UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY
A INFORMATIKY

MERANIE ÚROKOVÝCH RIZÍK DLHOPISOVÉHO PORTFÓLIA

BAKALÁRSKA PRÁCA

2012

Michal KATRENČÍK

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY

MERANIE ÚROKOVÝCH RIZÍK DLHOPISOVÉHO PORTFÓLIA

BAKALÁRSKA PRÁCA

Študijný program:	Ekonomická a finančná matematika
Študijný odbor:	1114 Aplikovaná matematika
Školiace pracovisko:	Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky
Vedúci práce:	Mgr. Martin Harcek

Bratislava 2012

Michal KATRENČÍK

37374562

Univerzita Komenského v Bratislave
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

ZADANIE ZÁVEREČNEJ PRÁCE

Meno a priezvisko študenta: Michal Katrenčík
Študijný program: ekonomická a finančná matematika (Jednoodborové štúdium, bakalársky I. st., denná forma)
Študijný odbor: 9.1.9. aplikovaná matematika
Typ záverečnej práce: bakalárska
Jazyk záverečnej práce: slovenský

Názov: Meranie úrokových rizík dlhopisového portfólia

Cieľ: Spracovať a navrhnúť inovatívne prístupy k meraniu úrokového rizika dlhopisového portfólia.

Vedúci: Mgr. Martin Harcek

Dátum zadania: 15.10.2011

Dátum schválenia: 27.10.2011

doc. RNDr. Margaréta Halická, CSc.
garant študijného programu

....
študent

....
vedúci

Poďakovanie Touto cestou by som sa chcel poďakovat vedúcemu bakalárskej práce Mgr. Martinovi Harcekovi za veľkú ochotu stretnúť sa v prípade nejasností, alebo mi kedykoľvek poradiť aj cez telefón a nasmerovať ma na správnu koľaj. Jeho odborné rady pre mňa boli veľkým prínosom a veľa som sa od neho naučil.

Abstrakt v štátnom jazyku

KATRENČÍK, Michal: Meranie úrokových rizík dlhopisového portfólia [Bakalárska práca], Univerzita Komenského v Bratislave, Fakulta matematiky, fyziky a informatiky, Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky; školiteľ: Mgr. Martin Harcek, Bratislava, 2012, 60 s.

Práca sa zaoberá úrokovým rizíkom dlhopisového portfólia a metódami jeho merania. V úvodných dvoch kapitolách sa venujeme teoretickým znalostiam o dlhopisoch, oceňovaniu dlhopisov a postupom merania úrokového rizika. Následne odvodíme statický model dlhopisového portfólia a sformulujeme Vašíčkov jednofaktorový model. V poslednej kapitole teoretické znalosti aplikujeme na reálne dáta, popíšeme postup na získanie parametrov okamžitej úrokovej miery, numericky vypočítame staticky optimálne portfólia v matematickom software-i Matlab, vykonáme porovnania jednotlivých portfólií a stresové testovanie. Jedným z cieľov práce je uviesť čitateľa do sveta dlhopisov a dlhopisového trhu, aby po prečítaní uvodných dvoch kapitol nadobudol základné poznatky o danej téme. Ďaľším cieľom práce je poukázať na verejnosťou zanedbávaný a vo finančníctve málo použivaný statický model dlhopisového portfólia, aplikovať ho na reálne dáta a pokúsiť sa skúmať jeho výkonnosť na báze očakávaný výnos/variancia. V práci sa nám v podstate podarilo splniť všetky stanovené ciele a v niektorých experimentoch vyšli zaujímavé výsledky.

Kľúčové slová: Dlhopis, Durácia, Konvexita, Stresové testovanie, Statické dlhopisové portfólio, Vašíčkov model

Abstract

KATRENČÍK, Michal: Measuring interest rate risks of bond portfolio [Bachelor Thesis], Comenius University in Bratislava, Faculty of Mathematics, Physics and Informatics, Department of Applied Mathematics and Statistics; Supervisor: Mgr. Martin Harcek, Bratislava, 2012, 60p.

Our work is devoted to investigating interest rate risks of bond portfolio and its measurements. In the first two chapters we introduce theoretic bond concepts, principles of bond markets, bond pricing theory and methods for measuring interest rate risks. Consequently we derive and analyze model of static bond portfolio and we formulate Vasicek's one-factor model. In the last chapter we apply theoretical concepts for real-data experiments, we explain procedure for short rate parameters estimation and we obtain static optimal bond portfolios with help of mathematical software Matlab. Moreover we accomplish optimal portfolios comparison and stress testing. One of the targets of this work is to present the reader into the world of bonds and bonds market, so that after reading first two chapters he will gain the basic knowledge about the theme. Another target is to point to the model of static bond portfolio, which is quite ignored by public and not very used in finance industry. Also we want to analyze the performance of this model on the mean-variance framework basis. In our work we were quite successful with completing our targets and we obtained very interesting results in some experiments.

Keywords: Bond, Duration, Convexity, Stress testing, Yield risk, Static bond portfolio, Vasicek's model

Obsah

Zoznam obrázkov

Zoznam tabuliek

Zoznam použitých symbolov

OTC trh - tzv. over-the-counter decentralizovaný trh

p.a. - z latinského per anuum, v preklade ročný

$\boldsymbol{P}$ - súčasná hodnota, cena dlhopisu

$\boldsymbol{P(T_0, T)}$ - súčasná hodnota, cena dlhopisu pri spojitom úročení na obdobie od T_0 do T

$\boldsymbol{F}$ - nominálna hodnota dlhopisu

$\boldsymbol{T}$ - maturita, čas splatnosti dlhopisu

$\boldsymbol{C}$ - kupón - udáva sa v percentách z nominálnej hodnoty p.a.

$\boldsymbol{\delta}$ - interval kupónových platieb, dlhopis s $\delta = 0,5$ vypláca kupóny polročne

$\boldsymbol{r_n}$ - spotová úroková sadzba v percentách p.a. na dobu n rokov

$\boldsymbol{R(T_0, T)}$ - spojitý úrok na obdobie od T_0 do T

YTM - z anglického Yield To Maturity, v preklade výnos do splatnosti

AV - alikvotný úrokový výnos

par - z anglického par value - za dlhopis zaplatíme 100% nominálnej hodnoty

$\boldsymbol{D}$ - durácia dlhopisu

$\boldsymbol{K}$ - konvexita dlhopisu

short *sale* - predaj aktíva bez jeho fyzického vlastníctva

buy and hold - stratégia nákupu a statického držania aktíva

Úvod

Dlhopisy patria medzi najviac obchodované inštrumenty na kapitálového trhu. Vedomosti o dlhopisoch a princíp fungovania dlhopisového trhu sú veľmi dôležité hlavne pre ľudí so záujmom pracovať v bankovníctve a oblasti risk manažmentu. Práve v súčasnej dobe, kedy sa naplno prejavuje dlhová kríza v Európe, ale aj v celom svete, je táto problematika veľmi aktuálna a zvýšený dopyt po odborníkoch z tejto oblasti je vysoko pravdepodobný. Považujem za dôležité aby čitateľ bez vedomostí z teórie dlhopisov bol schopný postupným čítaním nahliadnuť do tejto problematiky, preto som sa snažil prácu písať zrozumiteľne a postupne plynulo prejsť od teórie k praktickým kapitolám.

Práca je rozdelená na 4 kapitoly. Prvá kapitola je venovaná teórii dlhopisov a dlhopisovému trhu, dlhovej kríze v Európskej únii a vybraným častiam z oceňovania dlhopisov. V druhej kapitole sa budeme venovať teórií merania úrokových rizík, opíšeme duráciu a konvexitu dlhopisu. Tretia kapitola sa zaoberá modelom statického dlhopisového portfólia, jeho odvodeniu [6] a Vašíčkovým jednofaktorovým modelom. V poslednej kapitole sme získané teoretické znalosti aplikovali na reálne historické dáta, kde sme pri práci použili matematický software Matlab. Na záver sme interpretovali výsledky našich empirických testov.

Pri získavaní teoretických vedomostí potrebných na písanie úvodných častí práce mi pomohli hlavne práce [1], [3], [4], [5], kde je uvedená problematika detailne spracovaná. V praktickejších kapitolách to boli práce [2], [6], [7] z ktorých som čerpal vedomosti o metódach použitých v tejto práci.

1 Úvod do teórie a oceňovania dlhopisov

1.1 Základné poznatky

Dlhopis - dlhopis je cenný papier vydaný emitentom, ktorý sa zaväzuje plniť držiteľovi podmienky uvedené pri jeho emitovaní. Väčšinou sa jedná o splácanie dohodnutých peňažných tokov - kupónov vo vopred dohodnutých časoch, a nominálnej hodnoty v deň maturity dlhopisu. Dlhopisy sú obchodovateľné na burze prípadne na OTC trhu - teda obchod prebieha priamo medzi dvoma stranami, ktoré si stanovujú individuálne podmienky. Dlhopis je inými slovami pôžička, ktorú emitent získa jeho emitovaním od investorov na kapitálovom trhu, ktorí inkasujú výnos z dlhopisu za riziko, ktoré pri jeho kúpe podstupujú .

Emitovanie dlhopisov a dlhopisový trh - dlhopisy sa emitujú inštitúciami na primárnom trhu - väčšinou sú to banky, poisťovne alebo agentúry poverené touto činnosťou. Najbežnejšou formou emitovania je úpis - celý objem, ktorý chce spoločnosť emitovať je odkúpený bankou/inštitúciou ktorá ho rozpredá na trhu menším investorom. Pri štátnych dlhopisoch to prebieha formou takzvaných dlhopisových aukcií, kde sa zúčastňujú banky, poisťovne, penzijné a hedge-ové fondy ale aj súkromní investori. Priebeh aukcie - prebieha to systémom verejnej ponuky - každý investor uvedie nominálnu hodnotu a výnos za ktorý je ochotný dlhopis kúpiť, a štát si vyberie investorov s najnižším výnosom kým nenaplní objem, ktorý si chce emisiou dlhopisov požičať. Čím menší bol priemerný výnos na aukcii tým viac investori veria v schopnosť štátu splácať svoje záväzky a teda požadujú za svoje riziko menší výnos. V opačnom prípade to znamená, že investori považujú štát za rizikovú investíciu a požadujú vyšší výnos, čo sťažuje možnosti štátu financovať svoje výdavky. Ďaľším dôležitým indikátorom úspešnosti aukcie je tzv. bid-to-cover ratio - popisuje dopyt po emitovaných dlhopisoch, je definovaný ako pomer súčtu celkových ponúknutých nominálnych hodnôt dlhopisu od investorov k celkovému objemu dlhopisov, ktoré štát chcel na aukcii emitovať. Čím je pomer vyšší tým úspešnejšie aukcia prebehla.
Po emitovaní sa s dlhopismi voľne obchoduje na sekundárnom trhu - burza alebo OTC trh, vďaka tomu investor môže dlhopis predať pred dátumom splatnosti.

1.1.1 Rozdelenie dlhopisov

Rozdelenie dlhopisov podľa typu emitenta:

- **Štátne -** emituje ich štát, prípadne organizácia poverená štátom - na Slovensku je to ARDAL - Agentúra pre riadenie dlhu a likvidity. Považujú sa za najviac bezpečné a teda poskytujú aj najnižší výnos, ale na druhej strane sú najviac likvidné a najviac obchodované (hlavne nemecké a americké štátne dlhopisy). Sú obľúbené aj pre menších investorov, pretože sa dajú obchodovať od nízkych nominálnych hodnôt - niektoré od nominálnej hodnoty 1000 eur.
- **Municipálne -** sú emitované krajom, mestom alebo miestnou agentúrou. Zvyčajne sa používajú na zlepšenie infraštruktúry v kraji, prípadne na financovanie projektov a považujú sa za bezpečné. Niekedy sú oslobodené od daní.
- **Korporátne -** emitujú ich väčšinou len veľké spoločnosti (kvôli vysokým nákladom pri emitovaní) s dobrou povesťou a finančným zázemím ako alternatívu k pôžičke v banke resp. financovaniu emitovaním nových akcií.
  Považujú sa za rizikovejšie ako štátne, ale ponúkajú vyššie výnosy.
- **Štátne pokladničné poukážky -** sú emitované centrálnou bankou, väčšinou majú kratšiu dobu splatnosti a považujú sa za bezpečnú investíciu. Ich nevýhodou je, že najmenšia obchodovateľná nominálna hodnota ŠPP je väčšinou značne vyššia ako u štátnych dlhopisov a preto niesú prístupné širokej verejnosti.

Rozdelenie dlhopisov podľa doby splatnosti:

- **krátkodobé -** doba splatnosti do 5 rokov
- **strednodobé -** doba splatnosti od 5 do 10 rokov
- **dlhodobé -** doba splatnosti 10 a viac rokov

Rozdelenie dlhopisov podľa kupónu:

- **Bezkupónový dlhopis -** je to dlhopis pri ktorom sa držiteľovi nevyplácajú pravidelné kupónové platby. Kupujúci realizuje zisk kúpou bezkupónového dlhopisu za cenu nižšiu ako par, a následným obdržaním nominálnej hodnoty v deň splatnosti.

- **Kupónový dlhopis -** je to dlhopis, pri ktorom držiteľ dlhopisu dostáva časť výnosov v pravidelných intervaloch počas doby splatnosti vo forme kupónov a v deň splatnosti obdrží posledný kupón a celú nominálnu hodnotu dlhopisu. Najčastejšie sa vypláca kupón v polročných alebo ročných intervaloch. Kupón je uvedený pri emitovaní dlhopisu a je udávaný v percentách z nominálnej hodnoty p.a. Taktiež existujú dlhopisy s variabilnými kupónovými platbami (tzv. step-up notes) - ako príklad uvedieme kupónový dlhopis, pri ktorom prvé dva roky investor obdrží 5% kupón a každý ďaľší rok sa kupón zvýši o 0,5%. Ďaľším typom kupónových dlhopisov sú dlhopisy s oneskoreným začatím vyplácania kupónu (tzv. deferred coupon bonds).

- **Dlhopisy s pohyblivým kupónom -** sú to dlhopisy, ktorých kupón zvyčajne závisí od úrokových sadzieb na medzibankovom trhu, kde ako príklad uvádzame londýnsku medzibankovú sadzbu LIBOR publikovanú Asociáciou britských bankárov (British Bankers Association), za ktorú si banky medzi sebou požičiavajú americké doláre na určité obdobia. Pri dlhopisoch s pohyblivým kupónom sa často využívajú obmedzenia na veľkosť kupónu - tzv. cap (maximálna výška kupónu) a tzv. floor (minimálna výška kupónu). Taktiež existujú dlhopisy naviazané na infláciu, väčšinou štátne - naviazané na inflačný index CPI (consumer price index - v preklade index spotrebiteľských cien), v USA sa nazývajú TIPS (z anglického Treasury Inflation Protected Securities).

1.1.2 Riziká pri investovaní do dlhopisov

Pri investícii do dlhopisov existujú mnohé rizikové faktory, ktoré ovplyvňujú výnos. V tejto kapitole opíšeme hlavné riziká spojené s investíciou do dlhopisov, ktoré by sme mali zohľadniť pri investovaní do dlhopisov. Pri čerpaní teoretických znalostí o nasledovných typoch rizík nám pomohla hlavne práca [1].

- **Úrokové riziko -** je jedným z najväčších rizík pri investovaní (nielen do dlhopisov) a jeho problematike je venovaných veľké množstvo prác a článkov. Úrok (napríklad bezriziková úroková miera) je zahrnutý takmer vo všetkých vzťahoch pre oceňovanie finančných a nefinančných aktív. Z tohto dôvodu je pre investora chrániaceho svoj majetok dôležité vedieť toto riziko merať a prípadne aj meniť podľa svojho rizikového profilu. Metódam merania úrokového rizika sa budeme venovať v kapitole 2.

- **Riziko inflácie -** vysoká inflácia alebo očakávania vyššej inflácie sú veľmi nepriaznivé pre výnos, lebo ho znehodnocujú - znižujú nákupnú silu budúcich peňažných tokov. Vysoká inflácia taktiež vedie ku zvyšovaniu úrokových sadzieb centrálnou bankou, na čo dlhopisy reagujú poklesom ceny a rastom výnosu. V prípade kúpy dlhopisu s výnosom 3% a následnom raste inflácie na 4% investor na investícii prerobí - jeho skutočný výnos bude -1% kvôli poklesu v nákupnej sile.

- **Kreditné riziko -** je riziko neschopnosti emitenta dlhopisu plniť svoje záväzky, ktoré má voči jeho držiteľom. Niekedy to pre investora nemusí znamenať stratu celej investovanej čiastky. Napríklad pri korporátnych dlhopisoch, v prípade defaultu emitenta sú držitelia dlhopisov uprednostnení pred akcionármi pri vyplácaní záväzkov, ktoré spoločnosť mala pred defaultom. Kreditné riziko je monitorované ratingovými agentúrami. Najznámejšie sú Standard and Poor's, Fitch a Moody's . Tieto agentúry analyzujú kreditnú situáciu štátov a spoločnosti na základe čoho im priraďujú rating, ktorého výška je nepriamo úmerná kreditnému riziku daného subjektu. Dlhopisy s vysokým ratingom sa nazývajú dlhopisy s investičnou triedou a jedná sa väčšinou o štátne dlhopisy. Taktiež existujú dlhopisy, ktoré sú označené termínom "junk"(v preklade odpad) - sú to cenné papiere s nízkym ratingom a sú využité hlavne na špekulatívne účely (ponúkajú vysoký výnos).

- **Riziko zníženia ratingu -** pri znížení ratingu dochádza k poklesu ceny dlhopisu kvôli výpredajom na sekundárnom trhu - hlavne od penzijných a podielových fondov, ktoré v portfóliu zvyčajne môžu držať iba dlhopisy s vysokým ratingom. Taktiež investori a inštitúcie na kapitálovom trhu budú pravdepodobne požadovať vyšší výnos pri ďalšej emisii, čo môže znamenať problémy subjektu pri financovaní ďalších výdavkov. Ďaľším problémom pri znížení ratingu je následné zníženie likvidity na sekundárnom trhu.

- **Riziko likvidity -** pri kúpe dlhopisu, je pre investora dôležitá dostatočná likvidita - schopnosť predať ho pred dátumom splatnosti na sekundárnom trhu. Riziko nižšej likvidity existuje hlavne pri niektorých korporátnych dlhopisoch, ale aj pri štátnych (v súčasnosti prípad gréckych štátnych dlhopisov).

- **Menové riziko -** existuje v prípade kúpy dlhopisu denominovaného v zahraničnej mene. Ako príklad uvedieme slovenského investora kupujúceho dlhopis denominovaný v amerických dolároch. V posilnenia kurzu EURUSD počas doby splatnosti dlhopisu, pri obdržaní kupónu v USD a následnej menovej konverzii do domácej meny EUR, investor realizuje menovú stratu kvôli depreciácii USD voči EUR.

1.2 Dlhová kríza v EÚ

V tejto časti opíšeme počiatky a dôvody vzniku dlhovej krízy v periférnych krajinách Európskej únie a znázorníme analýzu situácie na dlhopisových trhoch krajín PIIGS, ktorá bola spracovaná k začiatku roka 2012. Pri písaní tejto kapitoly nám pomohli hlavne články z webovej stránky www.euractiv.sk.

1.2.1 Počiatky dlhovej krízy

Grécko : V predchádzajúcich rokoch bolo Grécko považované za vyspelú ekonomiku a z pohľadu kreditného rizika za bezpečnú krajinu, kedy výnosy na štátnych dlhopisoch boli porovnateľné s Nemeckom a inými vyspelými krajinami. Napriek tomu reálna fiškálna a ekonomická situácia bola zlá z dôvodou nižšej konkurencieschopnosti voči ostatným krajinám v EU. Grécka ekonomika je závislá hlavne na turizme, lodnej doprave a službách, čo sú odvetvia vo veľkej miere závislé na hospodárskych cykloch, pričom reálny výrobný priemysel je málo rozvinutý. Po finančnej kríze sa to naplno prejavilo, Gréci si nekontrolovateľne požičiavali a koncom roku 2009 pri nástupe novej gréckej vlády sa prevalilo vykazovanie falošných štatistických údajov štatistickému úradu Európskej únie - Eurostat. Mali jeden z najvyšších deficitov štátneho rozpočtu v Európe - 15,4% HDP v roku 2009 a verejný dlh takmer 130% HDP. Po týchto udalostiach nasledovali zníženia ratingov od ratingových agentúr a panika na trhu s gréckymi štátnymi dlhopismi, ktorých výnosy začali dosahovať historické maximá. K vzniku dlhovej krízy v Grécku taktiež vo veľkej miere prispela vysoká korupcia, problémy s daňovým systémom, vysoké dôchodky a platy štátnych zamestnancov, pričom vačšina gréckej populácie je zamestnaná práve v štátnej správe.

Írsko : Najvačším problémom v Írsku bola realitná bublina, ktorú financovali miestne banky. Kvôli neschopnosti ľudí splácať a následnemu poklesu cien nehnuteľností sa veľké írske banky ako Anglo Irish Bank, Allied Irish Bank, Bank of Ireland dostali do problémov. V roku 2008 sa írska vláda zaručila za depozity v domovských bankách a ich dlhopisy, a začala tieto problémové banky rekapitalizovať - zriadili na to tzv. National Asset Management Agency (v preklade Národná agentúra na správu aktív), ktorá mala za úlohu odstrániť toxické aktíva zo šiestich najvačších bánk. Celá táto štátna pomoc bankám bola veľmi nákladná a v roku 2010 tvorila až 32% HDP. Trh si uvedomil rizikovú situáciu v krajine - bol znížený rating a začali sa zvyšovať rizikové prirážky na írskych štátnych dlhopisoch. Po týchto udalostiach bola írska vláda nútená požiadať o medzinárodnú pomoc Európsku úniu (EU), Európsku centrálnu banku (ECB) a Medzinárodný menový fond (MMF), ktorí im požičali vo výške 85 miliárd eur. Írsko ako jediná krajina PIIGS napĺňala všetky následné dohody a stanovené fiškálne škrty aby zlepšila svoju fiškálnu situáciu, a má najväčšie predpoklady aby sa zo zlej dlhovej situácie rýchlo zotavilo. V súčanosti aj výnosy na štátnych dlhopisoch klesli pod maximové úrovne zo začiatku dlhovej krízy.

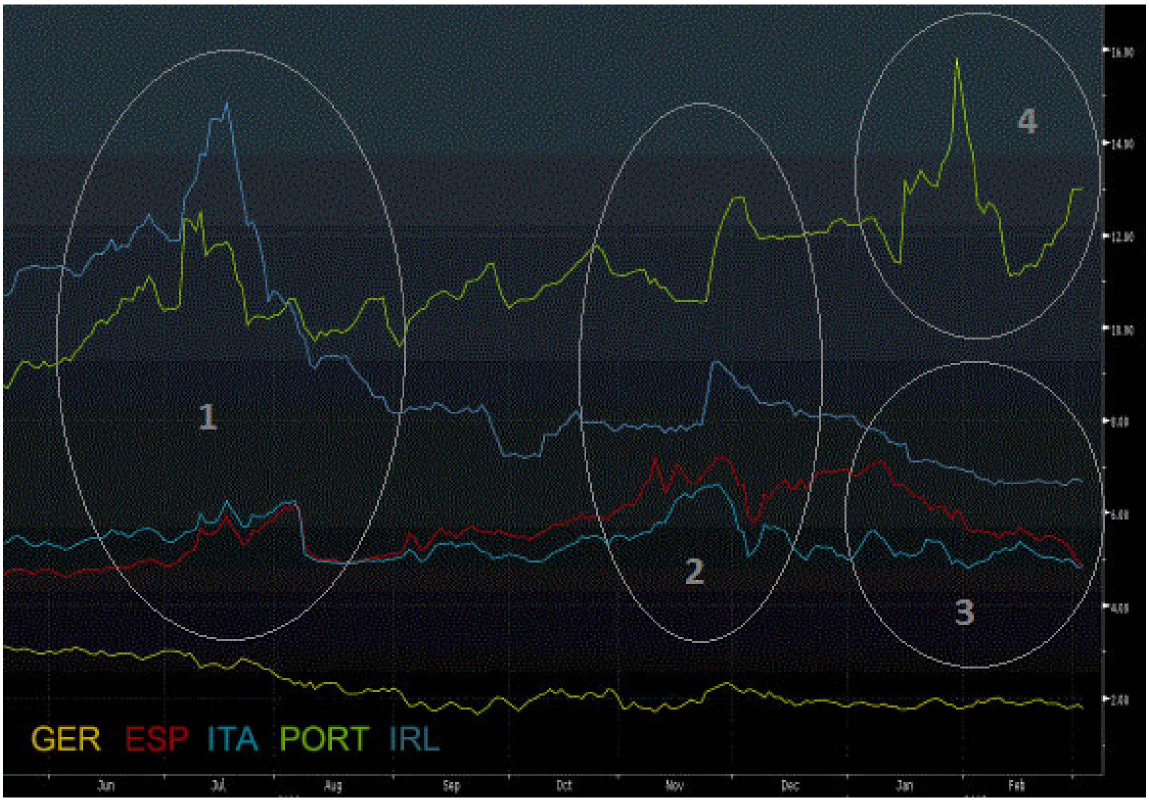
Portugalsko : Po Írsku a Grécku sa pod drobnohľad trhu dostalo aj Portugalsko, kvoli rastúcemu verejnému dlhu a vysokému štátnemu deficitu - 9,4% HDP v roku 2009 (všetky krajiny sa zaviazali v Európskom pakte stability na držaní deficitu do 3% HDP). Následne v lete roku 2010 ratingová agentúra Moody's znížila Portugalsku rating z Aa2 na A1, po čom nasledovalo zníženie ratingu od ďaľších agentúr. Na trhu s portugalskými štátnymi dlhopismi začala panika a výpredaje kvoli neistote a strachu z celkovej dlhovej situácie v EU. Výnosy na 10-ročných portugalských štátnych dlhopisoch dosiahli hranicu 7%, čo bola hranica pri ostatných krajinách PIIGS, kedy museli požiadat o pomoc MMF a EU - Portugalsko dostalo pôžičku 78 miliárd eur. Dôvodov prečo táto situácia vznikla je niekoľko - posledné desaťročia veľmi zlé hospodárenie so štátnymi peniazmi - prehnané bonusy a platy manažérom štátnych podnikov, platenie mnohých nepotrebných a neefektívnych poradenských firiem, nezmyselné nakladanie s prostriedkami z európskych štrukturálnych fondov a v posledných rokoch aj vyššia nezamestnanosť - viac ako 11% populácie.

Taliansko : Talianska ekonomika je na tom lepšie oproti ďalším krajinám PIIGS. Priemysel je celkom dobre rozvinutý, štátny deficit nepresahoval v problémových rokoch 5% HDP, taktiež štátny dlh má dlhšiu maturitu a veľká časť je v rukách domácich investorov. Problémom je ale jeho veľkosť, kvôli ktorej sa dostávali talianske dlhopisy pod tlak a rástli ich výnosy. Taliansko je tretím najväčším dĺžníkom na svete s celkovým dlhom viac ako 2,3 triliónov eur (116% HDP, čo je po Grécku najvyššie v EU). Na jeseň 2011 ratingové agentúry Moody's a Standard and Poor's znížili Taliansku rating, čo vyvolalo ďalšie výpredaje štátnych dlhopisov. V súčasnosti došlo k zmene vlády a k prijatiu úsporných opatrení ako zvýšenie veku na odchod do dôchodku, alebo odpredaj časti štátneho majetku. Výnosy na dlhopisoch stále rastú aj napriek pravidelným intervenciám ECB, ktorá dlhopisy skupuje na sekundárnom trhu, čím znižuje ich výnos, ktorý pri väčšine splatností prekonal 7%. Dokonca v polovici novembra 2011 sme mohli vidieť slabšiu inverziu na výnosovej krivke, kde výnos 2-ročných dlhopisov bol vyšší ako pri 10-ročných dlhopisoch - niečo podobné sa stalo pri gréckych dlhopisoch a je to jeden zo signálov očakávania defaultu krajiny.

Španielsko - veľmi vysoká nezamestnanosť - v októbri 2011 až 21% , vysoký deficit štátneho rozpočtu a vysoký rast verejného dlhu - aj keď jeho veľkost stále nieje kritická (60% HDP). Začali presadzovať politiku fiškálnych škrtov, čo ale poškodilo ekonomickému rastu a ekonomické ukazovatele sa začali výrazne zhoršovať.

1.2.2 Situácia na dlhopisovom trhu krajín PIIGS

V minulom roku boli pohyby cien na trhu štátnych dlhopisov krajín Európskej únie závislé hlavne od kreditného rizika a dlhovej krízy v Európe. Teda zmeny trhových úrokových sadzieb a zmeny očakávaní v súvislosti s úrokovými sadzbami na trhu (úrokové riziko) nemali na vplyv cien štátnych dlhopisov taký výrazný vplyv ako v čase stability finančného sektora a svetovej ekonomiky. Na obrázku č.1 sú znázornené výnosy 10 ročných štátnych dlhopisov krajín PIIGS a Nemecka (žltá krivka v spodnej časti grafu) pre porovnanie. Ako si môžeme všimnúť, výnosy 10 ročných nemeckých štátnych dlhopisov sú veľmi nízke (2%) a sú negatívne korelované s dlhopismi krajín PIIGS - rast výnosov dlhopisov krajín PIIGS znamená pokles výnosu nemeckých dlhopisov. Je to spôsobené silným ekonomickým postavením Nemecka, ktoré je považované za subjekt s minimálnym kreditným rizikom - najvyšší možný stupeň ratingu. Z týchto dôvodov sú nemecké štátne dlhopisy považované za bezpečnú investíciu (tzv. safe haven, v preklade bezpečný prístav) a v prípade problémov vo svete a v časoch ekonomickej neistoty, investori predávajú rizikové aktíva, vyberajú peniaze z rizikových fondov a preferujú investície do nemeckých dlhopisov čo tlačí ich výnos nadol. Na obrázku č.1 sú vyznačené obdobia (1),(2),(3),(4) ktoré podrobne opíšeme v nasledujúcom odseku.



Obr. 1: Výnosy štátnych dlhopisov krajín PIIGS

Prehľad dôležitých udalostí ktoré ovplyvnili výnosy na dlhopisoch :

- 6. apríl 2011 - Portugalsko požiadalo o medzinárodnú pomoc.
- máj 2011 - Grécky rating bol znížený do špekulatívneho pásma.

(1) Obdobie Jún-August 2011 bolo veľmi volatilné na svetových finančných trhoch kvôli problémom v Grécku a celkovému prehĺbeniu dlhovej krízy. Veľký podiel na neistote mali rokovania o novom dlhovom strope v USA. V tomto období dosahovali výnosy na niektorých štátnych dlhopisoch historické maximá - napríklad írske štátne dlhopisy s maturitou 10 rokov dosahovali výnos 15%.

- 23. jún 2011 - krízový summit európskeho parlamentu, bolo schválené ESM - Európsky stabilizačný mechanizmus.

- 29. jún 2011 - Grécky parlament schválil niektoré požadované úsporné balíčky.
- 21. júl 2011 - ďaľší krízový summit Európskeho parlamentu a hláv štát krajín Európskej únie, kde sa dohodli na odsúhlasení druhého finančného balíka Grécku.

Po týchto udalostiach sa situácia na krátky čas stabilizovala a výnosy na dlhopisoch klesli - hlavne írske, ktoré si následovný trend udržali aj naďalej kvôli dôslednému plneniu predom dohodnutých zmluv, zavedeniu významných škrtov v štátnom rozpočte a celkovému zlepšeniu fiškálnej situácie v krajine.

(2) Situácia začala byť opäť vážna keď nastali problémy so schválením Eurovalu vo viacerých krajínách Európskej únie - September - Október 2011. Problémy nastali aj na Slovensku - boli sme poslednou krajinou, ktorá Euroval schválila. V tom období si účastníci na finančných trhoch začali uvedomovať veľké štrukturálne problémy EÚ, byrokraciu a problém dohodnúť sa medzi jednotlivými krajinami. Boli načrtnuté možné riešenia dlhovej krízy ako spoločné euro-dlhopisy, finančná transakčná daň, spoločná fiškálna únia, ale nič z toho sa nerealizovalo z dôvodu rozdielnych názorov medzi jednotlivými krajinami. V tomto období trh upriamil pozornosť na Taliansko a Španielsko - výnos na štátnych dlhopisoch dosahoval kritické hodnoty 7% a ich rast donútil ECB k intervenciám na dlhopisovom trhu.

(3) V tomto období bola situácia na finančných trhoch stabilná, čo sa prejavilo aj rastom mnohých rizikových aktív. Ekonomické ukazovatele vo svete boli pozitívne, aukcie dlhopisov ohrozených krajín prebehli bez problémov a s nižšími výnosmi ako pri posledných aukciách. Situácia sa zlepšila aj v Grécku, kde sa prijali ďaľšie fiškálne škrty, bola mu odpustená veľká časť dlhu a dostalo ďalšiu finančnú tranžu. K zlepšeniu situácie výrazne prispela aj ECB, ktorá najprv koncom roka dvakrát znížila úrokové sadzby na naštartovanie ekonomiky, a zaviedla program LTRO(z anglického Long-Term Refinancing Operations - v preklade dlhodobé refinančné operácie). Sú to 3-ročné pôžičky komerčným bankám poskytnuté za veľmi výhodných podmienok. Tento program bol zameraný na zvýšenie likvidity a kapitálovej primeranosti komerčných bánk. V dvoch kolách LTRO si banky požičali takmer 1 trilión eur, čo malo veľmi pozitívny efekt na finančný trh - peniaze boli investované aj do štátnych dlhopisov čím tlačili ich výnosy nadol. Tento fakt bolo možné pozorovať hlavne pri talianskych a španielskych dlhopisoch, ktorých výnos klesol k úrovni 5%.

(4) Výnos na portugalských štátnych dlhopisoch neklesol, ale naopak na začiatku silno rástol na rekordnú úroveň 16%. Bolo to spôsobené zlou fiškálnou situáciou v krajine a obavami finančného trhu, že Portugalsko znova požiada medzinárodné spoločenstvo o finančnú pomoc. Výnos gréckych štátnych dlhopisov s maturitou 10 rokov, ktorý nie je znázornený na obrázku č.1 rástol za posledných 12 mesiacov v súvislom trende z 13% na 30%.

1.3 Oceňovanie dlhopisov

V tejto kapitole sa budeme venovať teórii oceňovania dlhopisov. Postupne si prejdeme oceňovanie bezkupónových a kupónových dlhopisov, časovú štruktúru úrokových mier a výnos do splatnosti. Pri písaní tejto časti sme čerpali poznatky hlavne z práce [5], kde sú uvedené všetky potrebné vzťahy pre výpočet cien dlhopisov. Pri oceňovaní dlhopisov sa používa podobný prístup ako pri iných aktívach, kedy sa snažíme vypočítať súčasnú hodnotu očakavaných peňažných tokov pomocou diskontácie bezrizikovou úrokovou mierou. Súčet týchto diskontovaných peňažných tokov je rovný súčasnej hodnote dlhopisu (P).

1.3.1 Bezkupónový dlhopis

Najjednoduchšie je oceňovanie bezkupónového dlhopisu, ktorý obsahuje jediný peňažný tok v deň splatnosti, kedy investor obdrží nominálnu hodnotu dlhopisu.

Vzťah pre výpočet ceny bezkupónového dlhopisu pri diskrétnom úročení:

$$P = \frac{F}{(1 + r_n)^n}. \tag{1}$$

Pri spojitom úročení sa cena bezkupónového dlhopisu dá vyjadriť ako:

$$P = Fe^{-R(T_0,T)(T-T_0)}. \tag{2}$$

Podľa rovnice (2) vieme vyjadriť spojitý úrok ako:

$$R(T_0,T) = -\frac{1}{T-T_0}\ln P(T,T_0). \tag{3}$$

1.3.2 Časová štruktúra úrokových mier

Pomer nominálnej hodnoty dlhopisu s maturitou 1 rok a jeho ceny je rovný ročnej spotovej úrokovej miere. Pri dlhopisoch s dlhšou maturitou vieme spotovú úrokovú mieru vyjadriť z rovnice (1). Vypočítaním spotových úrokových mier pre rôzne maturity daného dlhopisu môžeme vyskladať krivku výnosov pre bezkupónové dlhopisy (tzv. časovú štruktúru úrokových mier), ktorá vyjadruje závislosť úrokovej miery od maturity dlhopisu.

<ins>Tvary časovej štruktúry úrokových mier:</ins>

- **Rastúca -** dlhopis s dlhšou maturitou má vyšší výnos ako dlhopis s kratšou maturitou ($akT_1 < T_2 \Rightarrow r_1 < r_2$). Pre ich ceny platí opačná nerovnosť ($ak\ T_1 < T_2 \Rightarrow P_1 > P_2$). Investor kupujúci dlhopis s dlhšou maturitou požaduje vyšší výnos z dôvodu, že investícia má dlhšiu návratnosť a podstupuje vyššie riziko vývoja ekonomiky a úrokových sadzieb (taktiež aj dlhodobé ekonomické, inflačné, úrokové predpovede sú nepresnejšie ako tie krátkodobé). Táto situácia na krivke výnosov nastáva v prípade normálneho fungovania ekonomiky a stability vzhľadom na očakávania budúcich úrokových sadzieb.

- **Klesajúca -** ak je menej priaznivá ekonomická situácia, v prípade očakávania poklesu úrokových sadzieb na trhu, alebo očakávania defaultu - podobné ako súčasný pripad gréckych štátnych dlhopisov.

1.3.3 Kupónový dlhopis

Pri oceňovaní kupónových dlhopisov je postup o niečo náročnejší, pretože dostávame pravidelné peňažné toky vo forme kupónových platieb v pravidelných intervaloch. Každý takýto peňažný tok musíme diskontovať inou úrokovou mierou z časovej štruktúry úrokových mier. Ak sa na trhu nenachádza dostatočné množstvo bezkupónových dlhopisov z ktorých by sme vyjadrili časovú štruktúru úrokových mier, použijeme na to kupónové dlhopisy s pomocou Bootstrap metódy, ktorej postup je detailne popísaný v práci [5].

Vzťah pre výpočet ceny kupónového dlhopisu pri diskrétnom úročení:

$$P = \sum_{i=1}^{n} \frac{C}{(1+r_i)^i} + \frac{F}{(1+r_n)^n}. \tag{4}$$

Vzťah pre výpočet ceny kupónového dlhopisu pri spojitom úročení:

$$P = \sum_{i=1}^{n} C\delta e^{-R(T_0,T_i)(T_i-T_0)} + Fe^{-R(T_0,T_n)(T_i-T_n)},\ kde\ T_i = T_0 + i\delta. \tag{5}$$

1.3.4 Alikvotný úrokový výnos

Pri kupónových dlhopisoch a ich obchodovaní na sekundárnom trhu treba brať do úvahy alikvotný úrokový výnos (AÚV) - čiastka ktorá sa nazbierala od posledného vyplateného kupónu do času predaja dlhopisu. Kupón sa zvyčajne vypláca pravidelne v periodických platbách, najčastejšie ročne alebo polročne. Ak investor kúpi dlhopis v období medzi kupónovými platbami, obdrží nasledujúci kupón aj v prípade ak dlhopis nevlastnil počas celej periódy. Predchádzajúci držiteľ dlhopisu sa vzdal alikvotného úrokového výnosu. Na sekundárnom trhu s dlhopismi vo väčšine prípadov kupujúci musí predávajúcemu AÚV zaplatiť a za dlhopis zaplatí tzv. net(full) cenu.

1.3.5 Výnos do splatnosti

Výnos do splatnosti je očakávaný ročný percentuálny výnos, ktorý investor obdrží v prípade, ak bude držať dlhopis do splatnosti a reinvestuje každú kupónovú platbu pri tom istom výnose ([1]) - keďže nevieme presne povedať aký bude tento reinvestičný výnos, YTM je len odhad. Inými slovami je to výnos pri ktorom sa trhová cena dlhopisu rovná súčasnej hodnote jeho peňažných tokov. Pri bezkupónových dlhopisoch je výnos do splatnosti rovný spotovej úrokovej miere daného dlhopisu, čo jednoznačne vyplýva zo vzťahu (6).

Vzťah pre výpočet YTM pri diskrétnom úročení:

$$P = \sum_{i=1}^{n} \frac{C}{(1+y)^i} + \frac{F}{(1+y)^n}. \tag{6}$$

Vzťah pre výpočet YTM pri spojitom úročení:

$$P = \sum_{i=1}^{n} C\delta e^{-y(T_i - T_0)} + Fe^{-y(T_i - T_n)}. \tag{7}$$

<u>Jednoduchou úvahou sa dá ukázať (pozri [5]):</u>

- časová štruktúra úrokových mier rastúca => y < r_n.
- časová štruktúra úrokových mier klesajúca => y > r_n.

<u>Pri kupónových dlhopisoch platí (pozri [1]):</u>

- C = YTM => P = par (dlhopis kúpime za 100% nominálnej hodnoty).
- C < YTM => P < par (dlhopis kúpime so zľavou).
- C > YTM => P > par (dlhopis kúpime s prirážkou - prémia za vyšší kupón).

2 Meranie úrokových rizík

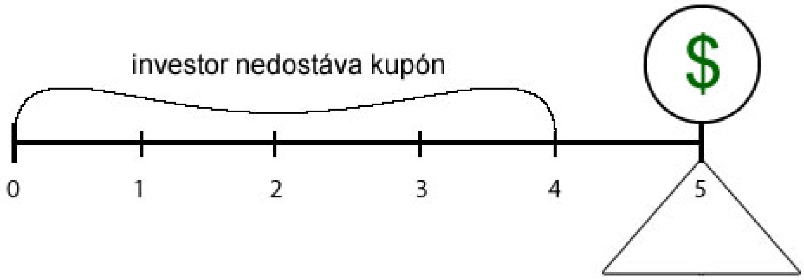
V tejto kapitole čitateľovi priblížime metódy merania úrokového rizika. Postupne popíšeme najznámejšiu metódu merania úrokového rizika duráciu a jej rôzne modifikácie. Ukážeme ako menej známa veličina - konvexita, zapadá do konceptu merania úrokového rizika. Vzťahy a definície jednotlivých durácií sme formulovali pomocou práce [5].

2.1 Durácia

Durácia, alebo priemerná doba splatnosti dlhopisu je riziková miera vyjadrujúca približnú citlivosť dlhopisu na zmenu úrokovej miery. Inak povedané, je to približná percentuálna zmena ceny dlhopisu pri pararelnom pohybe časovej štruktúry úrokových mier o 100 bázických bodov (1 %). Pohyb úrokovej miery a ceny dlhopisov je nepriamo úmerný - keď jedno klesá druhé rastie. Napríklad v prípade paralelného poklesu úrokovej sadzby o 1% by sa cena dlhopisu s duráciou 3 mala zvýšiť približne o 3%. Čím má dlhopis dlhšiu maturitu tým má väčšsiu duráciu. Z tohto dôvodu v časoch neistoty ohľadom úrokových sadzieb, investori preferujú kúpu dlhopisov s kratšou maturitou kvôli ich menšej durácii. V prípade očakávania znižovania úrokových sadzieb investori preferujú dlhopisy s dlhšou maturitou, ktoré sa im vďaka vysokej durácií výrazne zhodnotia.

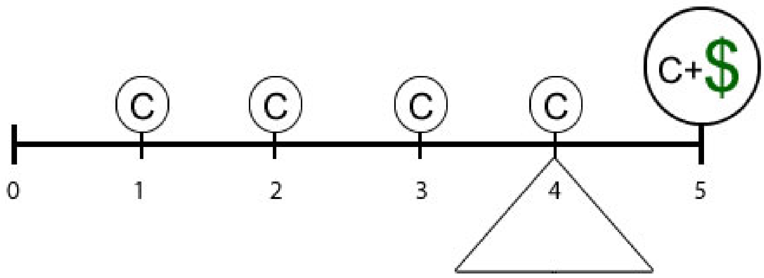
2.1.1 Súvis durácie s veľkostou kupónu :

- **Bezkupónový dlhopis :** Na obrázku č.2 môžeme vidieť peňažné toky pri bezkupónovom dlhopise s maturitou 5 rokov a jeho duráciu. Durácia (priemerná dĺžka splatnosti) bezkupónového dlhopisu sa rovná jeho maturite, keďže počas života dlhopisu investor nedostáva kupón. Jediný peňažný tok, ktorý obdrží je nominálna hodnota dlhopisu v deň splatnosti.



Obr. 2: Bezkupónový dlhopis s maturitou 5 rokov

- **Kupónový dlhopis :** Na obrázku č.3 sú zobrazené peňažné toky kupónového dlhopisu s maturitou 5 rokov. Pri kupónovom dlhopise je durácia vždy menšia ako jeho maturita a je nepriamo úmerná výške jeho kupónu. Investor v priebehu života dlhopisu dostáva peňažné toky - kupóny, ktoré znižujú priemernú dobu splatnosti dlhopisu. Čím je kupón vyšší, tým viac sa priemerná doba splatnosti zniži.



Obr. 3: Kupónový dlhopis s maturitou 5 rokov

Durácia sa mení počas životnosti dlhopisu - postupne klesá so zmenšujúcim sa časom do maturity a v deň splatnosti kupónu sa nárazovo zvýši (pozri [1]).

2.1.2 Typy durácie:

Definícia 2.1 (Fisher-Weilova durácia). *Ak uvažujeme* ***spojité*** *úročenie, postupnosť jednotlivých platieb označíme* $(X_{t1},\ X_{t2},\ \ldots,\ X_{tn})$*, krivku spotových úrokových mier* r_t*, kde* $t_1 \leq t_2 \leq\ \cdots\ \leq t_n$ *a veľkosť paralelného posunu* r_t *označíme* γ*. Potom súčasná hodnota peňažného toku má tvar* $P = \sum_{i=1}^{n} X_{ti} e^{-r_{ti} t_i}$*.*
Fisher - Weilovu duráciu definujeme ako :

$$D_{FW} = \frac{1}{P} \sum_{i=1}^{n} t_i X_{ti} e^{-r_{ti} t_i}. \tag{8}$$

V rovnici (8) zvolíme substitúciu $w_i = \frac{1}{P}(X_{ti} e^{-r_{ti} t_i})$, z čoho vyplýva: $\sum\limits_{i=1}^{n} w_i = 1$ a $D_{FW} = \sum\limits_{i=1}^{n} w_i t_i$, čo je vážený priemer časov jednotlivých peňažných tokov.
Navyše platí nerovnosť: $t_1 \leq DFW \leq t_n$.

Definícia 2.2 (Kvázimodifikovaná durácia). *Ak uvažujeme* ***diskrétne*** *úročenie m-krát za rok, postupnosť jednotlivých platieb označíme* $(X_1,\ X_2,\ \ldots,\ X_n)$*, spotová úroková miera nech je* r_i *, perióda vyplácania kupónov* $\frac{1}{m}$ *a veľkosť paralelného posunu* r_t *označíme* γ*. Potom súčasná hodnota peňažného toku má tvar* $P = \sum\limits_{i=1}^{n} X_i (1 + \frac{r_i}{m})^{-i}$*.*
Kvázimodifikovanú duráciu definujeme ako :

$$D_Q = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} (\frac{i}{m}) X_i (1 + \frac{r_i}{m})^{-(i+1)}}{\sum\limits_{i=1}^{n} X_i (1 + \frac{r_i}{m})^{-i}}. \tag{9}$$

<u>Pre zmenu hodnoty dlhopisu platí :</u>

- spojité úročenie : $\triangle P \approx -P\gamma D_{FW}$
- diskrétne úročenie : $\triangle P \approx -P\gamma D_Q$

Fisher-Weilova a Kvázimodifikovaná durácia sú zložitejšie a menej používané vo finančnej praxi. Berú do úvahy celú časovú štruktúru úrokových mier a každý peňažný tok diskontujú relevantným výnosom z časovej štruktúry. Tento postup je dôležitý hlavne pri dlhopisoch s vyššou maturitou, kde sa môžu výnosy z časovej štruktúry pre rôzne časové obdobia výrazne odlišovať.

Definícia 2.3 (Macaulayova durácia). *Označme postupnosť jednotlivých platieb* $(X_1,\ X_2,\ \ldots,\ X_n)$*, výnos do splatnosti* $YTM = y$ *, periódu vyplácania kupónov* $\frac{1}{m}$*. Potom súčasná hodnota peňažného toku má tvar* $P = \sum_{i=1}^{n} X_i(1+\frac{y}{m})^{-i}$*.*
Macaulayovu duráciu definujeme ako :

$$D = \frac{\sum_{i=1}^{n} (\frac{i}{m}) X_i (1+\frac{y}{m})^{-i}}{P}. \tag{10}$$

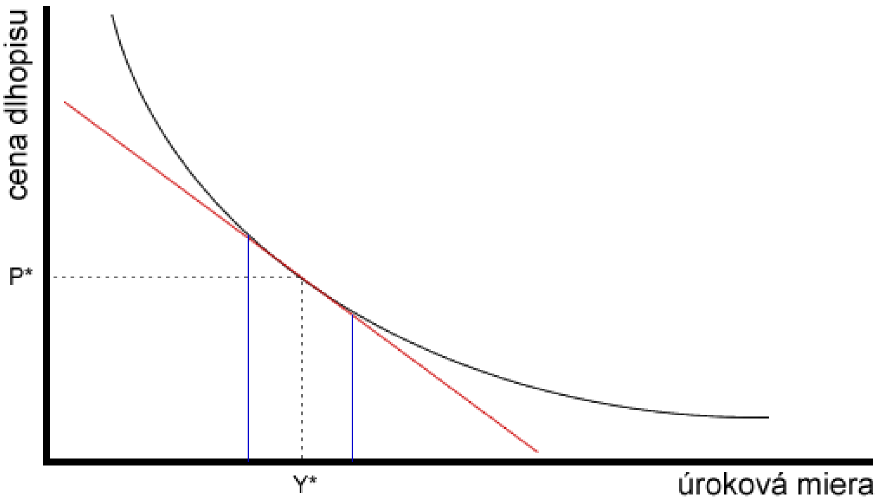
Modifikovanú duráciu definujeme ako :

$$D_M = \frac{D}{1+\frac{y}{m}}. \tag{11}$$

Macaulayova durácia je inými slovami vážená priemerná maturita peňažných tokov, pričom ako diskontný faktor používa YTM. Modifikovaná durácia je odvodená z Macaulayovej a je najviac používaná na finančných trhoch. Modifikovaná durácia berie v úvahu meniace sa úrokové miery, ktoré ovplyvňujú YTM a aj našu duráciu. Pre zmenu hodnoty dlhopisu platí : $\triangle P \approx -PD_M \triangle y$, teda modifikovaná durácia je percentuálna zmena ceny dlhopisu pri zmene YTM o 1%.

2.1.3 Obrázková ilustácia durácie

Na obrázku č.4 vidíme závislosť ceny dlhopisu od úrokovej miery (YTM) - je to konvexná krivka. Teda v prípade výrazného rastu úrokovej miery cena dlhopisu poklesne o relatívne malú hodnotu. Naopak, v prípade prudkého poklesu úrokovej miery zaznamenáme výrazný nárast ceny dlhopisu. Durácia (dotyčnica ku krivke v bodoch súčasnej ceny P* a úrokovej miery Y*) je dostatočne presná pri menších pohyboch úrokovej miery (medzi dvoma modrými priamkami), ale v prípade výrazného pohybu úrokovej miery nedostatočne aproximuje našu konvexnú krivku, čo ďalej rozvinieme v časti 2.2 o konvexite dlhopisu.



Obr. 4: Krivka závislosti ceny dlhopisu od úrokovej miery

2.2 Konvexita

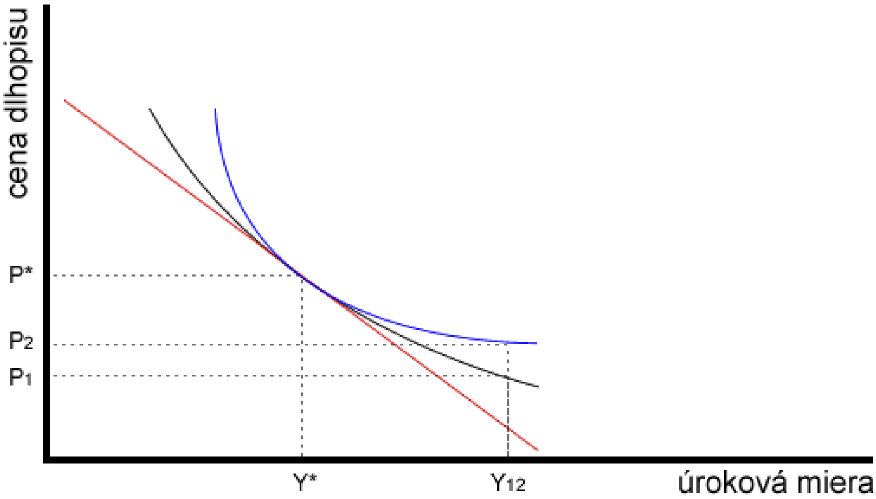
Čím je krivka závislosti medzi cenou dlhopisu a úrokovou mierou viac zakrivená, tým viac je metóda durácie nepresnejšia. Konvexita upresňuje duráciu - udáva veľkosť zmeny durácie dlhopisu pri zmene úrokových sadzieb, a dá sa vypočítať ako druhá derivácia ceny dlhopisu podľa výnosu. Nie je veľmi využívaná, pretože má zmysel len pri väčších pohyboch úrokových sadzieb, ktorých zmeny sú väčšinou malé. Na výpočet presnejšej citlivosti zmeny ceny dlhopisu pri pohybe úrokovej miery použijeme Taylorov rozvoj na aproximáciu krivky závislosti medzi cenou dlhopisu a úrokovou mierou.

Definícia 2.4 (Konvexita)**.** *Nech P je cena dlhopisu a r úroková miera, Konvexitu dlhopisu definujeme ako:*

$$K = \frac{1}{P}\frac{\partial^2 P}{\partial r^2}. \tag{12}$$

Pomocou Taylorovho rozvoja druhého rádu vieme krivku závislosti medzi cenou dlhopisu a úrokovou mierou lepšie aproximovať, čím dostaneme nasedujúci vzťah pre zmenu hodnoty dlhopisu : $\triangle P \approx P[\frac{K}{2}(\triangle r)^2 - D \triangle r]$.

Na obrázku 5 sú dva dlhopisy s rovnakou duráciou ale s rozdielnou konvexitou, teda pohyby úrokovej miery budú mať na cenu dlhopisov rôzny vplyv. Dlhopis s väčšiou konvexitou (modrá krivka) je menej citlivý na rast a viac citlivý na pokles úrokovej miery. Pri pohybe úrokovej miery z Y^* na Y_{12} cena klesne na úroveň P_2, pričom pri druhom dlhopise cena poklesne ešte viac na úroveň P_1 čo znamená, že cena dlhopisu s väčšiou konvexitou bude vždy vyššia ako cena dlhopisu s menšiou konvexitou ($P_2 > P_1$). Teda rizikovo-averzný investor pri výbere z dvoch podobných dlhopisov s rovnakou duráciou uprednostní dlhopis s väčšiou konvexitou.



Obr. 5: Rozdielna konvexita dlhopisov s rovnakou duráciou

Durácia a konvexita sa používajú pri manažovaní a diverzifikácii rizika dlhopisového portfólia. Čím je konvexita a durácia dlhopisového portfólia nižšia tým je portfólio bezpečnejšie a menej citlivé na pohyby úrokových sadzieb. Najväčšiu konvexitu majú bezkupónové dlhopisy a najnižšiu dlhopisy s veľkými kupónovými platbami[4].

3 Statické dlhopisové portfólio

V tejto kapitole sa budeme venovať teórii statického dlhopisového portfólia, ktoré by sme mohli opísať ako transformáciu pôvodného Markowitzovho optimálneho akciového portfólia na dlhové cenné papiere s konečnou maturitou. Postupne nahliadneme na pôvodný Markowitzov model a vysvetlíme predpoklady, ktoré musia byť splnené pri transformácii. Následne transformáciu matematicky odvodíme (podľa [6]) a aplikujeme na Vašíčkov jednofaktorový model, ktorého základy sa pokúsime vysvetliť v jednej z podkapitol. Na záver teóriu statického portfólia aplikujeme pri tvorbe dlhopisového portfólia, pokúsime sa dospieť k nejakým zaujímavým výsledkom, ktoré následne interpretujeme.

3.1 Úvod do Markowitzovej teórie

Pri dlhodobom investovaní na kapitálovom trhu je diverzifikácia rizika do viacerých aktív(tvorba portfólia) základným predpokladom úspechu. Hlavne v dnešných časoch ekonomických kríz a prepadov akciových indexov je to nevyhnuté pre dlhodobé prežitie investovaného kapitálu. V prípade správne zloženého investičného portfólia ani bankrot jednej zo spoločností, ktorej akcie sa nachádzajú v portfóliu nemusí znamenať výrazný prepad hodnoty portfólia.

Prielom v teórii optimálneho portfólia nastal v roku 1952, keď Harry Markowitz publikoval článok [1] - "Portfolio Selection"v magazíne The Journal of Finance, na čo nadviazal v roku 1959 v práci [2] - "Portfolio Selection: Efficient Diversification of Investments". Tieto diela sa stali alfou a omegou modernej teórie optimáleho portfólia a autorovi priniesli Nobelovu cenu za ekonómiu.

3.1.1 Základné predpoklady Markowitzovho modelu

- Očakávané výnosy aktív sú náhodné premenné s normálnym rozdelením.
- Všetci investori na trhu konajú racionálne, sú rizikovo averzní a majú rovnaký prístup k informáciám.
- Trh aktív je dokonale efektívny a bez transakčných nákladov.
- Investor má predom stanovený investičný horizont, kedy na začiatku zostaví portfólio a na konci ho celé predá, pričom ho počas tejto doby nesmie upravovať.
- Aktíva su dokonale deliteľné a obchodovateľné.

Ako si môžeme všimnúť, väčšina predpokladov je v rozpore so súčasnými podmienkami na kapitálovych trhoch, kvôli čomu bol model kritizovaný a spochybňovaný ako vhodný nástroj pri zostavovaní portfólia.

3.1.2 Matematická formulácia

Markowitzová teória portfólia hovorí, že investor maximalizuje očakávaný výnos portfólia pri danej úrovni rizika (variancia portfólia), alebo minimalizuje riziko pri danej úrovni očakávaného výnosu.

Definícia 3.1 (Markowitzova teória portfólia)**.** *Nech r_i sú náhodné premenné, ktoré predstavujú výnosy jednotlivých aktív, $\bar{r_i}$ sú stredné hodnoty výnosov(očakávané výnosy), $\sigma_{ij} = cov(r_i, r_j)$ a w_i sú váhy jednotlivých aktív. Potom matematická formulácia Markowitzovej teórie portfólia podľa* [4] *znie:*

$$\begin{aligned} \min \frac{1}{2} \left(var(r_p) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} w_i w_j \sigma_{ij} \right) \\ \sum_{i=1}^{n} w_i \bar{r_i} = \bar{r_p} \\ \sum_{i=1}^{n} w_i = 1. \end{aligned} \tag{13}$$

V nasledujúcej definícii preformulujeme pôvodné znenie matematickej formulácie Markowitzovho modelu pre použitie v statickom modeli, kedy v čase $t = 0$ optimálne investujeme počiatočný kapitál do zvolených aktív a bez ďaľších zásahov držíme portfólio počas celého investičného horizontu T.

Definícia 3.2 (Statický model). *Nech W_0 je počiatočný a W_T konečný majetok ($\bar{W_T}$ je očakávaný konečný majetok - ekvivalent očakávaného výnosu portfólia $\bar{r_p}$ zo vzťahu* (13)*), N_i je množstvo aktíva i v portfóliu a nech P_i je jeho cena. Potom matematická formulácia optimálneho statického dlhopisového portfólia znie:*

$$\begin{aligned} \min_N var(W_T)& \\ E[W_T] = \bar{W_T}& \\ \sum_{i=1}^{n} N_i P_i = W_0.& \end{aligned} \tag{14}$$

3.1.3 Predpoklady transformácie

Pôvodný Markowitzov model sa teoreticky dá aplikovať na všetky aktíva, ale jeho primárnym využitím je optimálne zostavenie akciového portfólia. Keďže my sa v tejto práci venujeme dlhopisom, potrebujeme pôvodný model upraviť a stanoviť predpoklady pri ktorých bude model reálne využiteľný na zostavenie dlhopisového portfólia.

Najväčším rozdielom medzi akciami a dlhopismi je maturita dlhopisu, kedy jeho majiteľ obdrží nominálnu hodnotu a dlhopis ako cenný papier zaniká. Naopak akcie maturitu nemajú a investor ich teoreticky môže v portfóliu držať neobmedzený čas. Najväčší problém vzniká pri výpočtoch konečného majetku W_T ak sa v portfóliu nachádzajú dlhopisy s maturitou t menšou ako investičný horizont T. Riešením tohto problému je reinvestovanie všetkých peňažných tokov (kupóny, nominálne hodnoty) obdržaných v čase $t < T$ za aktuálnu spotovú úrokovú mieru $R(t, T)$ na obdobie $T - t$, pričom portfólio nesmieme rebalancovať (kvôli zachovaniu statického modelu - rebalancovaním portfólia počas investičného horizontu sa zaoberajú dynamické modely). Budeme pracovať len s bezkupónovými dlhopismi, ale teoreticky je možné použiť aj kupónové dlhopisy, ktoré sa dajú vyjadriť ako séria bezkupónových dlhopisov. Napríklad 5 ročný kupónový dlhopis s kupónom C v nominálnej hodnote N vieme vyjadriť ako 5 bezkupónovych dlhopisov - 4 dlhopisy v nominálnej hodnote C s maturitou 1,2,3,4 rokov a jeden 5 ročný dlhopis v nominálnej hodnote $N + C$.

3.2 Odvodenie modelu SDP

Zoberme si τ bezkupónových dlhopisov s nominálnou hodnotou 1 (P(t,t)=1) a maturitou $1, 2 \ldots \tau - 1, \tau$ (ku každej maturite existuje práve jeden dlhopis). V čase $t = 0$ investujeme náš počiatočný kapitál W_0 do týchto dlhopisov. N_t predstavuje nakúpené množstvo dlhopisu s maturitou t a $P(0, t)$ je jeho cena. Potom platí:

$$W_0 = \sum_{t=1}^{\tau} N_t P(0, t). \tag{15}$$

Naše investičné portfólio vyskladáme z $\tau - 1$ rizikových dlhopisov a jedného dlhopisu s maturitou T kde $1 \leq T \leq \tau$. Keďže dlhopis s maturitou T držíme v portfóliu do splatnosti, z pohľadu úrokového rizika ho považujeme za bezrizikový. Náš počiatočný investovaný majetok W_0 sa následne dá vyjadriť ako:

$$\begin{aligned} W_0 &= \hat{N}'\hat{P}_0 + N_T P(0, T) \qquad (16) \\ kde \quad \hat{N}' &= (N_1, \ldots, N_{T-1}, N_{T+1}, \ldots, N_\tau) \\ \hat{P}_0{}' &= (P(0, 1), \ldots, P(0, T-1), P(0, T+1), \ldots, P(0, \tau)). \end{aligned}$$

Teraz potrebujeme vyjadriť hodnotu nášho konečného majetku W_T. Časť pôvodnej investície $N_T P(0, T)$ (bezrizikovéhý bezkuponóvý dlhopis) zo vzťahu (16) bude mať v čase T hodnotu N_T (bezkupónový dlhopis zmaturuje).

<u>Ocenenie $\hat{N}'\hat{P}_0$ zo vzťahu (16) v čase T:</u>

- $t > T$ - hodnotu portfólia dlhopisov s maturitou $t > T$ v čase T vypočítame ako súčet cien jednotlivých dlhopisov, pričom použijeme vzťah (2) z kapitoly 1.3.1 pre výpočet ceny bezkupónového dlhopisu pri spojitom úročení.

- $t < T$ - v tomto prípade musíme uplatniť predpoklad o reinvestovaní peňažných tokov (v čase t dostaneme nominálnu hodnotu N_t dlhopisu) za aktuálnu spotovú úrokovú mieru $R(t,T)$ na obdobie $T-t$.

Hodnotu nášho konečného majetku W_T môžme následne zapísať ako:

$$W_T = \sum_{t=1}^{T-1} N_t e^{(T-t)R(t,T)} + N_T + \sum_{t=T+1}^{\tau} N_t e^{-(t-T)R(T,t)}. \tag{17}$$

Ak výrazy $R(t,T)$ a $R(T,t)$ v predchádzajúcej rovnici (17) napíšeme podľa vzťahu (3) z kapitoly 1.3.1, hodnotu nášho konečného majetku W_T dostaneme po matematickej úprave ako:

$$W_T = \sum_{t=1}^{T-1} N_t \frac{1}{P(t,T)} + N_T + \sum_{t=T+1}^{\tau} N_t P(T,t). \tag{18}$$

Označme $\hat{P_T}' = \left(\frac{1}{P(1,T)}, \dots, \frac{1}{P(T-1,T)}, P(T,T+1), \dots, P(T,\tau)\right)$. Potom sa hodnota nášho konečného majetku dá napísať ako:

$$W_T = \hat{N}'\hat{P}_T + N_T. \tag{19}$$

Kvôli aplikácii do modelu statického portfólia podľa Markowitza, potrebujeme vyjadriť varianciu a strednú hodnotu náhodnej premennej W_T (udáva nám očakávanú hodnotu konečného majetku).

$$E[W_T] = \hat{N}'E[\hat{P}_T] + N_T. \tag{20}$$

$$\begin{aligned} var(W_T) = &\sum_{t=1}^{T-1}\sum_{s=1}^{T-1} N_t N_s cov\left(\frac{1}{P(t,T)}, \frac{1}{P(s,T)}\right) \\ &+ \sum_{t=T+1}^{\tau}\sum_{s=T+1}^{\tau} N_t N_s cov(P(T,t), P(T,s)) \\ &+ 2\sum_{t=1}^{T-1}\sum_{s=T+1}^{\tau} N_t N_s cov\left(\frac{1}{P(t,T)}, P(T,s)\right) = \hat{N}'C\hat{N}. \end{aligned} \tag{21}$$

kde C je kovariačná matica:

$$C = \begin{cases} cov\left(\frac{1}{P(i,T)}, \frac{1}{P(j,T)}\right) & \text{pre } i = 1, 2, \ldots, T-1,\ j = 1, 2, \ldots, T-1 \\ cov\left(\frac{1}{P(i,T)}, P(T, j+1)\right) & \text{pre } i = 1, 2, \ldots, T-1,\ j = T, T+1, \ldots, \pi - 1 \\ cov\left(P(T, i+1), \frac{1}{P(j,T)}\right) & \text{pre } i = T, T+1, \ldots, \pi - 1,\ j = 1, 2, \ldots, T-1 \\ cov\left(P(T, i+1), P(T, j+1)\right) & \text{pre } i = T, T+1, \ldots, \pi - 1,\ j = T, T+1, \ldots, \pi - 1. \end{cases}$$

Definícia 3.3 (Statický model dlhopisového portfólia). *Pri splnení predpokladov z časti 3.1.3 a po aplikovaní vzťahov odvodených v časti 3.2 na pôvodný statický model z definície 3.2, môžme statický model dlhopisového portfólia definovať ako :*

$$\min_{\hat{N}} \frac{1}{2} \hat{N}' C \hat{N} \tag{22}$$

$$\hat{N}' E[\hat{P}_T] + N_T = \bar{W}_T \tag{23}$$

$$\hat{N}' \hat{P}_0 + N_T P(0,T) = W_0. \tag{24}$$

Vznikol nám problém kvadratickej optimalizácie s dvoma ohraničeniami (23),(24), ktoré matematicky skombinujeme a dostaneme optimalizačný problém s jedným ohraničením:

$$\min_{\hat{N}} \frac{1}{2} \hat{N}' C \hat{N} \tag{25}$$

$$\frac{W_0}{P(0,T)} + \hat{N}' \left(E[\hat{P}_T] - \frac{\hat{P}_0}{P(0,T)} \right) = \bar{W}_T.$$

Riešenie modelu statického dlhopisového portfólia - Vzťah (25) je problém kvadratickej optimalizácie, ktorý riešime pomocou Lagrangeovej funckie, ktorej derivácia podľa parametra $\hat{N}$ sa podľa nutnej podmienky optima rovná 0.

$$\frac{\partial}{\partial \hat{N}} \left(\frac{1}{2} \hat{N}' C \hat{N} + \lambda \left(\bar{W}_T - \hat{N}' \left(E[\hat{P}_T] - \frac{\hat{P}_0}{P(0,T)} \right) - \frac{W_0}{P(0,T)} \right) \right) = 0. \tag{26}$$

Riešenie optimalizačného problému následne dostaneme ako:

$$\hat{N} = \lambda \left(C^{-1}E[\hat{P}_T] - \frac{C^{-1}\hat{P}_0}{P(0,T)} \right), \tag{27}$$

$$\text{kde } \lambda = \frac{\bar{W}_T - \frac{W_0}{P(0,T)}}{\left(E[\hat{P}_T] - \frac{\hat{P}_0}{P(0,T)}\right)' C^{-1} \left(E[\hat{P}_T] - \frac{\hat{P}_0}{P(0,T)}\right)}. \tag{28}$$

3.2.1 Výpočet premenných

V predchadzajúcej časti sme si odvodili model statického dlhopisového portfólia a jeho riešenie. Na to aby sme optimálne portfólio mohli reálne zostaviť potrebujeme vyjadriť premenné, ktoré sa nachádzajú v jeho riešení - $E[\hat{P}_T]$ a kovariačnú maticu C. Inak povedané, potrebujeme vyčísliť následovné premenné: $E[P(T,t)]$, $E\left[\frac{1}{P(t,T)}\right]$, $cov(P(T,t),P(T,s))$, $cov\left(\frac{1}{P(t,T)},\frac{1}{P(s,T)}\right)$, $cov\left(\frac{1}{P(t,T)},P(T,s)\right)$.

Pri odhadovaní týchto parametrov je nevhodné použiť analýzu časových radov cien ako je to častou používané pri optimalizácií portfólia akcií klasickým Markowitzovým modelom. Problém pri tomto prístupe je práve maturita dlhopisov, kvôli ktorej je pohyb cien dlhopisov nenáhodný a závislý na zostávajcom čase do maturity. Preto sa budeme sústrediť len na očakávanú časovú štruktúru úrokových mier pre bezkupónové dlhopisy - na jej modelovanie použijeme Vašíčkov jednofaktorový model, ktorý pomocou očakávaných okamžitých úrokových mier dokáže odvodiť všetky potrebné parametre.

3.3 Vašíčkov model

Časová štruktúra úrokových mier a modely na jej predikciu sa stali jedným z najdôležitejších komponentov finančnej matematiky a kvantitatívnych financií. Takmer všetky svetové korporácie, od bánk, poisťovní až po výrobcov tovarov potrebujú pre správne fungovanie spoločnosti modelovať budúci vývoj úrokových sadzieb - napríklad v banke na správu aktív a pasív a na určovanie úrokových sadzieb pre klientov, iné spoločnosti na zaisťovanie(hedging) pomocou úrokových swapov a iných derivátov. V súčasnej dobe existuje pomerne veľký počet modelov na predikciu časovej štruktúry úrokových mier, ale najväčší zlom nastal v roku 1977, kedy Oldřich Vašíček uviedol svoj model v článku "An Equilibrium Characterization of the term structure" v magazíne Journal of Financial Economics. Keďže úplné matematické odvodenie a všetky predpoklady modelu sú nad rámec tejto práce, budeme sa venovať len potrebným základom tohto modelu, ktoré sú nevyhnutné na zostavenie statického dhlopisového portfólia. Kompletný matematický postup a odvodenie modelu je kvalitne spracované v práci [6].

Úrokové sadzby sa nehýbu podobným spôsobom ako iné aktíva (napríklad akcie), ktoré môžu teoreticky neobmedzene rásť, pretože každá ekonomika má svoje cykly - po silnom raste sa prehrieva, stúpne inflácia a iné ukazovatele na čo reaguje centrálna banka zvýšením úrokových sadzieb. Naopak ak ekonomika začne stagnovať prípadne vykazovať pokles, centrálne banky znížia úrokové sadzby. Preto aj Vašíčkov model predpokladá, že pohyb úrokových sadzieb je tzv.mean reversion proces, čo znamená osciláciu okolo dlhodobého priemeru. Taktiež predpokladá, že celá časová štruktúra úrokových mier je závislá od jedinej náhodnej premennej - okamžitej úrokovej miery. Okamžitá úroková miera je zjednodušene povedané limitný začiatok časovej štruktúry úrokových mier, t.j. úrok p.a. na čo najkratšie časové obdobie (pre matematickú formuláciu pozri [5]).

Vašíčkov model modeluje okamžitú úrokovú mieru nasledovnou stochastickou diferenciálnou rovnicou:

$$dr(t) = \kappa(\theta - r(t))dt + \sigma_r dw. \tag{29}$$

kde $\kappa(\theta - r(t))$ je tzv.drift, $\kappa > 0$ je rýchlosť reverzie, θ je tzv.mean reversion level(dlhodobá priemerná hodnota okolo ktorej okamžitá úroková miera osciluje), σ_r je volatilita okamžitej úrokovej miery a w je Wienerov náhodný proces. Ak je $\theta < r(t)$, drift je záporný a teda úroková miera v modeli začne postupne klesať späť smerom k θ (pre $\theta > r(t)$ platí opačná analógia). Očakávaná časová štruktúra úrokových mier v čase T a cena dlhopisu sa z Vašíčkovho modelu dajú vyjadriť ako:

$$E[R(t,T)] = -\frac{A(t,T)}{T-t} + \frac{B(t,T)}{T-t}E[r(t)]. \tag{30}$$

$$P(t,T) = \exp\left(A(t,T) - B(t,T)r(t)\right). \tag{31}$$

kde $A(t,T) = R\left(\frac{1}{\kappa}(1-\exp(-\kappa(T-t))) - (T-t)\right) - \frac{\sigma_r^2}{4\kappa^3}(1-\exp(-\kappa(T-t)))^2$, $R = \left(\theta + \lambda\frac{\sigma_r}{\kappa} - \frac{1}{2}\frac{\sigma_r^2}{\kappa^2}\right)$, λ je cena trhového rizika a $B(t,T) = \frac{1}{\kappa}(1-\exp(-\kappa(T-t)))$.

Potrebné premenné z kapitoly 3.2.1 pre optimalizáciu statického dlhopisového portfólia sa dajú odvodiť použitím známych vzťahov pre odvodenie vlastností lognormálneho rozdelenia na vzťah (31):

$$E[P(T,t)] = \exp\left(A(T,t) - B(T,t)E[r(T)] + \frac{1}{2}B(T,t)^2 var(r(T))\right). \tag{32}$$

$$E\left[\frac{1}{P(t,T)}\right] = \exp\left(-A(t,T) + B(t,T)E[r(t)] + \frac{1}{2}B(t,T)^2 var(r(t))\right). \tag{33}$$

$$cov\left(\frac{1}{P(t,T)}, \frac{1}{P(s,T)}\right) = E\left[\frac{1}{P(t,T)}\right]E\left[\frac{1}{P(s,T)}\right]\left(e^{B(t,T)B(s,T)cov(r(t),r(s))} - 1\right). \tag{34}$$

$$cov\left(\frac{1}{P(t,T)}, P(T,s)\right) = E\left[\frac{1}{P(t,T)}\right]E[P(t,s)]\left(e^{-B(t,T)B(T,s)cov(r(t),r(T))} - 1\right). \tag{35}$$

$$cov(P(T,t), P(T,s)) = E[P(T,t)]E[P(T,s)]\left(e^{B(t,T)B(T,s)var(r(t))} - 1\right). \tag{36}$$

Následne aby sme mohli tieto parametre vyčísliť, potrebujeme hodnoty $E[r(T)]$, $var(r(T))$ a $cov(r(T), r(s))$, ktoré boli taktiež odvodené v práci [6] ako:

$$E[r(T)] = r(t)\exp(-\kappa(T-t)) + \theta(1-\exp(-\kappa(T-t))), \tag{37}$$

$$var(r(T)) = \sigma_r^2\left(\frac{1-\exp(-2\kappa(T-t))}{2\kappa}\right), \tag{38}$$

$$cov(r(T), r(s)) = \sigma_r^2\left(\frac{1-\exp(-2\kappa(min(T,s)-t))}{2\kappa}\right). \tag{39}$$

4 Aplikácie a experimenty

V nasledujúcich podkapitolách odhaneme parametre λ, κ, θ, σ_r, ktoré čo najpresnejšie aproximujú danú okamžitú úrokovú mieru. Pomocou funkcií naprogramovaných v programe Matlab vypočítame množstvá dlhopisov, ktoré vytvoria optimálne statické dlhopisové portfólio. Výsledky interpretujeme a optimálne portfólio podrobíme stresovým testovaním na pohyb časovej štruktúry úrokových mier.

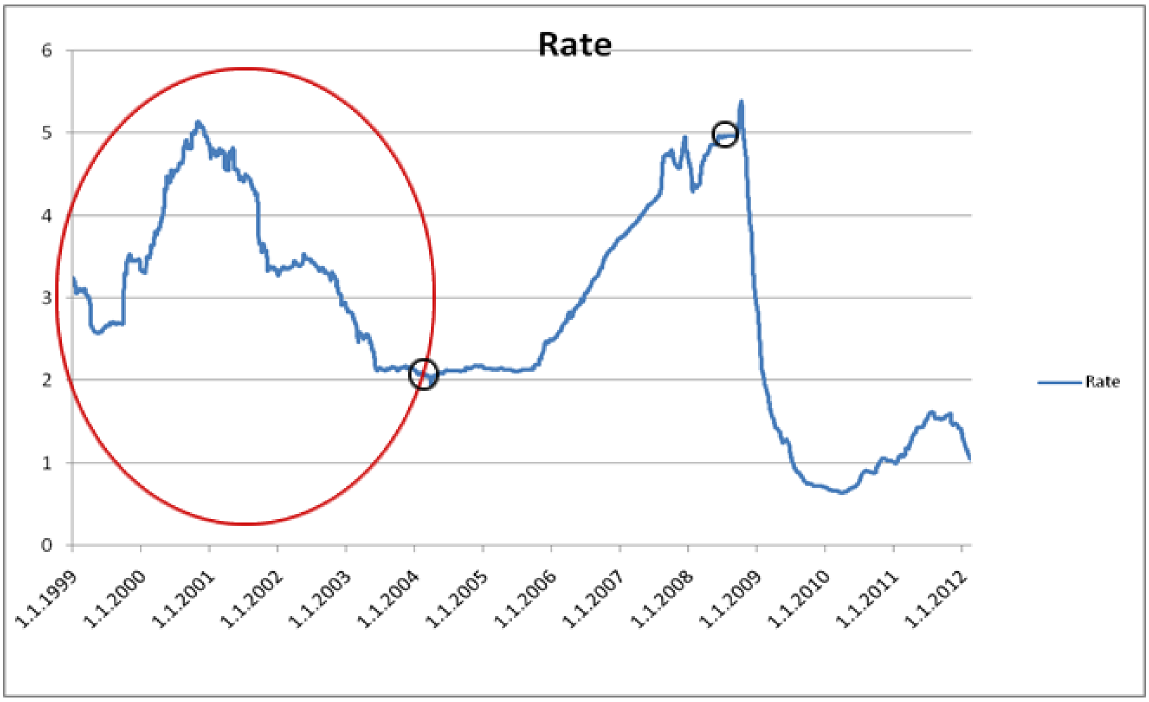
4.1 Odhad parametrov

Parametre okamžitej úrokovej miery budeme odhadovať na základe historického vývoja 3-mesačného Euriboru, ktorý je na tento účel bežne využívaný v investičnom bankovníctve. Všetky historické dáta ktoré sme využili v tejto práci boli získane z profesionálneho finančného nástroja Bloomberg. Na nasledujúcom obrázku č.6 je zobrazený graf vývoja 3-mesačného Euriboru, červený kruh značí obdobie od 1.1.1999 do 29.8.2003 - na tejto vzorke historických dát (1705 údajov) budeme parametre odhadovať. Na obrázku sú taktiež vyznačené dva čierne kruhy, ktoré nám označujú začiatok a koniec investičného horizontu (v našom prípade sme zvolili 5 rokov). Pre parameter λ zvyčajne platí: $\lambda \leq 0$ (záporné λ značí rizikovú prirážku na aktívum), ale pre vysokú náročnosť odhadu (nad rámec tejto práce) sme sa rozhodli pre $\lambda = 0$ - teda predpokladáme rizikovo-neutrálne prostredie na trhu. Tento predpoklad nie je úplne odklonený od reality, keďže budeme pracovať s nemeckými štátnymi dlhopismi, ktoré sú považované za jednu z najbezpečnejších investícií na globálnom finančnom trhu.

Parametre okamžitej úrokovej miery sme odhadovali metódou maximálnej vierohodnosti, kde sme použili postup detailne popísaný v práci [7]. Problém sme riešili numericky v programe Matlab, pričom odhady parametrov z historických dát sú riešením optimalizačnej úlohy:

$$\max ln\ L(\sigma, \kappa, \theta) = -\frac{1}{2}\sum_{t=1}^{N}\left(\ln(\nu_t^2) + \frac{\epsilon_t^2}{\nu_t^2}\right) \tag{40}$$

kde $\nu_t^2 = \dfrac{\sigma^2}{2\kappa}(1 - e^{-2\kappa\triangle t}),\ \epsilon_t = r_t - \theta(1 - e^{-\kappa\triangle t}) - e^{-\kappa\triangle t} r_{t-1}$



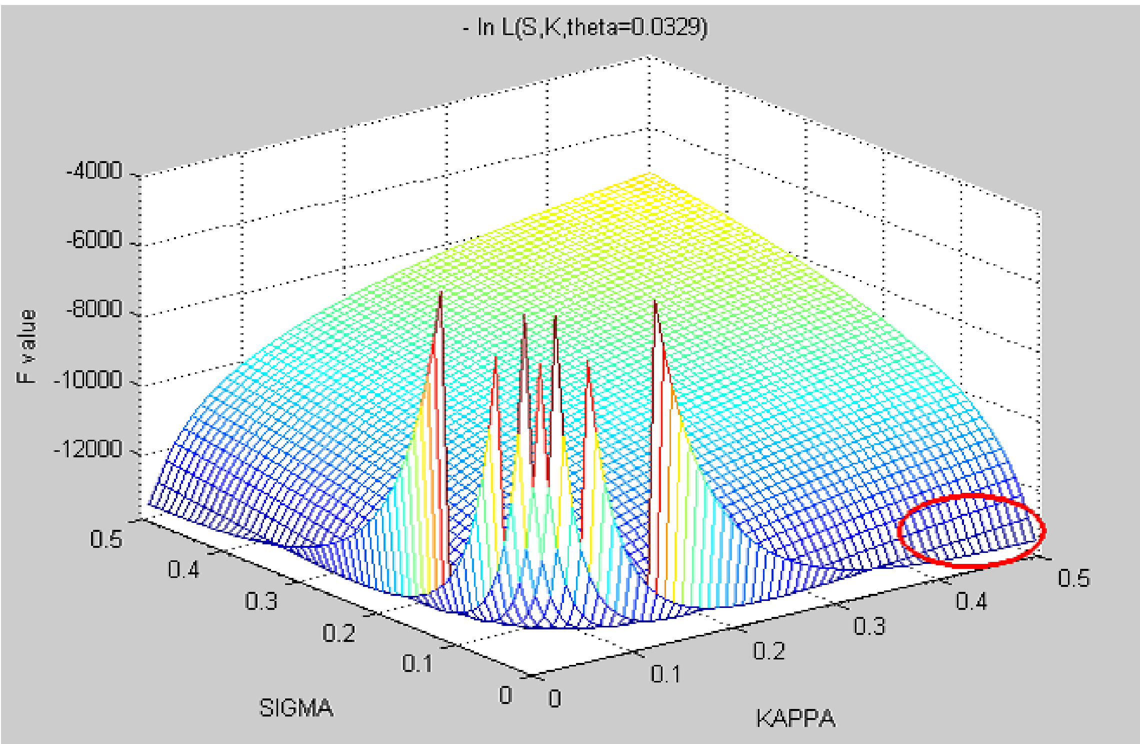
Obr. 6: 3M Euribor

Konštanta $\triangle t$ meria časový krok daných historických dát. Keďže sa snažíme odhadnúť ročné parametre κ, θ, σ_r a máme k dispozícii denné dáta, $\triangle t = \frac{1}{365}$. Kvôli synchronizácii s programom Matlab, ktorého implementované optimalizačné funkcie riešia problém minimalizácie, budeme minimalizovať funkciu $-ln\ L(\sigma, \kappa, \theta)$ zo vzťahu (40).

Účelová funkcia zo vzťahu (40) je zobrazenie z $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ a náš časový rad historických dát Euriboru má 1705 údajov. Optimalizovať túto funkciu a nájsť potrebné parametre je pomerne zložitý proces, preto sme pre odhad parametrov museli navrhnúť vhodnú optimalizačnú procedúru s ohľadom na voľbu štartovacieho bodu. Klasická optimalizačná funkcia v Matlabe *fmincon* s ohraničením $\kappa > 0$, $\theta > 0$, $\sigma_r > 0$ nepriniesla požadované výsledky. Problém nastal pri voľbe štartovacieho bodu iterácie, kedy sme pre rôzne štartovacie body dostali rôzne extrémy (pravdepodobne vysoký počet lokálnych extrémov). Z tohto dôvodu sme sa rozhodli parametre κ, θ, σ_r rozumne ohraničiť - pomohli sme si aj grafmi funkcií pri fixovaní jedného z parametrov.

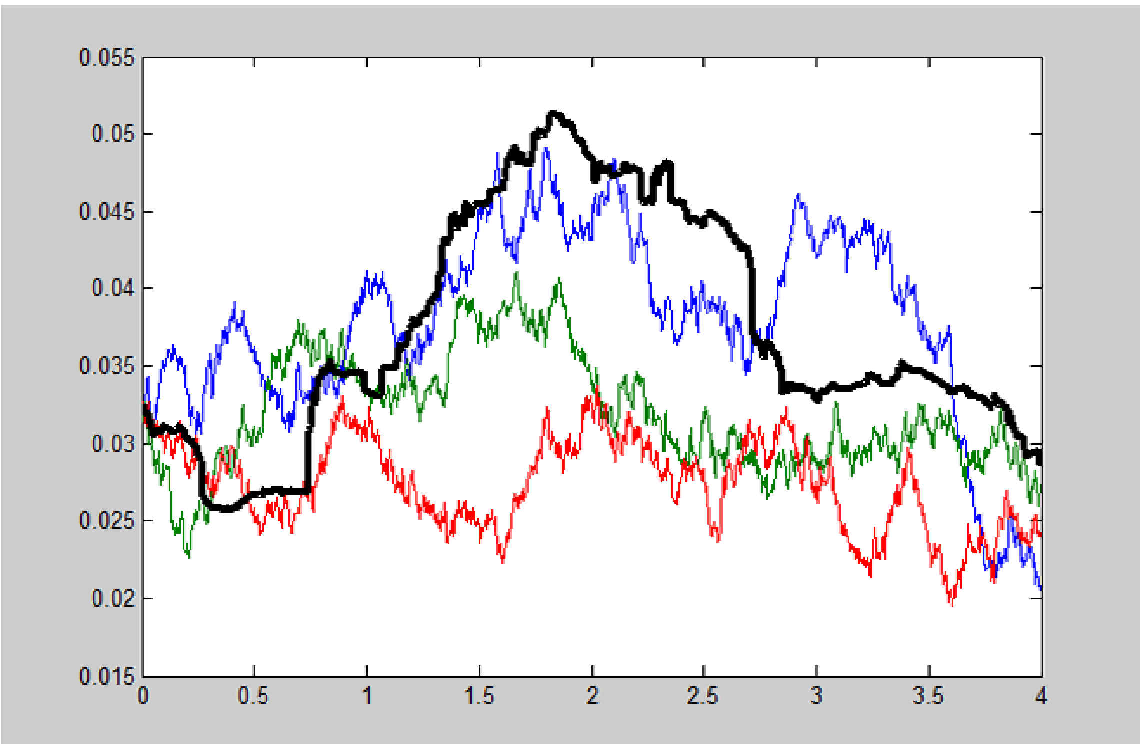
- všetky naše dáta ležia v intervale $< 0.0212, 0.0514 >$, teda θ (mean reversion level) ohraničíme ako $0.02 < \theta < 0.055$
- volatilita σ_r je pravdepodobne číselne veľmi malá (výberová disperzia $s^2 = 0.0007$) a ohraničíme ju ako: $0.01 < \sigma_r < 1$
- parameter κ ohraničíme $0.01 < \kappa < 1$, kde nám pri tomto odhade pomohli empirické výsledky iných prác venujúcich sa tejto téme (pozri [2])

Po použití týchto ohraničení a naprogramovanej funkcie maxsearch2 (pozri prílohu), kde sme vyskúšali 10000 rôznych hodnôt parametrov κ, θ, σ_r, sme našli bod $(\sigma_r, \kappa, \theta) = (0.01, 0.4214, 0.0329)$, kde funkcia zo vzťahu (40) nadobúda minimálnu hodnotu pre daný počet meraní. Po ďaľšom ohraničení parametrov okolo hodnôt tohto bodu, zjemnení delenia a opätovnom použití funkcie maxsearch2 sa nám podarilo odhad upresniť na $(\sigma_r, \kappa, \theta) = (0.0091, 0.448, 0.0329)$. Tento odhad spĺňa podmienky optima zo vzťahu (40), čo sme overili použitím funkcie fmincon so štartom iterácie v bode tohto odhadu.

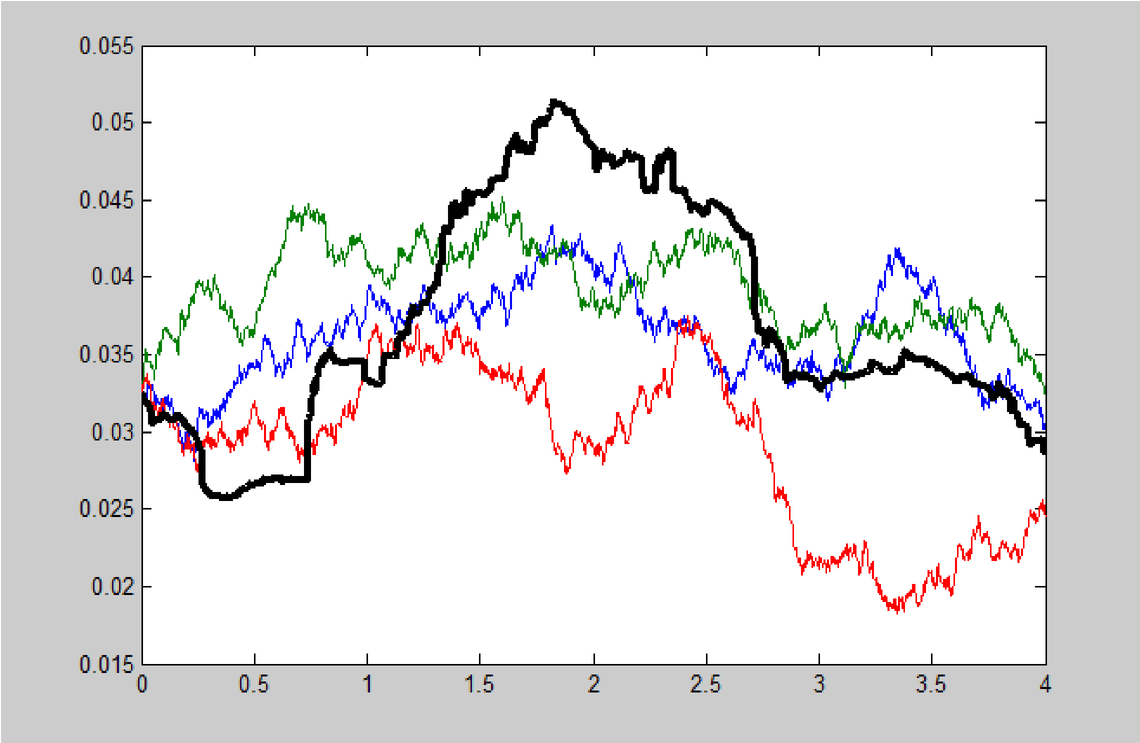


Obr. 7: účelová funkcia zo vzťahu (40)

Po fixácii parametra $\theta = 0.0329$ sme vykreslili graf účelovej funkcie (obrázok č.7) zo vzťahu (40). Optimálna hodnota $(\sigma_r, \kappa, \theta) = (0.0091, 0.448, 0.0329)$ sa nachádza vo vyznačenej časti grafu. Na prvý pohľad sa zdá, že funkcia na obrázku č.7 nadobúda minimum niekde v oblasti sedlového bodu v strednej časti obrázka, čo sa ale numerickými testami v programe Matlab nepotvrdilo. Odhadnuté parametre sme následne otestovali pomocou naprogramovanej funkcie simulácia (pozri prílohu), ktorá modeluje Vašíčkov náhodný proces zo vzťahu (31). Tento proces je zobrazený na grafe v obrázku č.8, kde čierna krivka znázorňuje historický vývoj 3-mesačného Euriboru a farebné krivky sú výsledkom Vašíčkovho náhodného procesu. Z obrázka č.8 a z iných testovaných simulácií je zrejmá príliš vysoká hodnota parametra volatility $\sigma_r = 0.0091$, ktorý sme sa pokúsili postupne znižovať a výsledky simulácií sme sledovali na grafe. Taktiež ako kompenzáciu zníženej volatility sme súčasne znižovali rýchlosť reverzie κ. Týmto neurčitým a matematicky neformálnym postupom sme sa dopracovali k hodnote $(\sigma_r, \kappa, \theta) = (0.006, 0.3, 0.0329)$, ktorá v simulácii vykazovala veľmi dobré výsledky (pozri obrázok č.9)



Obr. 8: simulácia pre $(\sigma_r, \kappa, \theta) = (0.0091, 0.448, 0.0329)$



Obr. 9: simulácia pre $(\sigma_r, \kappa, \theta) = (0.006, 0.3, 0.0329)$

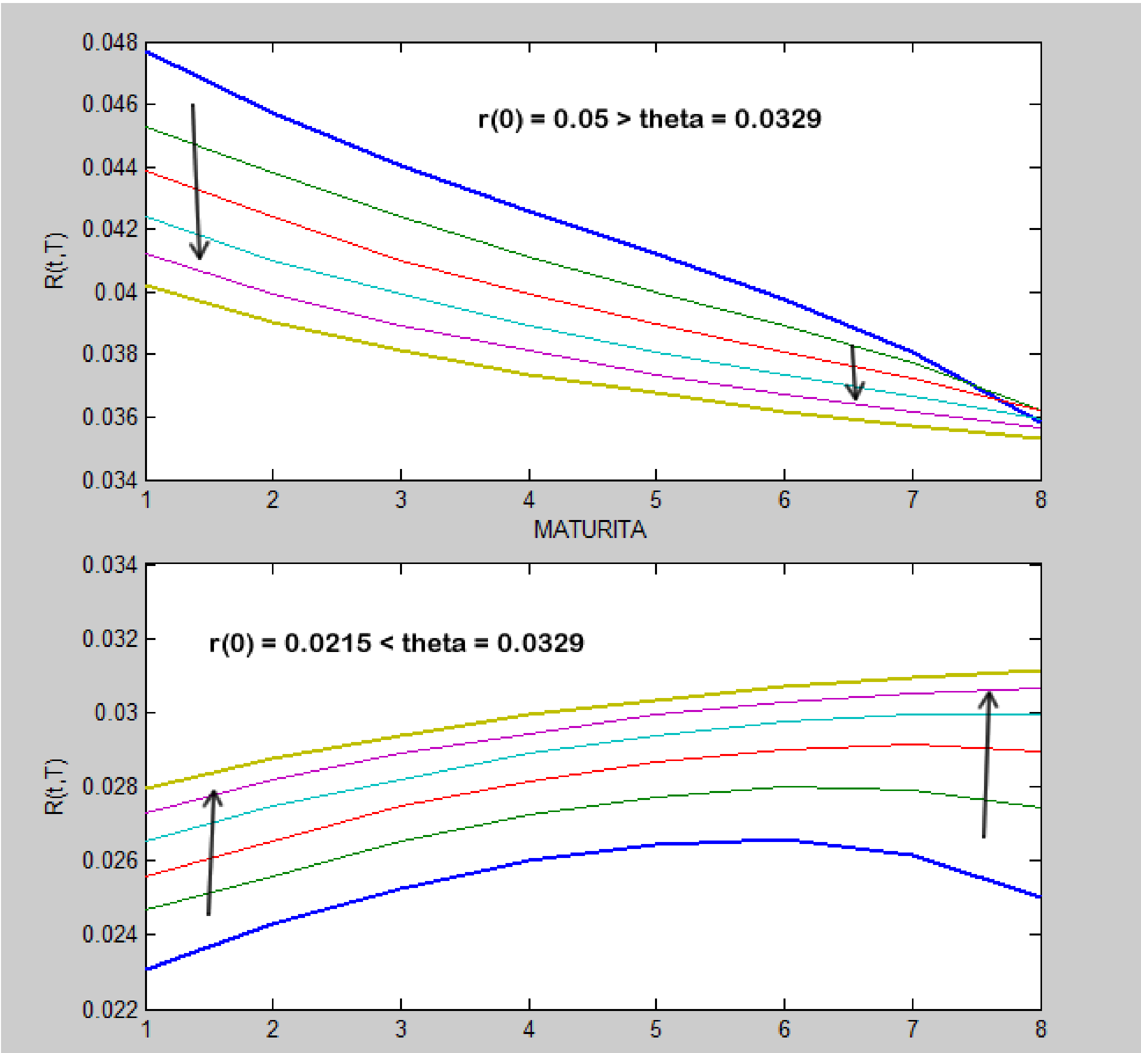
Rozdiel medzi hodnotou účelovej funkcie v odhade $(\sigma_r, \kappa, \theta) = (0.006, 0.3, 0.0329)$ a v bode optima $(\sigma_r, \kappa, \theta) = (0.0091, 0.448, 0.0329)$ je vzhľadom na hodnoty účelovej funkcie v iných odhadoch nesignifikantný. Z tohto dôvodu sme sa rozhodli uprednostniť odhad $(\sigma_r, \kappa, \theta) = (0.006, 0.3, 0.0329)$, ktorý v simulácii Vašíčkovho náhodného procesu dosahoval znateľne lepšie výsledky ako numericky vypočítaný optimálny bod $(\sigma_r, \kappa, \theta) = (0.0091, 0.448, 0.0329)$ zo vzťahu (40).

Následne sme pre úplnosť otestovali vhodnosť tejto voľby pomocou očakávaných cien dlhopisov s maturitou i v čase $T = 1$ podľa vzťahu (32), ktoré sme vypočítali pomocou naprogramovanej funkcie meanP (pozri prílohu).

i	1	2	3	4	5	6	7	8
E[P(1,i)]	1	0.968	0.937	0.907	0.878	0.85	0.822	0.796

Tabuľka 1: očakávané ceny dlhopisov v čase $T = 1$ pre $(\sigma_r, \kappa, \theta) = (0.006, 0.3, 0.0329)$

Podľa vzťahu (30) sme v programe Matlab naprogramovali funkciu spotrates (pozri prílohu), ktorá na základe parametrov okamžitej úrokovej miery vykreslí pohyb časovej štruktúry úrokových mier v čase T (obrázok č.10). Z grafov vidíme rozdielny pohyb časovej štruktúry úrokových mier podľa voľby štartovacieho bodu $r(0)$, kedy je vidieť zachovanie predpokladu mean-reversion procesu. V prípade očakávania poklesu okamžitej úrokovej miery je pokles úrokovej krivky dosiahnutý hlavne klesaním úrokových sadzieb krátkodobých dlhopisov, ktoré klesajú rýchlejšie ako dlhodobé (vrchný graf) - úroková krivka sa vyrovnáva. V prípade očakávania rastu okamžitej úrokovej miery je rast dlhodobých dlhopisov rýchlejší ako rast krátkodobých (spodný graf) - úroková krivka sa stáva strmšia. Tieto tvary časovej štruktúry úrokových mier detailnejšie popíšeme v časti 4.3.



Obr. 10: pohyb časovej štruktúry úrokových mier

4.2 Optimálne portfóliá

V tejto časti interpretujeme výsledky ktoré sme dostali použitím statického dlhopisového portfólia. Do portfólia sme zahrnuli nemecké štátne dlhopisy s maturitou 1 až 8 rokov, investičný horizont sme zvolili $T = 5$ rokov. Pre predstavu reálnej výkonnosti statického dlhopisového portfólia sme do našich kalkulácií zahrnuli aj hodnoty $W_{T=5}$, ktoré sme vypočítali zo vzťahu (19) pomocou historických cien nemeckých štátnych dlhopisov v čase $T = 5$. Tieto údaje by nám následne mali pomôcť pri hodnotení vhodnosti použitia daného modelu. Pri optimalizácii v programe Matlab mohli vzniknúť chyby pri zaokrúhľovaní. Taktiež pri vpisovaní údajov sme uplatnili nasledovný vzťah: ak pre množstvo w_i dlhopisu platí $| w_i | < 10^{-2} \Longrightarrow w_i = 0$. Z týchto dôvodov sa vo výstupných tabuľkách môžu nachádzať malé chyby, ktoré sú ale dostatočne nesignifikantné na ovplyvnenie interpretácií a záverov vyplývajúcich z našich výsledkov.

<u>Kovariančná matica zo vzťahu (22) a z nej odvodená korelačná matica:</u>

$$C = 10^{-3}. \begin{pmatrix} 0.183 & 0.152 & 0.113 & 0.06 & -0.1 & -0.127 & -0.145 \\ 0.152 & 0.195 & 0.144 & 0.08 & -0.128 & -0.163 & -0.186 \\ 0.113 & 0.144 & 0.127 & 0.07 & -0.113 & -0.144 & -0.164 \\ 0.06 & 0.08 & 0.07 & 0.043 & -0.069 & -0.088 & -0.1 \\ -0.1 & -0.128 & -0.113 & -0.069 & 0.114 & 0.145 & 0.166 \\ -0.127 & -0.163 & -0.144 & -0.088 & 0.145 & 0.185 & 0.211 \\ -0.145 & -0.186 & -0.164 & -0.1 & 0.166 & 0.211 & 0.241 \end{pmatrix}$$

$$COR = \begin{pmatrix} 1 & 0.8 & 0.735 & 0.7 & -0.689 & -0.689 & -0.689 \\ 0.8 & 1 & 0.915 & 0.877 & -0.858 & -0.858 & -0.858 \\ 0.735 & 0.915 & 1 & 0.958 & -0.937 & -0.937 & -0.937 \\ 0.7 & 0.877 & 0.958 & 1 & -0.978 & -0.978 & -0.978 \\ -0.689 & -0.858 & -0.937 & -0.978 & 1 & 0.999 & 0.999 \\ -0.689 & -0.858 & -0.937 & -0.978 & 0.999 & 1 & 0.999 \\ -0.689 & -0.858 & -0.937 & -0.978 & 0.999 & 0.999 & 1 \end{pmatrix}$$

Pre potreby následovných interpretácií uvádzame v tabuľke č.2 YTM jednotlivých nemeckých štátnych dlhopisov v čase $t = 0$, z ktorej je zrejmá rastúca časová štruktúra úrokových mier. Dôležitý je najmä údaj YTM pre 5-ročný dlhopis $YTM(5) = 3.46\%$, ktorý bude slúžiť ako benchmark pri hodnotení výsledkov staticky optimálnych portfólií ($T = 5$).

i	1	2	3	4	5	6	7	8
YTM(i)	2.2%	2.56%	3%	3.32%	3.46%	3.68%	3.86%	4%

Tabuľka 2: YTM nemeckých štátnych dlhopisov v čase $t = 0$

Na začiatok sme vypočítali optimálne množstvá dlhopisov $w_1 \cdots w_8$ (tabuľka č.3) pre portfóliá s počiatočným majetkom $W_0 = 1$ a očakávaným konečným majetkom $E[W_{T=5}] \in \langle 1.05, 1.5 \rangle$.

$\mathbf{w_1}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\mathbf{w_2}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\mathbf{w_3}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\mathbf{w_4}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\mathbf{w_5}$	12.4	8.2	4.1	0	-4.2	-8.4	-12.5	-16.7	-25
$\mathbf{w_6}$	-137.6	-86.6	-35.6	15.5	66.5	117.5	168.6	220	321.7
$\mathbf{w_7}$	253.8	160	65.6	-28.5	-122.6	-216.8	-310.9	-405	-593.2
$\mathbf{w_8}$	-127.8	-80.4	-33	14.4	61.8	110	156.6	204	298.8
$\mathbf{var_p}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\mathbf{E[W_{T=5}]}$	1.05	1.10	1.15	1.20	1.25	1.30	1.35	1.40	1.50
$\mathbf{W_{T=5}}$	1.131	1.151	1.171	1.191	1.211	1.23	1.251	1.27	1.31

Tabuľka 3: optimálne portfólia bez zákazu short sale

Interpretácia hodnôt v tabuľke č.3: Z optimálnych množstiev dlhopisov $w_1 \cdots w_8$ sú pozorovateľné veľké pozície v dlhopisoch s maturitou väčšiou ako investičný horizont $T = 5$, kde veľká dlhá pozícia pri dlhopise s maturitou w_7 je kompenzovaná dvoma krátkymi pozíciami v dlhopisoch w_6 a w_8. Dlhopisy s maturitou menšiou ako investičný horizont $T = 5$ sa nedostali do žiadneho optimálneho portfólia. Tento výsledok sa dá odôvodniť veľmi vysokou koreláciou dlhopisov s väčšiou maturitou v čase $T = 5$ (pozri maticu COR), ktoré tak tvoria takmer dokonalé substitúty (pozri [6]). Model statického dlhopisového portfólia sa následne snaží využiť potenciálne arbitrážne príležitosti, ktoré vznikajú pri kúpe dlhopisu w_i a súčasnom predaji dlhopisu w_{i+1}. Hodnota minimalizovanej premennej var_p sa pri všetkých hodnotách očakávaného výnosu pohybovala veľmi blízko 0 ($var_p \in \langle 2.10^{-14}, 10^{-11} \rangle$), čo je spôsobené vysokou koreláciou aktív v portfóliu a spôsobom výberu ich optimálnych množstiev. Z výsledkov premennej $W_{T=5}$ môžme vypočítať reálny výnos portfólia, ktorý sa nachádza v intervale $\langle 2.5\%, 5.5\% \rangle$. Pri dlhopisových investičných stratégiach, ktoré sú všeobecne považované za konzervatívne je to slušný výsledok.

Short sale pri dlhopisových investíciách sa dá uskutočniť len prostredníctvom derivátov, pri skutočných dlhopisoch je zakázaný. Preto pre lepšie znázornenie reálnej situácie na dlhopisovom trhu zakážeme statickému modelu vstupovať do záporných pozícií. Výsledky sú znázornené v tabuľke č.4.

Interpretácia hodnôt v tabuľke č.4: Do tabuľky č.4 sme zahrnuli duráciu portfólia D a očakávaný a reálny výnos portfólia do splatnosti $E[YTM]$ resp. YTM. Z premennej var_p môžme pozorovať jej vyššie hodnoty v prvých troch portfóliach, najnižšie hodnoty v portfóliach s $E[YTM] = 3.37\%$ a $E[YTM] = 3.7\%$ a najvyššie (stúpajúce) hodnoty v posledných štyroch portfóliach s najvyššími očakávanými výnosmi.

- **matematická interpretácia:** Vysvetlením malej diverzifikácie a teda vyššej hodnoty var_p v niektorých portfóliách je ohraničenie v optimalizačnom probléme zo vzťahu (25), ktoré je v prípade zákazu short sale a nereálneho očakávaného výnosu problém splniť. Optimálne rozloženie dlhopisov závisí hlavne od členov $\frac{W_0}{P(0,T)} = 1.1848$

$\mathbf{w_1}$	0.97	0.23	0.77	0.1	0.01	0	0	0	0
$\mathbf{w_2}$	0	0.78	0.13	0.09	0.02	0	0	0	0
$\mathbf{w_3}$	0	0	0.02	0.18	0.04	0.02	0	0	0
$\mathbf{w_4}$	0	0	0.01	0.23	0.44	0.14	0	0	0
$\mathbf{w_5}$	0	0	0.05	0.16	0.22	0.29	0.34	0.39	0.59
$\mathbf{w_6}$	0	0	0.06	0.31	0.01	0	0	0	0
$\mathbf{w_7}$	0	0	0	0.06	0.03	0	0	0	0
$\mathbf{w_8}$	0	0	0	0.03	0.45	0.81	1	1.03	1.1
$\mathbf{10^5.var_p}$	8.7	9.4	6.7	0.22	0.78	6.6	12.3	13	15.7
$\mathbf{E[W_{T=5}]}$	1.05	1.10	1.15	1.18	1.20	1.22	1.25	1.30	1.50
$\mathbf{W_{T=5}}$	1.079	1.094	1.156	1.178	1.194	1.20	1.228	1.305	1.569
E[YTM]	0.98%	1.9%	2.83%	3.37%	3.7%	4.07%	4.56%	5.4%	8.45%
YTM	1.53%	1.81%	2.94%	3.33%	3.61%	3.7%	4.19%	5.47%	9.43%
D	1	1.775	1.673	3.7	5.65	6.78	7.24	7.176	6.95

Tabuľka 4: optimálne portfólia so zákazom short sale

a $\left(E[\hat{P}_T] - \frac{\hat{P}_0}{P(0,T)}\right)' = $ (-0.0404,-0.0354,-0.0235,-0.0099,0.0160,0.0312,0.0458), z ktorých sa po dosadení do (25) dajú logicky vyčítať matematické dôvody rozdelenia dlhopisov do jednotlivých portfólií. V prípade prvého a posledného portfólia s očakávaným výnosom $E[YTM] = 0.98\%$ resp. $E[YTM] = 8.45\%$ nastal problém pri optimalizácii a funkcia $fmincon$ nesplnila základné ohraničenia. Táto chyba bola spôsobená príliš nízkym resp. vysokým očakávaným výnosom, ktorý statické optimálne portfólio s danými parametrami Vašíčkovho modelu nebolo schopné dosiahnuť. Pri pohľade na YTM dlhopisov v čase $t = 0$ v tabuľke č.2 je problémovosť vyskladania portfólií s $E[YTM] = 0.98\%$ resp. $E[YTM] = 8.45\%$ zrejmá. Portfólia s nereálne vysokými/nízkymi očakávanými výnosmi by sa dali získať po zvýšení volatility σ_r okamžitej úrokovej miery vo Vašíčkovom modeli. Tým by sme ale museli upustiť od predpokladu modelovania reálnej situácie na dlhopisovom trhu resp. modelovania reálnej okamžitej úrokovej miery.

- **ekonomická interpretácia:** Statický optimálny model pri nízkych očakávaných výnosoch zvolil stratégiu tzv. rollover, čo znamená nákup dlhopisov s maturitou $t < 5$ a a ich reinvestovanie v čase t. Portfóliá v strede tabuľky majú rozumne zvolený očakávaný výnos $E[YTM] = 3.37\%$ a $E[YTM] = 3.7\%$, čo znamená menej problémov pri splnení ohraničenia zo vzťahu (25) pre rôzne N. Z tohto dôvodu sú tieto portfólia lepšie diverzifikované a majú menšiu hodnotou var_p. Pri tomto očakávanom výnose sa model správa podobne ako tzv. ladder stratégia, ktorá počiatočný majetok W_0 rozdelí do všetkých dlhopisov. Pre posledné štyri portfólia s vyšším $E[YTM]$ je správanie modelu opačné ako v prvom prípade nízkych očakávaných výnosov. Model na úkor diverzifikácie a variancie investuje najmä do dlhopisu s maturitou $t = 8$, ktorý poskytoval v čase $t = 0$ najvyšší výnos. Toto správanie je podobné tzv. riding the yield curve stratégií (v preklade jazdenie úrokovej krivky), ktorá za predpokladu rastúcej časovej štruktúry úrokových mier a jej budúcej stability investuje do dlhopisov s vyššiou maturitou ako investičný horizont. Optimálne množstvá $\hat{N}$ portfólií pre rôzne hodnoty očakávaného výnosu sa zdajú byť logické aj vzhľadom na YTM jednotlivých dlhopisov v čase $t = 0$ z tabuľky č.2.

Zaujímavé sú aj hodnoty očakávaného konečného majetku $E[W_{T=5}]$ a reálneho konečného majetku $W_{T=5}$. V obidvoch tabuľkách vyšli tieto hodnoty vzájomne veľmi podobné, t.j. $E[W_{T=5}] \approx W_{T=5}$, čo znamená, že hodnoty očakávaných cien jednotlivých dlhopisov z Vašíčkovho modelu boli v súlade s reálnym vývojom cien na dlhopisovom trhu, t.j. $E[\hat{P}_5] \approx \hat{P}_5$ (pozri tabuľku č.5). Keďže počiatočný bod 3-mesačného Euriboru $r(0) = 0.0215$ a mean-reversion level $\theta = 0.0329$, Vašíčkov model predpokladal nárast úrokových sadzieb ($r(0) < \theta$), a na základe toho odhadol budúce ceny dlhopisov, ktoré vstupujú do statického modelu. Na obrázku č.6 si môžeme všimnúť rastúcosť krivky 3-mesačného Euriboru v období trvania našej investície (medzi čiernymi kruhmi), čo je v súlade s očakávaním Vašíčkovho modelu. Na druhej strane tento výsledok považujeme za náhodný, keďže odhad cez Vašíčkov model neberie do úvahy ceny dlhopisov v čase $t = 0$, ktoré považuje za funkciu okamžitej úrokovej miery.

$E[\hat{P}_5]$	1.1183	1.09	1.06	1.03	0.97	0.94	0.911
$\hat{P}_5$	1.13	1.069	1.071	1.041	0.959	0.923	0.888

Tabuľka 5: očakávané vs. reálne ceny v čase $T = 5$

Porovnanie výnosov s buy and hold stratégiou: Pre potreby nasledujúcich interpretácií budeme za za optimálne statické portfólia považovať len tie s $E[YTM] = 3.37\%$ a $E[YTM] = 3.7\%$ a najnižsiou varianciou, ktoré majú priemerný reálny výnos 3.47%. Pri inicializácii buy and hold stratégie sme mali možnosť v čase $t = 0$ kúpiť 5-ročný dlhopis s výnosom 3.46%. Priemerný výnos generovaný statickými dlhopisovými portfóliami je v tomto prípade síce tesne vyšší, alebo prípadne aj nižší ak pri nákupe viac druhov dlhopisov počítame s vyššími transakčnými nákladmi. Tento rozdiel výkonnosti sa zdá byť nesignifikantný.

Porovnanie výnosov s metódou durácie: Metóda durácie pri zostavovaní portfólia berie do úvahy očakávania úrokových sadzieb. Ak investor očakáva pokles úrokových sadzieb, jeho portfólio by malo mať duráciu vyššiu ako jeho investičný horizont (pokles úrokových sadzieb sa najviac prejaví na cene dlhodobých dlhopisoch). Naopak, v pripade očakávania rastu úrokových sadzieb investor zostaví portfólio s menšiou duráciou ako jeho investičný horizont. V tomto prípade pre zjednodušenie budeme predpokladať, že očakávania investora sú priamo úmerné očakávaniam Vašíčkovho modelu. Keďže $r(0) < \theta$, investor očakáva rast úrokových sadzieb a preferuje portfóliá s $D < 5$. Pri pohľade na portfóliá v tabuľke č.4, ktoré majú $D < 5$, je zrejmé že ich reálny výnos je menší ako 3.47%. Taktiež sme odskúšali ďaľšie portfóliá spĺňajúce $D < 5$ a vzťah (24), a po zhodnotení výsledkov sa nám potvrdila menšia výnosnosť metódy durácie oproti optimálnemu statickému dlhopisovému portfóliu za dané časové obdobie.

4.3 Stresové testovanie

V tejto kapitole budeme testovať optimálne statické dlhopisové portfólio na pohyb časovej štruktúry úrokovych mier. Vyberieme si jedno statické optimálne portfólio a budeme sledovať ako sa zmení náš konečný reálny výnos W_T pri inom tvare časovej štruktúry úrokovych mier v čase T. V predchádzajúcich kapitolách sme pracovali s investičným horizontom $T = 5$ rokov, ktorý v tejto kapitole zmeníme na $T = 1$ rok. Dôvodom tohto kroku je fakt, že výnos pre portfólia s investičným horizontom $T > 1$ je determinovaný tvarom časovej štruktúry úrokových mier v každom roku $t < T$ kvôli reinvestíciám zmaturovaných dlhopisov za úrokovú mieru $R(t, T)$. Preto na testovanie citlivosti reálneho výnosu $W_{T=5}$ portfólia by sme museli súčasne hýbať piatimi časovými štruktúrami úrokových mier (pozri $\hat{P}_T$ zo vzťahu (19)).

Pre testované optimálne portfólio (tabuľka č.6) sme zvolili očakávaný výnos $E[YTM] = 5\%$. Táto hodnota nerobila problémy pri optimalizácií, poľahky spĺňala ohraničenie zo vzťahu (25) a portfólio bolo dostatočne diverzifikované. Aby sme mohli výsledky stresového testovania optimálneho portfólia s niečím porovnať, vytvorili sme neoptimálne portfólio (tabuľka č.7) s rovnakým očakávaným výnosom $E[YTM] = 5\%$, ktoré spĺňa potrebné ohraničenie, ale upustili sme od predpokladu optimality účelovej funkcie zo vzťahu (22).

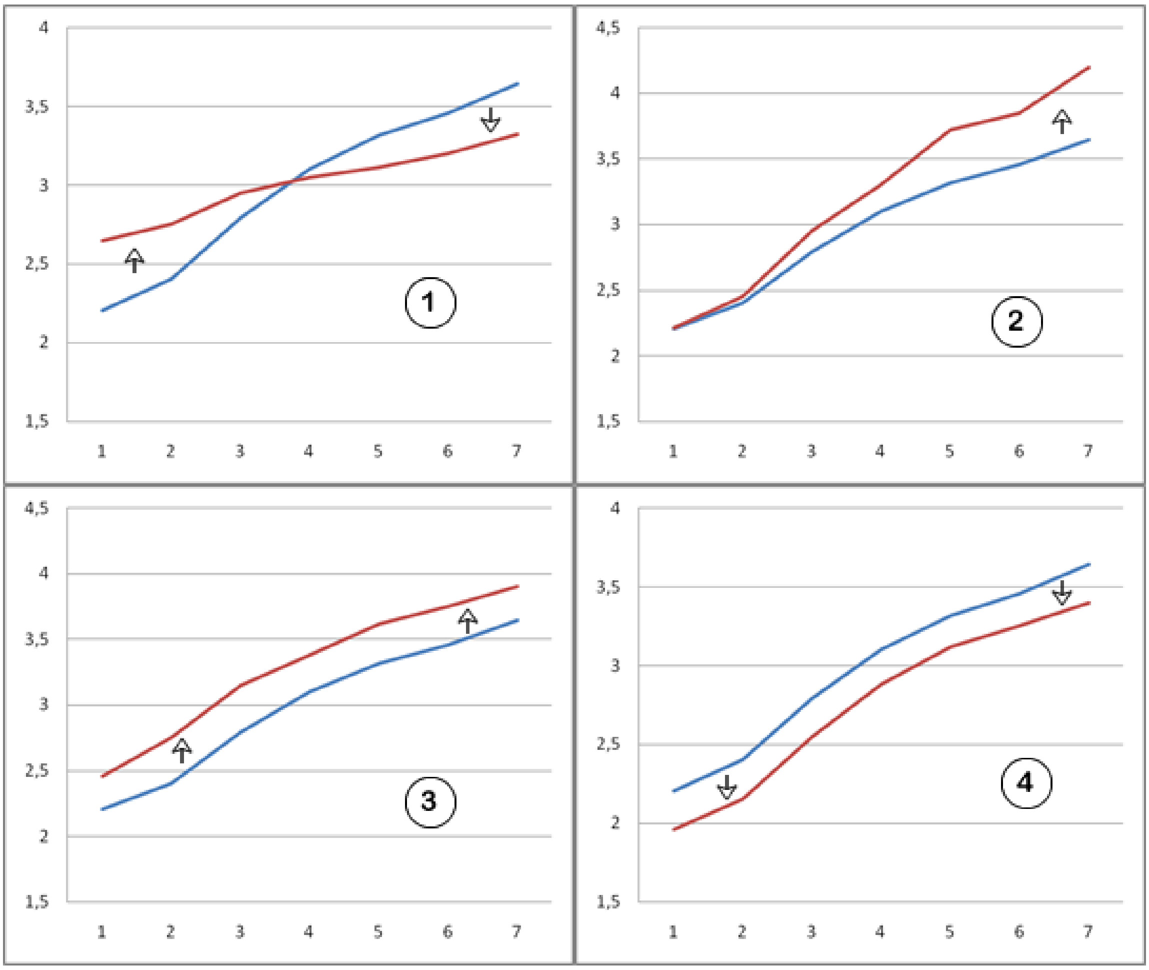
$\mathbf{w_1}$	$\mathbf{w_2}$	$\mathbf{w_3}$	$\mathbf{w_4}$	$\mathbf{w_5}$	$\mathbf{w_6}$	$\mathbf{w_7}$	$\mathbf{w_8}$	$\mathbf{10^5.var_p}$	$\mathbf{E[YTM_o]}$	$\mathbf{YTM_o}$
0.56	0.03	0.02	0.02	0.135	0.025	0.043	0.3	8.99	5%	3.92%

Tabuľka 6: statické optimálne portfólio pre $T = 1$ rok

$\mathbf{w_1}$	$\mathbf{w_2}$	$\mathbf{w_3}$	$\mathbf{w_4}$	$\mathbf{w_5}$	$\mathbf{w_6}$	$\mathbf{w_7}$	$\mathbf{w_8}$	$\mathbf{10^5.var_p}$	$\mathbf{E[YTM_n]}$	$\mathbf{YTM_n}$
0.024	0.095	0.36	0.45	0.14	0.04	0.017	0.01	12.4	5%	3.84%

Tabuľka 7: statické neoptimálne portfólio pre $T = 1$ rok

Pohyb časovej štruktúry úrokových mier a jej tvar je náhodný proces, ktorý závisí od situácie na dlhopisovom trhu. My sa pre potreby stresového testovania zameriame na niektoré základné typy pohybov, ktoré sú zobrazené na obrázku č.11 a popísané v nasledujúcom odseku. Časovou štruktúrou úrokových mier sme vždy pohli o reálne hodnoty, vypočítali sme nové ceny dlhopisov, a zo vzťahu (19) sme vyjadrili konečný majetok resp. reálny výnos do splatnosti. Durácia portfólií nám vyšla veľmi podobná: $D_o = 3.78 \approx D_n = 3.72$. Z teórie durácie by mali byť výsledky stresového testovania podobné, keďže obidve portfóliá majú takmer rovnakú citlivosť na zmenu úrokových sadzieb. Táto teória sa pri nami testovaných pohyboch úrokovej miery nepotvrdila, čo môžeme pozorovať z hodnôt v tabuľke č.8.



Obr. 11: typy pohybov časovej štruktúry úrokových mier

1. **vyrovnávajúca sa (tzv. flattening yield curve):** Časová štruktúra úrokových mier nadobúda tento tvar ak výnosy dlhodobých dlhopisov klesajú rýchlejšie ako výnosy krátkodobých dlhopisov, alebo v ojedinelých prípadoch ak výnosy dlhodobých dlhopisov klesajú súčasne s rastom výnosu krátkodobých dlhopisov. Vyrovnávajúca sa časová štruktúra úrokových mier väčšinou vzniká pri očakávaní nižšej inflácie alebo pomalšieho rastu ekonomiky. Pri recesii sa niekedy objaví dokonca inverzná časová štruktúra úrokových mier, kedy výnos na krátkodobých dlhopisoch je vyšší ako na dlhodobých dlhopisoch.

2. **zostrmovávacia (tzv. steepening yield curve):** Tento prípad nastáva ak výnosy dlhodobých dlhopisov rastú rýchlejšie ako výnosy krátkodobých dlhopisov (krivka sa stáva strmšia). Vo väčšine prípadov tento typ krivky znamená, že trh očakáva zvýšenú infláciu a silnejší ekonomický rast.

3. **posunutá nahor/nadol o konštantu:** Časová štruktúra úrokových mier sa na reálnom dlhopisovom trhu síce týmto spôsobom nehýbe, aj napriek tomu nás zaujíma vývoj reálneho výnosu pri týchto pohyboch.

	(1)	(2)	(3)	(4)	$Y\bar{T}M$
$\mathbf{YTM_0}$	4.35%	2.94%	3.29%	4.63%	3.8%
$\mathbf{YTM_n}$	4.37%	3.84%	3.68%	5.21%	4.28 %

Tabuľka 8: Výsledky stresového testovania

Z výsledkov v tabuľke č.8 je víťazom neoptimálne portfólio, kedy pre priemerný výnos po stresovom testovaní platí: $Y\bar{T}M_n = 4.28\% > Y\bar{T}M_o = 3.8\%$. Relevantnosť týchto výsledkov je otázna, keďže sme testovali iba štyri rôzne tvary časovej štruktúry úrokových mier. Napríklad ak by sme uvažovali hrbatý tvar časovej úrokovej miery (tzv.humped yield curve) v čase $T = 1$, kedy dlhopisy so strednou dobou splatnosti majú najvyšší výnos, výsledok reálnych výnosov portfólií by bol odlišný.

Neoptimálne portfólio má výrazný podiel v dlhopisoch s maturitou 3, 4 a 5 rokov, ktoré by po zmene úrokovej krivky na hrbatý tvar výrazne stratili na hodnote. V optimálnom portfóliu sa dlhopisy so strednou dobou splatnosti nachádzajú v minimálnych množstvách, preto pri hrbatom vývoji úrokovej krivky by vyšší výnos dosahovalo optimálne portfólio.

Pre lepšie stresové testovanie by bolo vhodné časovú štruktúru "rozumne" náhodne modelovať a vykonať omnoho viac meraní, pretože naše výsledky niesú dostatočné na formulovanie záveru a označenie neoptimálneho portfólia ako vhodnejšieho z hľadiska úrokového rizika.

Záver

Ak ste sa v tejto práci dočítali až na túto stranu, chcem sa Vám poďakovať za čas strávený pri jej čítaní a dúfam, že ste si z nej odniesli užitočné poznatky. Prínosom pre mňa samotného je hlavne kvantum vedomostí načerpaných pri študovaní materiálov a písaní tejto práce. Taktiež som si prehĺbil vedomosti o dlhovej kríze v Európskej únii, čo mi môže pomôcť pri pracovných pohovoroch v oblasti investičného bankovníctva. Hlavne pri písaní praktickej kapitoly 4 som si uvedomil, že tento typ práce nie je len o napísaní určitého počtu strán ale hlavne o výskume. Najviac času som strávil pri odhadovaní parametrov okamžitej úrokovej miery z reálnych dát 3-mesačného Euriboru (kapitola 4.1). Na druhej strane výsledok ku ktorému som sa dopracoval považujem za veľmi kvalitný (pozri obrázok č.9) a použiteľný pre ďaľší výskum. Pri hodnotení statických optimálnych portfólií a stresovom testovaní (kapitoly 4.2 a 4.3) som sa snažil získané výsledky čo najlepšie interpretovať, ale nejaké príliš silné závery sa nedali formulovať. Dôvodom je nedostatočná vzorka pozorovaní a dát využitých pri daných experimentoch. Práve v tejto oblasti je podľa môjho názoru priestor na ďaľšie vylepšenia práce. Pri stresovom testovaní by bolo vhodné brať do úvahy omnoho viac možných scenárií pohybu úrokovej krivky a výsledky porovnávať s viacerými neoptimálnymi portfóliami. Pri hodnotení optimálnych statických dlhopisových portfólií by bolo vhodné vytvoriť modelové situácie pre rôzne hodnoty investičného horizontu T prípadne do portfólia zahrnúť dlhopisy iných štátov - v tom prípade by v modeli vystupovalo aj kreditné riziko a korelácia dlhopisov v portfóliu by bola omnoho nižšia.

Zoznam použitej literatúry

[1] CFA Institute: *Equity and Fixed Income Vol. 5 CFA Program Curriculum 2008 Level 1*, Pearson Custom Publishing, Boston, 2008

[2] Herrala, N.: *Vasicek Interest Rate Model: Parameter estimation, evolution of the short-term interest rate and term structure*, Lappenranta University of Technology, dostupné na internete (20.4.2012): https://www.doria.fi/bitstream/handle/10024/43257/nbnfife200901141021.pdf?sequence=3

[3] Markowitz, H. M.: *Portfolio Selection: Efficient Diversification of Investments*, John Wiley & Sons, New York, 1959

[4] Markowitz, H. M.: *Portfolio Selection*, Journal of Finance Vol.7(Marec 1952), 77-91, dostupné na internete (20.4.2012): http://www.jstor.org/stable/2975974?seq=1

[5] Melicherčík, I., Olšarová, L., Úradníček, V.: *Kapitoly z finančnej matematiky*, Epos, Bratislava, 2005

[6] Puhle, M.: *Bond Portfolio Optimization*, Springer - Verlag, Berlin, 2008

[7] Ševčovič, D., Stehlíková, B., Mikula, K.: *Analytické a numerické metódy oceňovania finančných derivátov*, Slovenská technická univerzita, Bratislava, 2009

Príloha A

Naprogramované funkcie v programe Matlab

dostupné na internete -

$$http://www.ulozto.sk/xDWVft1/bakalarka-subory-rar \tag{A.1}$$