *a na vytvorenie* q *použijeme uhol a os otáčania*

$$\mathsf{r} = 5\mathrm{i} + 7\mathrm{j} + 9\mathrm{k} \tag{131}$$

$$Re(\mathsf{q}) = \cos\frac{\frac{2\pi}{3}}{2} = \cos\frac{\pi}{3} \tag{132}$$

$$Im(\mathsf{q}) = \mathrm{i} + \mathrm{j} + \mathrm{k} \tag{133}$$

Polárny tvar q *vyzerá takto*

$$\mathsf{q} = \left(\cos\frac{\pi}{3} + \frac{1}{\sqrt{3}}\sin\frac{\pi}{3}\mathrm{i} + \frac{1}{\sqrt{3}}\sin\frac{\pi}{3}\mathrm{j} + \frac{1}{\sqrt{3}}\sin\frac{\pi}{3}\mathrm{k}\right) = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{i} + \frac{1}{2}\mathrm{j} + \frac{1}{2}\mathrm{k}\right) \tag{134}$$

a k nemu inverzný bude kvaternión

$$\mathsf{q}^{-1} = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\mathrm{i} - \frac{1}{2}\mathrm{j} - \frac{1}{2}\mathrm{k}\right) \tag{135}$$

Na výpočet použijeme vzorec (122)

$$\begin{aligned} \mathsf{q}\mathsf{r}\mathsf{q}^{-1} &= \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{i} + \frac{1}{2}\mathrm{j} + \frac{1}{2}\mathrm{k}\right)\left(5\mathrm{i} + 7\mathrm{j} + 9\mathrm{k}\right)\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\mathrm{i} - \frac{1}{2}\mathrm{j} - \frac{1}{2}\mathrm{k}\right) = \\ &= \left[-\frac{5}{2} - \frac{7}{2} - \frac{9}{2} + \left(\frac{5}{2} + \frac{9}{2} - \frac{7}{2}\right)\mathrm{i} + \left(\frac{7}{2} - \frac{9}{2} + \frac{5}{2}\right)\mathrm{j} + \left(\frac{9}{2} + \frac{7}{2} - \frac{5}{2}\right)\mathrm{k}\right] \cdot \\ &\quad \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\mathrm{i} - \frac{1}{2}\mathrm{j} - \frac{1}{2}\mathrm{k}\right) = \left(-\frac{21}{2} + \frac{7}{2}\mathrm{i} + \frac{3}{2}\mathrm{j} + \frac{11}{2}\mathrm{k}\right)\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\mathrm{i} - \frac{1}{2}\mathrm{j} - \frac{1}{2}\mathrm{k}\right) = \\ &= -\frac{21}{4} + \frac{7}{4} + \frac{3}{4} + \frac{11}{4} + \left(\frac{21}{4} + \frac{7}{4} - \frac{3}{4} + \frac{11}{4}\right)\mathrm{i} + \left(\frac{21}{4} + \frac{7}{4} + \frac{3}{4} - \frac{11}{4}\right)\mathrm{j} + \\ &\quad + \left(\frac{21}{4} - \frac{7}{4} + \frac{3}{4} + \frac{11}{4}\right)\mathrm{k} = 9\mathrm{i} + 5\mathrm{j} + 7\mathrm{k} \end{aligned} \tag{136}$$

Výsledkom je otočený vektor $\boldsymbol{r}' = \begin{pmatrix} 9 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}$

Príklad 2.3. *Vektor* $\begin{pmatrix} 9 & 7 & 5 \end{pmatrix}^T$ *otočíme okolo osi* $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2+\varphi}} & \frac{\varphi}{\sqrt{3-\varphi}} & \sqrt{\frac{\varphi}{2+\varphi}} \end{pmatrix}^T$ *o uhol* $\frac{2\pi}{5}$, *pričom* $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ *označuje zlatý rez. Otáčaný vektor zapíšeme ako rýdzoimaginárny kvaternión* $\boldsymbol{r} = 9\mathrm{i} + 7\mathrm{j} + 5\mathrm{k}$ *. Pomocou osi a uhlu vytvoríme* $\boldsymbol{q}$ *:*

$$Re(\boldsymbol{q}) = \cos\frac{\frac{2\pi}{5}}{2} = \cos\frac{\pi}{5} \tag{137}$$

$$Im(\boldsymbol{q}) = \frac{1}{\sqrt{2+\varphi}}\mathrm{i} + \frac{\varphi}{\sqrt{3-\varphi}}\mathrm{j} + \sqrt{\frac{\varphi}{2+\varphi}}\mathrm{k} \tag{138}$$

Keďže zlatý rez je koreňom rovnice $x^2 - x - 1 = 0$ *, je aj koreňom rovnice* $x^n - x^{n-1} - x^{n-2} = 0$, *a teda pre všetky* $n \in \mathcal{R}$ *platí*

$$\varphi^n = \varphi^{n-1} + \varphi^{n-2} \tag{139}$$

Z toho

$$\varphi^2 = \varphi + 1 \qquad a \qquad \varphi^3 = \varphi^2 + \varphi = 2\varphi + 1, \tag{140}$$

a norma $\underline{\boldsymbol{q}}$ *je rovná*

$$\begin{aligned} ||\underline{\boldsymbol{q}}|| =& \sqrt{\frac{1}{2+\varphi} + \frac{\varphi^2}{3-\varphi} + \frac{\varphi}{2+\varphi}} = \sqrt{\frac{3-\varphi+2\varphi^2+\varphi^3+3\varphi-\varphi^2}{(3-\varphi)(2+\varphi)}} = \\ =& \sqrt{\frac{3-\varphi+2(\varphi+1)+(2\varphi+1)+3\varphi-(\varphi+1)}{6+\varphi-(\varphi+1)}} = \\ =& \sqrt{\frac{5\varphi+5}{5}} = \sqrt{\varphi^2} = \varphi \end{aligned} \tag{141}$$

Použitím vzťahov

$$\cos\frac{\pi}{5} = \frac{\varphi}{2} \qquad \sin\frac{\pi}{5} = \sqrt{1-\cos^2\frac{\pi}{5}} = \sqrt{\frac{4-\varphi^2}{4}} = \frac{\sqrt{4-\varphi-1}}{2} = \frac{\sqrt{3-\varphi}}{2} \tag{142}$$

$$\begin{aligned} \sin\frac{2\pi}{5} =& 2\sin\frac{\pi}{5}\cos\frac{\pi}{5} = \frac{\varphi\sqrt{3-\varphi}}{2} = \frac{\sqrt{3\varphi^2-\varphi^3}}{2} = \frac{\sqrt{3(\varphi+1)-(2\varphi+1)}}{2} = \\ =& \frac{\sqrt{\varphi+2}}{2} \end{aligned} \tag{143}$$

$$\frac{\sin\frac{\pi}{5}}{\sqrt{\varphi+2}} = \frac{\sin\frac{\pi}{5}}{2\sin\frac{2\pi}{5}} = \frac{\sin\frac{\pi}{5}}{4\sin\frac{\pi}{5}\cos\frac{\pi}{5}} = \frac{1}{4\frac{\varphi}{2}} = \frac{1}{2\varphi} \tag{144}$$

prevedieme na polárny tvar q

$$
\begin{aligned}
\mathsf{q} &= \left(\cos\frac{\pi}{5} + \frac{1}{\sqrt{2+\varphi}}\frac{1}{\varphi}\sin\frac{\pi}{5}\mathrm{i} + \frac{\varphi}{\sqrt{3-\varphi}}\frac{1}{\varphi}\sin\frac{\pi}{5}\mathrm{j} + \sqrt{\frac{\varphi}{2+\varphi}}\frac{1}{\varphi}\sin\frac{\pi}{5}\mathrm{k}\right) = \\
&= \left(\frac{\varphi}{2} + \frac{1}{2\varphi^2}\mathrm{i} + \frac{1}{2}\mathrm{j} + \frac{1}{2\varphi\sqrt{\varphi}}\mathrm{k}\right),
\end{aligned}
\tag{145}
$$

aj q^{-1}

$$
\mathsf{q}^{-1} = \left(\frac{\varphi}{2} - \frac{1}{2\varphi^2}\mathrm{i} - \frac{1}{2}\mathrm{j} - \frac{1}{2\varphi\sqrt{\varphi}}\mathrm{k}\right)
\tag{146}
$$

Teraz môžme použiť náš vzorec

$$
\begin{aligned}
\mathsf{q}\mathsf{r}\mathsf{q}^{-1} &= \left(\frac{\varphi}{2} + \frac{1}{2\varphi^2}\mathrm{i} + \frac{1}{2}\mathrm{j} + \frac{1}{2\varphi\sqrt{\varphi}}\mathrm{k}\right)\left(9\mathrm{i} + 7\mathrm{j} + 5\mathrm{k}\right)\left(\frac{\varphi}{2} - \frac{1}{2\varphi^2}\mathrm{i} - \frac{1}{2}\mathrm{j} - \frac{1}{2\varphi\sqrt{\varphi}}\mathrm{k}\right) = \\
&= \Bigg[-\frac{9}{2\varphi^2} - \frac{7}{2} - \frac{5}{2\varphi\sqrt{\varphi}} + \left(\frac{9\varphi}{2} + \frac{5}{2} - \frac{7}{2\varphi\sqrt{\varphi}}\right)\mathrm{i} + \left(\frac{7\varphi}{2} - \frac{5}{2\varphi^2} + \frac{9}{2\varphi\sqrt{\varphi}}\right)\mathrm{j} + \\
&\quad + \left(\frac{5\varphi}{2} + \frac{7}{2\varphi^2} - \frac{9}{2}\right)\mathrm{k}\Bigg]\left(\frac{\varphi}{2} - \frac{1}{2\varphi^2}\mathrm{i} - \frac{1}{2}\mathrm{j} - \frac{1}{2\varphi\sqrt{\varphi}}\mathrm{k}\right) = \\
&= -\frac{9}{4\varphi} - \frac{7\varphi}{4} - \frac{5}{4\sqrt{\varphi}} + \frac{9}{4\varphi} + \frac{5}{4\varphi^2} - \frac{7}{4\varphi^3\sqrt{\varphi}} + \frac{7\varphi}{4} - \frac{5}{4\varphi^2} + \frac{9}{4\varphi\sqrt{\varphi}} + \frac{5}{4\sqrt{\varphi}} + \\
&\quad + \frac{7}{4\varphi^3\sqrt{\varphi}} - \frac{9}{4\varphi\sqrt{\varphi}} + \Bigg(\frac{9}{4\varphi^4} + \frac{7}{4\varphi^2} + \frac{5}{4\varphi^3\sqrt{\varphi}} + \frac{9\varphi^2}{4} + \frac{5\varphi}{4} - \frac{7}{4\sqrt{\varphi}} - \frac{7}{4\sqrt{\varphi}} + \\
&\quad + \frac{5}{4\varphi^3\sqrt{\varphi}} - \frac{9}{4\varphi^3} + \frac{5\varphi}{4} + \frac{7}{4\varphi^2} - \frac{9}{4}\Bigg)\mathrm{i} + \Bigg(\frac{9}{4\varphi^2} + \frac{7}{4} + \frac{5}{4\varphi\sqrt{\varphi}} + \frac{9}{4\sqrt{\varphi}} + \frac{5}{4\varphi\sqrt{\varphi}} - \\
&\quad - \frac{7}{4\varphi^3} + \frac{7\varphi^2}{4} - \frac{5}{4\varphi} + \frac{9}{4\sqrt{\varphi}} - \frac{5}{4\varphi} - \frac{7}{4\varphi^4} + \frac{9}{4\varphi^2}\Bigg)\mathrm{j} + \Bigg(\frac{9}{4\varphi^3\sqrt{\varphi}} + \frac{7}{4\varphi\sqrt{\varphi}} + \\
&\quad + \frac{5}{4\varphi^3} - \frac{9\varphi}{4} - \frac{5}{4} + \frac{7}{4\varphi\sqrt{\varphi}} + \frac{7}{4\varphi} - \frac{5}{4\varphi^4} + \frac{9}{4\varphi^3\sqrt{\varphi}} + \frac{5\varphi^2}{4} + \frac{7}{4\varphi} - \frac{9\varphi}{4}\Bigg)\mathrm{k} = \\
&= \left(\frac{9\varphi^2}{4} + \frac{5\varphi}{2} - \frac{9}{4} - \frac{7}{2\sqrt{\varphi}} + \frac{7}{2\varphi^2} - \frac{9}{4\varphi^3} + \frac{5}{2\varphi^3\sqrt{\varphi}} + \frac{9}{4\varphi^4}\right)\mathrm{i} + \\
&\quad + \left(\frac{7\varphi^2}{4} + \frac{7}{4} + \frac{9}{2\sqrt{\varphi}} - \frac{5}{2\varphi} + \frac{5}{2\varphi\sqrt{\varphi}} + \frac{9}{2\varphi^2} - \frac{7}{4\varphi^3} - \frac{7}{4\varphi^4}\right)\mathrm{j} + \\
&\quad + \left(\frac{5\varphi^2}{4} - \frac{9\varphi}{2} - \frac{5}{4} + \frac{7}{2\varphi} + \frac{7}{2\varphi\sqrt{\varphi}} + \frac{5}{4\varphi^3} + \frac{9}{2\varphi^3\sqrt{\varphi}} - \frac{5}{4\varphi^4}\right)\mathrm{k}
\end{aligned}
\tag{147}
$$

Použijúc ďalšie vzťahy dané vzorcom (139)

$$
\varphi^{-1} + 1 = \varphi \qquad \varphi^{-1} = \varphi - 1 \tag{148}
$$

$$
\varphi^{-2} + \varphi^{-1} = 1 \qquad \varphi^{-2} = 1 - (\varphi - 1) = 2 - \varphi \tag{149}
$$

$$
\varphi^{-3} + \varphi^{-2} = \varphi^{-1} \qquad \varphi^{-3} = \varphi - 1 - (2 - \varphi) = 2\varphi - 3 \tag{150}
$$

$$
\varphi^{-4} + \varphi^{-3} = \varphi^{-2} \qquad \varphi^{-4} = 2 - \varphi - (2\varphi - 3) = 5 - 3\varphi \tag{151}
$$

upravíme výrazy pri $\mathrm{i}, \mathrm{j}, \mathrm{k}$ *na*

$$\begin{aligned}&\frac{9\varphi^2}{4}+\frac{5\varphi}{2}-\frac{9}{4}-\frac{7}{2\sqrt{\varphi}}+\frac{7}{2\varphi^2}-\frac{9}{4\varphi^3}+\frac{5}{2\varphi^3\sqrt{\varphi}}+\frac{9}{4\varphi^4}=\frac{9(\varphi+1)}{4}+\frac{5\varphi}{2}-\frac{9}{4}-\\&-\frac{7(\varphi-1)\sqrt{\varphi}}{2}+\frac{7(2-\varphi)}{2}-\frac{9(2\varphi-3)}{4}+\frac{5(2\varphi-3)(\varphi-1)\sqrt{\varphi}}{2}+\frac{9(5-3\varphi)}{4}=\\&=-10\varphi+25+\frac{\sqrt{\varphi}}{2}\Bigg[-7\varphi+7+5\left[2\left(\varphi+1\right)-5\varphi+3\right]\Bigg]=-10\varphi+25+\\&+\frac{\sqrt{\varphi}}{2}\Bigg(-22\varphi+32\Bigg)=-10\varphi+25+(-11\varphi+16)\sqrt{\varphi}\end{aligned} \tag{152}$$

$$\begin{aligned}&\frac{7\varphi^2}{4}+\frac{7}{4}+\frac{9}{2\sqrt{\varphi}}-\frac{5}{2\varphi}+\frac{5}{2\varphi\sqrt{\varphi}}+\frac{9}{2\varphi^2}-\frac{7}{4\varphi^3}-\frac{7}{4\varphi^4}=\frac{7(\varphi+1)}{4}+\frac{7}{4}+\\&+\frac{9(\varphi-1)\sqrt{\varphi}}{2}-\frac{5(\varphi-1)}{2}+\frac{5(\varphi-1)(\varphi-1)\sqrt{\varphi}}{2}+\frac{9(2-\varphi)}{2}-\frac{7(2\varphi-3)}{4}-\\&-\frac{7(5-3\varphi)}{4}=-\frac{7\varphi}{2}+\frac{23}{2}+\frac{\sqrt{\varphi}}{2}\Bigg[9\varphi-9+5[(\varphi+1)-2\varphi+1]\Bigg]=\\&=-\frac{7\varphi}{2}+\frac{23}{2}+\frac{4\varphi+1}{2}\sqrt{\varphi}\end{aligned} \tag{153}$$

$$\begin{aligned}&\frac{5\varphi^2}{4}-\frac{9\varphi}{2}-\frac{5}{4}+\frac{7}{2\varphi}+\frac{7}{2\varphi\sqrt{\varphi}}+\frac{5}{4\varphi^3}+\frac{9}{2\varphi^3\sqrt{\varphi}}-\frac{5}{4\varphi^4}=\frac{5(\varphi+1)}{4}-\frac{9\varphi}{2}-\frac{5}{4}+\\&+\frac{7(\varphi-1)}{2}+\frac{7(\varphi-1)(\varphi-1)\sqrt{\varphi}}{2}+\frac{5(2\varphi-3)}{4}+\frac{9(2\varphi-3)(\varphi-1)\sqrt{\varphi}}{2}-\\&-\frac{5(5-3\varphi)}{4}=\frac{13\varphi}{2}-\frac{27}{2}+\frac{\sqrt{\varphi}}{2}\Bigg[7[(\varphi+1)-2\varphi+1]+9[2(\varphi+1)-5\varphi+3]\Bigg]=\\&=\frac{13\varphi}{2}-\frac{27}{2}+\frac{-34\varphi+59}{2}\sqrt{\varphi}\end{aligned} \tag{154}$$

Dostali sme otočený vektor $\mathsf{r}' = \begin{pmatrix} -10\varphi+25+(-11\varphi+16)\sqrt{\varphi} \\ -\frac{7\varphi}{2}+\frac{23}{2}+\frac{4\varphi+1}{2}\sqrt{\varphi} \\ \frac{13\varphi}{2}-\frac{27}{2}+\frac{-34\varphi+59}{2}\sqrt{\varphi} \end{pmatrix}$

2.3 Vlastnosti otáčania daného vzťahom $\mathbf{qrq}^{-1}$

Ak sa kvaternión q, ktorý je tvorený osou a uhlom rotácie dá rozložiť na súčin dvoch (alebo viac) kvaterniónov,

$$\mathsf{q} = \mathsf{tw},$$

potom platí

$$\mathsf{r}' = \mathsf{qrq}^{-1} = \mathsf{twr}(\mathsf{tw})^{-1} = \mathsf{t}(\mathsf{wrw}^{-1})\mathsf{t}^{-1}, \tag{155}$$

čiže rotácia v $\mathcal{R}^3$ daná súčinom kvaterniónov vzniká zložením rotácii daných týmito kvaterniónmi.

Veta 2.4. *Ku každej rotácii v* $SO(3)$ *existuje taký kvaternión* q*, že túto rotáciu možno zápisať ako* $\mathsf{r}' = \mathsf{qrq}^{-1}$ *.*

Na dokázanie tejto vety využijeme, že každé otočenie vzniká zložením párneho počtu symetrií (v trojrozmernom prípade dvoch). Stačí nám teda ukázať, že pre každú symetriu S ľubovoľného nenulového rýdzoimaginárneho kvaterniónu $\boldsymbol{r}$ okolo roviny V existuje taký rýdzoimaginárny kvaternión $\mathsf{z} \neq 0$, že $S(\boldsymbol{r}) = -\mathsf{zrz}^{-1}$. Ak je z rýdzoimaginárny a kolmý na rovinu V, obraz $\boldsymbol{r}$ podľa rovinnej symetrie dostaneme, ak od neho dvakrát odčítame jeho ortogonálnu projekciu na priamku danú vektorom $\boldsymbol{z}$

$$S(\mathsf{r}) = \mathsf{r} - 2\frac{\boldsymbol{r}^T\boldsymbol{z}}{\boldsymbol{z}^T\boldsymbol{z}}\mathsf{z} \tag{156}$$

Z (109) vieme, že pre rýdzoimaginárne kvaterniony t , w

$$2\boldsymbol{t}^T\boldsymbol{w} = -(\mathsf{tw} + \mathsf{wt})$$

Potom $\boldsymbol{z}^T\boldsymbol{z} = -\mathsf{z}^2$ a

$$S(\mathsf{r}) = \mathsf{r} - 2\frac{\boldsymbol{r}^T\boldsymbol{z}}{\boldsymbol{z}^T\boldsymbol{z}}\mathsf{z} = \mathsf{r} + 2\boldsymbol{r}^T\boldsymbol{z}\mathsf{z}^{-1} = \mathsf{r} - (\mathsf{rz} + \mathsf{zr})\mathsf{z}^{-1} = \mathsf{r} - \mathsf{r} - \mathsf{zrz}^{-1} = -\mathsf{zrz}^{-1} \tag{157}$$

Zloženie s druhou symetriou T okolo roviny G, na ktorú je kolmý kvaternión y

$$T(S(\mathsf{r})) = T(-\mathsf{zrz}^{-1}) = -\mathsf{y}(-\mathsf{zrz}^{-1})\mathsf{y}^{-1} = (\mathsf{yz})\mathsf{r}(\mathsf{yz})^{-1} = \mathsf{qrq}^{-1} \tag{158}$$

odstráni mínus a spolu s (155) máme vetu dokázanú. V skutočnosti existujú dva jednotkové kvaterniony, ktoré určujú tú istú rotáciu. Sú to q a - q. Toto je vidieť, ak do (125) dosadíme $a = -1$.

Kvaternión $\overline{\mathsf{q}}$ predstavuje inverznú rotáciu k rotácii pomocou q - rotáciu o ten istý ale záporný uhol

$$\mathsf{q} = \cos\frac{\theta}{2} + \underline{\mathsf{q}}\sin\frac{\theta}{2} \tag{159}$$

$$\overline{\mathsf{q}} = \cos\frac{\theta}{2} - \underline{\mathsf{q}}\sin\frac{\theta}{2} = \cos\left(-\frac{\theta}{2}\right) + \underline{\mathsf{q}}\sin\left(-\frac{\theta}{2}\right) \tag{160}$$

Vidno to aj z toho, že matice $L_{\overline{\mathsf{q}}}$ a R_{q} sú inverznými k maticiam L_{q} a $R_{\overline{\mathsf{q}}}$.

3 Rotačné matice a kvaternióny

V tejto časti sa budeme zaoberať súvisom medzi kvaterniónmi a maticami ako rôznymi vyjadreniami otočení v $\mathcal{R}^3$.

3.1 Maticový zápis kvaterniónov

V časti 2.1 sme videli, že každému kvaterniónu možno jednoznačne priradiť reálnu 4×4 maticu (násobenia zľava), a ak je kvaternión jednotkovej dĺžky, je táto matica z triedy $SO(4)$. Pripomeňme, že je to matica

$$\begin{pmatrix} q_0 & -q_1 & -q_2 & -q_3 \\ q_1 & q_0 & -q_3 & q_2 \\ q_2 & q_3 & q_0 & -q_1 \\ q_3 & -q_2 & q_1 & q_0 \end{pmatrix} \tag{161}$$

Vieme, že každej reálnej 4×4 matici tvaru

$$\begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix}, \tag{162}$$

kde A, B sú 2×2 bloky, možno priradiť komplexnú maticu

$$A + B\mathrm{i} \tag{163}$$

Komplexná matica reprezentujúca kvaternión je teda

$$\begin{pmatrix} q_0 + q_2\mathrm{i} & -q_1 + q_3\mathrm{i} \\ q_1 + q_3\mathrm{i} & q_0 - q_2\mathrm{i} \end{pmatrix} \tag{164}$$

Táto matica spĺňa $XX^H = I$, kde ^{H} značí Hermitovsky združenú maticu (transponovanú a po zložkách komplexne združenú). Naviac je determinant tejto matice rovný norme kvaterniónu. Ak je kvaternión jednotkovej dĺžky, je táto matica z $SU(2)$ (špeciálne unitárne 2×2 matice) .

3.2 Od kvaterniónu k rotačnej matici

Odvoďme maticu rotácie A

$$A\boldsymbol{r} = \mathsf{qrq}^{-1} \tag{165}$$

v $\mathcal{R}^3$ pomocou kvaterniónov. Najprv odvodíme maticu zobrazenia

$$\eta : \mathcal{R}^4 \to \mathcal{R}^4, \quad \eta(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{q}\boldsymbol{r}\boldsymbol{q}^{-1} \tag{166}$$

Nahradíme násobenie kvaterniónmi za násobenie maticami použijúc jednotkový kvaternión q

$$\mathsf{q}\mathsf{r}\mathsf{q}^{-1} = \mathsf{q}\mathsf{r}\overline{\mathsf{q}} = L_{\mathsf{q}}R_{\overline{\mathsf{q}}}\mathsf{r} = L_{\mathsf{q}}R_{\mathsf{q}}^T\mathsf{r} = \begin{pmatrix} q_0 & -q_1 & -q_2 & -q_3 \\ q_1 & q_0 & -q_3 & q_2 \\ q_2 & q_3 & q_0 & -q_1 \\ q_3 & -q_2 & q_1 & q_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_0 & q_1 & q_2 & q_3 \\ -q_1 & q_0 & -q_3 & q_2 \\ -q_2 & q_3 & q_0 & -q_1 \\ -q_3 & -q_2 & q_1 & q_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_0 \\ r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} q_0^2+q_1^2+q_2^2+q_3^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q_0^2+q_1^2-q_2^2-q_3^2 & 2q_1q_2-2q_0q_3 & 2q_0q_2+2q_1q_3 \\ 0 & 2q_1q_2+2q_0q_3 & q_0^2-q_1^2+q_2^2-q_3^2 & -2q_0q_1+2q_2q_3 \\ 0 & -2q_0q_2+2q_1q_3 & 2q_0q_1+2q_2q_3 & q_0^2-q_1^2-q_2^2+q_3^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_0 \\ r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix} \tag{167}$$

Keďže r reprezentuje trojrozmerný vektor, $r_0 = 0$ a teda

$$\begin{aligned} \mathsf{q}\mathsf{r}\mathsf{q}^{-1} &= \begin{pmatrix} q_0^2+q_1^2-q_2^2-q_3^2 & 2q_1q_2-2q_0q_3 & 2q_0q_2+2q_1q_3 \\ 2q_1q_2+2q_0q_3 & q_0^2-q_1^2+q_2^2-q_3^2 & -2q_0q_1+2q_2q_3 \\ -2q_0q_2+2q_1q_3 & 2q_0q_1+2q_2q_3 & q_0^2-q_1^2-q_2^2+q_3^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1-2q_2^2-2q_3^2 & 2q_1q_2-2q_0q_3 & 2q_0q_2+2q_1q_3 \\ 2q_1q_2+2q_0q_3 & 1-2q_1^2-2q_3^2 & -2q_0q_1+2q_2q_3 \\ -2q_0q_2+2q_1q_3 & 2q_0q_1+2q_2q_3 & 1-2q_1^2-2q_2^2 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} r_1(q_0^2+q_1^2-q_2^2-q_3^2)+r_2(2q_1q_2-2q_0q_3)+r_3(2q_0q_2+2q_1q_3) \\ r_1(2q_1q_2+2q_0q_3)+r_2(q_0^2-q_1^2+q_2^2-q_3^2)+r_3(-2q_0q_1+2q_2q_3) \\ r_1(-2q_0q_2+2q_1q_3)+r_2(2q_0q_1+2q_2q_3)+r_3(q_0^2-q_1^2-q_2^2+q_3^2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_1' \\ r_2' \\ r_3' \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{168}$$

Získali sme maticu rotácie $\mathcal{R}^3$ aj tvar otočeného vektora. Skúsme ešte vyjadriť túto maticu bez využitia kvaterniónov. Predpokladajme, že os rotácie χ je určená vektorom $\boldsymbol{0} \neq \boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix}^T$, pre zjednodušenie jednotkovým, a uhol otáčania je θ. Označme V rovinu kolmú na os rotácie. Potom rotáciu $\boldsymbol{u} \in \mathcal{R}^3$ môžme zjednodušiť na rotáciu v rovine V. Za osi si v tejto rovine zvolíme projekciu $\boldsymbol{u}$ na V , čiže $p_V(\boldsymbol{u})$ a vektor, ktorý je kolmý na na túto os aj na $\boldsymbol{w}$, čiže $\boldsymbol{w} \times p_V(\boldsymbol{u})$. Zachovajúc invariantnú zložku zobrazenia (projekciu $\boldsymbol{u}$ na $\boldsymbol{w}$, čiže $p_{\boldsymbol{w}}(\boldsymbol{u})$) dostávame

$$\chi_w(\boldsymbol{u}) = p_w(\boldsymbol{u}) + p_V(\boldsymbol{u})\cos\theta + \boldsymbol{w} \times p_V(\boldsymbol{u})\sin\theta \tag{169}$$

Projekčné matice na $\boldsymbol{w}$, V sú

$$\frac{\boldsymbol{w}\boldsymbol{w}^T}{\boldsymbol{w}^T\boldsymbol{w}} = \boldsymbol{w}\boldsymbol{w}^T \quad \text{,resp.} \quad I - \frac{\boldsymbol{w}\boldsymbol{w}^T}{\boldsymbol{w}^T\boldsymbol{w}} = I - \boldsymbol{w}\boldsymbol{w}^T \tag{170}$$

$\boldsymbol{w} \times p_V(\boldsymbol{u})$ vytvára vektor kolmý na rovinu generovanú týmito vektormi, ale tú istú rovinu generujú aj $\boldsymbol{w}, \boldsymbol{u}$ a teda

$$\boldsymbol{w} \times p_V(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{w} \times \boldsymbol{u} \tag{171}$$

Matica reprezentujúca vektorový súčin B má tvar

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad B\boldsymbol{u} = \boldsymbol{w} \times \boldsymbol{u} \tag{172}$$

Dosadením dostávame

$$\chi_w(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{w}\boldsymbol{w}^T\boldsymbol{u} + (I - \boldsymbol{w}\boldsymbol{w}^T)\boldsymbol{u}\cos\theta + \boldsymbol{w} \times \boldsymbol{u}\sin\theta \tag{173}$$

Spočítaním $\boldsymbol{w}\boldsymbol{w}^T, B^2$

$$\boldsymbol{w}\boldsymbol{w}^T = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & ab & ac \\ ab & b^2 & bc \\ ac & bc & c^2 \end{pmatrix} \tag{174}$$

$$B^2 = \begin{pmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b^2 - c^2 & ab & ac \\ ab & -a^2 - c^2 & bc \\ ac & bc & -a^2 - b^2 \end{pmatrix} \tag{175}$$

zistíme, že $\boldsymbol{w}\boldsymbol{w}^T - B^2 = I$, z čoho $\boldsymbol{w}\boldsymbol{w}^T = B^2 + I$ a rotačná matica má tvar

$$W = (B^2 + I) + (I - B^2 - I)\cos\theta + B\sin\theta = I + B\sin\theta + B^2(1 - \cos\theta) \tag{176}$$

Porovnajme A a W určujúce tú istú rotáciu. V matici A je q_0 rovné $\cos\frac{\theta}{2}$, a q_1, q_2, q_3 tvoria jednotkový vektor $\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix}^T$ vynásobený $\sin\frac{\theta}{2}$, ktorý určuje os rotácie. Môžme teda využijúc

$$2\sin^2\frac{\theta}{2} = 2 - 2\cos^2\frac{\theta}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2} + \sin^2\frac{\theta}{2} = 2 - \cos\theta - \sin^2\frac{\theta}{2} - \cos^2\frac{\theta}{2} = 1 - \cos\theta \tag{177}$$

písať

$$A = \begin{pmatrix} 1-2q_2^2-2q_3^2 & 2q_1q_2-2q_0q_3 & 2q_0q_2+2q_1q_3 \\ 2q_1q_2+2q_0q_3 & 1-2q_1^2-2q_3^2 & -2q_0q_1+2q_2q_3 \\ -2q_0q_2+2q_1q_3 & 2q_0q_1+2q_2q_3 & 1-2q_1^2-2q_2^2 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} 1-2b^2\sin^2\frac{\theta}{2}-2c^2\sin^2\frac{\theta}{2} & 2ab\sin^2\frac{\theta}{2}-2c\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2} & 2b\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}+2ac\sin^2\frac{\theta}{2} \\ 2ab\sin^2\frac{\theta}{2}+2c\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2} & 1-2a^2\sin^2\frac{\theta}{2}-2c^2\sin^2\frac{\theta}{2} & -2a\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}+2bc\sin^2\frac{\theta}{2} \\ -2b\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}+2ac\sin^2\frac{\theta}{2} & 2a\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}+2bc\sin^2\frac{\theta}{2} & 1-2a^2\sin^2\frac{\theta}{2}-2b^2\sin^2\frac{\theta}{2} \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} 1+(1-\cos\theta)(-b^2-c^2) & ab(1-\cos\theta)-c\sin\theta & b\sin\theta+ac(1-\cos\theta) \\ ab(1-\cos\theta)+c\sin\theta & 1+(1-\cos\theta)(-a^2-c^2) & -a\sin\theta+bc(1-\cos\theta) \\ -b\sin\theta+ac(1-\cos\theta) & a\sin\theta+bc(1-\cos\theta) & 1+(1-\cos\theta)(-a^2-b^2) \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{pmatrix} \sin\theta + \begin{pmatrix} -b^2-c^2 & ab & ac \\ ab & -a^2-c^2 & bc \\ ac & bc & -a^2-b^2 \end{pmatrix} (1-\cos\theta), \tag{178}$$

čo je presne tvar matice W. Oba postupy teda dávajú tú istú maticu.

Príklad 3.1. *Nájdeme maticu rotácie A v $\mathcal{R}^3$ okolo osi $\begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \end{pmatrix}^T$ o uhol $\frac{2\pi}{3}$. Najprv spočítajme q*

$$q = \left(\cos\frac{\pi}{3} + \frac{5}{3\sqrt{3}}\sin\frac{\pi}{3}\mathrm{i} - \frac{1}{3\sqrt{3}}\sin\frac{\pi}{3}\mathrm{j} - \frac{1}{3\sqrt{3}}\sin\frac{\pi}{3}\mathrm{k}\right) = \left(\frac{1}{2} + \frac{5}{6}\mathrm{i} - \frac{1}{6}\mathrm{j} - \frac{1}{6}\mathrm{k}\right) \tag{179}$$

Členy matice A získanej vzťahom (168) vyzerajú v tomto prípade takto

$$a_{11} = \frac{1}{4} + \frac{25}{36} - \frac{1}{36} - \frac{1}{36} = \frac{8}{9} \qquad a_{12} = -\frac{10}{36} + \frac{2}{12} = -\frac{1}{9} \tag{180}$$
$$a_{13} = -\frac{2}{12} - \frac{10}{36} = -\frac{4}{9} \qquad a_{21} = -\frac{10}{36} - \frac{2}{12} = -\frac{4}{9} \tag{181}$$
$$a_{22} = \frac{1}{4} - \frac{25}{36} + \frac{1}{36} - \frac{1}{36} = -\frac{4}{9} \qquad a_{23} = -\frac{10}{12} + \frac{2}{36} = -\frac{7}{9} \tag{182}$$
$$a_{31} = \frac{2}{12} - \frac{10}{36} = -\frac{1}{9} \qquad a_{32} = \frac{10}{12} + \frac{2}{36} = \frac{8}{9} \tag{183}$$
$$a_{33} = \frac{1}{4} - \frac{25}{36} - \frac{1}{36} + \frac{1}{36} = -\frac{4}{9} \tag{184}$$

Rotačná matica okolo osi $\begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \end{pmatrix}^T$ o uhol $\frac{2\pi}{3}$ má tvar

$$A = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 8 & -1 & -4 \\ -4 & -4 & -7 \\ -1 & 8 & -4 \end{pmatrix} \tag{185}$$

3.3 Od rotačnej matice ku kvaterniónu

Všimnime si, že rotačná matica obsahuje iba polynomiálne členy nanajvýš druhého stupňa. To z nej umožňuje ľahko vypočítať kvaternión určujúci rotáciu. Postup je nasledovný. Máme maticu

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-2q_2^2-2q_3^2 & 2q_1q_2-2q_0q_3 & 2q_0q_2+2q_1q_3 \\ 2q_1q_2+2q_0q_3 & 1-2q_1^2-2q_3^2 & -2q_0q_1+2q_2q_3 \\ -2q_0q_2+2q_1q_3 & 2q_0q_1+2q_2q_3 & 1-2q_1^2-2q_2^2 \end{pmatrix} \tag{186}$$

Z prvkov na diagonále máme

$$1+a_{11}+a_{22}+a_{33} = 4-4(q_1^2+q_2^2+q_3^2) = 4-4(1-q_0^2) \qquad q_0 = \pm\frac{\sqrt{1+a_{11}+a_{22}+a_{33}}}{2} \tag{187}$$

$$1+a_{11}-a_{22}-a_{33} = 4q_1^2 \qquad q_1 = \pm\frac{\sqrt{1+a_{11}-a_{22}-a_{33}}}{2} \tag{188}$$

$$1-a_{11}+a_{22}-a_{33} = 4q_2^2 \qquad q_2 = \pm\frac{\sqrt{1-a_{11}+a_{22}-a_{33}}}{2} \tag{189}$$

$$1-a_{11}-a_{22}+a_{33} = 4q_3^2 \qquad q_3 = \pm\frac{\sqrt{1-a_{11}-a_{22}+a_{33}}}{2} \tag{190}$$

a z tých mimo diagonály máme

$$a_{32}-a_{23} = 4q_0q_1 \qquad q_0q_1 = \frac{a_{32}-a_{23}}{4} \tag{191}$$

$$a_{13}-a_{31} = 4q_0q_2 \qquad q_0q_2 = \frac{a_{13}-a_{31}}{4} \tag{192}$$

$$a_{21}-a_{12} = 4q_0q_3 \qquad q_0q_3 = \frac{a_{21}-a_{12}}{4} \tag{193}$$

$$a_{23}+a_{32} = 4q_2q_3 \qquad q_2q_3 = \frac{a_{23}+a_{32}}{4} \tag{194}$$

$$a_{13}+a_{31} = 4q_1q_3 \qquad q_1q_3 = \frac{a_{13}+a_{31}}{4} \tag{195}$$

$$a_{12}+a_{21} = 4q_1q_2 \qquad q_1q_2 = \frac{a_{12}+a_{21}}{4} \tag{196}$$

Potrebujeme, aby výrazy pod odmocninami v (187) - (190) boli kladné. Nezáporné budú, lebo kvaternióny určujúce rotáciu existujú. Ale ak by boli nulové alebo blízke nule, nemohli by sme nimi neskôr deliť, resp. postup by mohol byť numericky nestabilný. Keďže existujú dva kvaternióny určujúce tú istú rotáciu, znamienko pri odmocnine si môžme vybrať. Ale iba pri jednom člene - zvyšné musíme dopočítať pomocou vzťahov (191) - (196). Ak je stopa (súčet prvkov na diagonále) A nezáporná, môžme začať s q_0, zvolíme napríklad plus a máme

$$q_0 = \frac{\sqrt{a_{11} + a_{22} + a_{33} + 1}}{2} \tag{197}$$

$$q_1 = \frac{a_{32} - a_{23}}{4q_0} \tag{198}$$

$$q_2 = \frac{a_{13} - a_{31}}{4q_0} \tag{199}$$

$$q_3 = \frac{a_{21} - a_{12}}{4q_0} \tag{200}$$

Inak je najjednoduchšie zvoliť si najväčší diagonálny člen, nech je v i - tom riadku, začneme s q_i a podobným postupom dopočítame zvyšné zložky kvaterniónu.

Oba postupy ilustrujeme na nasledujúcich dvoch príkladoch. V prvom bude stopa matice kladná, v druhom záporná.

Príklad 3.2. *Z rotačnej matice*

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{50} & -\frac{7}{\sqrt{50}} & \frac{7}{50} \\ \frac{7}{\sqrt{50}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{50}} \\ \frac{7}{50} & \frac{1}{\sqrt{50}} & \frac{49}{50} \end{pmatrix} \tag{201}$$

vypočítame kvaternión q určujúci rotáciu. Stopa matice $tr(A) = 1$ je kladná, začneme teda s vyjadrením q_0 a postupne dopočítame zvyšné zložky

$$q_0 = \frac{\sqrt{1 + \frac{1}{50} + 0 + \frac{49}{50}}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad q_1 = \frac{\frac{1}{\sqrt{50}} + \frac{1}{\sqrt{50}}}{4 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{50} \cdot 2 \cdot \sqrt{2}} = \frac{1}{10} \tag{202}$$

$$q_2 = \frac{\frac{7}{50} - \frac{7}{50}}{4 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}} = 0 \qquad q_3 = \frac{\frac{7}{\sqrt{50}} + \frac{7}{\sqrt{50}}}{4 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{14}{\sqrt{50} \cdot 2 \cdot \sqrt{2}} = \frac{7}{10} \tag{203}$$

$$\mathsf{q} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{10}\mathrm{i} + \frac{7}{10}\mathrm{k} = \cos\frac{\pi}{4} + \frac{\sqrt{2}}{10}\sin\frac{\pi}{4}\mathrm{i} + \frac{7\sqrt{2}}{10}\sin\frac{\pi}{4}\mathrm{k}, \tag{204}$$

ide teda o otočenie okolo osi $\begin{pmatrix}1 & 0 & 7\end{pmatrix}^T$ o uhol $\frac{\pi}{2}$.

Príklad 3.3. *Z rotačnej matice*

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{7\sqrt{5}-1}{20} & \frac{7+\sqrt{5}}{20} \\ \frac{7-\sqrt{5}}{20} & \frac{-7-25\sqrt{5}}{100} & \frac{37}{50} \\ \frac{7\sqrt{5}+1}{20} & -\frac{13}{50} & \frac{7-25\sqrt{5}}{100} \end{pmatrix} \tag{205}$$

určíme kvaternión q *určujúci rotáciu. Stopa tejto matice*

$$tr(A) = \frac{1}{2} + \frac{-7-25\sqrt{5}}{100} + \frac{7-25\sqrt{5}}{100} = \frac{1-\sqrt{5}}{2} < 0 \tag{206}$$

je záporná. Najväčší diagonálny člen je $\frac{1}{2}$ *v prvom riadku, ako prvé teda spočítame* q_1

$$\begin{aligned} q_1 &= \frac{\sqrt{1+\frac{1}{2}-\frac{-7-25\sqrt{5}}{100}-\frac{7-25\sqrt{5}}{100}}}{2} = \frac{\sqrt{\frac{100+50+7+25\sqrt{5}-7+25\sqrt{5}}{100}}}{2} \\ &= \frac{\sqrt{150+50\sqrt{5}}}{20} = \frac{\sqrt{6+2\sqrt{5}}}{4} = \frac{1+\sqrt{5}}{4} \end{aligned} \tag{207}$$

a potom pomocou neho zvyšné zložky q

$$q_0 = \frac{-\frac{13}{50}-\frac{37}{50}}{4\cdot\frac{1+\sqrt{5}}{4}} = \frac{-1}{1+\sqrt{5}} = \frac{1-\sqrt{5}}{4} \tag{208}$$

$$q_2 = \frac{\frac{7\sqrt{5}-1}{20}+\frac{7-\sqrt{5}}{20}}{4\cdot\frac{1+\sqrt{5}}{4}} = \frac{6(1+\sqrt{5})}{20(1+\sqrt{5})} = \frac{3}{10} \tag{209}$$

$$q_3 = \frac{\frac{7+\sqrt{5}}{20}+\frac{7\sqrt{5}+1}{20}}{4\cdot\frac{1+\sqrt{5}}{4}} = \frac{8(1+\sqrt{5})}{20(1+\sqrt{5})} = \frac{2}{5} \tag{210}$$

Kvaternión, ktorý určuje tú istú rotáciu ako A *, má tvar*

$$\begin{aligned} \mathsf{q} &= \frac{1-\sqrt{5}}{4} + \frac{1+\sqrt{5}}{4}\mathrm{i} + \frac{3}{10}\mathrm{j} + \frac{2}{5}\mathrm{k} = \\ &= \cos\frac{3\pi}{5} + \frac{1+\sqrt{5}}{4}\sqrt{\frac{8}{5+\sqrt{5}}}\sin\frac{3\pi}{5}\mathrm{i} + \frac{3}{10}\sqrt{\frac{8}{5+\sqrt{5}}}\sin\frac{3\pi}{5}\mathrm{j} + \frac{2}{5}\sqrt{\frac{8}{5+\sqrt{5}}}\sin\frac{3\pi}{5}\mathrm{k}, \end{aligned} \tag{211}$$

čiže ide o rotáciu okolo osi $\begin{pmatrix} 5+5\sqrt{5} \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix}$ *o uhol* $\frac{6\pi}{5}$.

Záver

V tejto práci sme sa venovali vzťahom medzi ortogonálnymi transformáciami a kvaterniónmi.

V prvej kapitole sme najprv uviedli, čo bolo motiváciou k objaveniu kvaterniónov , v časti 1.2 sme načrtli idey ukryté za ich nekomutatívnym násobením a potom sme popísali ich základné vlastnosti. V druhej kapitole sme ukázali, že za istých podmienok je násobenie kvaterniónov ortogonálnou transformáciou, a v časti 2.2 sme uviedli a dokázali spôsob, ako tento poznatok využiť k rotovaniu vektorov v trojrozmernom priestore pomocou vzorca (122). Z hľadiska prínosu práce je najdôležitejšia tretia kapitola, v ktorej sú podrobne rozpracované postupy pre prechody medzi rôznymi vyjadreniami ortogonálnych transformácii. Od abstraktného vzorca (122) sme v časti 3.2 prešli pomocou polárneho tvaru (90) k ortogonálnej matici (168). Od tejto matice sme potom v časti 3.3 prešli naspäť k vyjadreniu tejto transformácie pomocou súčinu kvaterniónov (187 - 196). Tým sme splnili cieľ práce.

Tieto vedomosti sme overili vytvorením programu v jazyku Matlab, ktorý sme ilustrovali na príklade otočenia trojrozmerného objektu (snehuliaka). Táto práca môže byť prínosom pre ľudí, ktorí sa začínajú venovať tejto oblasti, lebo prináša ucelený pohľad na danú problematiku a všetky postupy sú aj podrobne ilustrované na príkladoch.

Zoznam použitej literatúry

[1] Branets, V. N., Shmyglevskiy, I. P.: *Primenenije Kvaternionov v Zadachakh Orientatsii Tverdogo Tela*, Nauka, Moskva, 1973

[2] EuklideanSpace: *Conversion matrix to quaternion*, dostupné na internete (07.05.2012) : http://www.euclideanspace.com/maths/geometry/rotations/conversions /matrixToQuaternion/index.htm

[3] Gallier, J.: *Geometric Methods and Applications*, Springer Verlag, New York, 2001

[4] Girard, P. R.: *Quaternions, Clifford Algebras and Relativistic Physics*, Birkhäuser Verlag AG, Basel , 2007

[5] Toth, G.: *Glimpses of Algebra and Geometry* , Second Edition, Springer Verlag , New York, 2002

Zdrojový kód a ukážka použitia programu pre rotáciu

Nižššie sú uvedené zdrojové kódy dvoch programov v jazyku Matlab. Prvý vypočíta rotačnú maticu a druhý pomocou nej rotuje vektory.

function A = Rotacna_matica(a, b, c, fi)

format long

real = cos($fi/2$);

imag = [$a; b; c$];

q = sin($fi/2$)*imag/norm(imag);

A = [$1 - 2 * q(2)\hat{}2 - 2 * q(3)\hat{}2 \quad 2 * q(1) * q(2) - 2{*}\mathrm{real}{*}q(3) \quad 2{*}\mathrm{real}{*}q(2) + 2 * q(1) * q(3); 2 * q(1) * q(2) + 2{*}\mathrm{real}{*}q(3) \quad 1 - 2 * q(1)\hat{}2 - 2 * q(3)\hat{}2 \quad - 2{*}\mathrm{real}{*}q(1) + 2 * q(2) * q(3); -2{*}\mathrm{real}{*}q(2) + 2{*}q(1){*}q(3) \quad 2{*}\mathrm{real}{*}q(1) + 2{*}q(2){*}q(3) \quad 1 - 2{*}q(1)\hat{}2 - 2{*}q(2)\hat{}2$];

disp(R);

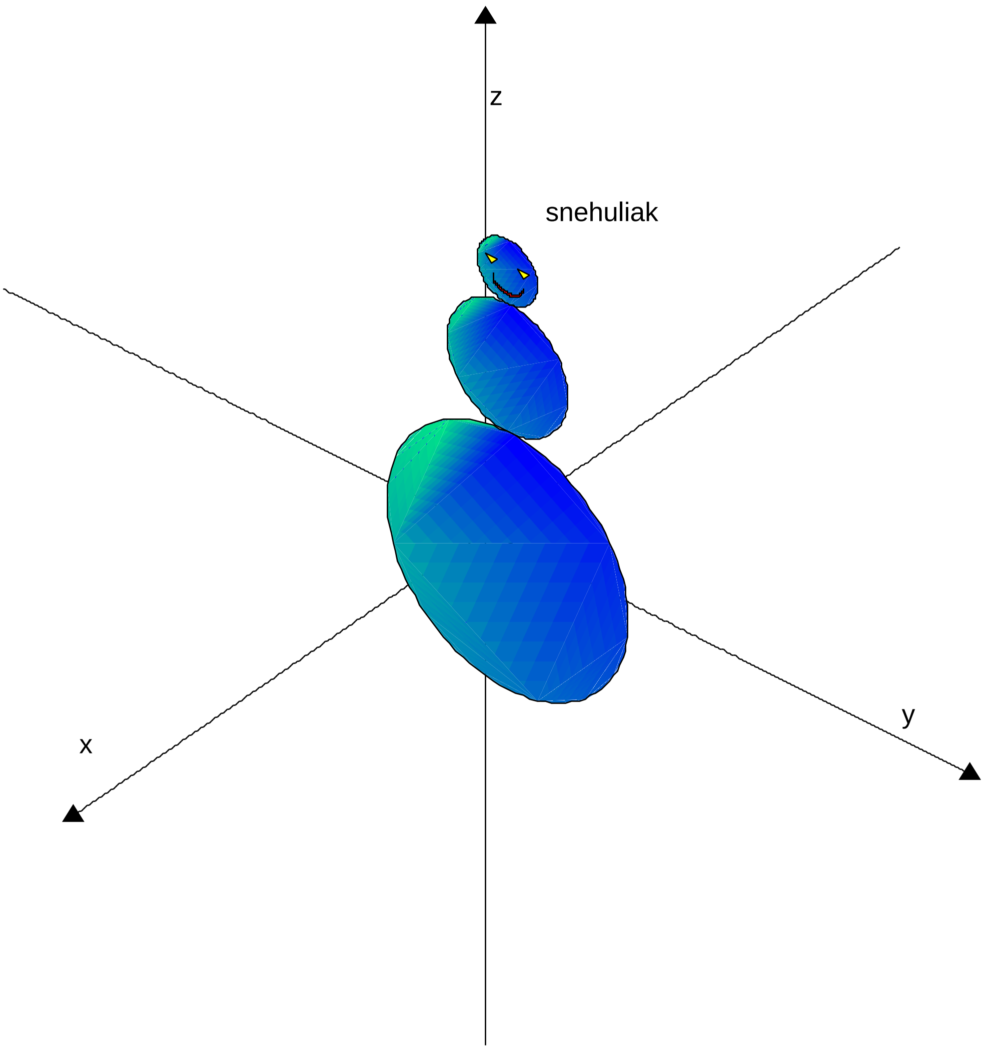
function rr = rotacia(a, b, c, fi, r)

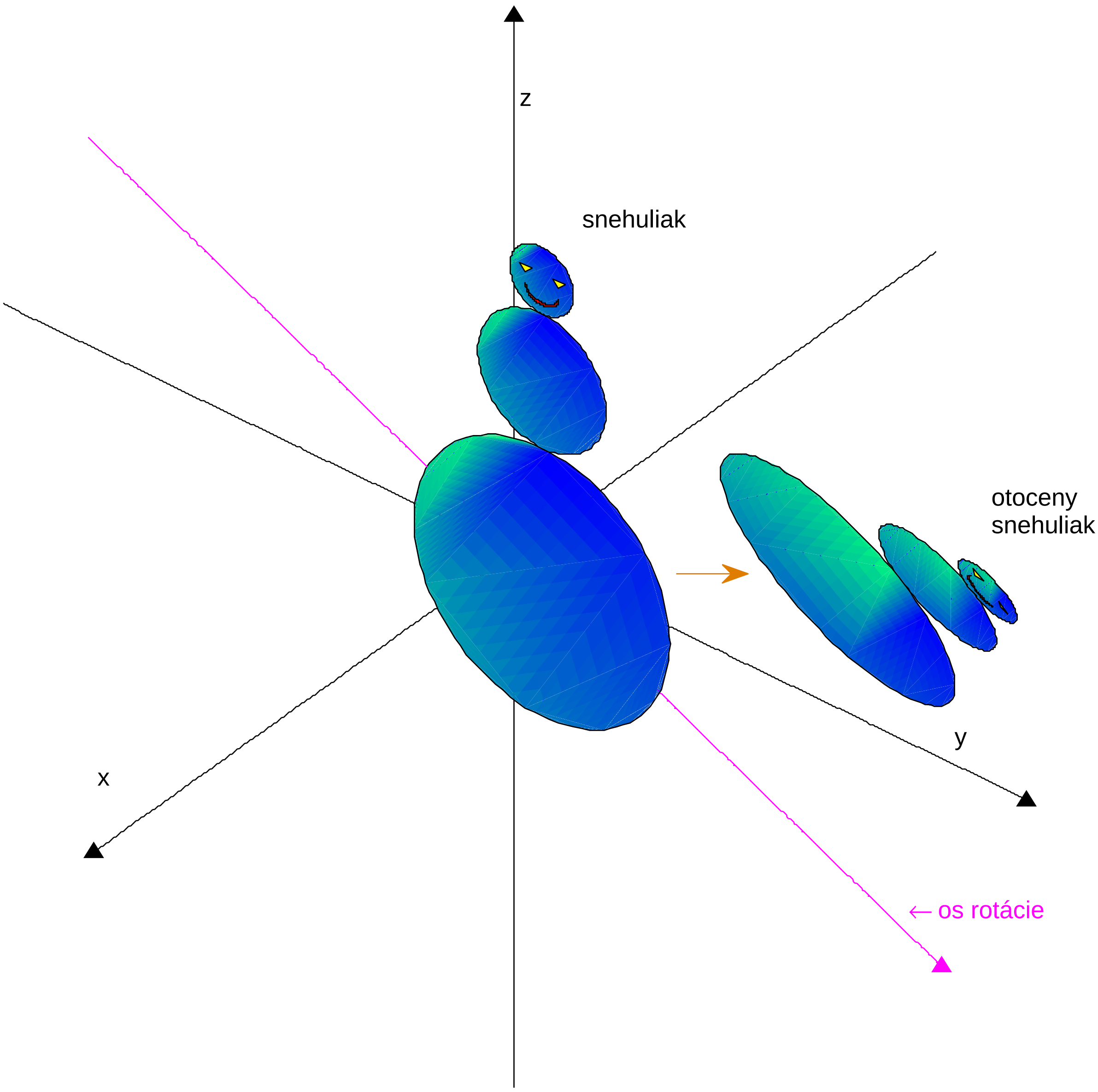
format long

rr = Rotacna_matica(a, b, c, fi) $* r$;

disp (rr);

Následuje ukážka použitia týchto programov. Na ďalších stranách je vykreslený dvojrozmerný snehuliak pred a po otočení. Ide o otočenie okolo osi $\begin{pmatrix} 1 & 5 & -1 \end{pmatrix}^T$ o uhol $\frac{9\pi}{7}$.


z
snehuliak
x
y


z
snehuliak
otoceny
snehuliak
y
x
← os rotácie