UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY

ANALÝZA NIEKTORÝCH MODELOV NA SPRÁVU PORTFÓLIA

BAKALÁRSKA PRÁCA

2012

Stanislava KVANDOVÁ

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY

ANALÝZA NIEKTORÝCH MODELOV NA SPRÁVU PORTFÓLIA

BAKALÁRSKA PRÁCA

Študijný program:	Ekonomická a finančná matematika
Študijný odbor:	1114 Aplikovaná matematika
Školiace pracovisko:	Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky
Vedúci práce:	doc. Mgr. Igor Melicherčík, PhD.

Bratislava 2012 **Stanislava KVANDOVÁ**

12462993

Univerzita Komenského v Bratislave
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

ZADANIE ZÁVEREČNEJ PRÁCE

Meno a priezvisko študenta: Stanislava Kvandová
Študijný program: ekonomická a finančná matematika (Jednoodborové štúdium, bakalársky I. st., denná forma)
Študijný odbor: 9.1.9. aplikovaná matematika
Typ záverečnej práce: bakalárska
Jazyk záverečnej práce: slovenský

Názov: Analýza niektorých modelov na správu portfólia

Cieľ: Zoznámenie sa s najznámejšími modelmi na správu portfólia a porovnanie výsledkov.

Vedúci: doc. Mgr. Igor Melicherčík, PhD.

Dátum zadania: 16.10.2011

Dátum schválenia: 27.10.2011

doc. RNDr. Margaréta Halická, CSc.
garant študijného programu

....

študent vedúci

Poďakovanie: Na tomto mieste by som sa rada poďakovala svojmu vedúcemu bakalárskej práce doc. Mgr. Igorovi Melicherčíkovi, PhD. za starostlivé vedenie, odborné rady a cenné pripomienky, ktoré mi pomohli pri vypracovaní tejto práce. Súčasne ďakujem aj svojej rodine za podporu počas celého štúdia.

Abstrakt

KVANDOVÁ, Stanislava: Analýza niektorých modelov na správu portfólia [Bakalárska práca], Univerzita Komenského v Bratislave, Fakulta matematiky, fyziky a informatiky, Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky; vedúci práce: doc. Mgr. Igor Melicherčík, PhD., Bratislava, 2012, 39 s.

Táto bakalárska práca sa zaoberá niektorými modelmi na správu portfólia. Nakoľko medzi najznámejšie metódy patrí Markowitzov Mean-Variance model a optimalizácia pomocou funkcie užitočnosti, venujeme sa najmä im. Okrem toho sa zaoberáme aj modifikáciami týchto modelov, medzi ktoré patrí zákaz krátkych pozícií. Cieľom tejto práce je využiť získané poznatky a aplikovať ich na reálne dáta. Pre rôzne modely a modifikácie porovnávame optimálnu skladbu portfólia.

Kľúčové slová: Markowitzov model, funkcia užitočnosti, očakávaná užitočnosť, zákaz krátkych pozícií, arbitráž

Abstract

KVANDOVÁ, Stanislava: Analysis of some models for portfolio management [Bachelor Thesis], Comenius University in Bratislava, Faculty of Mathematics, Physics and Informatics, Department of Applied Mathematics and Statistics, Supervisor: doc. Mgr. Igor Melicherčík, PhD., Bratislava, 2012, 39 p.

This thesis deals with some models for portfolio management. Since Markowitz Mean-Variance model and optimization using the utility function belong to the most popular methods, we deal especially with them. In addition, we also work with some modifications of these models, which include the short sale restrictions. The aim of this thesis is to use acquired knowledge and apply them on real data. For various models and modifications we compare the optimal portfolio allocation.

Key words: Markowitz model, utility function, expected utility, short sale restriction, arbitrage

Obsah

Zoznam obrázkov

Zoznam tabuliek

Úvod

Každý kto sa rozhodne investovať sa pýta, koľko a do čoho investovať. Touto otázkou sa zaoberá teória portfólia. Teória portfólia sa v knihe J. Bradu [1] popisuje ako mikroekonomická disciplína skúmajúca aké kombinácie aktív je vhodné držať, aby takto vytvorené portfólio malo určité vopred požadované vlastnosti. Portfólio môžeme definovať aj ako súbor rôznych investícií, ktoré investor vytvára za účelom minimalizovať riziko spojené s investovaním a súčasne maximalizovať výnos z týchto investícií.

Počiatky modernej teórie portfólia siahajú do 50. rokov minulého storočia a za jej zakladateľa je považovaný Harry Markowitz. Markowitzovým cieľom bolo vytvoriť numerické metódy na riešenie problému výberu portfólia. Vo svojom článku [5] z roku 1952 predstavil Mean-Variance model, v ktorom pre určitú úroveň očakávaných výnosov minimalizuje riziko charakterizované štandardnou odchýlkou výnosov portfólia. Výsledkom optimalizácie podľa Markowitzovho modelu je efektívna hranica. Neskôr sa vo svojej knihe [6] zaoberal aj ďalšou metódou na výber portfólia a to optimalizáciou funkcie užitočnosti.

Markowitzov koncept efektívnosti z Mean-Variance modelu sa neskôr stal základom pre vznik modelu oceňovania kapitálových aktív - CAPM (Capital Asset Pricing model), ktorý podľa [8] vytvorili Sharpe, Lintner a Mossin. Ďalšou kapitolou v histórii teórie portfólia je arbitrážna teória oceňovania - APT (Arbitrage Pricing Theory), ktorej autorom je S. A. Ross [10].

V našej práci sa budeme zaoberať rôznymi modelmi na správu portfólia, pričom budeme vychádzať najmä z práce Harryho Markowitza [5] a Davida Luenbergera [4]. Zameriame sa najmä na Markowitzov model a model maximalizácie očakávanej užitočnosti. Ďalej budeme pracovať aj s modifikáciami týchto modelov, medzi ktoré patrí zákaz krátkych pozícií. Pre rôzne modely a modifikácie porovnáme optimálnu skladbu portfólia.

1 Úvod do teórie portfólia

Na úvod by sme chceli ozrejmiť základné pojmy, s ktorými sa budeme v tejto práci stretávať. Portfólio je každá kombinácia investičných možností (cenných papierov), do ktorej môže investor vložiť svoj kapitál.

Tým ako zostaviť optimálne portfólio, aby malo vopred požadované vlastnosti, sa zaoberá mikroekonomická disciplína teória portfólia. Ako sme už spomínali v úvode, za jej zakladateľa považujeme Harryho Markowitza, ktorý sa touto otázkou začal zaoberať v 50. rokoch minulého storočia.

Motiváciou každého investora je zisk, ktorý sa snaží maximalizovať. Zisk je však relatívny pojem, pretože je rozdiel dosiahnuť zisk 1 euro pri pôvodnej investícii 10 euro a pri investícii 10000 euro. Preto môžeme presnejšie povedať, že investor sa snaží maximalizovať výnos svojho kapitálu. Tu rozlišujeme totálny výnos a výnos. Totálny výnos je podiel kapitálu na konci investície (X_1) a kapitálu na začiatku investície (X_0):

$$R = \frac{X_1}{X_0}$$

Výnos je podiel zisku investície a kapitálu na začiatku investície:

$$r = \frac{X_1 - X_0}{X_0},$$

teda vzťah medzi totálnym výnosom a výnosom je: $R = r + 1$.

Každá minca má však dve strany. Výnos si so sebou nesie vždy aj nejaké riziko, a preto sa investor snaží maximalizovať svoj výnos a pritom minimalizovať s ním spojené riziko. Tu sa ukazuje rôznorodosť investorov, nie každý investor je ochotný podstúpiť rovnaké riziko pre danú úroveň výnosu. Inak povedané každý investor má inú averziu k riziku.

Vo všeobecnosti rozlišujeme tri typy investorov: rizikovo averzných, rizikovo neutrálnych a riziko obľubujúcich. V prípade dvoch investícií A a B, pričom A je investícia s istou výplatou c a B je investícia so strednou hodnotou výplaty c , si rizikovo averzný investor vyberie investíciu A, rizikovo neutrálny investor je indiferentný a riziko obľubujúci si vyberie investíciu B. V tejto práci budeme pracovať s predpokladom, že investor je rizikovo averzný.

Nakoniec sa naskytuje otázka, čo je to riziko a ako ho merať? Existuje na to niekoľko spôsobov, pričom najčastejšie používaným je variancia. Variancia portfólia ako jedna z možností merania rizika však nie je ideálna. Zahrňuje totiž nielen riziko, že portfólio bude mať na konci svojej investície nižšiu hodnotu ako je očakávaná, ale aj riziko vyššej hodnoty.

Preto vznikajú aj iné metódy na meranie rizika ako napr. VaR - *Value at Risk* či CVaR - *Conditional Value at Risk.*

Value at Risk meria maximálnu potenciálnu stratu hodnoty portfólia s pravdepodobnosťou $(1-\alpha)\%$ $(\alpha \in (0,1))$ v časovom horizonte $[0,T]$. Value at risk portfólia, kde X odpovedá jeho strate, môžeme zapísať ako:

$$VaR_\alpha(X) = \min\{x \in \mathbb{R}/P(X \leq x) \geq \alpha\}.$$

Aj tento spôsob popisu rizika má svoje nevýhody. VaR nie je subaditívna miera rizika a navyše vedie k úlohe nekonvexného nelineárneho programovania.

Populárnejšou metódou, sa preto stala Conditional Value at Risk. Táto miera rizika vychádza z Value at Risk :

$$CVaR_\alpha(X) = E[X/X > VaR_\alpha(X)].$$

CVaR je teda strednou hodnotou strát väčších ako hodnota VaR_α. Výhodou CVar oproti VaR je, že sa optimalizuje ľahšie, pretože vedie k úlohe konvexného programovania.

2 Funkcia užitočnosti

Jednou z možností, ako medzi sebou porovnávať jednotlivé portfóliá (jednotlivé investičné možnosti) je pomocou funkcie užitočnosti. Tá priradí každému portfóliu nejakú užitočnosť. Aby toto porovnanie dávalo zmysel, musí funkcia užitočnosti spĺňať základné vlastnosti.

Od funkcie užitočnosti vyžadujeme, aby bola rastúca a konkávna. Rastúcosť vyplýva prirodzene z toho, že investor má väčší úžitok z väčšieho majetku (výnosu). Konkávnosť vyplýva z predpokladu riziko averzného investora. Ak má investor možnosť investovať do portfólia s istým výnosom r alebo do portfólia so strednou hodnotou výnosu r, potom užitočnosť portfólia s istým výnosom r je vyššia a investor si vyberie práve túto možnosť.

Najčastejšie sa používajúce typy funkcie užitočnosti sú:

- *exponenciálna* $U(x) = -e^{-bx}$, pre $b > 0$
- *logaritmická* $U(x) = \ln(x)$
- *mocninová* $U(x) = bx^b$, pre $b \leq 1, b \neq 0$
- *kvadratická* $U(x) = x - bx^2$, pre $b < 0$

Každá funkcia užitočnosti má určité výhody i nevýhody. Napr. logaritmická funkcia užitočnosti pre nulový majetok nadobúda hodnotu $-\infty$ a kvadratická funkcia užitočnosti je rastúca len pre $x < \frac{1}{2b}$.

My sme sa v našej práci rozhodli pri aplikácii na reálne dáta používať *izo - elastickú triedu funkcií*:

$$U_\gamma(x) = \frac{x^{1-\gamma}}{1-\gamma}, \text{ pre } \gamma > 0, \gamma \neq 0.$$

Môžeme si všimnúť, že pre parameter $\gamma = 1$ dostávame logaritmickú funkciu užitočnosti.

Averziu investora k riziku môžeme popísať aj číselne a to cez Arrow-Prattov absolútny koeficient averzie k riziku:

$$a_A(x) = -\frac{U''(x)}{U'(x)}.$$

Platí, že väčší Arrow-Prattov koeficient odpovedá vyššej averzii k riziku.

Okrem toho poznáme aj relatívny koeficient averzie k riziku

$$a_R(x) = -x\frac{U''(x)}{U'(x)},$$

ktorý meria absolútnu averziu k riziku v pomere k majetku.

Pre izo-elastickú funkciu užitočnosti dostávame $a_A(x) = \frac{\gamma}{x}$ a $a_R(x) = \gamma$. Relatívny koeficient averzie k riziku je teda konštantný, a preto túto funkciu zaraďujeme do skupiny CRRA funkcií (constant relative risk aversion).

Jednou z vlastností izo-elastickej triedy funkcií užitočnosti je, že pre rôzne úrovne majetku dôjdeme optimalizáciou k rovnakým optimálnym váham portfólia.

$$\max E(U(W_T)) = \max E(\frac{W_T^{1-\gamma}}{1-\gamma})$$

$$\max E(U(cW_T)) = \max E(\frac{(cW_T)^{1-\gamma}}{1-\gamma}) = \max c^{1-\gamma} E(\frac{W_T^{1-\gamma}}{1-\gamma}), c > 0$$

Vidíme teda, že funkcia $E(U(W_T))$ nadobúda maximum pre kombináciu kusov akcií $x_1^*, ..., x_n^*$, kým funkcia $E(U(cW_T))$ pre kombináciu $cx_1^*, ..., cx_n^*$. Váhy jednotlivých akcií v prvom prípade sú $\frac{x_i^*}{W}$, čo sa rovná váham v druhom prípade $\frac{cx_i^*}{cW} = \frac{x_i^*}{W}$. Vďaka tejto vlastnosti môžeme zvoliť výšku investície W_0 ľubovoľne.

2.1 Formulácia úlohy

Vo všeobecnosti sa každý investor snaží maximalizovať svoj výnos, resp. majetok. Keďže majetok na konci investície je náhodná premenná, pri použití funkcie užitočnosti ako kritéria výberu, sa snažíme maximalizovať očakávanú užitočnosť majetku na konci investície, teda $\max E[U(W_T)]$.

Predpokladajme, že naša investícia pozostáva z kombinácie n aktív. Označme c_i cenu i-teho aktíva na začiatku investície, d_i cenu i-teho aktíva v čase T a W_0 majetok na začiatku investície. Riešime úlohu:

$$\max E[U(\sum_{i=1}^{n} x_i d_i)]$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i c_i = W_0 \tag{1}$$

Ďalej predpokladajme, že naša investícia môže v čase T dopadnúť podľa m scenárov. Ak označíme d_i^s cenu i-tej akcie v prípade scenára s a p_s pravdepodobnosť, že nastane scenár s, potom môžeme úlohu (1) prepísať do tvaru:

$$\begin{aligned} \max_{x_1,\ldots,x_n} \sum_{s=1}^{m} p_s U(\sum_{i=1}^{n} x_i d_i^s) & \\ \sum_{i=1}^{n} x_i c_i = W_0 & \end{aligned} \tag{2}$$

V prípade zákazu krátkych pozícií pribudne ešte n obmedzení na váhy:

$$\begin{aligned} \max_{x_1,\ldots,x_n} \sum_{s=1}^{m} p_s U(\sum_{i=1}^{n} x_i d_i^s) & \\ \sum_{i=1}^{n} x_i c_i = W_0 & \\ x_i \geq 0 \text{ pre } \forall i = 1, ..., n & \end{aligned} \tag{3}$$

3 Markowitzov model

Ako je zrejmé už z názvu modelu, jeho autorom je Harry Markowitz. Svoj model, nazývaný aj Mean-Variance model, prvýkrát predstavil v roku 1952 v článku [5] a ďalej sa mu venuje aj v práci [6]. Za vývoj teórie výberu portfólia mu bola v roku 1990 udelená Cena Švédskej banky za ekonómiu na pamiatku Alfreda Nobela.

Hlavná myšlienka tohto modelu je jednoduchá - maximalizovať výnos portfólia a zároveň minimalizovať riziko. Tieto dve úlohy sa navzájom ale vylučujú. Vyšší výnos portfólia si so sebou nesie vyššie riziko a naopak nižšie riziko vedie k nižšiemu výnosu. Preto Markowitzov model minimalizuje riziko pre fixný požadovaný výnos $\bar{r_p}$.

Predpokladajme, že pre náš výber portfólia máme k dispozícii n aktív. Výnos portfólia je váženým priemerom výnosov jednotlivých aktív, teda $\sum_{i=1}^{n} w_i r_i$. Kde w_i je váha akcie i.

Riziko aktíva meriame jej variancou. Analogicky riziko portfólia meriame jeho variancou. Variancia portfólia sa však nerovná váženému priemeru variancií jednotlivých aktív. Označme varianciu portfólia σ_p^2. Potom platí:

$$
\begin{aligned}
\sigma_p^2 &= E[(r_p - \bar{r_p})^2] \\
&= E[(\sum_{i=1}^{n} w_i r_i - \sum_{i=1}^{n} w_i \bar{r_i})^2] \\
&= E[(\sum_{i,j=1}^{n} w_i w_j (r_i - \bar{r_i})(r_j - \bar{r_j})] \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} w_i w_j cov(r_i, r_j) \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} w_i w_j \sigma_{ij},
\end{aligned}
$$

kde σ_{ij} je kovarianciou výnosu aktíva i a j. σ_{ii} je teda variancia aktíva i. V prípade, že použijeme maticový zápis, varianciu portfólia môžeme zapísať ako $\sigma_p^2 = w^T V w$, kde matica V je kovariančná matica a vektor w je vektorom váh jednotlivých aktív.

Pri optimalizácii teda dostávame úlohu kvadratického programovania:

$$\begin{aligned} \min_{w_1,\dots,w_n} \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} w_i w_j \sigma_{ij} & \\ \sum_{i=1}^{n} w_i \bar{r_i} = \bar{r_p} & \\ \sum_{i=1}^{n} w_i = 1 & \end{aligned} \tag{4}$$

Vidíme, že aby sme mohli túto úlohu riešiť, potrebujeme poznať očakávané výnosy jednotlivých aktív, kovariancie aktív a zvoliť si požadovanú úroveň výnosu portfólia.

Odhadnúť očakávaný výnos a varianciu portfólia však nemusí byť také ľahké. Jednou z možností je, že výnos odhadneme ako priemerný výnos akcie za určité obdobie. Čo však znamená určité obdobie? Aký časový horizont vybrať? Nie je dobré zvoliť príliš dlhý horizont, pretože výnosy spred desiatich rokov vôbec nemusia odpovedať dnešným výnosom. Taktiež výnosy za príliš krátke obdobie môžu odzrkadľovať len krátkodobé problémy vo firme, ktoré znížili cenu akcie, prípadne krátke obdobie, kedy sa firme začalo dariť. Ďalšou možnosťou je odhad výnosu na základe pozorovaní, situácie na trhu, skúseností, očakávaní iných investorov... Treťou možnosťou je zlatá stredná cesta a teda odhad na základe historických dát, ale s prihliadnutím na už spomínané faktory.

Nakoniec sa musíme ešte rozhodnúť, ako zvoliť požadovaný výnos. Táto voľba je len na investorovi a závisí od jeho averzie k riziku. Keďže výšší výnos so sebou prináša aj väčšie riziko, rizikovo averznejší investor si spravidla volí menší očakávaný výnos portfólia ako menej averzný investor.

Majme teda n akcií, do ktorých môžeme investovať. Budeme predpokladať, že $n \geq 3$, pretože pre $n = 2$ je množina prípustných riešení jediné portfólio. Ďalej predpokladajme, že výnosy akcií r_i sú lineárne nezávislé, teda ak $\sum_{i=1}^{n} w_i r_i = 0$, potom $w_i = 0$ pre $\forall i = 1, 2, ..., n$. Táto podmienka je však ľahko splniteľná, pretože ak výnos nejakej akcie je lineárnou kombináciou iných aktív z portfólia, tak potom namiesto investovania do tohto portfólia môžeme investovať do príslušnej lineárnej kombinácie týchto "náhradných" aktív. Posledným predpokladom je, že v portfóliu existujú dve také aktíva, že $r_i \neq r_j$. Ak by táto podmienka nebola splnená, očakávaný výnos portfólia by bol $\bar{r}$ a úloha by pre $\bar{r_p} \neq \bar{r}$ nemala riešenie, pretože neexistuje taká kombinácia aktív, aby $\sum_{i=1}^{n} w_i \bar{r} = \bar{r_p}$ a zároveň $\sum_{i=1}^{n} w_i = 1$.

3.1 Riešenie Markowitzovej úlohy

Markowitzovu úlohu môžeme riešiť metódou Lagrangeových multiplikátorov. Dostaneme Lagrangeovú funkciu tvaru:

$$L(w,u,v) = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} w_i w_j \sigma_{ij} + u(\bar{r_p} - \sum_{i=1}^{n} w_i \bar{r_i}) + v(1 - \sum_{i=1}^{n} w_i)$$

Z Kuhn - Tuckerových podmienok dostávame $n+2$ rovníc o $n+2$ neznámych:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial w_i} &= \sum_{j=1}^{n} w_j \sigma_{ij} - u\bar{r_i} - v = 0 \text{ pre } \forall i = 1,2,...,n \\ \frac{\partial L}{\partial u} &= \bar{r_p} - \sum_{i=1}^{n} w_i \bar{r_i} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial v} &= 1 - \sum_{i=1}^{n} w_i = 0 \end{aligned} \tag{5}$$

Označme stlpcový vektor samých jednotiek dĺžky n $\mathbf{1}$, potom môžeme tieto podmienky zapísať v maticovom tvare ako:

$$\begin{aligned} Vw - u\bar{r} - v\mathbf{1} &= 0 \\ \bar{r_p} - w^T\bar{r} &= 0 \\ 1 - w^T\mathbf{1} &= 0 \end{aligned} \tag{6}$$

Z prvej rovnice podmienok (6) vieme vyjadriť

$$w = uV^{-1}\bar{r} + vV^{-1}\mathbf{1} \tag{7}$$

a po dosadení (7) do ďalších dvoch rovníc dostávame:

$$\bar{r_p} = u\bar{r}^T V^{-1}\bar{r} + v\mathbf{1}^T V^{-1}\bar{r}$$

$$1 = u\bar{r}^T V^{-1}\mathbf{1} + v\mathbf{1}^T V^{-1}\mathbf{1}.$$

Označme si

$$\begin{aligned} a &= \mathbf{1}^T V^{-1}\bar{r} \\ b &= \bar{r}^T V^{-1}\bar{r} \\ c &= \mathbf{1}^T V^{-1}\mathbf{1} \\ d &= bc - a^2. \end{aligned} \tag{8}$$

Dostávame tak sústavu:

$$\bar{r_p} = ub + va$$
$$1 = ua + vc,$$

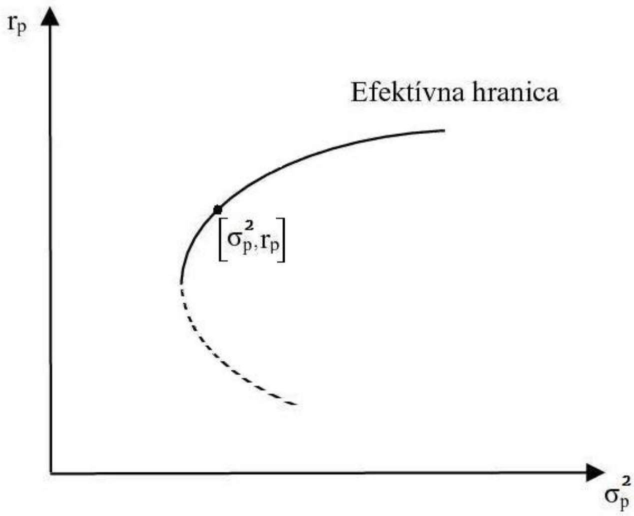
ktorej jediným riešením je:

$$u = \frac{\bar{r_p}c - a}{d}$$
$$v = \frac{b - \bar{r_p}a}{d}.$$

Dosadením vyjadrených Lagrangeových multiplikátorov u, v do (7) dostávame optimálne váhy portfólia:

$$w = \frac{\bar{r_p}c - a}{d}V^{-1}\bar{r} + \frac{b - \bar{r_p}a}{d}V^{-1}\mathbf{1}.$$

Optimálna kombinácia aktív $w_1, ..., w_n$ a jej prislúchajúca variancia portfólia σ_p^2 určujú bod $[\sigma_p^2, \bar{r_p}]$. Množina takýchto riešení pre rôzne hodnoty $\bar{r_p}$ sa nazýva efektívna hranica.



Obr. 1: Efektívna hranica

V prípade zákazu krátkych pozícií budeme riešiť úlohu:

$$\begin{aligned} &\min_{w_1,...,w_n} \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} w_i w_j \sigma_{ij} \\ &\sum_{i=1}^{n} w_i \bar{r}_i = \bar{r_p} \\ &\sum_{i=1}^{n} w_i = 1 \\ &w_i \geq 0 \text{ pre } \forall i = 1, ..., n \end{aligned} \tag{9}$$

3.2 Konzistencia úloh

V našej práci sme si zatiaľ predstavili dve metódy optimalizácie portfólia: optimalizáciu strednej hodnoty funkcie užitočnosti a Mean-Variance optimalizáciu. Tieto dva postupy sú za splnenia určitých podmienok konzistentné.

Nech $\bar{W_T}$ označuje požadovanú hodnotu portfólia na konci investície. $\bar{W_T}$ má teda pri požadovanom výnose portfólia $\bar{r_p}$ hodnotu $\bar{W_T} = (1 + \bar{r_p})W_0$. Ak je funkcia užitočnosti dostatočne hladká, vieme ju v okolí bodu $\bar{W_T}$ rozvinúť do Taylorovho rozvoja:

$$U(W) = U(\bar{W_T}) + U'(\bar{W_T})(W - \bar{W_T}) + \frac{1}{2}U''(\bar{W_T})(W - \bar{W_T})^2 + R^3,$$

kde R^3 reprezentuje členy Taylorovho rozvoja od tretieho rádu vyššie. Pre strednú hodnotu funkcie užitočnosti teda platí:

$$E(U(W)) = U(\bar{W_T}) + \frac{1}{2}U''(\bar{W_T})\mathrm{Var}(W) + E(R^3),$$

kde $E(R^3)$ vieme rozpísať do tvaru

$$E(R^3) = \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n!}U^{(n)}(\bar{W_T})E((W - \bar{W_T})^n).$$

Ak by sme zanedbali $E(R^3)$, potom vzhľadom na konkávnosť funkcie užitočnosti ($U''(\bar{W_T}) < 0$) maximalizácia strednej hodnoty funkcie užitočnosti odpovedá minimalizácii variancie pri fixnom úroku $\bar{W_T}$, inými slovami Mean-Variance optimalizácii.

V prípade použitia kvadratickej funkcie užitočnosti je $R^3 = 0$, a preto sú tieto dve metódy konzistentné.

Ďalšou podmienkou, ktorá nám vie zabezpečiť konzistentnosť týchto dvoch úloh je podmienka normálneho rozdelenia výnosu portfólia $\bar{r_p}$. V prípade splnenia tejto podmienky vieme vyjadriť strednú hodnotu užitočnosti výnosu portfólia ako:

$$E(U(\bar{r_p})) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_p^2}} \int\limits_R U(x)\mathrm{exp}(-\frac{(x - \bar{r_p})^2}{2\sigma_p^2})dx.$$

$E(U(\bar{r_p}))$ je teda funkciou premenných $\bar{r_p}$ a σ_p^2. Dá sa navyše ukázať, že je klesajúca v σ_p^2, preto maximalizácia strednej hodnoty funkcie užitočnosti odpovedá pri fixnom $\bar{r_p}$ minimalizácii variancie portfólia.

4 Aplikácia na reálne dáta

4.1 Arbitráž v dátach

Jedným z problémov, s ktorými sa pri optimalizácii funkcie užitočnosti môžeme stretnúť je arbitráž v dátach. Inými slovami, z vybratých dát sa dá usúdiť, že na trhu je arbitráž.

Vo všeobecnosti rozlišujeme dva typy arbitráže:

- Arbitráž prvého druhu (arbitráž) je investícia, ktorá má nulovú cenu a s istotou prináša kladný zisk (resp. investícia, ktorá má zápornú cenu a s istotou prináša nezáporný zisk).

$$\begin{aligned} &W_0 = 0 \\ &W_T^S > 0 \text{ pre } \forall \text{ s=1,...,m} \end{aligned} \tag{10}$$

- Arbitráž druhého druhu (arbitrážna príležitosť) je investícia, ktorá má nulovú cenu, pričom s istou pravdepodobnosťou prináša kladný zisk a zároveň pravdepodobnosť záporného zisku je nulová.

$$\begin{aligned} &W_0 = 0 \\ &W_T^S \geq 0 \text{ pre } \forall \text{ s=1,...,m} \\ &E(W_T) > 0 \end{aligned} \tag{11}$$

Zoberme si mesačné dáta pre akcie AT&T, IBM, Google a Apple (aktuálne ceny akcií a ceny akcií v prípade, že o mesiac nastane scenár s). Údaje sú zaznamenané v tabuľke (1).

Pre tieto akcie vieme nájsť riešenie, ktoré spĺňa podmienky arbitráže (10):

Tabuľka 1: Dáta pre akcie AT&T, IBM, GOOG a AAPL

akcia\scenár	1	2	3	4	5	cena akcie
AT&T	32.84	32.86	30.73	32.97	31.24	31.60
IBM	212.57	209.13	214.45	200.25	208.47	204.74
GOOG	646.47	672.4	566.66	679.88	638.11	630.92
AAPL	669.71	712.4	675.71	635.27	566.07	599.51

-115,65 akcií AT&T

3,993 akcií IBM

3,058 akcií GOOG

1,514 akcií AAPL

Takáto kombinácia akcií odpovedá portfóliu s počiatočnou investíciou $W_0 = -0.00168$ a v jednotlivých scenároch má hodnotu : $W_T^1 = 62,598$

$$W_T^2 = 190,944$$

$$W_T^3 = 75,623$$

$$W_T^4 = 50,201$$

$$W_T^5 = 49,782$$

Táto kombinácia akcií jasne porušuje podmienku "no free lunch", čiže z ničoho určite zarobí minimálne 49,782. V týchto dátach je teda arbitráž.

My však vieme, že reálne takéto situácie na trhu nenastávajú. V prípade, že sa na trhu objaví arbitráž či arbitrážna príležitosť, je to vždy len krátkodobo. Arbitráž totiž znamená, že na trhu nie je rovnováha. Pri takýchto dátach a pri predpoklade dokonalej racionality subjektov na trhu, by všetci investovali do rovnakej kombinácie aktív. Tým by však ovplyvnili cenu na trhu. Zvýšený dopyt po akcii by spôsobil zvýšenie jej ceny, a tým zánik arbitráže.

Ak sa chceme čo najviac priblížiť realite na trhu, pri optimalizácii portfólia chceme, aby v dátach nebola arbitráž ani arbitrážna príležitosť. Preto ich pred optimalizáciou otestujeme. Náš test vychádza z matematickej definície arbitrážnej príležitosti (11). Budeme riešiť úlohu:

$$\begin{aligned} \max_{x_1,\dots x_n} \; & E(W_T) \\ & W_0 = 0 \\ & W_T^S \geq 0 \text{ pre } \forall \text{ s=1,...,m} \end{aligned} \tag{12}$$

Túto úlohu môžeme ďalej rozpísať do tvaru:

$$\begin{aligned} \max_{x_1,\dots x_n} & \sum_{s=1}^{m} (p_s \sum_{i=1}^{n} x_i d_i^s) \\ & \sum_{i=1}^{m} x_i c_i = 0 \\ & \sum_{i=1}^{m} x_i d_i^s \geq 0 \text{ pre } \forall \text{ s = 1,...,m} \end{aligned} \tag{13}$$

V prípade, že sa v dátach nachádza arbitráž, by sa však takto postavená úloha zrútila, pretože by nemala maximum. Úloha (13) je úlohou lineárneho programovania. Ak nájdeme kombináciu aktív $x_1, ..., x_n$, ktorá spĺňa podmienky úlohy (13), potom je $E(W_T)$ pre ňu kladná. Ďalším riešením podmienok úlohy (13) je aj k-násobok ($k > 1$) prvého riešenia $kx_1, ..., kx_n$. Stredná hodnota majetku v čase T, ktorý prislúcha tejto kombinácii akcií je $kE(W_T)$, teda vyššia ako pôvodná stredná hodnota prislúchajúca kombinácii $x_1, ..., x_n$.

Tomuto problému sa však dá vyhnúť jednoduchou úpravou programu. Do úlohy (12) pridáme horné ohraničenie na majetky v jednotlivých scenároch, ktorým môže byť ľubovoľné kladné veľké číslo napr. $10^6 W_0$. Tým ohraničíme aj strednú hodnotu majetku v čase T.

$$\begin{aligned} \max_{x_1,\dots x_n} & E(W_T) \\ & W_0 = 0 \\ & W_T^S \geq 0 \text{ pre } \forall \text{ s=1,...,m} \\ & W_T^S \leq 10^6 W_0 \text{ pre } \forall \text{ s=1,...,m} \end{aligned} \tag{14}$$

V prípade takto upravenej úlohy môžu nastať len dve situácie: v dátach je arbitráž a optimalizácia sa zastaví na hodnote účelovej funkcie menšej alebo rovnej ako $10^6 W_0$ alebo v dátach arbitráž nie je, a preto jedinou kombináciou aktív, ktorá bude spĺňať podmienky úlohy (14) je nulový vektor.

Témou arbitráže a arbitrážnych príležitostí sa zaoberajú vo svojej článku [3] aj Harrison a Kreps. Základná veta teórie arbitráže, ktorú v tomto článku dokázali, hovorí, že na trhu nie sú arbitrážne príležitosti práve vtedy, keď na trhu existuje rizikovo neutrálna pravdepodobnosť $P = (p_1, ..., p_m)$. Inými slovami cena každého aktíva na začiatku investície je strednou hodnotou ceny aktíva na konci investície podľa pravdepodobnosti P.

Rizikovo neutrálna pravdepodobnosť P teda musí spĺňať:

- $\sum_{s=1}^{m} p_s = 1$
- $p_s > 0$ pre $\forall$ s=1,...,m
- $\begin{pmatrix} d_1^1 & d_1^2 & \dots & d_1^m \\ d_2^1 & d_2^2 & \dots & d_2^m \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ d_n^1 & d_n^2 & \dots & d_n^m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$

Dá sa ľahko nahliadnuť, že čím viac scenárov zahrnieme do optimalizácie, tým menšia je šanca, že na trhu neexistuje rizikovo neutrálna pravdepodobnosť a teda existuje arbitrážna príležitosť.

4.2 Obmedzenia funkcie užitočnosti

V súvislosti s použitím izo-elastickej funkcie užitočnosti sa stretávame ešte s ďalšími problémami. Izo-elastická trieda funkcií $U_\gamma(x) = \frac{x^{1-\gamma}}{1-\gamma}$ nespĺňa pre všetky koeficienty $\gamma > 0$ základné vlastnosti, ktoré požadujeme od funkcie užitočnosti.

Vo všeobecnosti sa stretávame s týmito troma problémami: funkcia nie je na určitom intervale alebo v nejakom bode definovaná, funkcia je na intervale $\langle -\infty, 0)$ klesajúca alebo funkcia priraďuje "záporným"majetkom väčšiu užitočnosť ako "kladným".

V prípade, že nastáva niektorý z týchto problémov, stáva sa tak na intervale $\langle -\infty, 0\rangle$. My však "záporný"majetok nebudeme brať do úvahy (nebudeme pripúšťať stratu vyššiu ako 100 %). Pri optimalizácii preto pridávame ďalšie ohraničenia na majetky v jednotlivých scenároch: $W_T^S = \sum_{i=1}^{n} x_i d_i^s \geq \varepsilon$ pre $\forall s = 1, ..., m$, kde ε je nami vhodne zvolené malé kladné ohraničenie. Dostávame tak upravenú úlohu:

$$\max_{x_1,\dots,x_n} \sum_{s=1}^{m} p_s \frac{(\sum_{i=1}^{n} x_i d_i^s)^{1-\gamma}}{1-\gamma}$$
$$\sum_{i=1}^{n} x_i c_i = W_0 \tag{15}$$
$$\sum_{i=1}^{n} d_i^s x_i \geq \varepsilon \text{ pre } \forall s = 1, ..., m$$

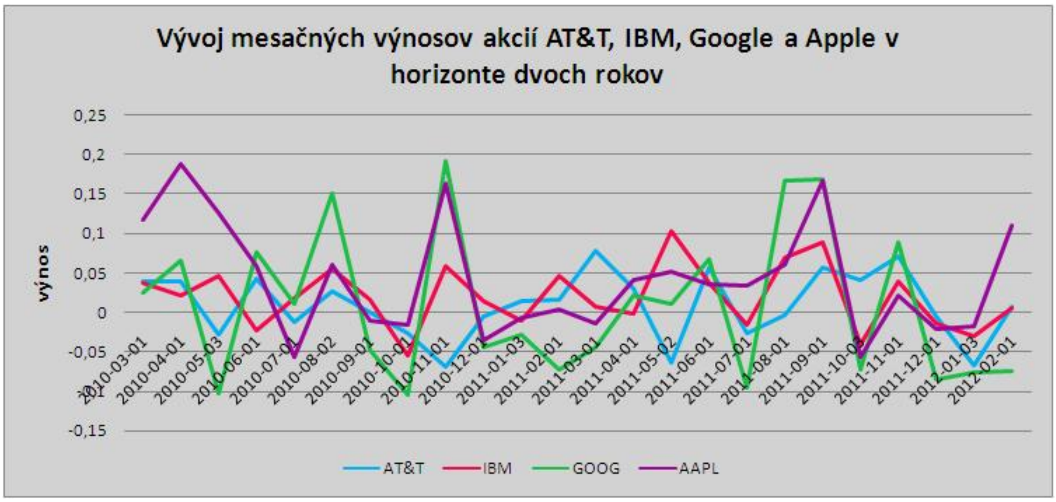
Spomínané problémy však nastávajú len v prípade, ak sú povolené krátke pozície. Pri optimalizácií bez krátkych pozícií sú podmienky $\sum_{i=1}^{n} d_i^s x_i > 0$ pre $\forall s = 1, ..., m$ splnené automaticky.

4.3 Výber a spracovanie dát

Na optimalizáciu sme vybrali štrnásť akcií, ktoré sme náhodne rozdelili do troch skupín. Do prvej skupiny akcií sa tak dostali akcie spoločností podnikajúcich v oblasti informačných technológií a elektroniky. Ďalšie dve skupiny akcií sú už viac diverzifikované. Sú v nich akcie spoločností z finančnej oblasti, potravinárskej oblasti, obchodné reťazce, oceliarska spoločnosť, farmaceutická spoločnosť...

Pre jednotlivé akcie sme spracovali reálne mesačné dáta v horizonte dvoch rokov. V prípade funkcie užitočnosti to odpovedá vytvoreniu 24 scenárov a v prípade Markowitzovej úlohy sme vytvorili kovariančnú maticu a odhadli budúce výnosy jednotlivých aktív. Nakoľko pre obe úlohy sme vychádzali z rovnakých dát, môžeme výsledky neskôr porovnať.

Pripravené dáta sme najprv nami vytvoreným testom otestovali na arbitráž. Po potvrdení, že v dátach nemáme arbitráž sme pristúpili k optimalizácii.



Obr. 2: Mesačné výnosy akcií prvej skupiny

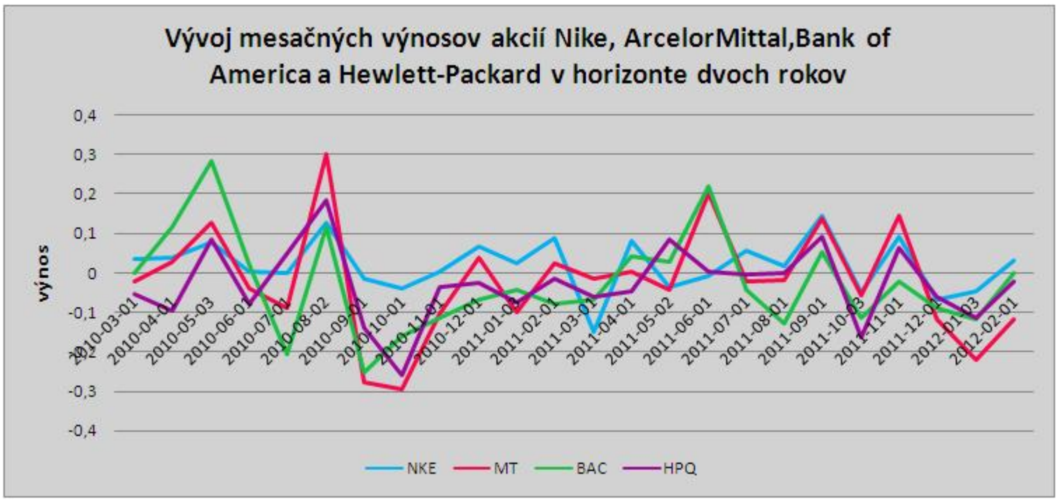
Prvú skupinu akcií tvoria akcie AT&T, IBM, Google a Apple. V tabuľke (2) je zobrazená kovariančná matica a v poslednom riadku jednotlivé očakávané výnosy akcií. Na obrázku (2) môžeme vidieť graf zobrazujúci vývoj mesačných výnosov akcií v časovom

Tabuľka 2: Kovariančná matica a očakávané výnosy akcií AT&T, IBM, GOOG a AAPL

	AT&T	IBM	GOOG	AAPL
AT&T	0,001689	-0,000022	0,000859	0,000100
IBM	-0,000022	0,001554	0,002248	0,001459
GOOG	0,000859	0,002248	0,008502	0,003411
AAPL	0,000100	0,001459	0,003411	0,004828
výnos	0,009516898	0,020338952	0,008712501	0,042521764

horizonte dvoch rokov so začiatkom 2. marca 2010.

Na grafe si môžeme všimnúť, že výnosy akcií GOOG a AAPL sú oveľa variabilnejšie ako výnosy akcií AT&T a IBM. Tomuto faktu odpovedá aj variancia akcie GOOG, ktorá je štvornásobná oproti varianciám akcií AT&T a IBM, a variancia AAPL, ktorá je dokonca až osemnásobne vyššia. Preto budeme očakávať, že pri optimalizácií rizikovo averznejšieho investora budú váhy týchto dvoch akcií menšie ako váhy pre menej rizikovo averzného investora.



Obr. 3: Mesačné výnosy akcií druhej skupiny

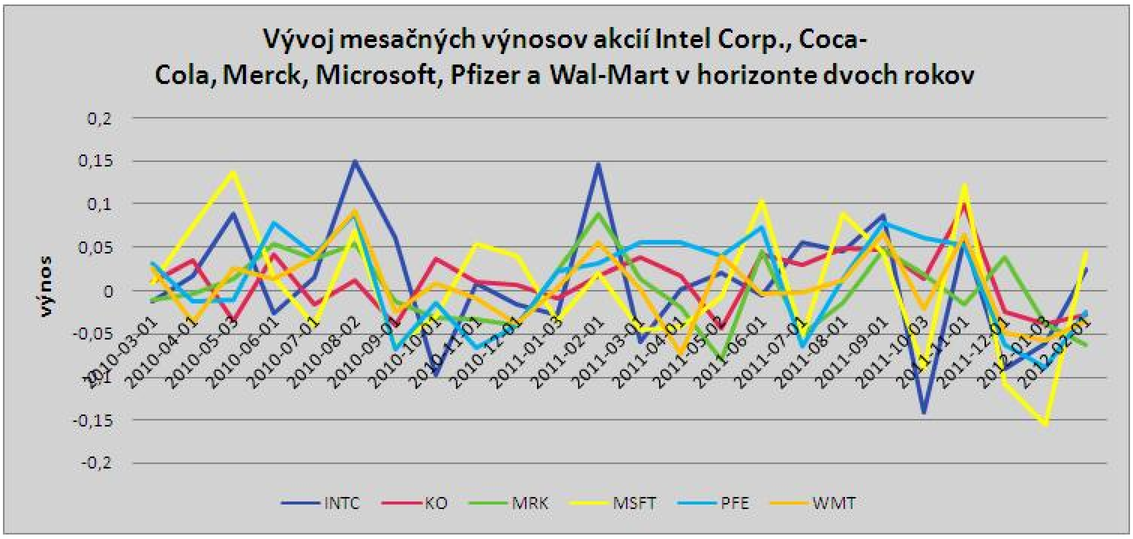
Tabuľka 3: Kovariančná matica a očakávané výnosy akcií NKE, MT, BAC a HPQ

	NKE	MT	BAC	HPQ
NKE	0,004281	0,005296	0,003291	0,003473
MT	0,005296	0,019029	0,012494	0,009903
MAC	0,003291	0,012494	0,014853	0,005725
HPQ	0,003473	0,009903	0,005725	0,008654
výnos	0,019747105	-0,021077898	-0,025667366	-0,028076404

Do druhej skupiny akcií sme zaradili tiež štyri aktíva a to konkrétne akcie Nike, ArcelorMittal, Bank of America a Hewlett Packard.

Z grafu (obrázok (3)) sa zdá, že z týchto štyroch akcií je najmenej rizikovou akcia Nike. Táto akcia má naozaj najmenšiu varianciu a zároveň aj najvyšší očakávaný výnos (tabuľka (3)). Je preto pravdepodobné, že váha akcie Nike v optimálnom portfóliu bude najvyššia pre všetky úrovne averzie k riziku.

Do tretej skupiny sa dostalo šesť akcií Intel Corp., Coca-Cola, Merck, Microsoft, Pfizer a WalMart.



Obr. 4: Mesačné výnosy akcií tretej skupiny

Tabuľka 4: Kovariančná matica a očakávané výnosy akcií INTC, KO, MRK, MSFT, PFE a WMT

	INTC	KO	MRK	MSFT	PFE	WMT
INTC	0,004954	0,000174	0,000631	0,002990	0,000642	0,001743
KO	0,000174	0,001206	0,000334	0,001106	0,000873	0,000459
MRK	0,000631	0,000334	0,001710	0,000366	0,001165	0,000690
MSFT	0,002990	0,001106	0,000366	0,005391	0,001361	0,001458
PFE	0,000642	0,000873	0,001165	0,001361	0,002888	0,001273
WMT	0,001743	0,000459	0,000690	0,001458	0,001273	0,001714
výnos	0,009764701	0,011046656	0,001308158	0,006394255	0,01149488	0,004444995

Ako najrizikovejšie môžeme podľa obrázka (4) odhadnúť akcie Intel a Microsoft. Z tabuľky (4) vidíme, že tieto dve akcie majú skutočne najväčšie variancie. Naopak najmenej rizikovou sa zdá byť akcia Coca-Cola, ktorá má zároveň aj jeden z najvyšších očakávaných výnosov. V optimálnom portfóliu bude preto pravdepodobne najviac preferovaná práve táto akcia.

4.4 Porovnanie výsledkov pre rôzne modely

Z pripravených dát sme optimalizáciou dostali rôzne rozloženia portfólia v závislosti od použitého postupu (optimalizácia funkcie užitočnosti alebo Markowitzovou Mean-Variance optimalizácia). Okrem toho sme v rámci použitého postupu optimalizovali rozloženie portfólia pre rôzne úrovne averzie investora k riziku. To znamená, že pri Mean-Variance optimalizácii sme použili rôzne požadované výnosy portfólia a pri optimalizácii funkcie užitočnosti rôzne úrovne parametra γ. Prehľad jednotlivých optimálnych portfólií je zobrazený na obrázkoch na strane 31-34.

4.4.1 Porovnanie výsledkov pre rôzne úrovne averzie k riziku

Pri optimalizácii strednej hodnoty funkcie užitočnosti používame koeficient γ z intervalu $\langle 5, 10 \rangle$. Ako sme v druhej kapitole uviedli, parameter funkcie γ sa pri tejto funkcii užitočnosti rovná relatívnemu koeficientu averzie k riziku $a_R(x)$. Preto použitie väčšieho parametra γ odpovedá rizikovo averznejšiemu investorovi. Opačne je to pri Mean-Variance optimalizácii. Nižší požadovaný výnos portfóla $\bar{r_p}$ odpovedá optimálnemu portfóliu s nižšou varianciou a teda rizikovo averznejšiemu investorovi.

Na jednotlivých grafoch teda x-ová os predstavuje averziu k riziku. Vidíme, že s narastajúcou averziou k riziku sa rozptyl váh zmenšuje. Toto je rozumný výsledok, ktorý sme mohli očakávať, pretože väčší rozptyl váh síce môže viesť k vyššiemu výnosu, ale zároveň môže viesť aj k vyššej strate.

Efekt zmenšujúceho sa rozptylu váh je najlepšie vidieť v prípade optimalizácie funkcie užitočnosti bez obmedzenia krátkych pozícií - obrázky (8), (9) a (10). Taktiež je to vidieť aj na príkladoch optimalizácie funkciou užitočnosti so zákazom krátkych pozícií a na príkladoch Mean-Variance optimalizácie s i bez možnosti krátkych pozícií. Tu je však zníženie rozptylu váh vidieť v oveľa menšej miere (napr. obrázky (14), (12)). V prípade druhej a tretej skupiny akcií a optimalizácie funkcie užitočnosti bez možnosti krátkych pozícií sa tento efekt neprejavil, rozptyl váh sa takmer nemení (obrázky (15) a (16)).

4.4.2 Porovnanie výsledkov pre Mean-Variance optimalizáciu a optimalizáciu funkcie užitočnosti

Ďalej sa môžeme pozrieť na výsledky, ktoré vznikli optimalizáciou funkcie užitočnosti a Mean-Variance optimalizáciou a porovnať ich. Výsledky pre akcie INTC, KO, MRK, MSFT, PFE a WMT sú zobrazené na obrázkoch (7), (10). Na tejto dvojici obrázkov môžeme vidieť, že s narastajúcou averziou k riziku obidva typy optimalizácie prerozdeľujú váhy jednotlivých akcií rovnako. Ak váha akcie s narastajúcou averziou k riziku pri optimalizácii funkciou užitočnosti klesá, potom klesá aj pri Mean-Variance optimalizácii a naopak. Konkrétne pre túto skupinu šiestich akcií váhy akcií MRK, MSFT a WMT stúpajú a váhy akcií KO, INTC a PFE klesajú v prípade oboch prístupov. Tento efekt môžeme vidieť aj na dvojiciach obrázkov (5), (8) a (6), (9).

Konkrétne pre štvoricu akcií AT&T, IBM, GOOG a AAPL môžeme teda akciu AAPL považovať za najviac rizikovú, pretože pri narastajúcej averzii k riziku je jedinou akciou, ktorej váha v portfóliu postupne klesá.

Rozdiel vo výsledkoch by sa však dal vidieť v tom, že kým optimálne váhy akcií pri optimalizácii funkcie užitočnosti pre rôznu averziu k riziku svoje znamienko nemenia, pri Mean-Variance optimalizácii môžeme nájsť akcie, ktoré postupne z kladných váh prechádzajú do krátkych pozícií a naopak.

4.4.3 Porovnanie výsledkov pre optimalizáciu s možnosťou krátkych pozícií a bez nej

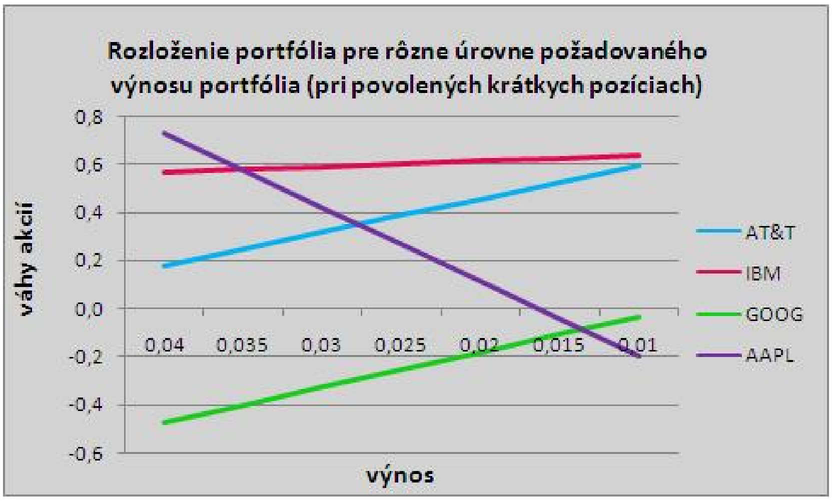
Nakoniec ešte môžeme porovnať výsledky, ktoré vznikajú pri optimalizácii v závislosti od toho, či sú povolené krátke pozície alebo nie. Na dvojici obrázkov (7), (13) sú zobrazené optimálne portfóliá pre akcie INTC, KO, MRK, MSFT, PFE a WMT, ktoré vznikli Mean-Variance optimalizáciou s možnosťou krátkych pozícií a bez nej. Podobne na dvojici obrázkov (10),(16) sú optimálne portfóliá, ktoré vznikli optimalizáciou funkcie užitočnosti s možnosťou krátkych pozícií a bez nej. To isté je zobrazené na dvojiciach obrázkov (5),(11) a (8),(14) pre prvú skupinu akcií AT&T, IBM, GOOG a AAPL a na dvojiciach obrázkov (6),(12) a (9),(15) pre druhú skupinu akcií NKE,

MT, BAC, HPQ.

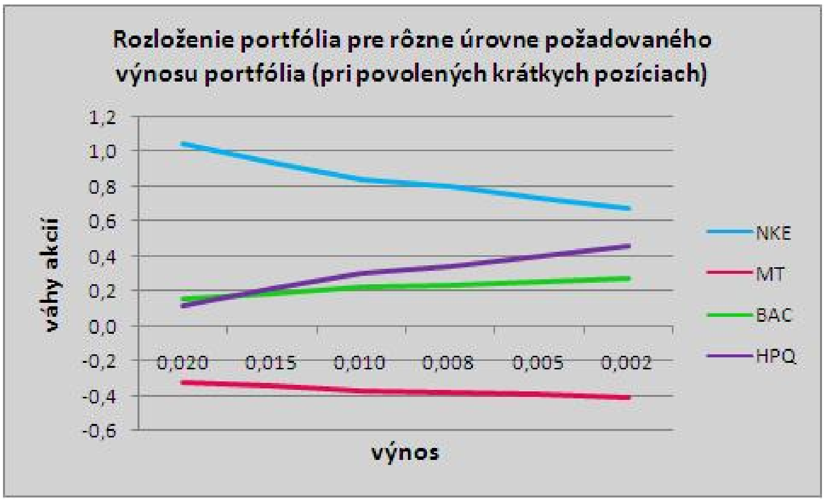
Pri porovnaní jednotlivých dvojíc výsledkov je zrejmé, že vo väčšine prípadov zákaz krátkych pozícií vedie k tomu, že tie akcie, ktoré boli pôvodne v krátkych pozíciách sa pri optimalizácii bez krátkych pozícií do optimálneho portfólia nedostali. Inak povedané ak akcia bola v krátkej pozícii, tak potom v riešení bez krátkych pozícií bola jej váha nulová.

Nastávali však aj výnimky a to najmä vtedy, ak akcia bola v pôvodne síce v krátkej pozícii, ale jej váha bola relatívne malá. Jedno z takýchto výnimiek je napr. akcia GOOG, ktorá mala pre $\bar{r_p} = 0.01$ pôvodne váhu -3,6% a pri zákaze krátkych pozícií sa optimálna váha tejto akcie zvýšila na 9% (obrázky (5),(11)).

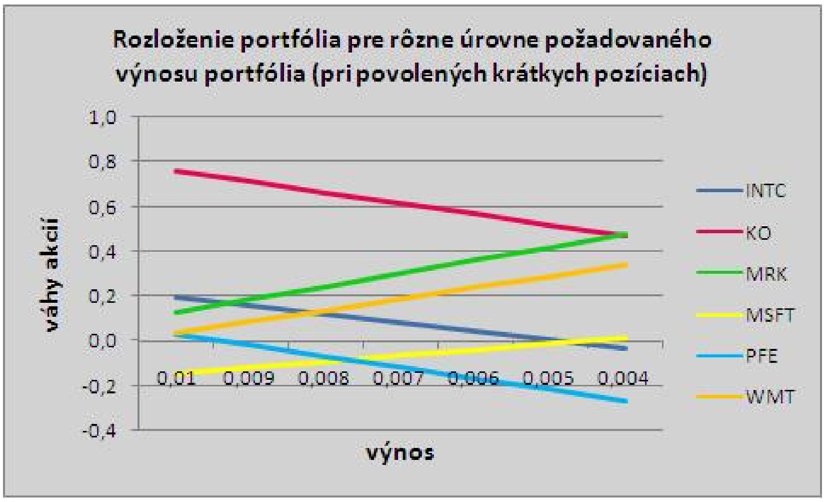
Podobné výsledky si môžeme všimnúť pre oba typy optimalizácie. Pri optimalizácií pomocou funkcie užitočnosti si však môžeme navyše všimnúť aj to, že pri zákaze krátkych pozícií, vzniká portfólio, ktoré vždy silne preferuje jednu z akcií a to aj pri vysokej averzii k riziku. Najlepšie je to vidieť na obrázku (15), kde je dokonca optimálne portfólio pre všetky úrovne averzie k riziku tvorené 100 % akcie NKE. Oproti optimálnemu portfóliu pri optimalizácii s možnosťou krátkych pozícií, to ale nie je veľká zmena, pretože aj v ňom bola táto akcia silne preferovaná. Pre prvú skupinu akcií je preferovanou akciou AAPL (obrázok (14)) a pre tretiu skupinu akcia KO (obrázok (16)).



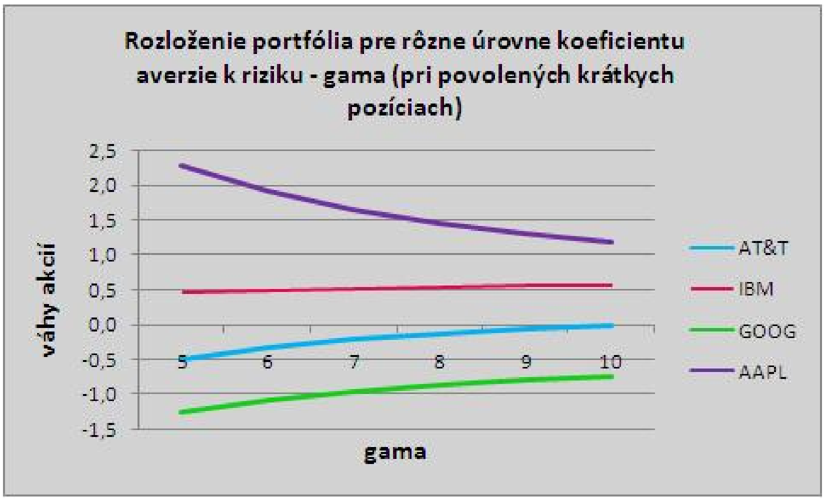
Obr. 5: Mean-Variance optimalizácia (s možnosťou krátkych pozícií) skupiny akcií 1



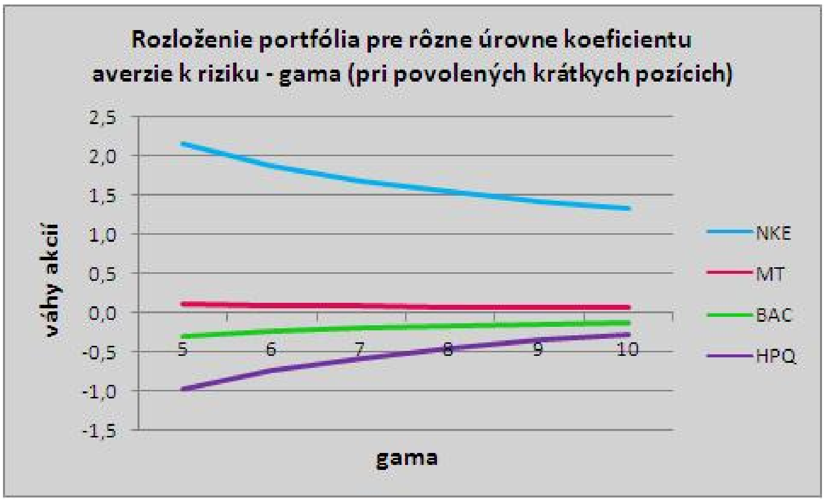
Obr. 6: Mean-Variance optimalizácia (s možnosťou krátkych pozícií) skupiny akcií 2



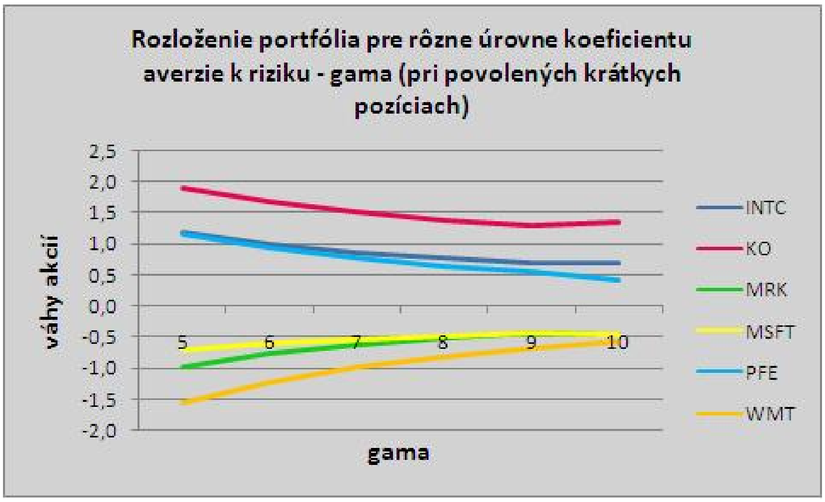
Obr. 7: Mean-Variance optimalizácia (s možnosťou krátkych pozícií) skupiny akcií 3



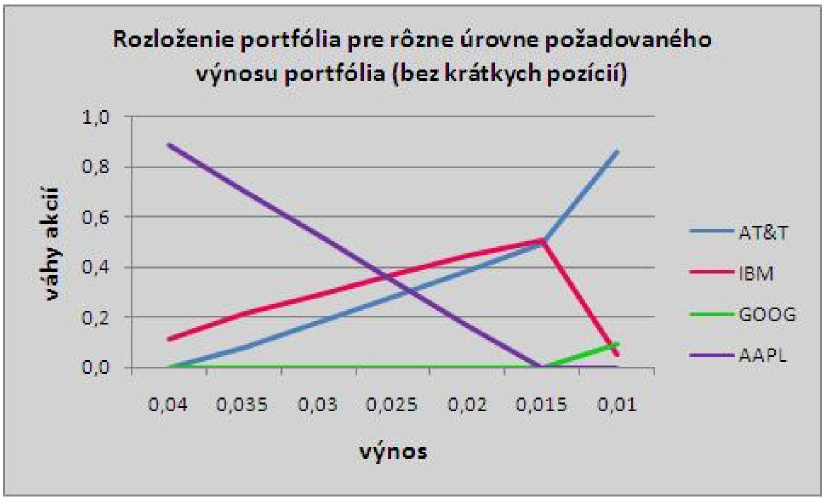
Obr. 8: Optimalizácia funkcie užitočnosti (s možnosťou krátkych pozícií) skupiny akcií 1



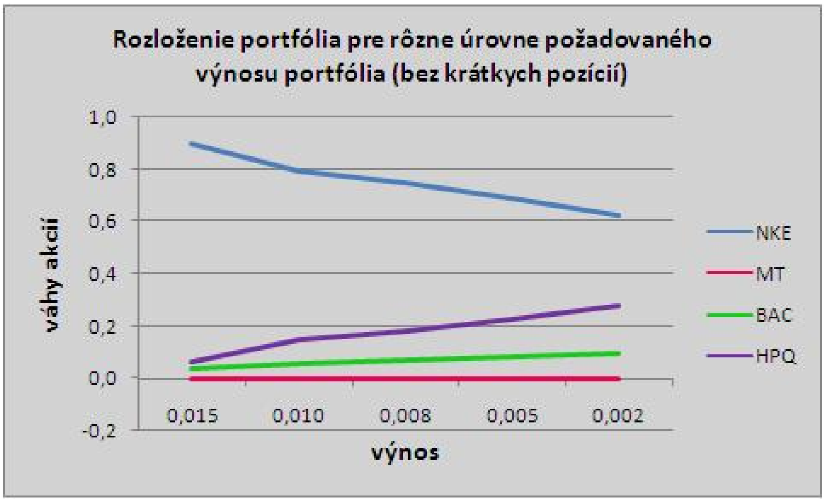
Obr. 9: Optimalizácia funkcie užitočnosti (s možnosťou krátkych pozícií) skupiny akcií 2



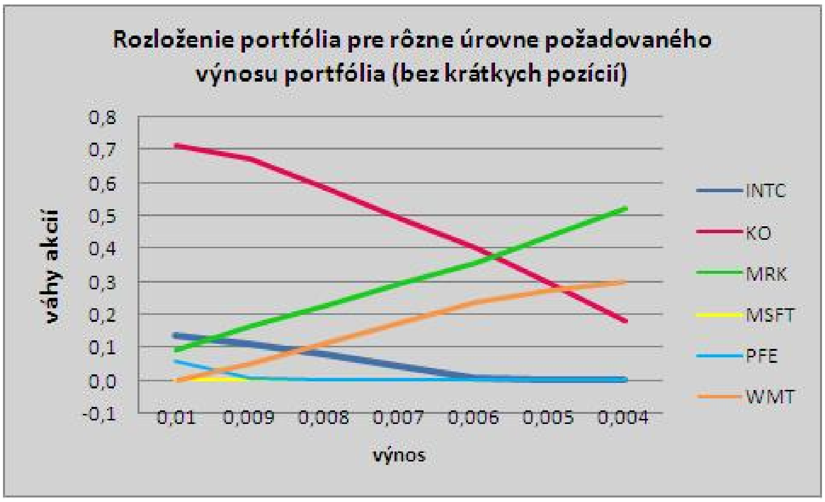
Obr. 10: Optimalizácia funkcie užitočnosti (s možnosťou krátkych pozícií) skupiny akcií 3



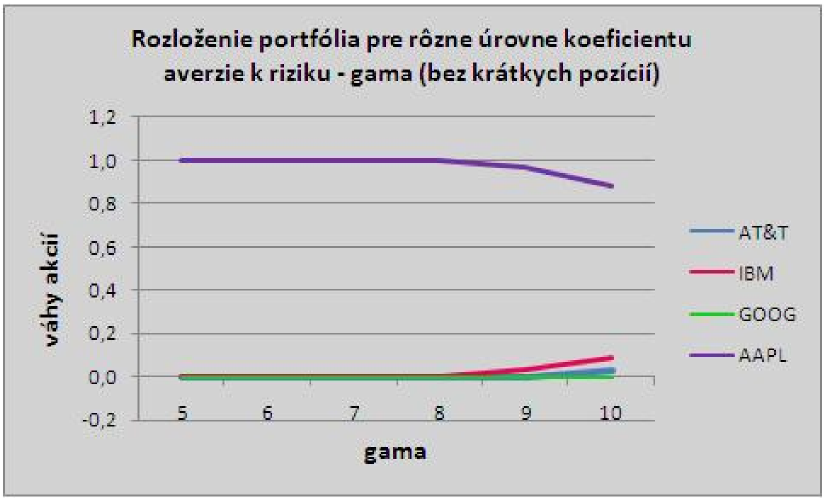
Obr. 11: Mean-Variance optimalizácia (bez možnosti krátkych pozícií) skupiny akcií 1



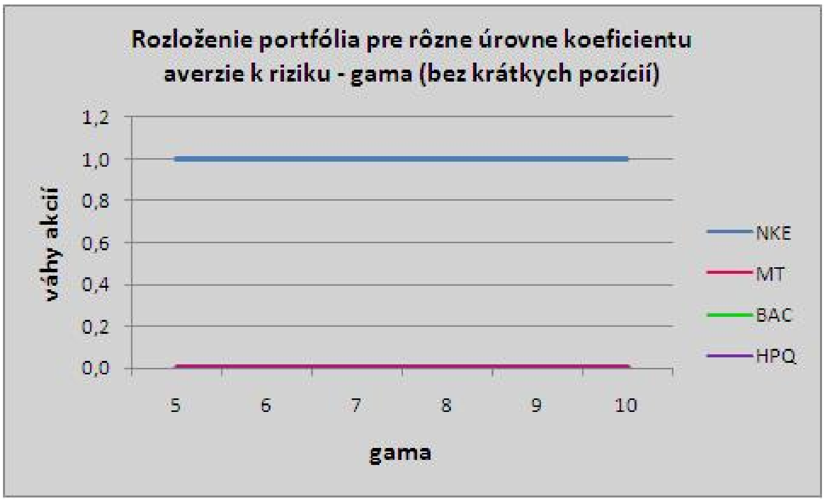
Obr. 12: Mean-Variance optimalizácia (bez možnosti krátkych pozícií) skupiny akcií 2



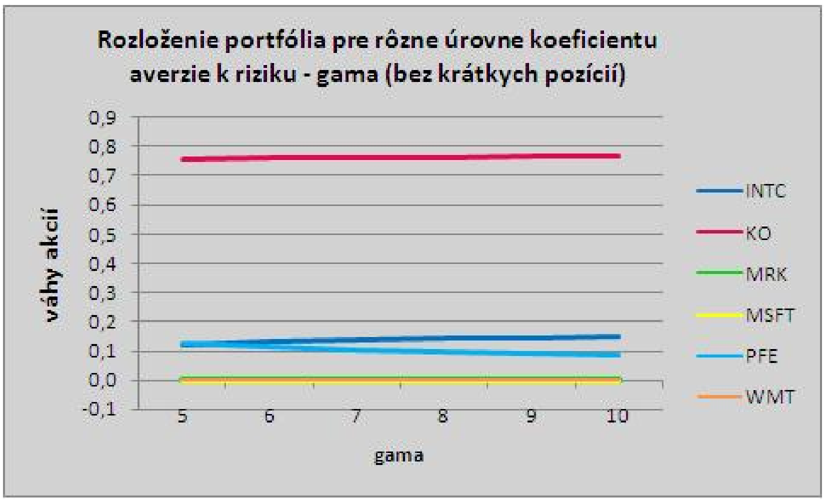
Obr. 13: Mean-Variance optimalizácia (bez možnosti krátkych pozícií) skupiny akcií 3



Obr. 14: Optimalizácia funkcie užitočnosti (bez možnosti krátkych pozícií) skupiny akcií 1



Obr. 15: Optimalizácia funkcie užitočnosti (bez možnosti krátkych pozícií) skupiny akcií 2



Obr. 16: Optimalizácia funkcie užitočnosti (bez možnosti krátkych pozícií) skupiny akcií 3

Záver

V našej práci sme sa zaoberali rôznymi modelmi na správu portfólia. Vychádzali sme najmä z práce Harryho Markowitza [5],[7] a Stephena Rossa [10]. V prvých troch kapitolách sme sa venovali najmä teoretickému základu práce. Kým v prvej kapitole sme sa venovali základným pojmom teórie portfólia, v ďalších dvoch kapitolách sme spracovali dve základné metódy výberu portfólia a to konkrétne Mean-Variance analýzu a optimalizáciu pomocou funkcie užitočnosti.

V tejto práci sme kládli najväčší dôraz na poslednú kapitolu, v ktorej sme sa snažili aplikovať teoretické znalosti z prvých troch kapitol do praxe. Našou snahou bolo čo najviac sa priblížiť výberu na reálnom trhu. Podstatnou časťou tejto práce bola príprava vstupných dát pre nami vytvorený program v Matlabe a nakoniec spracovanie výsledkov. Pred samotnou optimalizáciou sme museli zvážiť vhodný výber dát, zvoliť časový horizont vybraných dát, vybrať vhodnú funkciu užitočnosti atď.

Aj napriek tejto príprave sme sa však stretli s niekoľkými problémami ako arbitrážou v dátach, či niektorými obmedzeniami vyplývajúcimi z nami zvolenej funkcie užitočnosti. Navrhli sme možné riešenia týchto problémov, vhodne sme upravili program a okrem toho sme vytvorili test dát na arbitráž.

Môžeme však povedať, že po vyriešení týchto problémov sme dosiahli cieľ našej práce. Pre rôzne modely a modifikácie sme porovnali optimálnu skladbu portfólia. Mnohé z výsledkov, ktoré sme pri optimalizácii očakávali, sa nám aj prakticky potvrdili.

Zoznam použitej literatúry

[1] Brada, J.: *Teorie portfolia*, VŠE Praha, 1996

[2] Chopra, V. K.,Ziemba, W. T.:*The effect of errors in means, variances and co-variances on optimal portfolio choice*, Journal of Portfolio Management (1993), 6-11

[3] Harrison, J., Kreps, D.:*Martingales and arbitrage in multiperiod securities markets*, Journal of Economic Theory 20 (1979), 381–408

[4] Leunberger, G., L.:*Investment Science*, Oxford Univesity Press, Oxford, 1988

[5] Markowitz, H.:*Portfolio Selection*, The Journal of Finance 7 (marec 1952), 77-91

[6] Markowitz, H.:*Portfolio Selection: Efficient diversification of Investments*, Wiley, New York, 1959

[7] Markowitz, H.:*The Utility of Wealth*, The Journal of Political Economy 2 (apríl 1952), 151-158

[8] Melicherčík, I., Olšárová, L., Úradníček, V.:*Kapitoly z finančnej matematiky*, Epos, Bratislava, 2005

[9] Pliska, S., R.:*Introduction to Mathematical Finance: Discrete Time Models*, Blackwell Publishers, Malden, 1997

[10] Ross, S., A.:*The Arbitrage Theory of Capital Asset Pricing*, Journal of Economic Theory 13 (1976), 341-360

[11] Siede, H.:*Multi-Period Portfolio Optimalization with Emphasis on Mean-Variance Criterion*, Doctoral Thesis, Universität St. Gallen, 2000

Prílohy

Zdrojové kódy v jazyku Matlab

Test dát na arbitráž

```
function [x,fval]=arbitraz(D,c) % matica D obsahuje ceny akcií v jednotlivých
s=size(D);                       % scenároch a vektor c aktuálne ceny
f=zeros(1,s(2));
A=-D;
for i=1:s(2)
    f(i)=-sum(D(:,i));
end
for i=1:s(1)
    A(s(1)+i,:) = D(i,:)-1000000*c';
end
b =zeros(s(1)*2,1);
Aeq=c';
beq=0;
[ x,fval,exitflag,output ]=linprog(f,A,b,Aeq,beq);
fval=-fval;
end
```

Mean - Variance optimalizácia bez obmedzení

```
function [w]=markowitzBO(V,r,rp) % V - kovariančná matica
n=length(r);                      % r - vektor očakávaných výnosov
f=zeros(n,1);                       jednotlivých akcií
Ae=[r;ones(1,n)];                 % rp - požadovaný výnos portfólia
be=[rp;1];
w=quadprog(V,f,[],[],Ae,be);
end
```

Optimalizácia funkciou užitočnosti bez obmedzení

```
function [xcons,fvall]=utilityBO(W,c,D,gama,zb)
global W; % počiatočný majetok
global c; % vektor aktuálnych cien akcií
global D; % matica možných cien v jednotlivých scenároch pre
            jednotlivé akcie
global gama; % koeficient averzie k riziku
s=size(D);
n=length(c);
x0=zeros(n,1);
if zb==1 || zb==2 % začiatočný bod optimalizácie
for i=1:n
      if zb==1
        x0(i)=W/sum(c);
      end
      if zb==2
        x0(i)=(W/n)/c(i);
      end
end
end
if zb==3
b2=-inf;
for i=1:n
      priemer(i)=sum(D(:,i))/(s(1));
      b1=(c(i)-priemer(i))/priemer(i);
      if b1>b2
      t=i;
      b2=b1;
      end
end
x0(t)=-0.5*W/c(t);
```

```
for i=1:n
      if i =t
      x0(i)=((W+0.5*W)/(n-1))/c(i);
      end
end
end
if zb==4
poc=0;
zapW=0;
for i=1:n
      priemer(i)=sum(D(:,i))/(s(1));
      b1(i)=(c(i)-priemer(i))/priemer(i);
      if b1(i)>0
      x0(i)=-W/(n*c(i));
      zapW=zapW+x0(i)*c(i);
      poc=poc+1;
      end
end
for i=1:n
      if b1(i)<=0
      x0(i)=((W-zapW)/(n-poc))/c(i);
      end
end
end
options = optimset('LargeScale','off','TolFun',0.00000000001,'MaxIter',1000000);
[ xcons,fvall ] = fmincon('fun',x0,[],[],[],[],[],[],'constr',options);
end
```