UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY

VIACPERIÓDOVÝ MARKOWITZOV MODEL

BAKALÁRSKA PRÁCA

2012 Igor KOSSACZKÝ

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY

VIACPERIÓDOVÝ MARKOWITZOV MODEL

BAKALÁRSKA PRÁCA

Študijný program:	Ekonomická a finančná matematika
Študijný odbor:	1114 Aplikovaná matematika
Školiace pracovisko:	Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky
Vedúci práce:	doc. Mgr. Igor Melicherčík, PhD.

Bratislava 2012 **Igor KOSSACZKÝ**

93723727

Univerzita Komenského v Bratislave
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

ZADANIE ZÁVEREČNEJ PRÁCE

Meno a priezvisko študenta: Igor Kossaczký
Študijný program: ekonomická a finančná matematika (Jednoodborové štúdium, bakalársky I. st., denná forma)
Študijný odbor: 9.1.9. aplikovaná matematika
Typ záverečnej práce: bakalárska
Jazyk záverečnej práce: slovenský

Názov: Viacperiódový Markowitzov model

Cieľ: Zoznámenie sa s viacperiódovým Markowitzovým modelom, porovnanie s jednoperiódovým.

Vedúci: doc. Mgr. Igor Melicherčík, PhD.

Dátum zadania: 16.10.2011

Dátum schválenia: 27.10.2011

doc. RNDr. Margaréta Halická, CSc.
garant študijného programu

....

študent vedúci

Poďakovanie

Touto cestou by som sa chcel poďakovať najmä svojmu školiteľovi doc. Mgr. Igorovi Melicherčíkovi, PhD. za ochotu, pomoc a podnetné rady pri konzultáciách. Taktiež ďakujem aj ostatným učiteľom za vedomosti nadobudnuté počas štúdia a rodine za trpezlivosť a podporu.

Abstrakt

KOSSACZKÝ, Igor: Markowitzov viacperiódový model [Bakalárska práca], Univerzita Komenského v Bratislave, Fakulta matematiky, fyziky a informatiky, Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky; školiteľ: doc. Mgr. Igor Melicherčík, PhD., Bratislava, 2012, 51 s.

Markowitzov model tvorí jeden zo základov teórie portfólia. Jeho hlavnou myšlienkou je minimalizácia variancie očakávaného výnosu portfólia počas jedného časového obdobia. Cieľom tejto práce je popísať optimálnu stratégiu rozhodovania, pokiaľ dané časové obdobie rozdelíme na viacero periód, počas ktorých váhy aktív v portfóliu prerovnávame. Na splnenie tejto úlohy sme použili Bellmanov princíp a dynamické programovanie. Ako v práci ukážeme, tento model je v istom zmysle mean-variance optimálny, môžme teda o ňom hovoriť ako o Markowitzovom viacperiódovom modeli. Pri odvodzovaní modelu sme využívali teóriu užitočnosti a jej vzťah k mean-variance optimalizácií. Podarilo sa nám taktiež dokázať konzistentnosť oboch prístupov za predpokladu normálne rozdelených výnosov. V práci sme skúmali aj správanie viacperiódového modelu na reálnych dátach, pričom sme použili dve rôzne metódy odhadovania očakávaných výnosov. Výsledky sme porovnali s Markowitzovým jednoperiódovým modelom.

Kľúčové slová: Markowitzov model, Viacperiódová optimalizácia, Teória užitočnosti, Dynamické programovanie

Abstract

KOSSACZKÝ, Igor: Markowitz multiperiod model [Bachelor Thesis], Comenius University in Bratislava, Faculty of Mathematics, Physics and Informatics, Department of Applied Mathematics and Statistics; Supervisor: doc. Mgr. Igor Melicherčík, PhD., Bratislava, 2012, 51 p.

Markowitz model is one of the principles of portfolio theory. It's main idea is the minimization of variance of given expected return of the portfolio during one period of time. The aim of this work is to describe optimal decision strategy, if we divide the time period into more periods, during which we re-arange the weights of actives. To achieve this goal, we used Bellman principle and dynamic programing. As we will show in the thesis, this model is mean-variance optimal in some sense, so we could reffer it as Markowitz multi-period model. In the proces of deriving the model, we used utility theory, and it's relationship to the mean-variance optimization. We also manage to prove consistency of both approaches under the assumption of normally distributed returns. In the thesis we also examine the behavior of the multi-period model on real data, where we used two different methods of estimating expected returns. We have compared the results with Markowitz one-period model.

Keywords: Markowitz model, Multi-period optimization, Utility theory, Dynamic programming

Obsah

Zoznam obrázkov 8

Zoznam tabuliek 8

Úvod 9

1 Teória portfólia 11

1.1 Základné pojmy . . . 11

1.2 Teória užitočnosti . . . 12

1.3 Mean-variance optimalizácia . . . 13

2 Konzistentnosť prístupov 17

2.1 Normálne rozdelené výnosy . . . 17

2.2 Kvadratická funkcia užitočnosti . . . 22

3 Viacperiódový model 25

3.1 Význam viacperiódového modelu . . . 25

3.2 Úvod do dynamického programovania . . . 26

3.3 Odvodenie viacperiódového modelu . . . 27

3.4 Transformácia na Markowitzov model . . . 30

4 Experimentálne výsledky 33

4.1 Dáta a metódy odhadovania . . . 33

4.2 Implementácia . . . 35

4.3 Výstupy a vyhodnotenie . . . 37

Záver 41

Zoznam použitej literatúry 43

Príloha A 44

Príloha B 49

Zoznam obrázkov

1 Efektívna hranica 16
2 Ilustrácia Bellmanovho princípu 27
3 Vývoj hodnoty investície do akciových indexov 40

Zoznam tabuliek

1 Optimalizácia -akcie amerických spoločností OXY, IBM, MCD, BAC . 38
2 Optimalizácia -akciové indexy GDAXI, GSPC, FTSE, N225 38
3 Optimalizácia -akcie NFLX, ORLY, KLAC, BBBY, CELG, GMCR . . 38
4 Optimalizácia metódou multi1 -váhy aktív 39
5 OXY, IBM, MCD, BAC, 1991 49
6 OXY, IBM, MCD, BAC, 1992 49
7 GDAXI, GSPC, FTSE, N225, 2004 50
8 GDAXI, GSPC, FTSE, N225, 2005 50
9 NFLX, ORLY, KLAC, BBBY, CELG, GMCR, 17.11.2011-1.12.2011 . . 51
10 NFLX, ORLY, KLAC, BBBY, CELG, GMCR, 2.12.2011-15.12.2011 . . 51

Úvod

Teória portfólia je oblasť finančnej matematiky zaoberajúca sa optimálnou investíciou financií do rôznych aktív, či už ide o akcie, indexy alebo deriváty. Prvou otázkou, ktorú je nutné zodpovedať je, čo vlastne považujeme za optimálne. Prirodzenou odpoveďou by bolo, že optimálna je tá investícia, ktorá nám prinesie najväčší zisk. Problémom je, že v čase keď o investícií rozhodujeme, zväčša presný zisk nepoznáme. Znamená to, že v našich úvahách musíme zohľadňovať aj riziko, ktoré so sebou jednotlivé investície prinášajú. Potom je však optimálna voľba investície úzko spätá s postojom ktorý investor k riziku zaujme.

V priebehu vývoja teórie portfólia vzniklo viacero prístupov k vyjadreniu investorovho postoja k riziku, vďaka ktorým môžme určiť optimálnu voľbu portfólia. V roku 1944 von Neumann a Morgenstern [8] zaviedli axiómy charakterizujúce usporiadanie investorových preferencií. Na základe týchto axióm odvodili funkciu užitočnosti, jadro konceptu ktorý dnes nazývame teóriou užitočnosti. V roku 1952 predstavuje Harry Markowitz [6] model optimálnej voľby portfólia založený na minimalizácií rizika pri fixnom požadovanom výnose.

Pri Markowitzovom jednoperiódovom modeli sa sústredíme na minimalizáciu rizika počas jednej časovej periódy, či už ide o týždeň, mesiac alebo rok. Z tejto podmienky plynú aj isté obmedzenia. Váhy jednotlivých aktív, zvolené Markowitzovým jednoperiódovým modelom do konca daného časového obdobia nemeníme. Táto skutočnosť môže negatívne vplývať na konečnú veľkosť zisku v prípade nepriaznivého vývoja cien na burze. Túto nevýhodu sa snaží odbúrať viacperiódový Markowitzov model, ktorého popísanie je aj hlavným cieľom tejto práce.

Markowitzov viacperiódový model je zovšeobecnením jednoperiódového modelu pre časové obdobie pozostávajúce z viacerých periód. Nespornou výhodou oproti jednoperiódovému modelu je možnosť meniť zloženie a váhy akcií v portfóliu na konci každej periódy, čo znamená obmedzenie rizika veľkej straty pri neočakávanom nepriaznivom vývoji na trhu. Daňou za možnosť meniť váhy akcií počas daného časového obdobia sú však transakčné náklady.

V prvej kapitole uvedieme niektoré základné pojmy nevyhnutné pre pochopenie problematiky. Predstavíme teóriu užitočnosti, ako aj mean-variance prístup k voľbe portfólia a odvodíme Markowitzov jednoperiódový model. Cieľom druhej kapitoly bude podrobne sa pozrieť na vzťah teórie užitočnosti s mean-variance prístupom. Dokážeme tu niektoré tvrdenia o konzistentnosti oboch prístupov. Jadrom práce je tretia kapitola, v ktorej (podľa [9]) odvodíme Markowitzov viacperiódový model za pomoci dynamického programovania. V tejto časti využijeme tiež niektoré poznatky z druhej kapitoly. V poslednej, štvrtej kapitole sa pozrieme ako beží viacperiódový model na reálnych dátach. Použijeme rôzne metódy odhadovania očakávaných výnosov, a zhodnotíme výsledky.

1 Teória portfólia

1.1 Základné pojmy

Moderná teória portfólia predstavuje časť finančnej matematiky, zaoberajúcu sa optimálnym zložením portfólia pri istých rozpočtových ohraničeniach. Otázkou je, čo presne znamená optimálne. Zrejme môžme predpokladať, že portfólio ktoré po roku prinesie istý výnos 10 percent, je pre investora výhodnejšie ako portfólio s istým ročným výnosom 5 percent. Môžme povedať, že istý výnos na úrovni 10 percent preferujeme pred istým výnosom na úrovni 5 percent. Problém nastáva, keď výnosy prestávajú byť isté a do hry sa dostáva riziko. V úvodnej časti tejto práce si popíšeme dva postupy riešenia tohto problému, a uvedieme niektoré súvislosti medzi nimi. Najskôr však ešte bližšie pozrime čo je riziko, a aký postoj k nemu môže investor zaujať.

Definície základných pojmov

Aby sme mohli lepšie popísať investorov vzťah k riziku a výnosom, je potrebné formalizovať niektoré pojmy (podľa [7]).

- **Totálny výnos** definujeme ako $r = \frac{W_1}{W_0}$ kde W_0 je hodnota investície na začiatku periódy, a W_1 je hodnota investície na konci periódy. Keďže W_1 dopredu nepoznáme, jeho hodnotu ako aj totálny výnos budeme modelovať ako náhodnú premennú. V tejto práci budeme totálny výnos pre jednoduchosť označovať len ako **výnos**.
- **Očakávaný výnos** (očakávaný zisk, expected value) definujeme ako strednú hodnotu výnosu $E(r)$. Značiť ho budeme aj ako $\overline{r}$.
- **Varianciou výnosu** $Var(r)$ budeme merať **mieru rizika**- čím je väčšia variancia, tým väčšie budú zrejme odchýlky od výnosu ktorý očakávame.

Investorov postoj k riziku

Ako sme už vyššie uviedli, je prirodzené očakávať, že investor bude preferovať vyšší očakávaný výnos. V prípade rizika či variancie nie je postoj investora až taký jasný. Investorov môžme podľa postoja deliť na tri skupiny: riziko-averzných (preferujúcich isté zisky), riziko-neutrálnych a riziko-obľubujúcich. My budeme väčšinou ďalej predpokladať riziko-averzných investorov. Toto obmedzenie je pomerne prirodzené, ľudia totiž preferujú mať veci pod kontrolou (aj keď nejde o pravidlo).

1.2 Teória užitočnosti

Jedným z prístupov k problému optimálnej voľby portfólia je teória užitočnosti. Táto teória nám však ponúka aj presnejší opis investorovho vzťahu k výnosu a riziku.

Funkcia užitočnosti

Základom teórie užitočnosti (podľa [8]) je myšlienka, že rôzne hladiny bohatstva majú pre investora rôznu užitočnosť. Tá však nemusí rásť s veľkosťou bohatstva lineárne. Napríklad, pre niekoho je dôležitý zisk prvých sto tisíc eur, pretože mu zabezpečí bývanie. Ďalších stotisíc eur síce tiež prinesie úžitok, nie však až taký veľký -nie sú už životne dôležité. Za účelom takéhoto porovnávania užitočnosti investície si definujeme takzvanú funkciu užitočnosti $U(W) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ktorá priradí každej budúcej hodnote portfólia jej užitočnosť. Prirodzene môžme očakávať, že funkcia užitočnosti bude rastúca -investor preferuje väčšie imanie.

S funkciou užitočnosti sa porovnávanie portfólií stáva jednoduchším -porovnávame strednú hodnotu funkcie užitočnosti budúcej hodnoty portfólia. Tento prístup vedie k optimalizačnej úlohe

$$\max_p E(U(W_p))$$

kde W_p je budúca hodnota portfólia p.

Funkcia užitočnosti a preferencie

Funkcia užitočnosti priradí každému portfóliu číslo -užitočnosť, vďaka čomu môže investor ľubovoľnú množinu portfólií usporiadať (za predpokladu že pozná rozdelenie ich výnosov) od najhoršieho po najlepšie. O tomto usporiadaní môžme hovoriť ako o preferenciách, jednoznačne popisujúcich investorovo správanie. Položme si otázku: je pre každého investora funkcia užitočnosti jednoznačne určená? Ukazuje sa že nie, a nasledujúce tvrdenie hovorí o tom že posunutie či škálovanie funkcie užitočnosti na investorove rozhodnutia nevplýva.

Tvrdenie 1.1 (Lineárna transformácia funkcie užitočnosti)**.** *Majme náhodné veličiny X, Y a rastúcu funkciu $U(X)$. Platí, že ak $E(U(X)) < E(U(Y))$, potom $E(a \cdot U(X) + b) < E(a \cdot U(Y) + b)$ kde $a \in \mathbb{R}^+$, $b \in \mathbb{R}$*

Dôkaz. $E(a \cdot U(X) + b) = a \cdot E(U(X)) + b < a \cdot E(U(Y)) + b = E(a \cdot U(Y) + b)$ □

Postoj k riziku a tvar funkcií užitočnosti

Všimnime si, že porovnávame už len stredné hodnoty užitočnosti -investorov postoj k riziku (variancii) je totiž skrytý priamo v tvare funkcie užitočnosti (podľa [7]):

- riziko-averzný investor ⇒ konkávna funkcia užitočnosti. Z definície konkávnosti, stredná hodnota užitočnosti dvoch (potenciálnych) výnosov bude menšia ako užitočnosť ich priemerného (istého) výnosu.
- riziko-obľubujúci investor ⇒ konvexná funkcia užitočnosti.
- riziko-neutrálny investor ⇒ lineárna funkcia užitočnosti.

1.3 Mean-variance optimalizácia

Alternatívu k maximalizácii strednej hodnoty funkcie užitočnosti predstavuje mean-variance optimalizácia. Pri tomto prístupe vopred predpokladáme riziko-averzného investora. Naším cieľom sa potom jednoducho stáva maximalizovať strednú hodnotu výnosu a minimalizovať jeho varianciu. Tieto dve úlohy (maximalizácia strednej hodnoty a minimalizácia variancie) však môžu stáť proti sebe -veľký zisk sa dosahuje s veľkou varianciu. Preto je vhodné jednu z týchto veličín fixovať, a maximalizovať (alebo minimalizovať) druhú. Pokiaľ zafixujeme očakávaný výnos a minimalizujeme varianciu, dostávame známy Markowitzov model.

Markowitzov jednoperiódový model

(Podľa [6], [7], [9]) Majme n aktív, z ktorých každé má nejaký očakávaný výnos a varianciu výnosu. Okrem toho, výnosy aktív môžu byť korelované aj navzájom. Úlohou Markowitzovho jednoperiódového modelu je minimalizovať varianciu portfólia pri danom požadovanom výnose. Túto optimalizačmú úlohu možno zapísať nasledovne:

$$\begin{aligned} &\min x^T V x \\ &x^T \overline{r} = \overline{W} \\ &x^T \mathbf{1} = W_{ini} \end{aligned} \tag{1}$$

kde x_i je objem financií investovaný do i-teho aktíva, $\overline{r}_i$ je očakávaný výnos i-teho aktíva, V je variančná matica vektora výnosov aktív, W_{ini} je hodnota investície na začiatku, $\overline{W}$ je požadovana hodnota investície na konci periódy a $\mathbf{1}$ je vektor jednotiek dĺžky n. Podľa [7] predpokladom existencie riešenia je lineárna nezávislosť výnosov. To znamená, že matica V je regulárna. Druhým predpokladom je existencia dvoch aktív s rôznymi výnosmi. Definujme si teraz maticu $Q = V + \overline{r}\overline{r}^T$. Za predpokladov (1) platí

$$x^T Q x = x^T V x + \overline{W}^2 \tag{2}$$

kde $\overline{W}^2$ je vopred nami určená konštanta. Preto môžme v úlohe (1) nahradiť účelovú funkciu výrazom $x^T Q x$ - táto úprava sa nám bude hodiť neskôr. Optimálny vektor x budeme hľadať metódou Lagrangeových multiplikátorov. Poznamenajme že vzhľadom k tomu že matica Q je (podľa [5]) symetrická a kladne definitná, stačí overiť podmienky prvého rádu. Lagrangeova funkcia k našej úlohe má tvar

$$L(x, \lambda, \gamma) = x^T Q x - \lambda(x^T \mathbf{1} - W_{ini}) - \gamma(x^T \overline{r} - \overline{W}) - \overline{W}^2 \tag{3}$$

Derivovaním podľa jednotlivých premenných dostávame podmienky optimality

$$2Qx - \lambda \mathbf{1} - \gamma \overline{r} = 0 \tag{4}$$

$$x^T \mathbf{1} - W_{ini} = 0 \tag{5}$$

$$x^T \overline{r} - \overline{W} = 0 \tag{6}$$

Vynásobením (4) zľava maticou Q^{-1} dostávame

$$x = 1/2 \cdot (\lambda Q^{-1} \mathbf{1} + \gamma Q^{-1} \overline{r}) \tag{7}$$

Dosadením (7) do rovníc (5) a (6) dostávame

$$\begin{aligned} W_{ini} &= 1/2 \cdot (\lambda \mathbf{1}^T Q^{-1} \mathbf{1} + \gamma \mathbf{1}^T Q^{-1} \overline{r}) \\ \overline{W} &= 1/2 \cdot (\lambda \mathbf{1}^T Q^{-1} \overline{r} + \gamma \overline{r}^T Q^{-1} \overline{r}) \end{aligned} \tag{8}$$

Zaveďme substitúciu

$$\begin{aligned} A &= \mathbf{1}^T Q^{-1} \mathbf{1} \\ B &= \mathbf{1}^T Q^{-1} \overline{r} \\ C &= \overline{r}^T Q^{-1} \overline{r} \end{aligned} \tag{9}$$

Sústavu (8) prepíšeme na

$$\begin{aligned} 2 \cdot W_{ini} &= A\lambda + B\gamma \\ 2 \cdot \overline{W} &= B\lambda + C\gamma \end{aligned} \tag{10}$$

Sústava (10) má práve jedno riešenie, ak je jej determinant $AC - B^2$ kladný. Ako je ukázané v [7], kladnosť determinantu vyplýva z predpokladov modelu. Riešením sústavy je potom

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{2(CW_{ini} - B\overline{W})}{AC - B^2} \\ \gamma &= \frac{2(A\overline{W} - BW_{ini})}{AC - B^2} \end{aligned} \tag{11}$$

Po dosadení výsledkov (11) do (7) dostávame vektor x, určujúci optimálne rozloženie investícií do aktív, čiže také ktoré minimalizuje varianciu pri danom požadovanom očakávanom výnose $\overline{W}$ a danom rozpočtovom ohraničení W_{ini}:

$$x = \frac{(CW_{ini} - B\overline{W})}{AC - B^2} \cdot Q^{-1}\mathbf{1} + \frac{(A\overline{W} - BW_{ini})}{AC - B^2} \cdot Q^{-1}\overline{r} \tag{12}$$

Vďaka rovnosti (2) môžme vyjadriť varianciu nášho portfólia ako

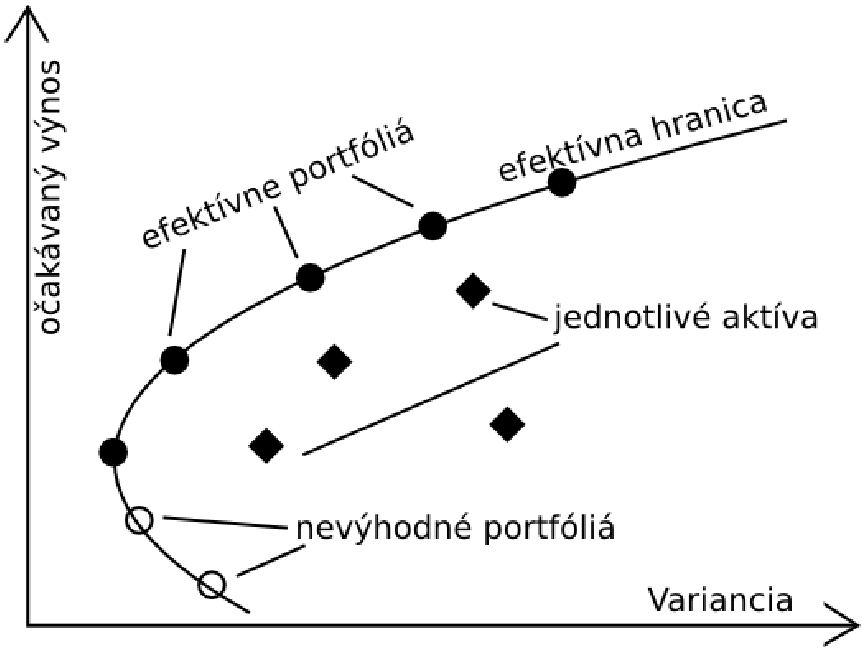
$$\sigma^2 = x^T V x = x^T Q X - \overline{W} = \frac{CW_{ini}^2 - 2B\overline{W}W_{ini} + A\overline{W}^2}{AC - B^2} - \overline{W}^2 \tag{13}$$

Efektívna hranica

Všimnime si, že optimálne rozloženie investícií x môžme chápať ako lineárnu funkciu premennej $\overline{W}$, $x = a + b\overline{W}$. Potom pre varianciu výnosu platí aj

$$\sigma^2 = x^T V x = (a + b\overline{W})^T V (a + b\overline{W}) \tag{14}$$

kde V je kladne definitná matica, z čoho vyplýva, že vo variancia (vyjadrená ako (14)) je kvadratickou funkciou $\overline{W}$ a pri člene $\overline{W}^2$ je kladný koeficient. Graf tejto funkcie sa nazýva (podľa [7]) efektívna hranica, a reprezentuje optimálne portfóliá.



Obr. 1: Efektívna hranica

Na obrázku 1 vidíme graf variancie výnosu optimálneho portfólia v závislosti od očakávaného výnosu. Portfóliá, ktoré môžu byť pre niektorého investora optimálne sa nachádzajú v hornej časti paraboly. Portfóliá v dolnej časti paraboly nie sú výhodné, pretože pri variancii, ktorú nadobúdajú možno pri inom portfóliu dosiahnuť aj vyšší očakávaný výnos. Vo vnútri paraboly sa nachádzajú všetky ostatné portfóliá, ako aj jednotlivé aktíva. Napravo od paraboly sa už žiadne portfóliá nenachádzajú, také kombinácie variancie a očakávaného výnosu nie je možné dosiahnuť.

2 Konzistentnosť prístupov

V predošlej kapitole sme sa oboznámili s dvoma najznámejšími prístupmi k voľbe portfólia, s teóriou užitočnosti a mean-variance optimalizáciou. Pozrime sa teraz bližšie na to, v akom vzťahu sú tieto dva prístupy. Zaujímať nás môže hneď niekoľko otázok:

- Nie sú tieto dva prístupy v spore?
- Je niektorý z týchto dvoch prístupov všeobecnejší?
- Dá sa odvodiť jeden prístup z druhého?

Ako si ukážeme, mean-variance optimalizácia a teória užitočnosti skutočne za istých podmienok nie sú v spore. Podmienkou je kvadratická funkcia užitočnosti, alebo normálne rozdelené budúce hodnoty portfólia. Navyše, ukážeme, že pre každý pevne určený očakávaný výnos a príslušné portfólio dopočítané Markowitzovým modelom existuje kvadratická funkcia užitočnosti, ktorej optimalizácia vedie k tomu istému portfóliu. Tým bude sčasti zodpovedaná druhá a tretia otázka -prístup cez užitočnosť je všeobecnejší ako Markowitzov model, ktorý vieme z teórie užitočnosti odvodiť.

2.1 Normálne rozdelené výnosy

Ukážeme, že v prípade normálne rozdelených budúcich hodnôt investície a rastúcej konkávnej funkcie užitočnosti, nie je mean-variance prístup v spore s maximalizáciou strednej hodnoty funkcie užitočnosti. To znamená, že pri zafixovanej variancii maximalizáciou strednej hodnoty investície v budúcnosti maximalizujeme strednú hodnotu funkcie užitočnosti (pre danú fixovanú varianciu). Pri zafixovanej strednej hodnote investície v budúcnosti maximalizujeme strednú hodnotu funkcie užitočnosti zase minimalizáciou variancie portfólia.

Užitočnosť a maximalizácia očakávanej hodnoty investície

Lema 2.1. *Nech $X : \Omega \to \mathbb{R}$ je náhodná premenná (nadobúdajúca aspoň 2 rôzne hodnoty) a $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sú rastúce funkcie. Potom platí, že $cov(f(X), g(X)) > 0$.*

Dôkaz. (Podľa [1]) Nech Y má rovnaké rozdelenie ako X a nech sú X a Y nezávislé. Potom náhodné premenné $f(X) - f(Y)$ a $g(X) - g(Y)$ majú strednú hodnotu 0. Platí

$$\begin{aligned} & cov(f(X) - f(Y), g(X) - g(Y)) \\ = \; & E[(f(X) - f(Y))(g(X) - g(Y))] \\ & -E(f(X) - f(Y)) \cdot E(g(X) - g(Y)) \\ = \; & E[(f(X) - f(Y))(g(X) - g(Y))] - 0 > 0 \end{aligned} \tag{15}$$

Posledný výraz je väčší ako nula, pretože f a g sú rastúce. Naviac, platí, že

$$\begin{aligned} & cov(f(X) - f(Y), g(X) - g(Y)) \\ = \; & cov(f(X), g(X)) - cov(f(X), g(Y)) \\ & -cov(g(X), f(Y)) + cov(g(Y), f(Y)) \\ = \; & 2 \cdot cov(f(X), g(X)) \end{aligned} \tag{16}$$

kde sme využili že X a Y sú nezávislé a rovnako rozdelené. Skombinovaním (15) a (16) dostávame požadovanú nerovnosť. □

Veta 2.2 (Užitočnosť a maximalizácia očakávaného výnosu)**.** *Nech $X \sim N(\overline{X}, \sigma^2)$ je normálne rozdelená náhodná premenná a $U(X)$ je rastúca funkcia. Zafixujme varianciu X. Potom, platí že stredná hodnota funkcie $U(X)$, $E(U(X))$ rastie spolu s $\overline{X}$.*

Dôkaz. Derivujme $E(U(X))$ podľa $\overline{X}$:

$$\begin{aligned} \frac{\delta E(U(X))}{\delta \overline{X}} & = \\ & = \frac{\delta}{\delta \overline{X}} \int_{-\infty}^{\infty} U(x) \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{\frac{-(x-\overline{X})^2}{2\sigma^2}} dx \\ & = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\delta}{\delta \overline{X}} \left(U(x) \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{\frac{-(x-\overline{X})^2}{2\sigma^2}} \right) dx \\ & = \int_{-\infty}^{\infty} U(x) \cdot \frac{(x - \overline{X})}{\sigma^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{\frac{-(x-\overline{X})^2}{2\sigma^2}} dx \\ & = E\left(U(X) \cdot \frac{(X - \overline{X})}{\sigma^2} \right) \\ & = \frac{1}{\sigma^2} \left[E(U(X) \cdot X) - E(U(X)) \cdot \overline{X} \right] \\ & = \frac{1}{\sigma^2} cov\left(X, U(X)\right) \end{aligned} \tag{17}$$

Použitím Lemy 2.1 na (17) dostávame požadovaný výsledok.

□

Užitočnosť a minimalizácia variancie

Lema 2.3. *Nech $X \sim N(0, \sigma^2)$ je normálne rozdelená náhodná premenná. Potom platí že $cov(X, X^2) = 0$*

Dôkaz.

$$\begin{aligned} cov(X, X^2) &= E(X^3) - E(X) \cdot E(X^2) \\ = E(X^3) &= \int_{-\infty}^{\infty} x^3 \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{\frac{-x^2}{2\sigma^2}} dx \end{aligned} \tag{18}$$

Funkcia vo vnútri integrálu je nepárna, z čoho vyplýva dokazované tvrdenie. □

Lema 2.4. *Nech $X : \Omega \to \mathbb{R}$ je náhodná premenná (nadobúdajúca aspoň 3 rôzne hodnoty), $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ nech je párna spojitá funkcia rastúca na $(-\infty, 0)$ a klesajúca na $(0, \infty)$ a $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ nech je párna spojitá funkcia klesajúca na $(-\infty, 0)$ a rastúca na $(0, \infty)$. Potom platí že $cov(f(X), g(X)) < 0$.*

Dôkaz. Myšlienka dôkazu je podobná ako v prípade Lemy 2.1. Nech Y má rovnaké rozdelenie ako X a nech X a Y sú nezávislé. Potom náhodné premenné $f(X) - f(Y)$ a $g(X) - g(Y)$ majú strednú hodnotu 0.
Ukážeme, že

$$f(X) < f(Y) \Leftrightarrow g(X) > g(Y) \tag{19}$$

Môžu nastať štyri prípady: $X, Y \in (-\infty, 0\rangle$; $X \in (-\infty, 0\rangle, Y \in \langle 0, \infty)$; $X, Y \in \langle 0, \infty)$ a $Y \in (-\infty, 0\rangle, X \in \langle 0, \infty)$. Ak $X, Y \in (-\infty, 0\rangle$ potom z $f(X) < f(Y)$ vyplýva že $X < Y$ a teda $g(X) > g(Y)$. Ak $X \in (-\infty, 0\rangle, Y \in \langle 0, \infty)$ potom $f(X) < f(Y) = f(-Y)$ (z párnosti). Potom $X < -Y$ a $g(X) > g(-Y) = g(Y)$. V zvyšných dvoch prípadoch postupujeme analogicky. Tak isto platí aj že ak $f(X) > f(Y)$ potom $g(X) < g(Y)$.
Platí že

$$\begin{aligned} & cov(f(X) - f(Y), g(X) - g(Y)) \\ = \; & E[(f(X) - f(Y)) \cdot (g(X) - g(Y))] \\ & - E(f(X) - f(Y)) \cdot E(g(X) - g(Y)) \\ = \; & E[(f(X) - f(Y)) \cdot (g(X) - g(Y))] \leq 0 \end{aligned} \tag{20}$$

Nerovnosť (20) dostávame použitím (19). Taktiež platí

$$\begin{aligned}
& cov(f(X)-f(Y),g(X)-g(Y)) \\
= \; & cov(f(X),g(X)) - cov(f(X),g(Y)) \\
& -cov(g(X),f(Y)) + cov(g(Y),f(Y)) \\
= \; & 2\cdot cov(f(X),g(X)) \qquad (21)
\end{aligned}$$

kde sme využili že X a Y sú nezávislé a rovnako rozdelené. Skombinovaním (20) a (21) dostávame požadovanú nerovnosť. □

Veta 2.5 (Užitočnosť a minimalizácia variancie)**.** *Nech $X \sim N(\overline{X},\sigma^2)$ je normálne rozdelená náhodná premenná a $U(X)$ nech je konkávna rastúca funkcia. Zafixujme strednú hodnotu premennej X. Potom stredná hodnota funkcie $U(X)$, $E(U(X))$ klesá s varianciou σ^2.*

Dôkaz. Derivujme $E(U(X))$ podľa σ^2:

$$\begin{aligned}
& \frac{\delta E(U(X))}{\delta\sigma^2} = \\
= \; & \frac{\delta}{\delta\sigma^2}\int_{-\infty}^{\infty} U(x)\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{\frac{-(x-\overline{X})^2}{2\sigma^2}}dx \\
= \; & \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\delta}{\delta\sigma^2}\left(U(x)\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{\frac{-(x-\overline{X})^2}{2\sigma^2}}\right)dx \\
= \; & \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\delta}{\delta\sigma^2}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\right)\cdot U(x)\cdot e^{\frac{-(x-\overline{X})^2}{2\sigma^2}}dx \\
& +\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\cdot\frac{\delta}{\delta\sigma^2}\left(U(x)\cdot e^{\frac{-(x-\overline{X})^2}{2\sigma^2}}\right)dx \\
= \; & \int_{-\infty}^{\infty}U(x)\cdot\frac{-1}{2\sigma^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\cdot e^{\frac{-(x-\overline{X})^2}{2\sigma^2}}dx \\
& +\int_{-\infty}^{\infty}U(x)\cdot\frac{(x-\overline{X})^2}{2(\sigma^2)^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{\frac{-(x-\overline{X})^2}{2\sigma^2}}dx \\
= \; & -\frac{1}{2\sigma^2}E(U(X)) + \frac{1}{2\sigma^2}E\left(U(X)\cdot\frac{(X-\overline{X})^2}{\sigma^2}\right) \\
= \; & -\frac{1}{2\sigma^2}E(U(X)) + \frac{1}{2\sigma^2}cov\left(U(X),\frac{(X-\overline{X})^2}{\sigma^2}\right) \\
& +\frac{1}{2\sigma^2}E\left(U(X)\right)\cdot E\left(\frac{(X-\overline{X})^2}{\sigma^2}\right) \\
= \; & \frac{1}{2\sigma^4}cov\left(U(X),(X-\overline{X})^2\right) \qquad (22)
\end{aligned}$$

V poslednom kroku sme využili fakt že $E(X-\overline{X})^2$ je varianciou X, z čoho vyplýva že $E\left(\frac{(X-\overline{X})^2}{\sigma^2}\right) = 1$. Teraz dokážeme že $cov\left(U(X),(X-\overline{X})^2\right) < 0$.

Predpokladajme že $\overline{X} = 0$. Nech $k = U'(0)$. Z konkávnosti funkcie $U(X)$ platí že $\frac{\delta U(X)}{\delta X} > k$ pre $X < 0$ a $\frac{\delta U(X)}{\delta X} < k$ pre $X > 0$, z čoho vyplýva že $U(X) - U(0) \leq k \cdot X$. Nech $h(X)$ je taká funkcia, že $U(X) = k \cdot X + h(X)$. Potom derivácia $h(X)$ je kladná pre $X < 0$, záporná pre $X > 0$ a rovná nule pre $X = 0$, z čoho vyplýva že $h(X)$ je rastúca na $(-\infty, 0)$ a klesajúca na $(0, \infty)$. Potom platí:

$$
\begin{aligned}
& cov\left(U(X),(X-\overline{X})^2\right) = cov\left(U(X),X^2\right) \\
= \; & cov\left(k \cdot X + h(X), X^2\right) \\
= \; & k \cdot cov\left(X, X^2\right) + cov\left(h(X), X^2\right) && (23) \\
= \; & cov\left(h(X), X^2\right) = cov\left(h(X), X^2 - E(X^2)\right) \\
= \; & E\left[h(X) \cdot (X^2 - E(X^2))\right] - E(h(X)) \cdot E(X^2 - E(X^2)) \\
= \; & E\left[h(X) \cdot (X^2 - E(X^2))\right] && (24)
\end{aligned}
$$

V kroku (23) sme využili Lemu 2.3, podľa ktorej $k \cdot cov\,(X, X^2) = 0$.

Definujme si teraz funkcie $h_1(X), h_2(X)$: $h_1(X) = h(X)$ pre záporné X a $h_1(X) = h(-X)$ pre nezáporné X . $h_2(X) = h(-X)$ pre záporné X a $h_2(X) = h(X)$ pre nezáporné X . Označme $X^2 - E(X^2)$ ako $Q(X)$ a the hustotu rozdelenia $N(0, \sigma^2)$ ako $f(x)$. Všimnime si že $Q(X)$ ako aj $f(x)$ sú párne funkcie. Podobne, $h_1(X)$ a $h_2(X)$ sú párne, preto platia rovnosti:

$$
\begin{aligned}
E(h_1(X) \cdot Q(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} h_1(x)Q(x)f(x)dx \; &= \; 2 \cdot \int_{-\infty}^{0} h(x)Q(x)f(x)dx && (25) \\
E(h_2(X) \cdot Q(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} h_2(x)Q(x)f(x)dx \; &= \; 2 \cdot \int_{0}^{\infty} h(x)Q(x)f(x)dx && (26)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& E(h(X) \cdot (X^2 - E(X^2))) = E(h(X) \cdot Q(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} h(x)Q(x)f(x)dx \\
= \; & \int_{-\infty}^{0} h(x)Q(x)f(x) + \int_{0}^{\infty} h(x)Q(x)f(x)dx \\
= \; & \frac{E(h_1(X) \cdot Q(X)) + E(h_2(X) \cdot Q(X))}{2} && (27)
\end{aligned}
$$

Z (27) vyplýva že buď $E(h_1(X)\cdot Q(X)) \geq E(h(X)\cdot Q(X))$ alebo $E(h_2(X)\cdot Q(X)) \geq E(h(X)\cdot Q(X))$. Bez ujmy na všeobecnosti, predpokladajme že platí prvá nerovnosť. Tiež platí, že $E(h_1(X)\cdot Q(X)) = cov(h_1(X), Q(X))$ (vďaka $E(Q(X)) = 0$) a funkcie $h_1(X)$ a $Q(X)$ spĺňajú podmienky Lemy 2.4 podľa ktorej $cov(h_1(X), Q(X)) < 0$. Platí teda,

$$\frac{\delta E(U(X))}{\delta\sigma^2} = \frac{1}{2\sigma^4}E(h(X)\cdot Q(X)) \leq \frac{1}{2\sigma^4}E(h_1(X)\cdot Q(X)) < 0 \tag{28}$$

čím je dokázaná klesajúcosť $E(U(X)$ v σ^2.

V prípade že $\overline{X} \neq 0$, urobíme transformáciu $Y = X - \overline{X}$ a $U^*(Y) = U(Y + \overline{X})$ a dôkaz urobíme pre $Y, U^*(Y)$. □

2.2 Kvadratická funkcia užitočnosti

Uvažujme kvadratickú funkciu užitočnosti so záporným znamienkom pri kvadratickom člene. Uvedomme si, že táto funkcia spĺňa požadovanú vlastnosť - rastúcosť len na istom intervale. Pri vhodnej voľbe koeficientov to však nemusí byť na obtiaž - interval na ktorom bude splnená rastúcosť bude dosť veľký nato, aby obsiahol väčšinu možných výnosov.

Konzistenia s mean-variance optimalizáciou

Ukážeme, že v prípade kvadratickej funkcie užitočnosti maximalizácia jej strednej hodnoty nie je v spore s mean- variance optimalizáciou. Dôkaz tohto tvrdenia preberáme zo [7].

Veta 2.6. *Nech $U(X)$ je kvadratickou funkciou so záporným koeficientom pri kvadratickom člene. Nech X je náhodná premenná so strednou hodnotou $\overline{X}$ a varianciou σ^2, pričom predpokladajme že X nadobúda len hodnoty z intervalu na ktorom je $U(X)$ rastúca. Potom stredná hodnota $U(X)$, $E(U(X))$ rastie s $\overline{X}$, a klesá so σ^2.*

Dôkaz. Napíšme si funkciu $U(X)$ v tvare Taylorovho polynómu v bode $\overline{X}$:

$$U(X) = U(\overline{X}) + U'(\overline{X})(X - \overline{X}) + (1/2)U''(\overline{X})(X - \overline{X})^2$$

Potom $E(U(X))$ môžme napísať ako

$$E(U(X)) = U(\overline{X}) + (1/2)U''(\overline{X})\sigma^2$$

Z rastúcosti $U(X)$ vyplýva rastúcosť $E(U(X))$ v $\overline{X}$ a z konkávnosti vyplýva zápornosť $U''(\overline{X})$ a teda klesajúcosť v σ^2. $\square$

Kvadratická funkcia užitočnosti reprezentujúca Markowitzov model

(Podľa [9])Uvažujme kvadratickú funkciu užitočnosti v tvare $U(W) = W - \alpha \cdot W^2$ (pričom W predstavuje budúcu hodnotu investície). Uvedomme si, že predpoklad takéhoto tvaru nie je obmedzujúci. Podľa Tvrdenia 1.1 z Kapitoly 1 totiž platí, že lineárna transformácia funkcie užitočnosti (ktorou môžme požadovaný tvar dostať) nemení investorove preferencie. Maximalizujme investorov úžitok pri danom rozpočtovom ohraničení, tj riešme úlohu:

$$\begin{aligned} &\max E(U(W)) = \max\{E(W) - \alpha E(W^2)\} \\ &= \max\{E(W) - \alpha(Var(W) + E(W)^2)\} \\ &= \max\{x^T\overline{r} - \alpha x^T Q x\} \\ &x^T\mathbf{1} = W_{ini} \end{aligned} \tag{29}$$

Pri poslednej úprave účelovej funkcie sme použili značenie z časti 1.3 o Markowitzovom jednoperiódovom modeli. Táto úloha je ekvivalentná s úlohou

$$\begin{aligned} &\min\{-\frac{1}{\alpha}E(U(W))\} = \min\{x^T Q x - \frac{1}{\alpha}x^T\overline{r}\} \\ &x^T\mathbf{1} = W_{ini} \end{aligned} \tag{30}$$

Lagrangeova funkcia k tejto optimalizačnej úlohe má tvar

$$L(x,\lambda) = x^T Q x - \frac{1}{\alpha}x^T\overline{r} - \lambda(x^T\mathbf{1} - W_{ini}) \tag{31}$$

Derivovaním dostávame podmienky optimality

$$2Qx - \lambda\mathbf{1} - \frac{1}{\alpha}\overline{r} = 0 \tag{32}$$

$$x^T\mathbf{1} - W_{ini} = 0 \tag{33}$$

Všimnime si, že podmienky (32), (33) sú takmer totožné s podmienkami (4), (5) z Markowitzovho modelu (1.3). Jediným rozdielom je, že v sústave rovníc (32), (33) sa nevyskytuje premenná γ , na jej mieste sa nachádza $1/\alpha$. Riešením sústavy rovníc (4), (5), (6) však dostávame nielen optimále portfólio z pohľadu Markowitzovho modelu, ale aj Lagrangeove multiplikátory λ a γ. Ak teda vyberieme α také, aby platilo $1/\alpha = \gamma$, potom maximalizovaním strednej hodnoty kvadratickej funkcie užitočnosti v tvare $U(W) = W - \alpha \cdot W^2$, dostávame rovnaké portfólio ako v prípade Markowitzovho modelu s vopred určeným požadovaným výnosom.

Pripomeňme si, že hodnotu γ (11) poznáme z časti 1.3, ľahko teda dopočítame príslušnú hodnotu α:

$$\gamma = \frac{2(A\overline{W} - BW_{ini})}{AC - B^2} \Longrightarrow \alpha = \frac{AC - B^2}{2(A\overline{W} - BW_{ini})} \tag{34}$$

Výsledok týhto úvah môžme sformulovať ako tvrdenie:

Tvrdenie 2.7. *Nech x je vektor investícií do jednotlivých aktív reprezentujúci optimálne portfólio vypočítané Markowitzovým modelom pri danej požadovanej budúcej hodnote investície $\overline{W}$ a rozpočtovom ohraničení W_{ini}. Potom x je takisto optimálnym portfóliom vypočítaným maximalizáciou $E(U(W))$, kde $U(W) = W - \alpha \cdot W^2$ a $\alpha = \frac{AC-B^2}{2(A\overline{W}-BW_{ini})}$.*

Dôkaz. Dôkaz vyplýva z predošlých úvah. □

Vyjadrime z hodnoty α požadovanú budúcu hodnotu investície, ktorú táto funkcia užitočnosti implikuje:

$$\overline{W} = \frac{\frac{1}{2\alpha}(AC - B^2) - BW_{ini}}{A} \tag{35}$$

Dosaďme túto hodnotu do optimálneho vektora investícií (12) z Markowitzovho modelu z Kapitoly 1:

$$x = \frac{1}{2\alpha} \cdot Q^{-1}\overline{r} + \frac{W_{ini} - \frac{B}{2\alpha}}{A} \cdot Q^{-1}\mathbf{1} \tag{36}$$

Použitím Tvrdenia 2.7 dostávame, že (36) je riešením maximalizačnej úlohy (29).

3 Viacperiódový model

3.1 Význam viacperiódového modelu

V 1. Kapitole sme odvodili Markowitzov jednoperiódový model, pomocou ktorého volíme portfólio s vopred určeným výnosom a minimálnou varianciou. Tento model predpokladá, že po zostavení portfólia už doňho nezasahujeme, a po čase T ho predáme, s účelom utŕžiť zisk. Predstavme si však, že sa cena aktív v našom portfóliu začne vyvíjať nepriaznivo, v dôsledku čoho sa mení aj očakávaný výnos portfólia v čase T. Riešením by mohlo byť prerovnanie portfólia, tj. predaj a kúpa aktív, s cieľom aspoň čiastočne zamedziť stratám. S touto možnosťou však jednoperiódový model nepočíta. Navyše, ak by sme vopred predpokladali, že portfólio budeme prerovnávať, optimálna voľba aktív pre požadvaný výnos by zrejme vyzerala inak. Tieto problémy rieši Markowitzov viacperiódový model. Vstupom je opäť požadovaný výnos, pri ktorom minimalizujeme jeho varianciu, pričom však predpokladáme, že portfólio budeme do času T v pevne zvolených periódach prerovnávať.

Je zrejmé, že čím viac bude periód na ktoré časový úsek T rozdelíme, tým menšiu varianciu portfólia sa nám podarí dosiahnuť. Ak by mal byť totiž model s menším množstvom periód lepší, jednoducho v niektorých periódach modelu s väčším množstvom periód prerovnávať nebudeme a dosiahneme to isté. Prečo teda nezvoliť periód, v ktorých budeme prerovnávať čo najviac? V praxi každý nákup či predaj aktíva nesie so sebou transakčné náklady, čo znamená, že nie každé prerovnanie, ktoré zvýši výnosnosť či zníži varianciu, musí byť výhodné. Okrem transakčných nákladov sa v praxi niekedy stretávame aj s ďalším obmedzením -zákazom krátkych pozícií. Znamená to, že investorovi nie je dovolené predávať aktíva ktoré vopred nevlastní. Jednotlivé periódy nemusia slúžiť výhradne na prerovnanie portfólia. Investor môže takisto niektoré aktíva predať a utŕžené peniaze spotrebovať. Pre takéto správanie však nie je Markowitzov model vhodný. Poslúžiť nám môže teória užitočnosti, ktorá spotrebe investora v jednotlivých periódach priradí užitočnosť, na základe ktorej sa možno o veľkosti spotreby rozhodovať.

My obmedzíme naše skúmanie na model bez spotreby, tj. budeme predpokladať, že v každej perióde sa všetok zisk preinvestuje. Takisto pre jednoduchosť budeme predpokladať nulové transkačné náklady a povolené krátke pozície. Na odvodenie viacperiódového modelu použijeme prístup dynamického programovania. Využijeme pri tom naše závery o ekvivalencii Markowitzovho jednoperiódového modelu a špeciálne zvolenej kvadratickej funkcie užitočnosti z Kapitoly 2.

3.2 Úvod do dynamického programovania

(Podľa [2]) Uvažujme optimalizačnú úlohu, pri ktorej máme urobiť sériu rozhodnutí tak, aby sme maximalizovali účelovú funkciu $f(x)$. Aby sme dokázali túto úlohu efektívne riešiť potrebujeme presnejšie popísať jej jednotlivé časti:

- **Účelová funkcia** $f(x)$: Naším cieľom je maximalizovať hodnotu účelovej funkcie $f(x)$. Jej hodnotu ovplyvňujeme usporiadnou postupnosťou rozhodnutí.

- **Priestor stavov**: Priestorom stavov Ω_t nazývame monožinu všetkých stavov $\omega_t^i, i \in I$ (kde I je indexová množina), do ktorých sa môžeme v čase t dostať. Pod stavom rozumieme súbor všetkých informácií vplývajúcich na naše rozhodovanie. Jednou z týchto informácií môže byť napríklad ako daný stav vplýva na hodnotu účelovej funkcie. O tom do akého stavu ω_{t+1}^j v čase $t+1$ sa dostaneme zo stavu ω_t^i, rozhoduje naše rozhodnutie v čase t. Podľa toho, aké informácie do jednotlivých stavov zahŕňame, môže byť stavov veľké až nekonečné množstvo. Ak sa rozhodneme reprezentovať stavy diskrétne, môžme ich modelovať ako stromový graf. Poznamenajme ešte, že priestor stavov by mal obsahovať počiatočný stav ω_0 a množinu koncových stavov ω_T^i.

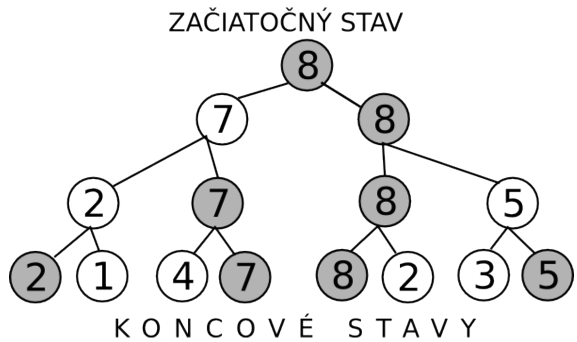
- **Vektory kontrolných premenných** K_t^i: Rozhodnutie v čase t v stave ω_t^i modelujeme pomocou vektoru kontrolných premenných K_t^i, ktorých hodnotu môžme v rámci nejakého vopred daného rozsahu určiť. Od hodnoty kontrolných premenných závisí, do akého stavu ω_{t+1}^j sa dostaneme. Okrem kontrolných premenných potrebujeme poznať aj **vzťahy** presne popisujúce prechod do stavu v čase $t+1$ na základe hodnoty kontrolnej premennej.

Bellmanov princíp

Uvažujme optimalizačnú úlohu, pri ktorej máme urobiť sériu rozhodnutí tak, aby sme maximalizovali účelovú funkciu $f(x)$. Modelujme túto úlohu pomocou priestoru stavov, kontrolných premenných a príslušných vzťahov medzi nimi. Prístup cez dynamické programovanie rieši takúto úlohu rozložením na viacero jednoduchších podúloh, ktoré môžme postupne vyriešiť. Ako to môžme dosiahnuť, vysvetľuje Bellmanov princíp (podľa [2]):

Tvrdenie 3.1 (Bellmanov princíp)**.** *Pokiaľ je séria T rozhodnutí vedúca z počiatočného stavu ω_0 cez stav ω_t^j do niektorého z koncových stavov ω_T^i optimálna (v zmysle maximalizácie účelovej funkcie $f(x)$), potom je v tomto zmysle optimálnych aj posledných $T-t$ rozhodnutí pre úlohu s počiatočným stavom ω_t^j.*

Platnosť Bellmanovho princípu vyplýva z faktu, že stav je definovaný ako súbor všetkých informácií, na základe ktorých sa rozhodujeme, nepotrebujeme teda poznať predošlé stavy.



Obr. 2: Ilustrácia Bellmanovho princípu. Pomocou výberu cesty maximalizujeme hodnotu v koncovom stave. Nech sa nachádzame v ktoromkoľvek stave, postúpenie (smerom nadol) do stavu reprezentovaného "šedým políčkom"je optimálne. Na začiatku sme poznali len hodnoty koncových stavov, hodnoty skorších stavov sú doplnené na základe Bellmanovho princípu.

3.3 Odvodenie viacperiódového modelu

V prípade optimalizácie voľby portfólia pomocou dynamického programovania môžme ako účelovú funkciu použiť funkciu užitočnosti. Viacperiódový model preto odvodíme použitím teórie užitočnosti, avšak poznatky z kapitoly 2 nám umožnia pozerať sa na tento model ako na minimalizáciu variancie pri danom požadovanom výnose.

Formulácia úlohy prostredníctvom dynamického programovania

Majme časový úsek počas ktorého chceme zarobiť investovaním do akcií, rozdelený na T periód. Na začiatku každej periódy volíme váhy jednotlivých aktív tak, aby stredná hodnota funkcie užitočnosti (za predpokladu nášho optimálneho rozhodovania v budúcnosti) bola na konci poslednej periódy maximálna. Formulujme túto úlohu ako úlohu dynamického programovania:

- Ako účelovú funkciu zvoľme strednú hodnotu funkcie užitočnosti hodnoty investície v čase T, $E(U(W_T))$. Pre naše účely zvoľme užitočnosť v tvare
$$U(W) = W - \alpha \cdot W^2 \tag{37}$$
- Pod stavom ω_t^i budeme rozumieť hodnotu investície v čase t, W_t, informáciu o čase t v ktorom sa nachádzame a informáciu o rozdelení výnosov jednotlivých aktív vo všetkých nasledujúcich periódach. Táto informácia zrejme nebude presná, môžeme ju odhadnúť napríklad z historických výnosov, alebo na základe ekonomickej analýzy. Vďaka nej poznáme aj odhady matíc Q_s a čísla A_s, B_s, C_s, tak ako sú definované v časti 1.3 pre $t \leq s < T$.
- Pod vektorom kontrolných premenných K_t^i budeme rozumieť vektor financií x_t investovaných do jednotlivých aktív v čase t v stave ω_t^i. Prechod do stavu ω_{t+1}^j je potom určený vývojom ceny aktív na trhu.

Odvodenie optimálneho riešenia

(Podľa [9]) Našu úlohu môžme zapísať ako

$$\begin{aligned} & \max_{x_0 \dots x_{T-1}} E(U(W_T)) \\ = \; & \max_{x_0} E(\max_{x_1} E(\dots \max_{x_{T-1}} E(U(W_T)|W_{T-1})\dots|W_1)|W_0) \\ & x_0^T \mathbf{1} = W_0 \\ & \vdots \\ & x_{T-1}^T \mathbf{1} = W_{T-1} \end{aligned} \tag{38}$$

kde W_0 označuje počiatočné rozpočtové ohraničenie, W_T hodnotu investície na konci poslednej periódy, a $x_0...x_{T-1}$ investičné rozhodnutia na začiatku jednotlivých periód. Vďaka Bellmanovmu princípu môžme najskôr skúmať investičné rozhodnutie na konci poslednej periódy za predpokladu rozpočtového ohraničenia W_{T-1}, potom investičné rozhodnutie v predposlednej perióde, atď. :

$$\begin{aligned} &\max_{x_{T-1}} E(U(W_T)) = J_{T-1}(W_{T-1}) \\ &x_{T-1}^T \mathbf{1} = W_{T-1} \end{aligned} \tag{39}$$

Teraz skúmajme rozhodnutie v predposlednej perióde:

$$\begin{aligned} &\max_{x_{T-2}} E(J_{T-1}(W_{T-1})) = J_{T-2}(W_{T-2}) \\ &x_{T-2}^T \mathbf{1} = W_{T-2} \end{aligned} \tag{40}$$

až postupne dostávame rozhodnutie v každej z T periód ako x_t riešiace úlohu

$$\begin{aligned} &\max_{x_t} E(J_{t+1}(W_{t+1})) = J_t(W_t) \\ &x_t^T \mathbf{1} = W_t \end{aligned} \tag{41}$$

Všimnime si že hľadanie $J_{T-1}(W_{T-1})$ v úlohe (39) je vlastne maximalizáciou strednej hodnoty funkcie užitočnosti $E(U(W_T))$ pre užitočnosť v tvare (37). Vektor, ktorý túto $E(U(W_T))$ maximalizuje, je vlastne (36) z časti 2.2:

$$x_{T-1} = \frac{1}{2\alpha} \cdot Q_{T-1}^{-1} \overline{r}_{T-1} + \frac{W_{T-1} - \frac{B_{T-1}}{2\alpha}}{A_{T-1}} \cdot Q_{T-1}^{-1} \mathbf{1} \tag{42}$$

pričom spodný index $T-1$ označuje periódu v ktorej sa nachádzame. Aká je hodnota $J_{T-1}(W_{T-1})$ (v závislosti od W_{T-1})?

$$J_{T-1}(W_{T-1}) = E(U(W_T)) = E(W_T - \alpha W_T^2) = x_{T-1}^T \overline{r}_{T-1} - \alpha \cdot x_{T-1}^T Q_{T-1} x_{T-1} \tag{43}$$

kde sme využili definíciu Q z časti 1.3. Platí

$$x_{T-1}^T \overline{r}_{T-1} = \frac{1}{2\alpha}(C_{T-1} - \frac{B_{T-1}^2}{A_{T-1}}) + \frac{B_{T-1}}{A_{T-1}} W_{T-1} \tag{44}$$

$$x_{T-1}^T Q_{T-1} x_{T-1} = \frac{W_{T-1}^2}{A_{T-1}} + \frac{1}{4\alpha^2}(C_{T-1} - \frac{B_{T-1}^2}{A_{T-1}}) \tag{45}$$

Dosadením (44) a (45) do (43) dostávame:

$$J_{T-1}(W_{T-1}) = \frac{1}{4\alpha}(C_{T-1} - \frac{B_{T-1}^2}{A_{T-1}}) + \frac{B_{T-1}}{A_{T-1}} W_{T-1} - \frac{\alpha}{A_{T-1}} W_{T-1}^2 \tag{46}$$

Riešme teraz úlohu (40) - hľadajme optimálny vektor x_{T-2}:

$$\max_{x_{T-2}} E(J_{T-1}(W_{T-1})) = \max_{x_{T-2}} \frac{1}{4\alpha}(C_{T-1} - \frac{B_{T-1}^2}{A_{T-1}}) + \frac{B_{T-1}}{A_{T-1}}W_{T-1} - \frac{\alpha}{A_{T-1}}W_{T-1}^2$$
$$x_{T-2}^T\mathbf{1} = W_{T-2} \tag{47}$$

Ak bude x_{T-2} riešením tejto úlohy, potom bude aj riešením ekvivalentnej úlohy, ktorú dostávame lineárnou transformáciou:

$$\max_{x_{T-2}} W_{T-1} - \frac{\alpha}{B_{T-1}}W_{T-1}^2$$
$$x_{T-2}^T\mathbf{1} = W_{T-2} \tag{48}$$

Všimnime si, že táto úloha má rovnaký tvar ako úloha (39) z poslednej periódy. Jediným rozdielom je, že namiesto α tu máme $\alpha^* = \frac{\alpha}{B_{T-1}}$ a indexy $T-1$ a T sú nahradené indexami $T-2$ a $T-1$. Riešenie tejto úlohy môžme teda dostať jednoduchou úpravou riešenia (42):

$$x_{T-2} = \frac{1}{2\alpha} \cdot Q_{T-2}^{-1}\overline{r}_{T-2} + \frac{W_{T-2} - \frac{B_{T-2}B_{T-1}}{2\alpha}}{A_{T-2}} \cdot Q_{T-2}^{-1}\mathbf{1} \tag{49}$$

Analogicky k postupu v poslednej perióde dostávame $J_{T-2}(W_{T-2})$, jediná zmena nastane opäť v indexoch a koeficiente α^*. x_{T-3} bude závisieť opäť len na tvare $J_{T-2}(W_{T-2})$. Tento postup môžme opakovať až po prvú periódu. Dostávame teda optimálne investičné rozhodnutie v každom čase t ako

$$x_t = \frac{1}{2\alpha}\prod_{s=t+1}^{T-1} B_s Q_t^{-1}\overline{r}_t + (\frac{W_t}{A_t} - \frac{\prod_{s=t}^{T-1} B_s}{2\alpha A_t}) \cdot Q_t^{-1}\mathbf{1} \tag{50}$$

3.4 Transformácia na Markowitzov viacperiódový model

(Podľa [9]) Pozrime sa, aká je očakávaná hodnota investície v čase t v závislosti od hodnoty v čase $t-1$:

$$\begin{aligned}
& E(W_t) = x_{t-1}^T\overline{r}_t \\
= & \left(\frac{1}{2\alpha}\prod_{s=t}^{T-1} B_s Q_{t-1}^{-1}\overline{r}_{t-1} + (\frac{W_{t-1}}{A_{t-1}} - \frac{\prod_{s=t-1}^{T-1} B_s}{2\alpha A_{t-1}}) \cdot Q_{t-1}^{-1}\mathbf{1}\right)^T \cdot \overline{r}_{t-1} \\
= & \frac{1}{2\alpha}\prod_{s=t}^{T-1} B_s C_{t-1} + \frac{B_{t-1}}{A_{t-1}}W_{t-1} - \frac{\prod_{s=t-1}^{T-1} B_s B_{t-1}}{2\alpha A_{t-1}} \\
= & G_{t-1} + H_{t-1} \cdot W_{t-1}
\end{aligned} \tag{51}$$

V poslednom kroku sme spravili substitúciu

$$\begin{aligned} G_{t-1} &= \frac{1}{2\alpha}\prod_{s=t}^{T-1} B_s C_{t-1} - \frac{\prod_{s=t-1}^{T-1} B_s B_{t-1}}{2\alpha A_{t-1}} \\ &= \frac{1}{2\alpha}\prod_{s=t}^{T-1} B_s \left(C_{t-1} - \frac{B_{t-1}^2}{A_{t-1}}\right) \\ H_{t-1} &= \frac{B_{t-1}}{A_{t-1}} \end{aligned} \tag{52}$$

Ak W_0 je počiatočná hodnota investície, potom očakávaná hodnota investície po prvej perióde bude $E(W_1) = H_0 W_0 + G_0$. Očakávaná hodnota investície po druhej perióde bude $E(W_2) = H_1(H_0 W_0 + G_0) + G_1$. Týmto postupom dostávame očakávanú hodnotu investície na konci poslednej periódy ako

$$\begin{aligned} & \overline{W} = E(W_T) \\ = \; & H_{T-1}(H_{T-2}(...H_1(H_0 W_0 + G_0) + G1)... + G_{T-2}) + G_{T-1} \\ = \; & W_0 \cdot \prod_{t=0}^{T-1} H_t + \sum_{t=0}^{T-1} G_t \prod_{s=t+1}^{T-1} H_s \\ = \; & W_0 \prod_{t=0}^{T-1} \frac{B_t}{A_t} + \frac{1}{2\alpha}\sum_{t=0}^{T-1}\left(C_t - \frac{B_t^2}{A_t}\right)\prod_{s=t+1}^{T-1}\frac{B_s^2}{A_s} \end{aligned} \tag{53}$$

Vo výraze (53) sa nachádza parameter α. Od jeho hodnoty závisí aj očakávaná hodnota investície na konci poslednej periódy. Vyjadrime si teda z (53) hodnotu α pre vopred dané $\overline{W}$:

$$\alpha = \frac{\sum_{t=0}^{T-1}\left(C_t - \frac{B_t^2}{A_t}\right)\prod_{s=t+1}^{T-1}\frac{B_s^2}{A_s}}{2\cdot\left(\overline{W} - W_0\prod_{t=0}^{T-1}\frac{B_t}{A_t}\right)} \tag{54}$$

Vidíme, že hodnotu α môžme zvoliť podľa toho, akú očakávanú hodnotu investície na konci poslednej periódy požadujeme. Ak zvolíme α v tvare (54), potom bude očakávaná hodnota investície v poslednej perióde $\overline{W}$. Prechodom do nasledujúcej periódy 1 však získavame ďalšiu informáciu -hodnotu investície v čase 1, W_1. Táto hodnota nahradí odhad $E(W_1)$, s ktorým sme vypočítali koeficient α. To však znamená, že nato aby bol očakávaný výnos aj naďalej $\overline{W}$, musíme vypočítať novú hodnotu α_1. Keďže naše rozhodovanie nezávisí od predošlých periód, hodnotu α_1 môžme vypočítať analogicky ako v (54), so štartovacím časom $t = 1$. Podobne dopočítame α v každej perióde:

$$\alpha_t = \frac{\sum_{k=t}^{T-1}\left(C_k - \frac{B_k^2}{A_k}\right)\prod_{s=k+1}^{T-1}\frac{B_s^2}{A_s}}{2\cdot\left(\overline{W} - W_t\prod_{k=t}^{T-1}\frac{B_k}{A_k}\right)} \tag{55}$$

Pre vektor investícií v čase t potom stačí, ak zmeníme α na α_t:

$$x_t = \frac{1}{2\alpha_t} \prod_{s=t+1}^{T-1} B_s Q_t^{-1} \overline{r}_t + (\frac{W_t}{A_t} - \frac{\prod_{s=t}^{T-1} B_s}{2\alpha_t A_t}) \cdot Q_t^{-1} \mathbf{1} \tag{56}$$

Získali sme teda sériu investičných rozhodnutí x_t uskutočnených postupne periódach $1 ... T-1$ v tvare (56), pričom každé z nich závisí len na momentálnej hodnote investície, jej požadovanej hodnote na konci poslednej periódy a odhadoch variancie a strednej hodnoty výnosov pre nasledujúce periódy. Očakávaná hodnota investície na konci poslednej periódy je v každej perióde rovná vopred zvolenému $\overline{W}$. Vďaka Tvrdeniu 2.7 a faktu že $J_t(W_t)$ z časti 3.3 je kvadratickou funkciou navyše platí, že rozhodnutie v každej perióde je mean-variance optimálne, v zmysle, že pri danej očakávanej hodnote investície v najbližšej perióde dosahuje minimálnu varianciu. Môžme teda oprávnene tento prístup nazvať Markowitzovým viacperiódovým modelom.

Dynamické spresňovanie odhadnutých konštánt

Doteraz sme počítali s tým, že na začiatku prvej periódy dostaneme ako vstup odhady variančných matíc výnosov V_t a očakávaných výnosov $\overline{r}_t$, ktoré potom použijeme pri optimalizácií. Čo ak však počas optimalizácie v niektorej perióde získame lepšie odhady? Vďaka vlastnostiam dynamického programovania môžme tieto nové odhady použiť miesto predošlých. Stav (v ktorom sa nachádzame) je totiž súborom všetkých informácií na základe ktorých sa rozhodujeme, nezáleží teda ako (tj. s akými odhadmi) sme sa do tohoto stavu dostali. V našom prípade to znamená, že v každej perióde môžme zobrať nové odhady pre všetky nasledujúce periódy, a riešiť zmenenú optimalizačnú úlohu s počtom periód o jedna menším. Túto možnosť sme už v podstate využili pri výpočte nových α_t, kde približnú hodnotu $E(W_t)$ nahrádzame konkrétnou realizáciou W_t v čase t.

V nasledujúcej kapitole si ukážeme ako viacperiódový model beží na reálnych dátach, pričom použijeme nemenné, ako aj dynamicky sa meniace odhady.

4 Experimentálne výsledky

V predchádzajúcej kapitole sme odvodili Markowitzov viacpariódový model, teraz si ukážeme jeho použitie na reálnych dátach. Odhady variančnej matice výnosov V_t, a očakávaných výnosov $\overline{r}_t$ budeme získavať z historických dát. Pre maticu V_t budeme predpokladať, že sa v čase nemení, tj. $V_t = V$, $\forall t\ 0 \leq t < T$ kde T je počet periód. Hodnotu $\overline{r}_t$ budeme odhadovať dvoma metódami: v jednej budú odhad nemenný od spustenia programu, v druhej ho budeme dynamicky prispôsobovať vývoju ceny aktív.

4.1 Dáta a metódy odhadovania

Dáta

Dáta sme získali zo stránky [4]. Rozhodli sme sa optimalizovať celkovo na troch sadách dát:

- Akcie amerických spoločností **OXY, IBM, MCD, BAC**: Model spustíme na mesačných dátach z roku **1992**, pričom budeme simulovať nákup akcií na začiatku januára, prerovnanie na začiatku každého ďalšieho mesiaca, a (pokiaľ požadovaný zisk neutŕžime skorej) predaj na začiatku decembra, čiže dokopy 11 periód. Odhady vyrobíme z podobných mesačných dát z roku 1991. Počítať budeme s close-cenami na začiatku mesiaca.

- Akciové indexy **GDAXI, GSPC, FTSE, N225**: Budeme optimalizovať výnos v roku **2005**, odhady urobíme z dát v roku 2004. Použijeme analogický postup ako v predošlom prípade.

- Najlepšie sa vyvíjajúce akcie z decembra 2011 (podľa [3])- **NFLX, ORLY, KLAC, BBBY, CELG, GMCR**: Optimalizovať budeme v období **od 2.12.2011 po 15.12.2011**, čo je dokopy 9 periód, ak odrátame dni v ktorých sa neobchoduje. Portfólio budeme prerovnávať denne. Odhady vyrobíme z denných údajov z obdobia 17.11.2011 - 1.12.2011. Počítať budeme s close-cenami v jednotlivých dňoch.

Kompletné sady dát sa nachádzajú v Prílohe B.

Metódy odhadovania

Celkovo budeme optimalizovať troma algoritmami. Prvý bude Markowitzov jednoperiódový model, ďalšie dva budú založené na viacperiódovom modeli, líšiť sa od seba budú v metóde, ktorou budeme odhadovať hodnotu očakávaných výnosov. Variančnú maticu výnosov budeme vo všetkých troch metódach odhadovať pomocou výberových variancií a kovariancií vektorov historických výnosov jednotlivých aktív. Pozrime sa teraz na odhady očakávaných výnosov v jednotlivých metódach a ďalšie potrebné výpočty:

- **Markowitzov jednoperiódový model**: Očakávaný výnos aktíva i pre celé obdobie v ktorom budeme optimalizovať odhadneme ako pomer ceny v poslednej perióde z historických dát k cene v prvej perióde z historických dát:

$$\overline{r}^i = \frac{P_T^i}{P_0^i} \tag{57}$$

- **Viacperiódový model -Metóda 1**: Očakávaný výnos aktíva i v jednej perióde odhadneme ako geometrický priemer pomeru ceny v poslednej perióde z historických dát k cene v prvej perióde z historických dát:

$$\overline{r}_t^i = \overline{r}^i = \left(\frac{P_T^i}{P_0^i}\right)^{\frac{1}{T}} \tag{58}$$

S týmto výnosom budeme počítať v každej perióde. Potom platí, že všetky hodnoty Q_t, A_t, B_t, C_t môžme nahradiť hodnotami bez indexov Q, A, B, C platnými pre všetky periódy. Potom hodnotu α_t (55) môžme vyjadriť zjednodušene ako

$$\alpha_t = \frac{C\left(1 - \left(\frac{B^2}{A}\right)^T\right) - \frac{B^2}{A} + \left(\frac{B^2}{A}\right)^{T+1}}{2 \cdot \left(1 - \left(\frac{B^2}{A}\right)\right)\left(\overline{W} - \left(\frac{B^2}{A}\right)^T W_t\right)} \tag{59}$$

Podobne môžme zjednodušiť aj vzorec pre výpočet x_t:

$$x_t = \frac{1}{2\alpha_t} B^{T-t-1} Q^{-1} \overline{r} + \frac{W_t}{A} Q^{-1}\mathbf{1} - \frac{B^{T-t}}{2\alpha_t A} Q^{-1}\mathbf{1} \tag{60}$$

- **Viacperiódový model -Metóda 2**: V perióde t budeme očakávaný výnos aktív vo všetkých nasledujúcich periódach $\overline{r}$ odhadovať hodnotou skutočných výnosov aktív z predošlej periódy r_{t-1}. V prvej perióde použijeme odhad (58). Keďže v každej perióde získame nové odhady $\overline{r}$, musíme vypočítať i nové hodnoty

Q, A, B, C, charakterizujúce nasledovné periódy. Vzorce pre α_t resp. x_t sú potom rovnaké ako v predošlej metóde, musíme v nich však použiť v každej perióde aktuálne hodnoty $\overline{r}, Q, A, B, C$.

4.2 Implementácia

Optimalizačné metódy popísané v časti 4.1 sme naprogramovali v Octave (program používajúci syntax MATLABu). Markowitzov jednoperiódový model je naprogramovaný ako funkcia `markowitz1`, viacperiódový model s použitím odhadov Metódou 1 je naprogramovaný ako funkcia `multi1` a viacperiódový model s použitím odhadov Metódou 2 sa nachádza vo funkcii `multi2`. Okrem týchto funkcií používame ešte pomocnú funkciu `data`, ktorá spracuje zadané historické ceny aktív do odhadov pre jednotlivé modely a z cien aktív v období v ktorom chceme optimalizovať vyrobí skutočné výnosy pre dané obdobie. Poslednou funkciou ktorú používame je funkcia `vystup`, ktorá pri zadaných požadovaných výnosoch spustí všetky 3 metódy a výsledky zapíše do prehľadnej tabuľky. Kompletné zdrojové kódy funkcií možno nájsť v prílohe A, tu uvedieme aspoň vstupné a výstupné paramatre jednotlivých funkcií.

Funkcia markowitz1

VSTUP:

- **V** -variančno-kovariančná matica jednotlivých aktív.
- **r** -vektor očakávaných výnosov aktív.
- **rr** -vektor skutočných výnosov aktív, pomocou ktorého vypočítame hodnotu investície na konci optimalizácie.
- **W0** -rozpočtové ohraničenie (počiatočná hodnota investície).
- **W1** -požadovaná hodnota investície na konci.

VÝSTUP:

- **x** -výsledný vektor investícií do jednotlivých aktív.
- **Wreal** -skutočná hodnota investície na konci.

Funkcie multi1 a multi2

VSTUP:

- **V** -variančno-kovariančná matica jednotlivých aktív.
- **r** -vektor očakávaných výnosov aktív v priebehu jednej periódy (v prípade multi2 len v priebehu prvej periódy).
- **R** -matica skutočných výnosov aktív, v jednotlivých periódach (stĺpce), pomocou ktorých budeme počítať vývoj hodnoty investície počas optimalizácie.
- **W0** -rozpočtové ohraničenie (počiatočná hodnota investície).
- **WT** -požadovaná hodnota investície na konci.

VÝSTUP:

- **x** -matica investícií do jednotlivých aktív v jednotlivých periódach (stĺpce).
- **WP** -vektor, do ktorého ukladáme požadované hodnoty investície v jednotlivých periódach.
- **W** -vektor, do ktorého ukladáme skutočné hodnoty investície v jednotlivých periódach.
- **t** -perióda, v ktorej investícia nadobudne požadovanú hodnotu a funkcia skončí. V prípade, že investícia požadovanú hodnotu nenadobudne, t nadobúda hodnotu poslednej periódy, keď funkcia skončí.

Funkcia data

VSTUP:

- **A** -matica historických cien aktív, z ktorých budeme robiť odhady.
- **B** -matica cien aktív pre obdobie, v ktorom budeme optimalizovať.

VÝSTUP:

- **q1** -očakávaný výnos pre funkciu markowitz1.

- **q2** -skutočný výnos za obdobie optimalizácie pre funkciu markowitz1.
- **r1a** -očakávaný výnos za jednu periódu pre funkcie multi1, multi2 vypočítaný ako $(q1 - 1)/n + 1$ kde n je počet periód.
- **r1b** -očakávaný výnos za jednu periódu pre funkcie multi1, multi2 vypočítaný ako $q1^{1/n}$ kde n je počet periód.
- **R1** -matica historických výnosov v jednotlivých periódach.
- **q2** -matica skutočných výnosov v jednotlivých periódach pre obdobie v ktorom budeme optimalizovať.
- **V** -odhad variančno-kovariančnej matice jednotlivých aktív.

Funkcia vystup

VSTUP:

- **A** -matica historických cien aktív, z ktorých budeme robiť odhady.
- **B** -matica cien aktív pre obdobie, v ktorom budeme optimalizovať.
- **P** -vektor požadovných výnosov, pre ktoré chceme zostrojiť výstupnú tabuľku.

VÝSTUP:

- **TAB** -Tabuľka porovnávajúca skutočné výnosy dosiahnuté pomocou funkcií markowitz1, multi1 a multi2

4.3 Výstupy a vyhodnotenie

Výstupy pre jednotlivé sady dát

V tabuľkách uvádzame výstupy pre jednotilvé sady dát. Optimalizačné metódy porovnávame pre požadované výnosy 5% , 10%, 25% a 60 %. Poznamenajme, že v prípade že algoritmus skončil v dôsledku nadobudnutia požadovanej hodnoty skorej ako v poslednej perióde, investor môže utŕžené financie vybrať, alebo na zvyšný čas preinvestovať do bezrizikového aktíva (napr. ako vklad v banke).

Tabuľka 1: Akcie amerických spoločností **OXY, IBM, MCD, BAC** (11 periód)

požadovaný	markowitz1	multi1		multi2	
výnos	výnos	koniec v perióde	výnos	koniec v perióde	výnos
5	-11.3918	3	7.7318	3	13.1489
10	-6.3933	4	11.9778	3	12.8062
25	8.6022	4	26.4142	9	35.1326
60	43.5918	4	60.0991	9	72.5693

Tabuľka 2: Akciové indexy **GDAXI, GSPC, FTSE, N225** (11 periód)

požadovaný	markowitz1	multi1		multi2	
výnos	výnos	koniec v perióde	výnos	koniec v perióde	výnos
5	20.03737	8	5.7683	10	15.7751
10	11.70317	11	9.4317	10	21.4374
25	-13.2994	11	-0.6566	10	38.4242
60	-71.63875	11	-24.1959	10	78.0510

Tabuľka 3: Akcie **NFLX, ORLY, KLAC, BBBY, CELG, GMCR** (9 periód)

požadovaný	markowitz1	multi1		multi2	
výnos	výnos	koniec v perióde	výnos	koniec v perióde	výnos
5	1.7096	1	6.8955	1	6.8955
10	1.8907	1	11.1937	1	11.1937
25	2.4338	6	25.1982	9	31.4627
60	3.7011	9	61.981	9	68.7378

Vyhodnotenie

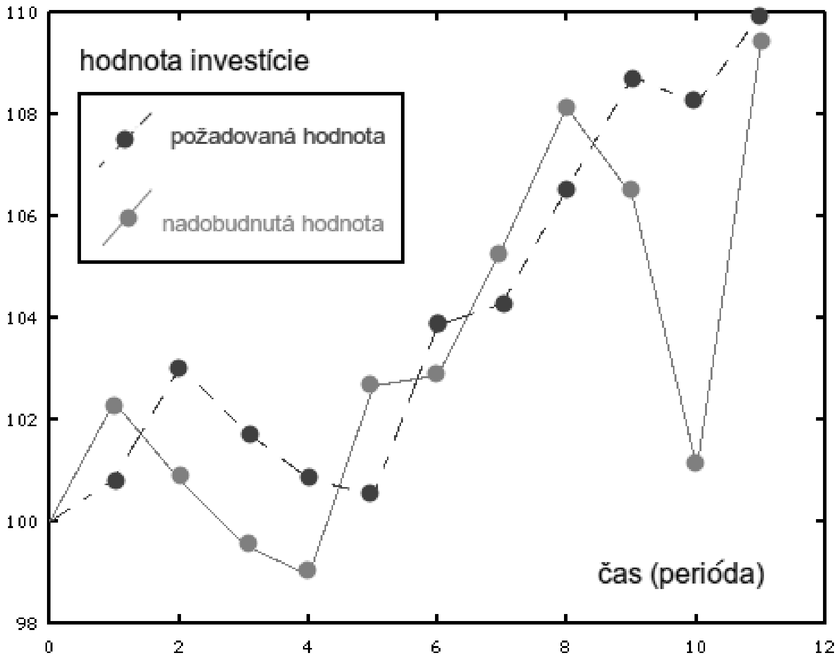
Z výsledkov optimalizácie vidno, že viacperiódový model sa k požadovanému výnosu priblížil zväčša lepšie ako jednoperiódový. Aby sme vedeli správne interpretovať výsledky, poznamenajme dve veci, ktoré nemusia byť intuitívne úplne jasné. Po prvé, ak model s príslušnou metódou odhadovania dosiahol výrazne vyšší výnos ako bol požadovaný, ide skôr o nevýhodu. Algoritmus sa totiž snažil priblížiť presne k požadovanému výnosu, a odchýlky nahor považuje za rovnako nežiaduce ako odchýlky nadol. Inými slovami, tak ako bol dosiahnutý výrazne vyšší výnos, mohol byť pri inom vývoji dosiahnutý výnos výrazne nižší. Po druhé, ak algoritmus skončil (s výnosom aspoň na úrovni požadovaného) skôr ako v poslednej perióde, tak isto nejde o výhodu. Algoritmus sa totiž snažil plánovať investície tak, aby skončil s požadovanou hodnotou v presne poslednej perióde. To že sa mu to podarilo už skorej svedčí skôr o nepresnom odhade.

Z výstupov vidíme, že na prvej sade dát dosiahol najuspokojivejšie výsledky viacperiódový model s metódou odhadov multi1. Pri nižších hodnotách požadovaného výnosu sa aj na druhej sade dát javí najlepší multi1, pri vyšších hodnotách však vedie k strate, (hoci menšej než jednoperiódový model) a ako najlepší sa javí algoritmus multi2. V prípade tretej sady dát sa opäť viacperiódový model ukazuje ako lepší, pričom algoritmy multi1 a multi2 sú vpodstate porovnateľné.

Tabuľka 4: Optimalizácia metódou multi 1, požadovaný výnos 25%, váhy aktív v jednotlivých periódach

akcia/perioda	1	2	3	4
OXY	118.213	178.657	127.48	54.593
IBM	-219.271	-388.262	-244.736	-40.456
MCD	269.543	414.472	291.707	116.882
BAC	-68.485	-119.178	-76.134	-14.868

Treba poznamenať, že hoci dve sady dát pochádzajú z kľudných období napredovania ekonomiky a tretia sada sú špeciálne vybrané výkonné akcie, výsledky ktoré sme dosiahli sú aj tak až nadmieru dobré. Pripomeňme si však, že sme nebrali do úvahy transakčné náklady. V prípade "divokého"nakupovania a predávania akcií sa môže ich cena vyšplhať dosť vysoko. O tom, že naše algoritmy neobchodujú v tomto zmysle zrovna najkľudnejšie, sa možno presvedčiť pohľadom na zmeny hodnôt investícií do jednotlivých aktív medzi jednotlivými periódami. V tabuľke 4 sú uvedené obnosy investované do aktív OXY, IBM, MCD a BAC počas jednotlivých periód. Použili sme viacperiódový model, metódu odhadov multi1, a požadovaný výnos 25 %, pričom sme plánovali optimalizovať počas jedenástich periód. Algoritmus skončil v štvrtej perióde s výnosom 26.4142%.



Obr. 3: Vývoj hodnoty investície do akciových indexov GDAXI, GSPC, FTSE, N225. Požadovaný výnos 10%.

Obrázok 3 ilustruje vývoj hodnoty investície do aktív z druhej sady dát počas jedného roka (11 periód). Na optimalizáciu sme použili viacperiódový model multi1, pričom sme požadovali výnos 10%. Môžeme si všimnúť, že hoci sme dosiahli výnos veľmi podobný požadovanému, vývoj hodnoty často nešiel podľa predpokladov.

Záver

Hlavným cieľom práce bolo odvodiť Markowitzov viacperiódový model. To sa nám v práci aj podarilo, získali sme model pomocou ktorého volíme váhy aktív v jednotlivých periódach tak, že počas celého procesu optimalizácie dosahuje očakávaná cena investície v poslednej perióde požadovanú hodnotu. Naviac, investičné rozhodnutie v každej perióde je mean-variance optimálne v tom zmysle, že pre danú očakávanú hodnotu investície v najbližšej perióde dosahuje výnos minimálnu varianciu. Hlavným zdrojom z ktorého sme čerpali je [9], v ktorom je viacperiódový model pomocou dynamického programovania aj odvodený. Odvodenie, ktoré sa v tomto zdroji nachádza, je však stručné, veľa krokov je preskočených. Takisto sa tam nehovorí o potrebe dynamického spresňovania koeficientu α, ktoré je dôležité, pokiaľ chceme aby bola očakávaná cena investície v poslednej perióde v každom čase rovná požadovanej hodnote. Nepochybným prínosom práce je preto podrobné odvodenie viacperiódového modelu. Okrem tohoto viacperiódového modelu navyše kapitola 3 popisuje základné princípy dynamického programovania, pomocou ktorého sme tento model odvodili a ktoré môže byť aj vhodným nástrojom k riešeniu iných podobných problémov.

Základnou myšlienkou odvodenia viacperiódového modelu bola maximalizácia strednej hodnoty funkcie užitočnosti. Táto úloha však patrí do oblasti teórie užitočnosti, na rozdiel od Markowitzovho modelu, ktorý je príkladom mean-variance optimalizácie. Aby sme mohli naše výsledky z maximalizačnej úlohy využiť k odvodeniu výsledkov pre mean-variance optimalizáciu, museli sme popísať vzťah ktorý je medzi týmito dvoma prístupmi. Tomuto problému sme sa podrobne venovali v druhej kapitole. Konzistentnosť oboch prístupov, ale aj presný vzťah medzi riešeniami mean-variance problému a problému maximalizácie užitočnosti sme ukázali pre kvadratickú funkciu užitočnosti, pomocou ktorej viacperiódový model aj odvádzame. Kvadratická funkcia užitočnosti však nie je jediným prípadom, kedy uvedené prístupy nie sú v spore. Konzistentnosť mean-variance optimalizácie s maximalizáciou strednej hodnoty funkcie užitočnosti platí aj v prípade normálne rozdelených výnosov. Toto tvrdenie je pomerne známe, a často uvádzané v literatúre, avšak jeho dôkaz sa nám nepodarilo nájsť. Preto sme v časti 2.1 toto tvrdenie dokázali. Dôkaz tvrdenia môže byť tiež námetom k posúdeniu konzistentnosti prístupov pre iné rozdelenia výnosov.

Fungovanie viacperiódového modelu ktorý sme odvodili, sme testovali aj na reálnych dátach. Za týmto účelom sme naprogramovali funkcie, ktoré nám umožnili simulovať optimalizáciu pomocou viacperiódového modelu, ako aj funkciu, pomocou ktorej získavame odhady očakávaných výnosov a variancie jednotlivých aktív z historických dát. Treba podotknúť, že odhadovanie pomocou historických dát, najmä v prípade očakávaného výnosu nemusí byť najšťastnejším riešením. O predpoklade, že firme sa bude v budúcnosti dariť tak, ako sa jej darilo v minulosti, sa dá ľahko pochybovať. Pre získanie vhodnejších predikcií výnosov by bolo treba použiť podrobnejšiu ekonomickú analýzu, zahŕňajúcu vývoj na trhu, dopyt po výrobkoch či službách spoločnosti, jej finančnú politiku a mnohé vonkajšie faktory. Myslieť treba aj na vplyv neznámych faktorov a náhodu, ktorej dopad môže byť ťažko kvantifikovateľný. Takáto ekonomická analýza však nie je obsahom tejto práce, preto sme sa pre naše účely uspokojili s odhadmi vývoja na základe historických dát. Aj v tomto prípade sa nám však naskytá viacero možností, ako odhady pre jednotlivé periódy urobiť. Dva takéto spôsoby ktoré používame aj v naprogramovaných funkciách sme opísali v kapitole 4. V tejto časti práce uvádzame aj výsledky optimalizácie, pričom sme testovali viacperiódový model s oboma rôznymi metódami odhadov, ako aj jednoperiódový model na troch rôznych sadách dát. Výsledky, tak ako sme predpokladali, hovoria jasne v prospech viacperiódového modelu. Do úvahy však treba zobrať, že sme nepočítali s transakčnými nákladmi, ktoré by urobili celú úlohu oveľa zložitejšou.

Práca ponúka jeden prístup k odvodeniu viacperiódového modelu. Iné prístupy, zahŕňajúce stochastické programovanie alebo metódy vnútorného bodu možno nájsť v publikácií [9] ktorá je vynikajúcim základom pre skúmanie problému viacperiódovej optimalizácie voľby portfólia. Ďalšou možnosťou výskumu v tejto oblasti je zahrnutie transakčných nákladov do modelu popísaného v tejto práci. Výzvou môže byť aj zakázanie krátkych pozícií, alebo povinná diverzifikácia. Prínosom by bolo tiež zavedenie nového pohľadu na riziko. V prípade rizika reprezentovaného varianciou sú totiž ako nežiaduce interpretované aj odchýlky od očakávaného výnosu smerom nahor, ktoré by reálne žiadnemu investorovi nevadili. Priestoru na inovácie je teda dostatok.

Zoznam použitej literatúry

[1] Bakhtin, Y.: *Covariance sign*, príspevok zverejnený na internete (6.1.2011): http://mathoverflow.net/questions/66663 ,2011

[2] Bellman, R.: *Dynamic Programming* Princeton University Press, 1957

[3] CNAnalyst.com: *Top 10 Best-Performing NASDAQ-100 Stocks of the Week: EBAY, NFLX, ORLY, KLAC, NTAP, BBBY, CELG, GMCR, MRVL, ADBE* článok zverejnený na internete (10.12.2011): http://www.cnanalyst.com/2011/12/top-10-best-performing-nasdaq-100-stocks-of-the-week-ebay-nflx-orly-klac-ntap-bbby-celg-gmcr-mrvl-ad.html

[4] Finance.yahoo.com: *Yahoo! Finance - Business Finance, Stock Market, Quotes, News*, internetová databáza historických cien aktív: http://finance.yahoo.com/

[5] Janková, K., Pázman, A.: *Pravdepodobnosť a štatistika*, Fakulta matematiky fyziky a informatiky Univerzity Komenského, Bratislava, 2011

[6] Markowitz, H.: *Portfolio selection*, Journal of Finance 7 (1952), 77-91

[7] Melicherčík I.- Olšarová L.- Úradníček V.: *Kapitoly z finančnej matematiky*, EPOS, Bratislava, 2005

[8] von Neumann, J., Morgenstern, O.: *Theory of games and economic behavior*, Princeton university press, 1944

[9] Siede, H.: *Multi-period portfolio optimization with emphasis on a mean-variance criterion*, Doctoral thesis, Universität St. Gallen, 2000

Príloha A: Zdrojové kódy naprogramovaných funkcií

Zdrojové kódy funkcií sú písané pre jazyk Octave, resp. Matlab.

Funkcia markowitz1:

```
function [x,Wreal]=markowitz1(V, r, rr, W0, W1)
#x -vysledny vektor investici do jednotlivych aktiv
#Wreal -skutocna hodnota investicie na konci
#V -variancno-kovariancna matica aktiv
#r -vektor ocakavanych vynosov aktiv
#rr-vektor skutocnych vynosov aktiv
#W0 -rozpoctove ohranicenie
#W1 -pozadovana hodnota investicie na konci
n=length(r);
j=ones(n,1);
Q=V +r*r';
Qi =inv(Q)
A=j'*Qi*j;
B=j'*Qi*r;
C=r'*Qi*r;

lam=2*(C*W0 - B*W1)/(A*C-B^2);
gam=2*(A*W1 - B*W0)/(A*C-B^2);
x=0.5*(lam*Qi*j + gam*Qi*r);
Wreal=x'*rr

printf("vektor investicii do jednotlivych aktiv: ")
x
printf("Pozadovany vynos percentach: ")
(W1/W0 -1)*100
printf("Skutocny vynos v percentach: ")
(Wreal/W0-1)*100
end
```

Funkcia multi1:

```
function [x,WP,W,t]=multi1(V, r, R, W0, WT)
#x -matica vah-riadky=aktiva stlpce=casy
#WP -vektor do ktoreho budeme ukladat
#    pozadovane hodnoty investicie v jednotlivych periodach
#W -vektor do ktoreho budeme budeme ukladat
#   skutocne hodnoty investicie v jednotlivych periodach
#t -perioda v ktorej algoritmus skonci
#V -variancna matica
#r- vektor ocakavaneho vynosu za mesiac
```

```
#R -matica skutocnych vynosov v jednotlivych periodach
#W0 -rozpoctove ohranicenie
#WT -pozadovana hodnota investicie na konci
[n,T]=size(R); #n -pocet aktiv, T -pocet period
j=ones(n,1);
Q=V +r*r';
Qi =inv(Q);
A=j'*Qi*j;
B=j'*Qi*r;
C=r'*Qi*r;
ba=B/A;
b2a=B^2/A;

WP(1)=W0;
W(1)=W0;
for t=1:T
alfa=(C*(1-b2a^(T+1-t))-b2a+b2a^(T+2-t))/(2*(1-b2a)*(WT- W(t)*ba^(T+1-t)));
x(:,t)=1/(2*alfa)*B^(T-t)*Qi*r+W(t)/A*Qi*j-B^(T-t+1)/(2*alfa*A)*Qi*j;
WP(t+1)=x(:,t)'*r;
W(t+1)=x(:,t)'*R(:,t);
if (W(t+1)>WT)
break;
end
end
printf("koniec v periode: ")
t
printf("pozadovane hodnoty investicie v jednotlivych periodach: ")
WP
printf("skutocne hodnoty investicie v jednotlivych periodach: ")
W
printf("investicie do jednotlivych aktiv (riadky) po periodach (stlpce): ")
x
printf("Pozadovany celkovy vynos percentach: ")
(WT/WP(1) -1)*100
printf("Skutocny celkovy vynos v percentach: ")
(W(t+1)/W(1)-1)*100
end
```

Funkcia multi2:

```
function [x,WP,W,t]=multi2(V, r, R, W0, WT)
#x -matica vah-riadky=aktiva stlpce=casy
#WP -vektor do ktoreho budeme ukladat pozadovane
#    hodnoty investicie v jednotlivych periodach
#W -vektor do ktoreho budeme budeme ukladat
#   skutocne hodnoty investicie v jednotlivych periodach
#t -perioda v ktorej algoritmus skonci
```

```
#V -variancna matica
#r- vektor ocakavaneho vynosu za mesiac
#R -matica skutocnych vynosov v jednotlivych periodach
#W0 -rozpoctove ohranicenie
#WT -pozadovana hodnota investicie na konci
[n,T]=size(R); #n -pocet aktiv, T -pocet period
j=ones(n,1);

WP(1)=W0;
W(1)=W0;
for t=1:T
Q=V +r*r';
Qi =inv(Q);
A=j'*Qi*j;
B=j'*Qi*r;
C=r'*Qi*r;
ba=B/A;
b2a=B^2/A;
alfa=(C*(1-b2a^(T+1-t))-b2a+b2a^(T+2-t))/(2*(1-b2a)*(WT-W(t)*ba^(T+1-t)));
x(:,t)=1/(2*alfa)*B^(T-t)*Qi*r + W(t)/A*Qi*j-B^(T-t+1)/(2*alfa*A)*Qi*j;
WP(t+1)=x(:,t)'*r;
W(t+1)=x(:,t)'*R(:,t);
if (W(t+1)>WT)
break;
end
r=R(:,t);
end

printf("koniec v periode: ")
t
printf("pozadovane hodnoty investicie v jednotlivych periodach: ")
WP
printf("skutocne hodnoty investicie v jednotlivych periodach: ")
W
printf("investicie do jednotlivych aktiv (riadky) po periodach (stlpce): ")
x
printf("Pozadovany celkovy vynos percentach: ")
(WT/WP(1) -1)*100
printf("Skutocny celkovy vynos v percentach: ")
(W(t+1)/W(1)-1)*100
end
```

Funkcia data:

```
function [q1, q2, r1a, r1b, R1, R2, V]=data(A, B)
#A -matica historickych cien,
#   stlpce=aktiva, riadky=mesiace
```

```
#B -matica cien pre obdobie optimalizacie,
#   stlpce=aktiva, riadky=mesiace
[tm1, n]=size(A);
[tm2, n]=size(B);
#VYNOSY PRE JEDNOPERIODOVY MODEL
for k=1:n
q1(k,1)=(A(tm1,k)-A(1,k))/A(1,k) +1;
#odhad vynosu pre 1periodovy model
q2(k,1)=(B(tm2,k)-B(1,k))/B(1,k) +1;
#skutocny vynos jednoperiodoveho modelu
end
#VYNOSY PRE VIACPERIODOVY MODEL
for k=1:n
for h=1:tm1-1;
R1(k,h)=(A(h+1,k)-A(h,k))/A(h,k) +1;
end
for h=1:tm2-1;
R2(k,h)=(B(h+1,k)-B(h,k))/B(h,k) +1;
end
end
r1a=(q1-1)/(tm1-1) +1;
#priblizny odhad vynosu v jednej periode pre viacperiodovy model
r1b=q1.^(1/(tm1-1));
#presnejsi odhad vynosu v jednej periode pre viacperiodovy model
V=cov(R1');
end
```

Funkcia vystup:

```
function [TAB]=vystup(A, B, P)
#TAB -vystupova tabulka -1. stlpec: pozadovane vynosy v percentach,
#                        2. stlpec: skutocne vynosy cez markowitz1,
#                        3.stlpec perioda v ktorej skonci multi1,
#                        4.stlpec skutocny vynos multi1,
#                        5.stlpec perioda v ktorej skonci multi2,
#                        6. stlpec skutocny vynos multi2.
#A -matica historickych cien
#B -matica cien v obdobi ked optimalizujeme
#P -vektor pozadovanych vynosov
[q1, q2, r1a, r1b, R1, R2, V]=data(A, B)
L=length(P)
for k=1:L
PP=P(k)
pvynos=(P(k)-1)*100
[x0,Wreal]=markowitz1(V, q1,q2, 100, 100*PP)
vynos0= (Wreal/100-1)*100
[x1,WP1,W1,t1]=multi1(V, r1b, R2, 100, 100*PP)
```

```
vynos1=(W1(t1+1)/W1(1)-1)*100
[x2,WP2,W2,t2]=multi2(V, r1b, R2, 100, 100*PP)
vynos2=(W2(t2+1)/W2(1)-1)*100
TAB(k,:)=[pvynos, vynos0, t1, vynos1, t2, vynos2]
end
end
```

Príloha B: Dáta použité pri optimalizácií

Všetky dáta pochádzajú zo zdroja [4].

Prvá sada dát:

Tabuľka 5: OXY, IBM, MCD, BAC, 1991

dátum / aktívum	OXY	IBM	MCD	BAC
1991-Jan-02	18.62	126.75	28.5	28.12
1991-Feb-01	20.12	128.75	31.62	29.25
1991-Mar-01	18.62	113.87	34.75	34.63
1991-Apr-01	18.87	103	33.5	36.88
1991-May-01	21	106.12	35	42.13
1991-Jun-03	21.37	97.12	32.88	35.75
1991-Jul-01	24	101.25	32.75	34.75
1991-Aug-01	24.75	96.87	32.63	38.63
1991-Sep-03	23.37	103.62	35	35.63
1991-Oct-01	22.62	98.25	34.75	37.38
1991-Nov-01	19.25	92.5	33.63	34.38
1991-Dec-02	17.87	89	38	40.63

Tabuľka 6: OXY, IBM, MCD, BAC, 1992

dátum / aktívum	OXY	IBM	MCD	BAC
1992-Jan-02	19	90	43.5	43.88
1992-Feb-03	19.37	86.87	40.5	47.5
1992-Mar-02	19.25	83.5	39.88	45.5
1992-Apr-01	20.75	90.75	44.38	47.75
1992-May-01	22	90.75	46.88	46.5
1992-Jun-01	19.62	97.87	46	47.63
1992-Jul-01	20.5	94.75	43.88	46
1992-Aug-03	19.87	86.62	42.5	42.88
1992-Sep-01	17.62	80.75	44.38	44.38
1992-Oct-01	17	66.87	45.88	46.25
1992-Nov-02	17.87	68.25	49	50.38
1992-Dec-01	17	50.38	48.75	51.38

Druhá sada dát:

Tabuľka 7: GDAXI, GSPC, FTSE, N225, 2004

dátum / aktívum	GDAXI	GSPC	FTSE	N225
2004-Jan-01	4058.6	1131.13	4390.7	10783.61
2004-Feb-02	4018.16	1144.94	4492.2	11041.92
2004-Mar-01	3856.7	1126.21	4385.7	11715.39
2004-Apr-01	3985.21	1107.3	4489.7	11761.79
2004-May-03	3921.41	1120.68	4430.7	11236.37
2004-Jun-01	4052.73	1140.84	4464.1	11858.87
2004-Jul-01	3895.61	1101.72	4413.1	11325.78
2004-Aug-02	3785.21	1104.24	4459.3	11081.79
2004-Sep-01	3892.9	1114.58	4570.8	10823.57
2004-Oct-01	3960.25	1130.2	4624.2	10771.42
2004-Nov-01	4126	1173.82	4703.2	10899.25
2004-Dec-01	4256.08	1211.92	4814.3	11488.76

Tabuľka 8: GDAXI, GSPC, FTSE, N225, 2005

dátum / aktívum	GDAXI	GSPC	FTSE	N225
2005-Jan-03	4254.85	1181.27	4852.3	11387.59
2005-Feb-01	4350.49	1203.6	4968.5	11740.6
2005-Mar-01	4348.77	1180.59	4894.4	11668.95
2005-Apr-01	4184.84	1156.85	4801.7	11008.9
2005-May-02	4460.63	1191.5	4964	11276.59
2005-Jun-01	4586.28	1191.33	5113.2	11584.01
2005-Jul-01	4886.5	1234.18	5282.3	11899.6
2005-Aug-01	4829.69	1220.33	5296.9	12413.6
2005-Sep-01	5044.12	1228.81	5477.7	13574.3
2005-Oct-03	4929.07	1207.01	5317.3	13606.5
2005-Nov-01	5193.4	1249.48	5423.2	14872.15
2005-Dec-01	5408.26	1248.29	5618.8	16111.43

Tretia sada dát:

Tabuľka 9: NFLX, ORLY, KLAC, BBBY, CELG, GMCR, 17.11.2011-1.12.2011

dátum / aktívum	NFLX	ORLY	KLAC	BBBY	CELG	GMCR
2011-Nov-17	76.46	76.05	45.49	60.17	64.66	51.69
2011-Nov-18	78.06	75.47	44.39	59.99	63.04	50.45
2011-Nov-21	74.47	75.78	44.26	59.2	61.32	52.91
2011-Nov-22	70.45	75.36	43.31	58.62	61.69	50.35
2011-Nov-23	68.5	74.42	42.51	58.19	60.43	50.13
2011-Nov-25	63.86	75.51	42.08	57.9	60.24	49.66
2011-Nov-28	69.95	75.73	43.52	59.5	62.05	50.99
2011-Nov-29	67.57	75.92	43.3	59.69	61.23	48.92
2011-Nov-30	64.53	77.24	46.1	60.51	63.08	52.43
2011-Dec-01	67.17	77.7	47.23	60.11	62.76	53.92

Tabuľka 10: NFLX, ORLY, KLAC, BBBY, CELG, GMCR, 2.12.2011-15.12.2011

dátum / aktívum	NFLX	ORLY	KLAC	BBBY	CELG	GMCR
2011-Dec-02	66.37	77.03	46.95	60.81	61.21	56.32
2011-Dec-05	70.12	79.53	48.69	62.2	61.31	58.88
2011-Dec-06	68.14	79.54	49.15	61.88	62.21	56.98
2011-Dec-07	71.96	79.02	49.05	62.83	62.65	57.18
2011-Dec-08	69.42	78.92	48.05	61.97	61.29	56.04
2011-Dec-09	70.89	81.04	49	63.22	63.58	58.44
2011-Dec-12	75.26	80.93	47.59	62.46	63.66	56.49
2011-Dec-13	72.11	78.91	46.83	61.13	63.96	49.95
2011-Dec-14	71.04	78.58	46.22	60.66	63.03	47.72
2011-Dec-15	69.72	78.95	45.96	61.17	63.1	44.35