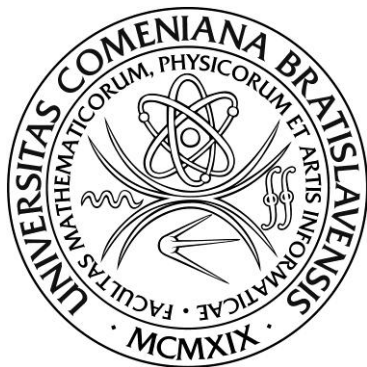


UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY



ZARIADENIA DEMONŠTRUJÚCE NÁHODNOSŤ
BAKALÁRSKA PRÁCA

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY



ZARIADENIA DEMONŠTRUJÚCE NÁHODNOSŤ
BAKALÁRSKA PRÁCA

Študijný program: Ekonomická a finančná matematika
Študijný odbor: 1114 Aplikovaná matematika
Školiace pracovisko: Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky
Vedúci práce: Mgr. Katarína Boďová, PhD.

Podakovanie

Touto cestou by som sa chcela v prvom rade poďakovať svojej vedúcej Mgr. Kataríne Boďovej, PhD. za ochotu, motiváciu, odborné rady a nevyčerpatelné nápady, ktoré mi pomohli pri písaní bakalárskej práce. Ďalej ďakujem svojmu otcovi za pomoc pri výbere vhodných materiálov na konštrukciu zariadenia, mame a priateľom za trpezlivosť a psychickú podporu.

Abstrakt

ODROBINÁKOVÁ, Diana: *Zariadenia demonštrujúce náhodnosť* [Bakalárska práca], Univerzita Komenského v Bratislave, Fakulta matematiky, fyziky a informatiky, Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky; školiteľ: Mgr. Katarína Boďová, PhD., Bratislava, 2012, 27 s.

Témou bakalárskej práce je Galtonova doska – experimentálna pomôcka na simuláciu niekoľkých pravdepodobnostných rozdelení a vzťahov medzi nimi. Cieľom práce je pochopiť a vysvetliť základné pravdepodobnostné rozdelenia, na základe nich skonštruovať zariadenie a testovať ho použitím vhodných štatistických metód. Získané experimentálne dáta sme analyzovali: odhadli sme parameter p Galtonovej dosky bodovo pomocou metódy maximálnej vierohodnosti a momentových metód; tento sme porovnali s intervalovým odhadom pomocou intervalov spoľahlivosti. Experimenty s Galtonovou doskou sme vykonali s predmetmi rôznych veľkostí, tvarov a hmotností. Zistili sme, že najvhodnejšími z experimentálnych predmetov sú cícery, pri veľkom počte cícerov výsledná krivka najviac pripomína normálnu krivku nielen tvarom, ale aj odhadmi parametrov. Výsledky ukázali, že parameter p binomického rozdelenia je blízky $1/2$, čo potvrdzuje správnosť konštrukcie. Významom práce je aj využiteľnosť zariadenia na vysokých školách, náš zámer začleniť pomôcku do vysokoškolského vyučovania v práci podporujeme teóriou konštruktivismu a americkou štúdiou o rozdieloch v študijných výsledkoch použitým rôznymi didaktickými metódami.

Kľúčové slová: pravdepodobnostné rozdelenia, centrálna limitná veta, štatistické metódy na odhad parametrov, experimentálna pomôcka, Galtonova doska

Abstract

ODROBINÁKOVÁ, Diana: *Devices demonstrating randomness* [Bachelor Thesis], Comenius University in Bratislava, Faculty of Mathematics, Physics and Informatics, Department of Applied Mathematics and Statistics; Supervisor: Mgr. Katarína Boďová, PhD., Bratislava, 2012, 27p.

The topic of this Bachelor Thesis is a Galton board – an experimental device that can simulate various probability distributions and their interconnected relationships. The aim of the thesis is to understand and explain elementary probability distributions and to further use this knowledge to construct the device, the functionality of which will be assessed using appropriate statistical methods as analytical analysis tools. Using the experimental data, it was possible to estimate the p parameter of the Galton board using Maximum Likelihood Method and the Methods of Moments, and to contrast the results with interval estimations of the Confidence Intervals. The experiments were carried out with objects differing in size, shape and weight. Among our experimental objects, the chickpeas were found to be the most suitable for the experiment; when a sufficiently large quantity of them was used, the resulting curve was the one most reminiscent of a normal distribution curve, with the results matching the calculated estimations. The obtained experimental data have shown that the parameter p of the binomial distribution is close to $1/2$, confirming the correctness of the constructed device. The significance of the work lies in the potential utility of the device for university studies; our intention to implement the Galton board in the school system is supported by the constructivism theory and the results of an American study focusing on the outcomes of different learning techniques, also described in this thesis.

Keywords: probability distributions, central limit theorem, statistical methods for parameter estimation, experimental device, Galton board

Obsah

Úvod	7
1 Základy pravdepodobnosti	9
1.1 Bernoulliho rozdelenie	9
1.2 Binomické rozdelenie	9
1.3 Normálne rozdelenie.....	10
1.4 Centrálna limitná veta.....	10
2 Galtonova doska z pohľadu pravdepodobnosti	11
3 Konštrukcia zariadenia.....	13
3.1 Príprava konštrukcie.....	13
3.2 Postupné verzie zariadenia.....	14
4 Testovanie správnosti konštrukcie.....	17
4.1 Realizácia experimentov.....	17
4.2 Odhad parametra p	20
4.2.1 Bodový odhad.....	20
4.2.1.1 Metóda maximálnej vierohodnosti.....	20
4.2.1.2 Metóda momentov.....	21
4.2.2 Intervalový odhad	22
4.2.2.1 Intervaly spoľahlivosti.....	22
4.2.3 Porovnanie výsledkov experimentov	24
4.3 Testovanie pravdepodobnostného rozdelenia	27
5 Využitie pomôcky na vyučovaní.....	29
Záver	31
Použitá literatúra.....	33
Prebraté a upravené obrázky	34

Úvod

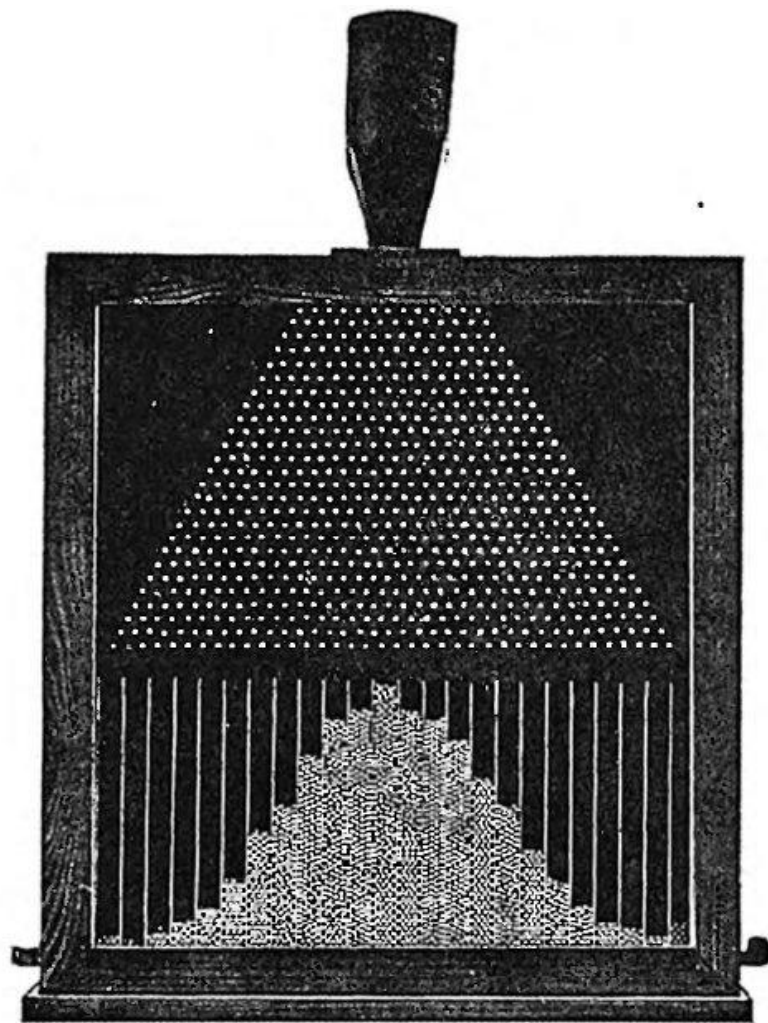
Pod pojmom zariadenie demonštrujúce náhodnosť si predstavujeme akýkoľvek predmet, ktorý sa správa nedeterministicky, stochasticky. Medzi najjednoduchšie patrí napr. minca či hracia kocka, pri hode ktorými nikdy s istotou nevieme povedať, čo padne. Inými sú napríklad rôzne druhy kyvadiel – jednoduché, dvojité či magnetické, pri ich rozkývaní vieme pomocou počiatocnej podmienky a diferenciálnych rovníc veľmi dobre predpovedať nasledujúce polohy. V tejto práci predstavíme zariadenie, ktoré sa síce správa stochasticky, zároveň sa však dá pomerne jednoducho popísať základnými pravdepodobnostnými vedomosťami. Experimentálna pomôcka je známa pod názvom Galtonova doska, Quincunx či Bean machine.

Galtonova doska je zariadenie, ktoré simuluje niekoľko typov pravdepodobnostných rozdelení a vzťahov medzi nimi. Skladá sa z dosky, na ktorej sú pripevnené kolíky a priečinky. Zhora sú cez lievik postupne do zariadenia vpúšťané guľôčky, odrážané kolíkmi v každej úrovni (resp. riadku) buď doľava alebo doprava (str.13, Obr.3). Tento proces sa opakuje dovtedy, kým sa guľôčky dostanú cez všetky úrovne kolíkov a padnú do jedného z priečinkov. Guľôčka môže naraziť aj na hranu priečinka a po odraze spadnúť do jedného zo susedných priečinkov.

Zariadenie bolo navrhnuté a po prvýkrát skonštruované už v 19.storočí Sirom Francsom Galtonom, avšak rôzne jeho repliky dodnes mnohé múzeá vedy a techniky radia medzi svoje najatraktívnejšie exponáty. Názornosť Galtonovej dosky sa nám zdala dostatočnou motiváciou na jej vlastnú konštrukciu a následnú analýzu funkcionality.

Cieľom bakalárskej práce bude v prvom rade pochopiť a vysvetliť pravdepodobnostné javy, ktoré sa Galtonovou doskou dajú skúmať. Teoretické vedomosti z pravdepodobnosti budú v práci vysvetlené najskôr všeobecne, neskôr s aplikáciou na konkrétne zariadenie. Následne navrhne a zrealizujeme samotnú konštrukciu zariadenia. Použitím vhodných štatistických metód sa po konštrukcii budeme venovať testovaniu

zariadenia - overíme, či je skonštruované správne, prípadne navrhujeme vylepšenia. V závere práce načrieme do didaktiky vysokoškolskej štatistiky a zdôvodníme, prečo má byť Galtonova doska začlenená do vyučovacích osnov.



Obr.1: Plán originálnej Galtonovej dosky.

1 Základy pravdepodobnosti

V tejto kapitole sa budeme venovať základným rozdeleniam v pravdepodobnosti, vychádzajúc zo zdrojov [2], [3] a [7]. Definujeme Bernoulliho rozdelenie, binomické a normálne rozdelenie a vzťahy medzi nimi. Neskôr sa na tieto vedomosti odvoláme pri konštrukcii a testovaní zariadenia.

1.1 Bernoulliho rozdelenie

Bernoulliho (alternatívne) rozdelenie, pomenované podľa matematika švajčiarskeho pôvodu Jacoba Bernoulliho, je pravdepodobnostné rozdelenie, v ktorom existujú práve dve rôzne udalosti. Napr., ak uvažujeme o zajtrajšom počasí, sú dve možné realizácie náhodnej premennej X , buď bude pršať, alebo pršať nebude. Ak bude dážď, tak nastala prvá udalosť, a ak bude akékoľvek iné počasie, tak nastala druhá udalosť.

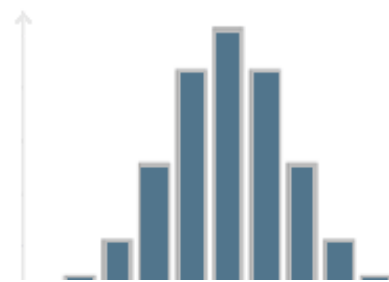
Pre jednoduchosť Bernoulliho pokusu si vždy jednu z udalostí označíme ako úspech (1 - v uvedenom príklade to môže byť napr. udalosť, že bude pršať) a druhú ako neúspech (0 - iné počasie). Pravdepodobnostnou funkciou takéhoto rozdelenia bude:

$$P(X = a) = \begin{cases} p, & a = 1 \\ 1 - p, & a = 0 \end{cases}$$

Bernoulliho rozdelenie označujeme ako $Ber(p)$, stredná hodnota je $E[X] = p$ a variancia je $Var[X] = p(1 - p)$.

1.2 Binomické rozdelenie

Binomické rozdelenie je diskkrétne pravdepodobnostné rozdelenie, definované ako počet výskytu udalosti pri n -násobnom opakovaní nezávislých Bernoulliho pokusov, kde každý z týchto pokusov má rovnakú



Obr.2.: Graf binomického rozdelenia.

pravdepodobnosť. Označujeme ho $Bin(n, p)$, n je počet nezávislých pokusov a p je pravdepodobnosť, s ktorou táto udalosť nastáva. Binomická náhodná premenná X môže nadobúdať celočíselné hodnoty od 0 po n . Pravdepodobnostná funkcia binomického rozdelenia je nasledovná:

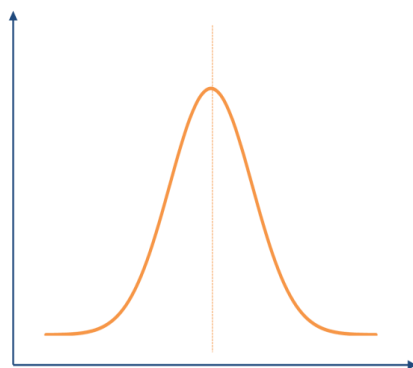
$$P(X = k) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \text{ kde } k \in 0, 1, \dots, n$$

Stredná hodnota binomického rozdelenia je $E[X] = np$ a variancia je $Var[X] = np(1-p)$.

1.3 Normálne rozdelenie

Normálne resp. Gaussovo rozdelenie pravdepodobnosti je spojité pravdepodobnostné rozdelenie. Označujeme ho $N(\mu, \sigma^2)$, kde stredná hodnota $E[X] = \mu$ a variancia $Var[X] = \sigma^2$. Jeho funkcia hustoty má nasledovný tvar:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$



Obr.3: Graf normálneho rozdelenia.

Normálne rozdelenie je najdôležitejším rozdelením v štatistike. Nielen preto, že sa v prírode spomedzi všetkých rozdelení vyskytuje najčastejšie, ale za určitých podmienok sa ním dajú veľmi dobre aproximovať ostatné rozdelenia. V literatúre je Gaussova krivka často nazývaná zvonová krivka (bell curve).

1.4 Centrálna limitná veta

Ak X_1, X_2, \dots, X_n je n nezávislých, rovnako rozdelených (i.i.d.) náhodných premenných so strednou hodnotou μ a disperziou σ^2 , potom podľa centrálnej limitnej vety má

$$X_{norm} = \frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma} \sqrt{n}$$

limitu blížiacu sa k normálnemu rozdeleniu. Znamená to, že ak sa počet nezávislých, rovnako rozdelených náhodných premenných blíži k nekonečnu, toto rozdelenie, nech už je akékoľvek, bude konvergovať k normálnemu rozdeleniu.

Centrálna limitná veta bola po prvýkrát dokázaná De Moivre-om v roku 1733 [2] pre Bernoulliho rozdelenie s parametrom $p = 1/2$. Odvtedy ju v rôznych podobách dokázali pre všetky pravdepodobnostné rozdelenia viacerí známi matematici (medzi nimi Lagrange či Lyapunov). V tejto práci využijeme poznatok, že binomické rozdelenie sa za daných podmienok bude blížiť k normálnemu.

2 Galtonova doska z pohľadu pravdepodobnosti

Vlastnosti pravdepodobnostných rozdelení v tejto kapitole aplikujeme na Galtonovu dosku.

Pre guľôčku gúľajúcu sa dolu Galtonovou doskou existujú po náraze na kolík len dve rôzne udalosti – buď padne doľava alebo doprava. To znamená, že každý náraz guľôčky o kolík je vlastne Bernoulliho pokusom. Keďže obe z uvedených udalostí by v správne skonštruovanej Galtonovej doske mali nastávať s rovnakou pravdepodobnosťou, pri konštrukcii sa budeme snažiť dosiahnuť, aby sa parameter Bernoulliho rozdelenia rovnal $1/2$.

Pád guľôčky do priečinku spočíva v práve toľkých Bernoulliho pokusoch, z koľkých úrovní kolíkov Galtonova doska pozostáva, (t.j. ak má doska napr. 12 úrovní, guľôčka absolvuje 12 opakovaní Bernoulliho pokusu). Každý z týchto pokusov je ovplyvnený tým, kam padla guľôčka na predchádzajúcej úrovni – ak sa napr. na prvej úrovni odrazila doľava, tak v tej ďalšej sa bude pravdepodobne rozhodovať pomocou iného kolíka, ako keby sa na prvej úrovni odrazila doprava. Napriek tomu sú tieto rozhodovania sa medzi sebou nezávislé (v zmysle, ako najviac nezávislé môžu byť, keď majú iný uhol odrazu podľa toho, na ktorú časť kolíka

dopadnú), pretože kolíky sú všetky rovnaké a z toho dôvodu by mali poskytovať rovnaké podmienky na rozhodovanie sa guľôčky. Problematike uhla odrazu guľôčok sa hlbšie venuje tím ruských vedcov z Moskovskej univerzity v [6].

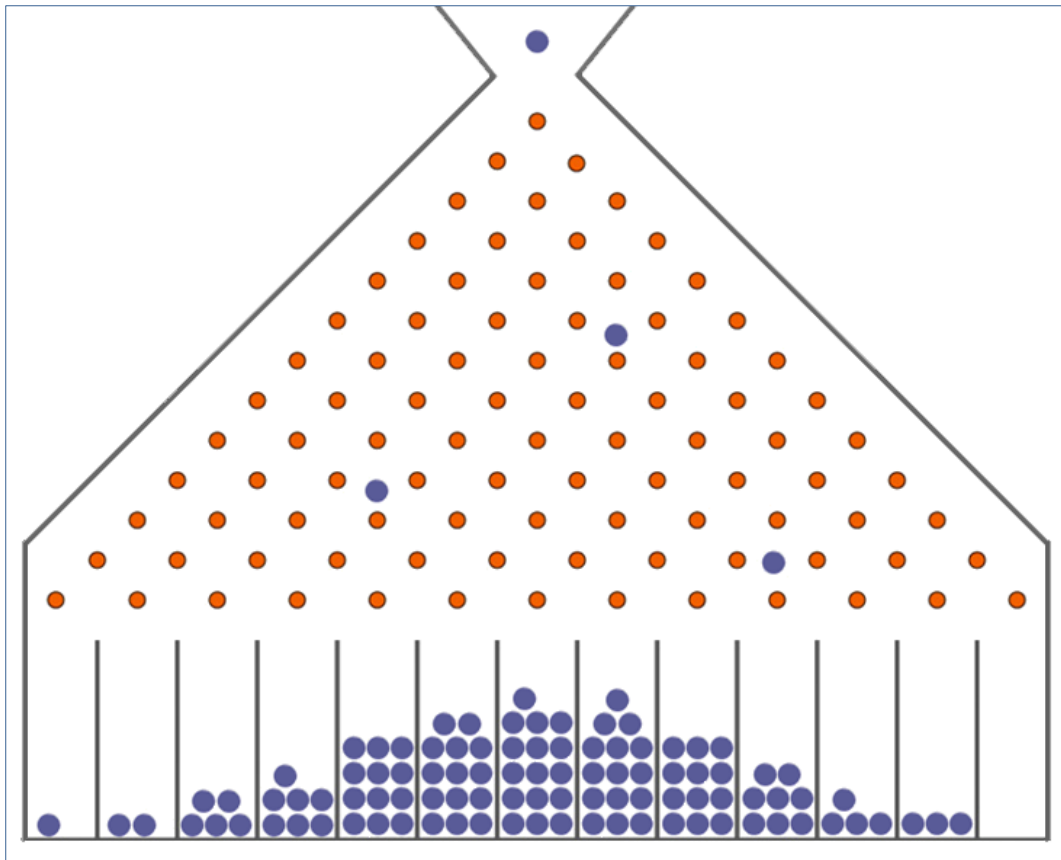
Z predchádzajúceho vyplýva, že pád guľôčky Galtonovou doskou je opakovanie k nezávislých Bernoulliho pokusov, t.j. môžeme hovoriť o binomickom rozdelení. Znamená to, že guľôčky v priečinkoch budú realizáciou náhodnej premennej $\sim Bin(p = 1/2, k)$, pričom p je pravdepodobnosť, že guľôčka padne doprava a k je počet úrovní kolíkov.

Ak sa počet rozhodovaní sa guľôčky, t.j. počet úrovní kolíkov k , a počet guľôčok vhadených do zariadenia n priblížia k nekonečnu, podľa centrálnej limitnej vety bude konečné rozmiestnenie guľôčok v priečinku konvergovať k normálnemu rozdeleniu. Ak teda na experiment použijeme dostatočne veľké množstvo guľôčok, binomické rozdelenie bude konvergovať k normálnemu. Nekonečne veľa guľôčok samozrejme k dispozícii nemáme, avšak pri našom experimente sa uspokojíme s množstvom guľôčok, ktoré sa do skonštruovaného zariadenia zmestí.

Výsledky počítačovej simulácie Kozlova a Mitrofanovej [6] ukázali, že záleží aj na pravdepodobnostnom rozdelení, na základe akého sú guľôčky cez otvor vpúšťané. Ak sú guľôčky, ktoré vhadzujeme do zariadenia, rozdelené normálne, ich distribúcia v priečinkoch nebude konvergovať k normálnemu rozdeleniu, ale k akémusi rozdeleniu s najväčšou koncentráciou guľôčok v krajných priečinkoch. Keďže rovnomerné vhadzovanie guľôčok po ploche otvora zabezpečiť nevieme, predpokladáme, že v našich experimentoch pri veľkom počte guľôčok rozdelenie k normálnemu rozdeleniu konvergovať bude.

Predpoklady, na princípe ktorých sa budeme snažiť zariadenie skonštruovať, budeme hneď po konštrukcii overovať príslušnými štatistickými testami.

3 Konštrukcia zariadenia



Obr.4: Náčrt Galtonovej dosky. Takéto zariadenie budeme konštruovať.

3.1 Príprava konštrukcie

Zariadenie konštruujeme na základe poznatkov z pravdepodobnosti, uvedených v predošlých kapitolách. Okrem teoretických vedomostí k príprave konštrukcie využívame aj materiály dostupné na internete [5], [8], [12] – obrázky či videá už skonštruovaných a fungujúcich Galtonových dosiek. Niektoré stránky uvádzajú aj jednoduchý návod na výrobu tohto zariadenia.

Za základný materiál na výrobu si zvolíme drevo, pretože jeho vlastnosti (povrch dostatočne drsný pre pohyb guľôčky, žiadna alebo minimálna teplotná rozťažnosť, možnosť vŕtania doň a zliepania ho s iným drevom) sa nám zdajú vhodné pre potreby zariadenia. Predmety, ktoré do zariadenia budeme vhadzovať, budú rôzneho tvaru, veľkosti a hmotnosti, čím zabezpečíme rôznorodé výsledky experimentov. Napriek nedokonalosti guľatému tvaru ich v ďalšom pre jednoduchosť budeme nazývať guľôčkami.

3.2 Postupné verzie zariadenia

Konštrukcia nám trvala približne mesiac. Počas tohto obdobia sme zariadenie niekoľkokrát vyrobili, diagnostikovali chyby a rozobrali, aby sme ho skonštruovali lepšie.

Základom projektu bola samotná doska – konštruovať sme sa Galtonovu dosku rozhodli zo 41x41cm veľkej drevenej dosky s hrúbkou približne 2,5 cm. Na dosku sme v ďalšom kroku potrebovali pripevniť kolíky – rozhodli sme sa použiť drevené kolíky valcovitého tvaru s priemerom 0,5 cm a dĺžkou cca 2,5 cm. Kolíky sme na plochu dosky umiestnili do tvaru trojuholníka (Obr.5) tak, že sme začali jedným kolíkom a do každej ďalšej vrstvy sme umiestnili o jeden kolík viac. Spolu sme tak na dosku postavili a lepidlom na drevo prilepili 11 úrovní, t.j. 66 kolíkov. Nazdávali sme sa, že lepidlo na drevo bude k potrebám zariadenia postačujúce, po niekoľkých pokusoch spustiť po zariadení stredne ťažké predmety sa nám však tieto začali odlepovať. Keďže sme chceli skonštruovať robustné zariadenie, ktoré bude odolné voči ťažkým guľôčkam, rozhodli sme sa kolíky do dosky priamo vyvrtáť a až do vyvrtaných dier nalepiť. Vrtaním dier hlbokých cca 1 cm a následným zatĺkaním kolíkov do týchto dier sme dosku (hlbšiu o sotva 1,5 cm) zaťažili, preto sme sa rozhodli ju ešte zozadu podbiť dvoma drevenými latami v horizontálnej polohe.



Obr.5: Kolíky do tvaru trojuholníka. Jeden z prvých pokusov, s už navrtanými kolíkmi. Fotografia je zrnitá z dôvodu pripevnenia fólie namiesto neskôr použitého plexiskla.

pričom posledné takéto rozhodovanie (t.j. posledný Bernoulliho pokus), ktoré absolvujú, bude nie na základe kolíku, ale drevenej priečky. Napriek tomu,

Zatlčenými kolíkmi sme vytvorili 11 úrovní Galtonovej dosky. Poslednú, 12. úroveň predstavujú drevené priečky, ktoré v cca 10 cm dĺžke rozdeľujú dolnú časť dosky na 13 priečinkov. Guľôčky, ktoré budeme vhadzovať do zariadenia, sa tak vo svojej trajektórii dolu Galtonovou doskou budú rozhodovať práve 12-krát,

že v smere pádu guľôčok je medzi kolíkmi a priečkami rozdiel v tvare (priečky sú kvádre napílené z dlhej drevenej laty a kolíky sú valce), obe majú šírku/priemer 0,5 cm, zásadné rozdiely tak medzi Bernoulliho pokusom s kolíkom a kvádom v distribúcii guľôčok v poslednej úrovni už neočakávame.

Trojuholník pozostávajúci z kolíkov je orámovaný drevenou priečkou, takže guľôčky sa môžu pohybovať len v priestore, v ktorom sa nachádzajú kolíky. Zvyšný priestor sme z dôvodu lepšieho vyniknutia oblasti, kadiaľ budú guľôčky padať, namorili tmavočerveným moridlom na drevo. Zhora je trojuholník zúžený do lievika, v ktorom sa ešte nachádza asi 5cm dlhá rúra na zmenšenie otvoru. Spredu sme sa rozhodli dosku uzavrieť plexisklom, okraje upevniť nalepovacími kovovými rámami. Dolu pod priečkami sa nachádza doska (na Obr.6 úplne naľavo), ktorá je vyťahovateľná postupne, aby sa guľôčky dali spočítavať, resp. odvážiť po jednotlivých priečkinkoch. Zozadu je k zariadeniu pripevnený podstavec, ktorý stavia Galtonovu dosku do cca 50° polohy voči zemi (Obr.7). Podstavec sa skladá z drevenej dosky, o ktorú sa zariadenie opiera,



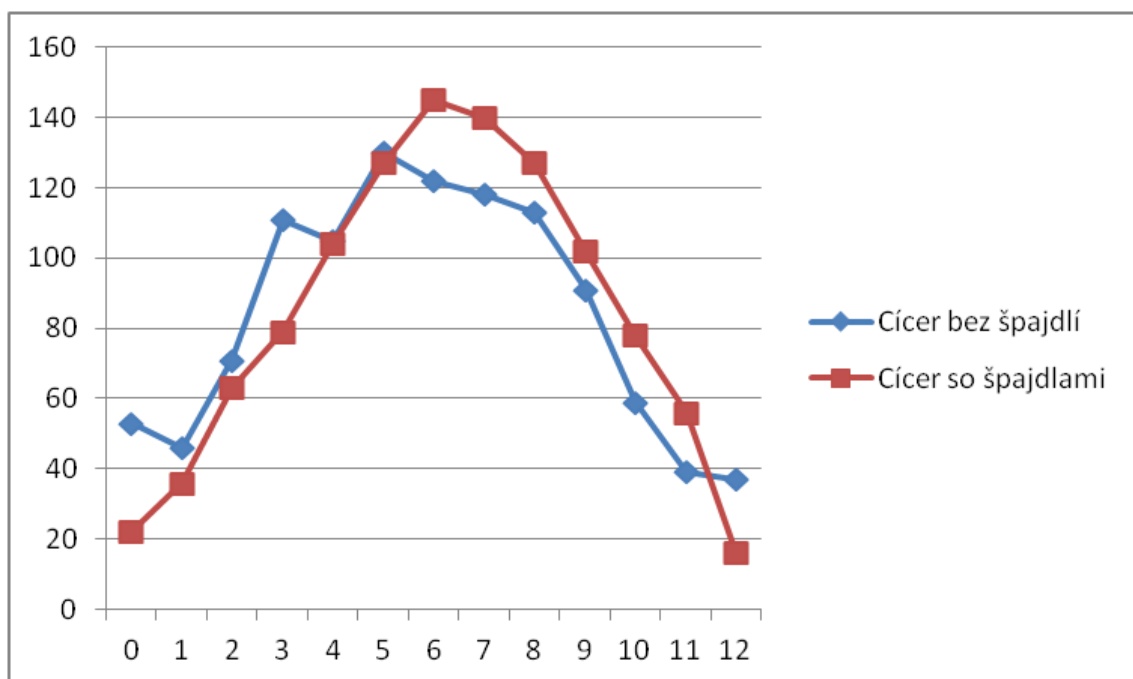
Obr.7: Operadlo Galtonovej dosky.
Zariadenie v najnapruženejšej polohe.



Obr.6: Galtonova doska vo fáze výroby. Už po vyvrtaní dier na kolíky, prilepení priečok a latiek na umožnenie pohybu guľôčky len v priestore, kde sú kolíky.

a koženej šnúry, vďaka ktorej je toto naklonenie polohovateľné. Možnosť zmeniť polohu Galtonovej dosky je výhodná hlavne vtedy, keď robíme experimenty s rôznymi hmotnosťami guľôčok – ťažšie (a gravitáciou viac priťahované) guľôčky sa v menej strmej polohe neskotúľajú okamžite priamo dole, ale budú cestou tiež vrázať do kolíkov.

Doposiaľ sme v konštrukcii spravili len jednu zásadnú chybu – v prípade lepenia kolíkov na dosku namiesto vyvrtavania dier na ich zatlčenie. Pri prvom testovaní hotového zariadenia sme však objavili ďalší nedostatok, plán konštrukcie totiž nepočítal s kĺzavosťou dreva. Tá spôsobila, že ak sa guľôčka (namiesto guľôčok sme na tento experiment použili cícery, podrobné vysvetlenie sa nachádza v ďalšej kapitole) za pomoci kolíkov dostala na okraj trojuholníka raz, namiesto rozhodovania sa v každej ďalšej úrovni mala tendenciu sa už len skotúľať pozdĺž šikmého kraja dolu. Z tohto dôvodu sme sa po diagnostike chyby zariadenie rozhodli opäť rozobrať, a po celej dĺžke drevených priečok (ramenách trojuholníka) sme v úsekoch rovnobežných s úrovňami zvyšných kolíkov namontovali kúsky špajdlí. Tie sú dostatočne úzke na to, aby nevychýlili výsledky našich pokusov, avšak guľôčky popri nich už viac neprechádzali bez povšimnutia a ich distribúcia po priečinkoch začala pripomínať normálne rozdelenie:



Obr.8: So špajdlami a bez nich. Rozdiel medzi výsledkami experimentu s cícerom so špajdlami a bez nich je evidentný. Modrá krivka (bez špajdlí) síce trochu pripomína Gaussovú krivku, avšak ani zďaleka nie tak, ako tá bordová (so špajdlami). Nalepenie špajdlí sa javí ako úspešné vylepšenie zariadenia.

V prvom a poslednom priečinku (teda v tých, v ktorých mali špajdle najviac ovplyvniť vývoj situácie), sa počet cícerov rapídne zmenšil. Nová

krivka pripomína Gaussovú krivku oveľa viac ako predošlá. V ďalšej kapitole sa budeme venovať empirickej analýze správnosti konštrukcie Galtonovej dosky, kde si budeme môcť výpočtami overiť, do akej miery táto zmena naozaj pomohla.



Obr.9: Pohľad do otvorenej Galtonovej dosky. Na obrázku je zariadenie bez spodnej vyberateľnej priečky. Šípky naznačujú špajdle, ktoré sme do zariadenia dolepili.



Obr.10: Experiment so sójovými bôbmi v hotovom zariadení. V tejto fáze sme sa zariadenie rozhodli prehlásiť za pripravené na realizáciu experimentov.

4 Testovanie správnosti konštrukcie

4.1 Realizácia experimentov

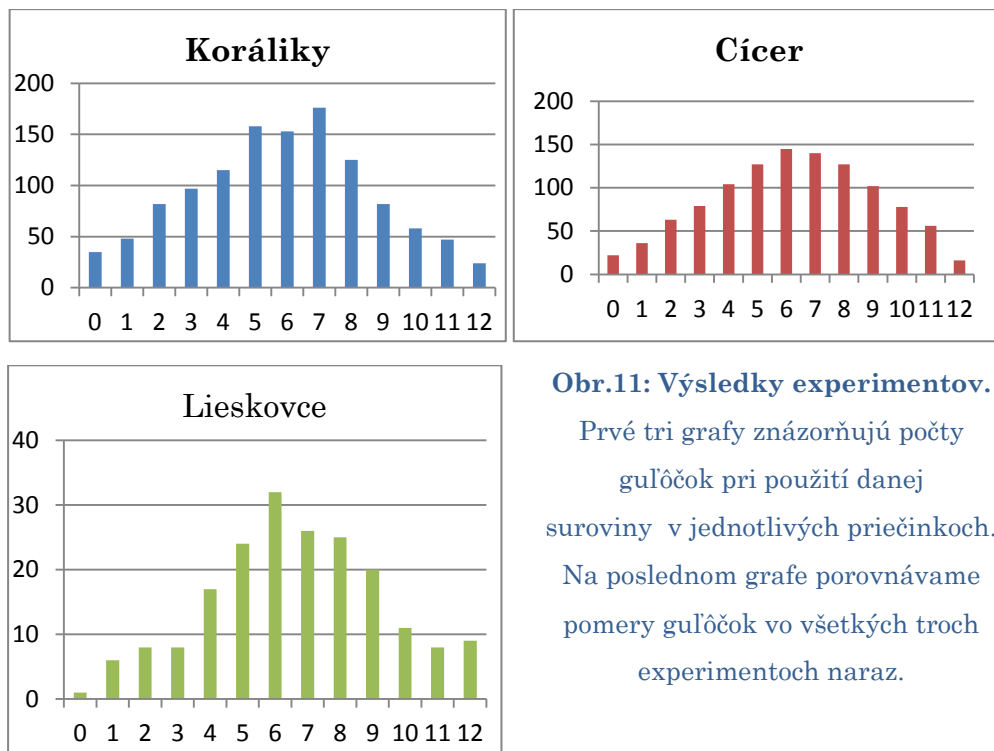
Napriek tomu, že sme pri konštrukcii Galtonovej dosky postupovali striktnie podľa matematických a fyzikálnych vedomostí, keď to bolo možné, nezaručuje nám to, že sa v zariadení nebudú vyskytovať žiadne konštrukčné nepresnosti. Aby sme si overili, čo z teórie sme skutočne dokázali previesť do praxe, potrebujeme Galtonovu dosku otestovať použitím vhodných štatistických testov.

Na testovanie sme použili predmety rôznych tvarov, veľkostí a hmotností. Keďže zariadenie je v zahraničnej literatúre nazývané Bean machine, ako už možno čitateľ postrehol v predchádzajúcej kapitole, otestovali sme ho aj použitím rôznych bôbov – sójových (Obr.10) či cícerových. Tieto predmety však naďalej pre jednoduchosť budeme vo všeobecnom prípade nazývať guľôčkami. Merania sme sa rozhodli uskutočniť s tromi rôznymi druhmi “guľôčok” – sklenenými korálikmi

s priemerom cca 0,5cm, cícermi a lieskovými orechmi; počet guľôčok v experimente je n . Po realizácii experimentov výsledky použitím rôznych metód aj rôznych vhadzovaných predmetov porovnáme. Tabuľka a grafy výsledkov experimentu:

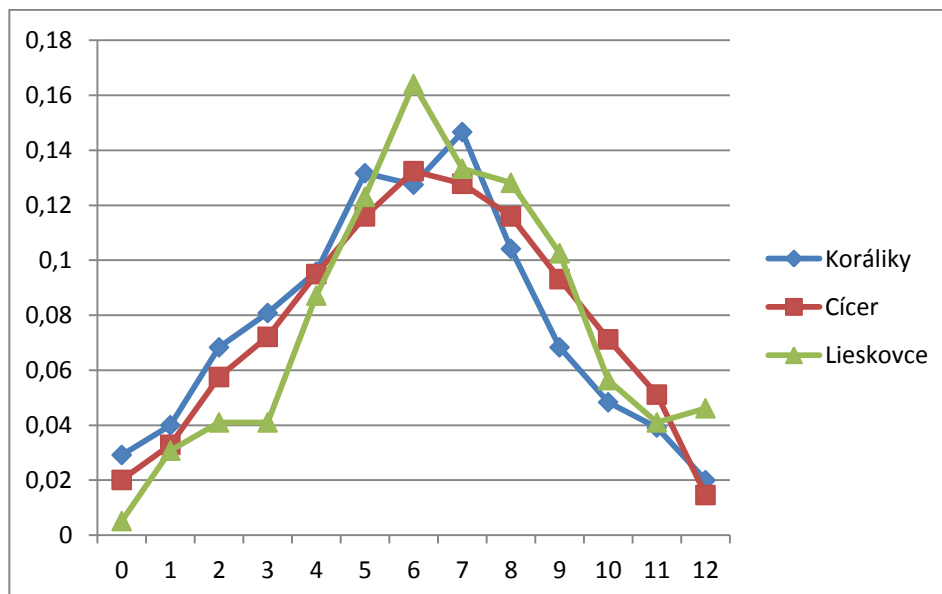
Priečinok	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	n
Koráliky	35	48	82	97	115	158	153	176	125	82	58	47	24	1200
Cícer	22	36	63	79	104	127	145	140	127	102	78	56	16	1095
Lieskovce	1	6	8	8	17	24	32	26	25	20	11	8	9	195

Tab.1: Počty guľôčok v priečinkoch.



Obr.11: Výsledky experimentov.

Prvé tri grafy znázorňujú počty guľôčok pri použití danej suroviny v jednotlivých priečinkoch. Na poslednom grafe porovnáваме pomery guľôčok vo všetkých troch experimentoch naraz.



Pozn.: V tabuľke sú priečinky označené od 0 po 12 podľa toho, koľkokrát musela ísť guľôčka doprava, aby skončila v danom priečinku. Znamená to, že napr. do priečinku “0” padli len guľôčky, ktoré pri náraze o kolík v žiadnej úrovni nepokračovali doprava, do priečinku “5” padli tie, ktoré sa 5-krát odrazili od kolíka doprava a “12” tie, ktoré boli pri každom kolíku odchýlené do pravej strany.

Pozn.2: Počet korálikov a cícerov v experimentoch bol vyše 1000 a rádovo podobný, počet lieskovcov bol neporovnateľne menší. Je to tak preto, že celý experiment sa robil naraz a korálikov či cícerov sa do Galtonovej dosky pochopiteľne zmestilo naraz viac. Uvedomujeme si, že pri pomerne postačujúcom množstve korálikov a cícerov sme mohli v prípade lieskovcov zvoliť taktiku opakovaného experimentu so sčítavaním orieškov v priečinkoch, avšak dáta získané aj z rozdelenia 195 lieskovcov (čo nie je pre pokus nepostačujúco málo), nasvedčujú tomu, že pri takýchto veľkých predmetoch už nie je jedno, či sú symetrické alebo nie. Keďže oriešky sa počas pádu do priečinku navyše štiepili a zasekávali, rozhodli sme sa experiment už neopakovať. Opačný efekt by mohol nastať napr. s pieskom, ktorého „guľôčky“ sú naopak príliš malé – od kolíkov by sa neodrážal vôbec, len by padol rovno smerom dole. Porovnávať teda budeme hlavne prvé dve merania, ktoré sú podľa nás relevantnejšie.

Parametre, ktoré používame vo výpočtoch:

k – počet úrovní Galtonovej dosky resp. počet nezávislých opakovaní pokusu,
 $k = 12$

p – pravdepodobnosť, že sa guľôčka odrazí doprava

n – počet guľôčok v experimente

R_i – náhodná premenná, ktorá vyjadruje počet guľôčok v i -tom priečinku,
 $i \in \{0, \dots, 12\}$

n_i – realizácia náhodnej premennej R_i , $i \in \{0, \dots, 12\}$, platí, že: $\sum_{i=0}^k n_i = n$

X_i – náhodná premenná vyjadrujúca, koľkokrát išla i -ta guľôčka doprava, X_i sú nezávislé rovnako rozdelené náhodné premenné $\sim Bin(12, p)$,
 $i \in \{0, \dots, n\}$

4.2 Odhad parametra p

Pri experimentálnom overovaní správnej funkčnosti zariadenia sa v prvom rade zameriame na odhad parametra p , teda pravdepodobnosti, že parameter $p = 1/2$ (t.j. že guľôčka sa pri každom údere o kolík rozhodne ísť doľava rovnako často, ako doprava). Odhady rozdelíme na bodové, kde z experimentálnych dát vypočítame výberový parameter p ako jeden bod (metóda momentov či maximálnej vierohodnosti) a intervalové, kde nám test ukáže, v akom intervale sa parameter p pohybuje.

4.2.1 Bodový odhad

4.2.1.1 Metóda maximálnej vierohodnosti

Odhad parametra metódou maximálnej vierohodnosti je podľa nameraných údajov y riešením maximalizačnej úlohy:

$$\hat{p} = \arg \max L(y, p). [2]$$

Hľadáme teda hodnotu parametra p , pri ktorej bude výsledok získaný z našich experimentálnych dát y čo najpravdepodobnejší. [3]. Výpočet sa bude skladať z dvoch častí – v prvej vyjadríme vierohodnostnú funkciu, v druhej ju maximalizujeme. Predpokladajme, že rozmiestnenie guľôčok v priečinkoch zodpovedá binomickému rozdeleniu $\sim Bin(k, p)$. Vierohodnostná funkcia bude mať nasledovný tvar:

$$L(p) = P[\text{dostali sme experimentálne dáta}]$$

guľôčky sú navzájom nezávislé, takže veľkú zátvorku si hneď môžeme rozpísať na:

$$L(p) = P(R_0 = n_0)P(R_1 = n_1) \dots P(R_{12} = n_{12}),$$

$$L(p) = P(X = 0)^{n_0} P(X = 1)^{n_1} \dots P(X = 12)^{n_{12}}$$

Po úpravách dostávame

$$L(p) = \left[\binom{12}{0} p^0 (1-p)^{12} \right]^{n_0} \left[\binom{12}{1} p^1 (1-p)^{11} \right]^{n_1} \dots \left[\binom{12}{12} p^{12} (1-p)^0 \right]^{n_{12}}$$

$$L(p) = cp^M (1-p)^N$$

pri použití nasledovných substitúcií:

$$c = \prod_{i=1}^{12} \binom{12}{i}^{n_i}$$

$$M = 0n_0 + 1n_1 + \dots + 12n_{12}$$

$$N = 12n_0 + 11n_1 + \dots + 0n_{12}.$$

Získanú vierohodnostnú funkciu maximalizujeme

$$L'(p) = c[Mp^{M-1}(1-p)^N - p^M N(1-p)^{N-1}] = 0$$

a dostávame maximálne vierohodný odhad

$$p_{MVO} = \frac{M}{M+N}.$$

4.2.1.2 Metóda momentov

Binomické rozdelenie má dva parametre, a tak budeme p odhadovať pomocou prvého a druhého momentu - strednej hodnoty $E[X]$ a variancie $Var[X]$. Čím vyššia mocnina (vyšší stupeň momentu), tým komplikovanejšie by sa odhad počítal, a zároveň by bol tým nepresnejší [1]. Vyberieme dva rôzne spôsoby odhadu parametra p pomocou prvých dvoch výberových momentov získaných na základe experimentov.

1. Prvý moment – Stredná hodnota: Pre binomické rozdelenie $\sim Bin(k, p)$ je teoretická stredná hodnota definovaná ako $E[X] = kp$. Keďže parameter p nepoznáme a chceme odhadnúť, na výpočet použijeme výberovú strednú hodnotu:

$$\bar{X} = kp \Rightarrow \hat{p} = \frac{1}{nk} \sum_{i=0}^n X_i$$

Jednoduchou úpravou rovnice si odvodíme, že odhad parametra p pomocou prvého momentu vypočítame ako pomer aritmetického priemeru polohy guľôčok (\bar{X}) a počtu úrovní Galtonovej dosky (12).

2. Prvé dva momenty: Stredná hodnota a variancia: Pri výpočte druhého momentu využijeme vedomosť o prvých dvoch momentoch binomického rozdelenia

$$\frac{Var[X]}{E[X]} = \frac{kp(1-p)}{kp} = 1-p$$

Odhad parametra p podľa druhého momentu binomického rozdelenia vypočítame ako

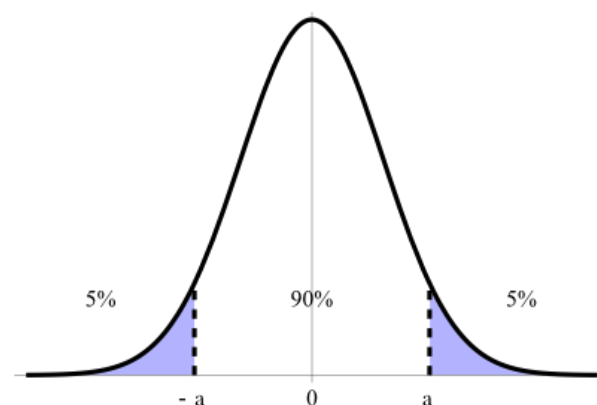
$$\hat{p} = 1 - \frac{Var[X]}{E[X]} = 1 - \frac{\frac{1}{n-1} \sum_{i=0}^n (X_i - \bar{X})^2}{\frac{1}{n} \sum_{i=0}^n X_i}$$

kde sme $\frac{1}{n-1}$ vo výberovej variancii použili, aby bol odhad nevychýlený. Odhadnuté parametre porovnáme s odhadom metódou maximálnej vierohodnosti.

4.2.2 Intervalový odhad

4.2.2.1 Intervaly spoľahlivosti

Na ohraňenie intervalu, v ktorom sa podľa našich experimentálnych



Obr.12: 90% interval spoľahlivosti.

dát parameter p nachádza, použijeme obojstranný intervalový odhad so spoľahlivosťou $1-\alpha$. Zvolíme si $\alpha = \{0.1, 0.05, 0.001\}$, čím získame 90%, 95% a 99.9% interval spoľahlivosti.

V praxi to znamená, že odvodíme štatistiku, na základe ktorej vieme

s $(1-\alpha)\%$ pravdepodobnosťou povedať, v akých hodnotách sa pohybuje parameter p .

Z centrálnej limitnej vety vieme, že pri dostatočne veľkom počte nezávislých rovnako rozdelených guľôčok bude ich rozdelenie v priechinkoch tiež približne normálne, preto pri intervalovom odhade môžeme použiť štatistiku L a U (lower – dolné a upper – horné ohraničenie intervalu spoľahlivosti) štandardizovaného normálneho rozdelenia $\sim N(0,1)$. Platí:

Priemerná poloha dopadu guľôčky:

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$$

Stredná hodnota binomického rozdelenia:

$$E[\bar{X}] = kp$$

Variancia binomického rozdelenia:

$$Var[\bar{X}] = \frac{kp(1-p)}{n}$$

Túto premennú môžeme štandardizovať na premennú Z_n , $E[Z_n] = 0$, $Var[Z_n] = 1$ tak, že:

$$Z_n = \frac{\bar{X}_n - kp}{\sqrt{\frac{kp(1-p)}{n}}} = \frac{\frac{\bar{X}_n}{k} - p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{nk}}}$$

kde $\frac{\bar{X}}{k} \in [0,1]$ je priemerná relatívna poloha guľôčky v priechinku, kde 0 zodpovedá ľavému a 1 pravému priechinku, zistená z experimentálnych dát. Pre $n \rightarrow \infty$ sa podľa centrálnej limitnej vety $Z_n \sim N(0,1)$, preto môžeme aproximovať interval spoľahlivosti pomocou normálneho rozdelenia:

$$P\left(-z_{\alpha/2} < \frac{\frac{\bar{X}}{k} - p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{nk}}} < z_{\alpha/2}\right) \approx 1 - \alpha \quad [2]$$

kde z_β je kvantil štandardizovaného normálneho rozdelenia definovaný

$$z_\beta = P(Z > B) = \int_B^\infty f_z(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}$$

kde $Z \sim N(0,1)$. Zjednodušené

$$\left(\frac{\bar{X}}{k} - p\right)^2 < \frac{p(1-p)}{nk} (z_{\alpha/2})^2$$

Do nerovnice si za $z_{\alpha/2}$ dosadíme tabuľkovú hodnotu štatistiky a vypočítame kvadratickú rovnicu. Jej koreňmi budú dolné a horné ohraničenie intervalu, ktorý sme si zvolili.

4.2.3 Porovnanie výsledkov experimentov

Odhad parametra p sme za pomoci uvedených metód vypočítali pre každý z našich troch experimentov. V nasledujúcej časti práce ich porovnáme a pokúsime sa odôvodniť.

Maximálne vierohodné odhady:

$$p_{MVO-koráliky} = \frac{7026}{7026 + 7374} \approx 0.4879$$

$$p_{MVO-cícer} = \frac{6822}{6822 + 6318} \approx 0.5192$$

$$p_{MVO-lieskovce} = \frac{1294}{1294 + 1046} \approx 0.5530$$

Rozdiel maximálne vierohodných odhadov a požadovaného parametra $p = 1/2$ sa odlišuje podľa typu guľôčok. V prípade experimentu s korálikmi je najmenší – od 50% sa 48.79% odlišuje len o 1.21%. Experiment s cícerom taktiež ukázal pomerne zanedbateľnú odchýlku od $1/2$ - parameter p je rovný 0.5192, čo je o necelé dve stotiny viac, ako sme chceli dosiahnuť (0.0192). Za povšimnutie stojí skutočnosť, že koráliky sa odrážali s väčšou pravdepodobnosťou doľava ($p_{MVO-koráliky} < 1/2$), pričom cícery sa častejšie odklňali do pravej strany ($p_{MVO-cícer} > 1/2$). Keďže ani jeden zo smerov nie je predmetmi v Galtonovej doske preferovaný, znamená to, že zariadenie nie je naklonené do jednej ani druhej strany. Na základe týchto výsledkov môžeme usudzovať, že ideálna veľkosť (taká, ktorá by pri veľkom n dosiahla

parameter $p = 1/2$) guľôčok pri podobnej hmotnosti na experiment s Galtonovou doskou je niekde medzi sklenenými korálikmi a bôbmi cíceru.

Experiment s lieskovcami dopadol menej presne, vidíme, že náš odhad sa od ideálneho odlišuje o vyše 10%: $\hat{p} = p + 0.0530$. Tento rozdiel však môže byť spôsobený už spomínaným rozdielom v počte lieskovcov použitých na experiment. Nazdávame sa však, že podiel na nepresnosti má aj tvar lieskovcov, ktorý je v porovnaní s korálikmi (t.j. guľôčkami s dierou) resp. cícermi menej symetrický.

Odhady momentovou metódou:

1. Prvý moment:

$$p_{M1.-koráliky} = \frac{7026}{12 * 1200} \approx 0.4879$$

$$p_{M1.-cícer} = \frac{6822}{12 * 1095} \approx 0.5192$$

$$p_{M1.-lieskovce} = \frac{1294}{12 * 195} \approx 0.5530$$

Pozornému čitateľovi neunikne, že maximálne vierohodné odhady parametra p sa zhodujú s odhadmi pomocou prvého momentu. Prečo je to tak?

Treba si uvedomiť, že odhad pomocou metódy maximálnej vierohodnosti je vlastne vypočítaný ako

$$p_{MVO} = \frac{M}{M + N}, \quad kde$$

$$M = 0n_0 + 1n_1 + \dots + 12n_{12}$$

$$N = 12n_0 + 11n_1 + \dots + 0n^{12}, \text{ t.j.}$$

$$M + N = 12n_0 + 12n_1 + \dots + 12n_{12} = 12n = kn;$$

pri odhade prvého momentu používame vzorec $= \frac{1}{nk} \sum_{i=0}^k X_i \Rightarrow$ menovateľ zlomkov je rovnaký. Čitateľ je však zhodný tiež:

$\sum_{i=0}^k X_i$, kde každé z čísel od 0 po 12 sčítavame toľkokrát, koľko guľôčok je v danom priečinku, platí teda

$$\sum_{i=0}^k X_i = 0n_0 + 1n_1 + \dots + 12n_{12} = M.$$

Odhad parametra p metódou maximálnej vierohodnosti je zhodný s odhadom pomocou prvého momentu.

2. Prvé dva momenty:

$$p_{M2.-koráliky} = 1 - \frac{\frac{9618.77}{1199}}{5.855} \approx -0.3702$$

$$p_{M2.-cícer} = 1 - \frac{\frac{8686.0055}{1094}}{6.2301} \approx -0.2744$$

$$p_{M2.-lieskovce} = 1 - \frac{\frac{1405.1487}{194}}{6.6359} \approx -0.0915$$

Vidíme, že odhady podľa druhého momentu binomického rozdelenia nie sú veľmi presné, všetky pravdepodobnosti vychádzajú záporné a preto ich nevieme použiť ako vhodné odhady parametra p .

Intervaly spoľahlivosti:

90%-ný, t.j. $z_{\alpha/2} = 1.645$ (z tabuliek)

$$\left(\frac{7026}{12 * 1200} - p\right)^2 < \frac{p(1-p)}{12 * 1200} (1.645)^2 \Rightarrow p_{koráliky: \alpha=10\%} \in (0.4811; 0.4948)$$

$$\left(\frac{6822}{12 * 1095} - p\right)^2 < \frac{p(1-p)}{12 * 1095} (1.645)^2 \Rightarrow p_{cícer: \alpha=10\%} \in (0.5120; 0.5263)$$

$$\left(\frac{1294}{12 * 195} - p\right)^2 < \frac{p(1-p)}{12 * 195} (1.645)^2 \Rightarrow p_{lieskovce: \alpha=10\%} \in (0.5360; 0.5698)$$

95%-ný, $z_{\alpha/2} = 1.96$

$$\left(\frac{7026}{12 * 1200} - p\right)^2 < \frac{p(1-p)}{12 * 1200} (1.96)^2 \Rightarrow p_{koráliky: \alpha=5\%} \in (0.4798; 0.4961)$$

$$\left(\frac{6822}{12 * 1095} - p\right)^2 < \frac{p(1-p)}{12 * 1095} (1.96)^2 \Rightarrow p_{cícer: \alpha=5\%} \in (0.5106; 0.5277)$$

$$\left(\frac{1294}{12 * 195} - p\right)^2 < \frac{p(1-p)}{12 * 195} (1.96)^2 \Rightarrow p_{lieskovce: \alpha=5\%} \in (0.5328; 0.5730)$$

99.9%-ný, $z_{\alpha/2} = 3.291$

$$\left(\frac{7026}{12 * 1200} - p\right)^2 < \frac{p(1-p)}{12 * 1200} (3.291)^2 \Rightarrow p_{koráliky: \alpha=0.1\%} \in (0.4742; 0.5016)$$

$$\left(\frac{6822}{12 * 1095} - p\right)^2 < \frac{p(1-p)}{12 * 1095} (3.291)^2 \Rightarrow p_{cicer: \alpha=0.1\%} \in (0.5047; 0.5334)$$

$$\left(\frac{1294}{12 * 195} - p\right)^2 < \frac{p(1-p)}{12 * 195} (3.291)^2 \Rightarrow p_{lieskovce: \alpha=0.1\%} \in (0.5190; 0.5865)$$

Výpočet ukázal, že jedine v 99.9% intervale spoľahlivosti pre experiment s korálikmi sa parameter p pohybuje v rozmedzí, kde by mohol nadobúdať hodnotu $1/2 = 50\%$. Zvyšné dva odhady s korálikmi či cícermi sa k 50% približujú, v prípade korálikov je to vždy aspoň $\approx 49\%$ a v prípade cícerov $\approx 51\%$. Pri výpočte odhadu p z experimentu s lieskovcami sa potvrdili naše počiatočné obavy, okrem 99.9% IS je tu parameter $p > 53\%$.

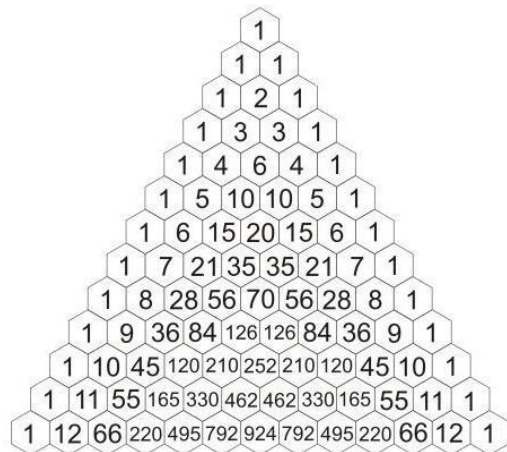
Metóda	Koráliky	Cícer	Lieskovce
MVO=1.MM	0.4879	0.5192	0.5530
2.MM	-0.3702	-0.2744	-0.0915
IS pre $\alpha=0.01\%$	$p \in (0.4742, 0.5016)$	$p \in (0.5047, 0.5334)$	$p \in (0.5190, 0.5865)$
IS pre $\alpha=5\%$	$p \in (0.4798, 0.4961)$	$p \in (0.5106, 0.5277)$	$p \in (0.5328, 0.5730)$
IS pre $\alpha=10\%$	$p \in (0.4811, 0.4948)$	$p \in (0.5120, 0.5263)$	$p \in (0.5360, 0.5698)$

Tab.2: Výsledky odhadu parametra p rôznymi metódami.

4.3 Testovanie

pravdepodobnostného rozdelenia

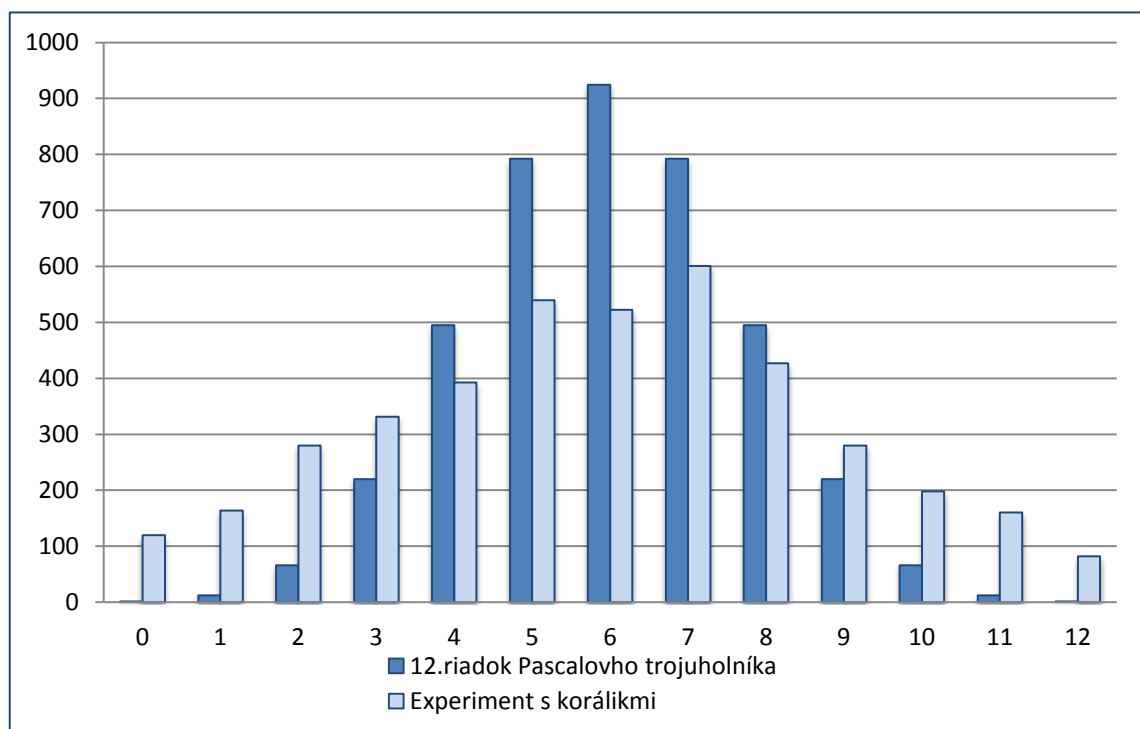
Distribúcia guľôčok v priečinkoch dokonale zostrojenej Galtonovej dosky (takej, ktorá má parameter p rovný $1/2$) je v ideálnom prípade modelovaná binomickým rozdelením.



Obr.13: Pascalov trojuholník.

Za ideálny prípad pokladáme ten, v ktorom sme zrealizovali nekonečný počet pokusov a nakoniec spriemerovali získané hodnoty. Tieto by mali byť násobkom čísel v k -tom riadku Pascalovho trojuholníka, kde k je počet úrovní Galtonovej dosky.

V skutočnosti sa však naše meranie binomickému rozdeleniu až tak nepodobalo:



Obr.:14 Porovnanie počtov 12.riadku Pascalovho trojuholníka a korálikov v priečinkoch. Experimentálne dáta majú ťažšie chvosty ako skutočné binomické rozdelenie.

Experimentálne rozdelenie guľôčok do priečinkov je v porovnaní so skutočným binomickým rozdelením s parametrom $k = 12$ akoby plochejšie, viac guľôčok padlo do priečinkov vzdialenejších od stredu. Znamená to, že rozdelenie má tzv. ťažšie chvosty.

Špicatosť (kurtosis), charakteristika normálneho rozdelenia alebo tiež 4.moment rozdelenia určuje, ako veľmi sa testované rozdelenie podobá na normálne. Normované normálne rozdelenie má koeficient špicatosti nulový,

naše experimentálne rozdelenie má záporný koeficient špicatosti. Naše rozdelenie je teda špicatejšie ako normálne.

5 Využitie pomôcky na vyučovaní

Keďže Galtonova doska veľmi dobre demonštruje niekoľko pravdepodobnostných rozdelení a vzťahov medzi nimi, okrem vedeckého má aj didaktické využitie. V pedagogickej literatúre [4] sme sa stretli s pojmom konštruktivizmus, označujúcim teoretický smer, v ktorom sa poznanie vytvára ako dôsledok aktívneho zapájania sa do procesu učenia sa. Medzi takúto aktívnu spoluúčasť na vlastnom poznaní môžeme zaradiť aj učenie spojené s názornými ukázkami preberanej problematiky, do ktorého vyučovacie hodiny pravdepodobnosti a štatistiky s Galtonovou doskou nepochybne spadajú.

Americká štúdia [9] zaoberajúca sa konštruktivistickým učením uvádza výsledky, v ktorých tí talentovanejší študenti bez problémov učivo pochopia akýmkoľvek prednášaným spôsobom, avšak slabším študentom do významnej miery niektoré vyučovacie metódy pomáhajú viac a iné menej. Medzi metódy, ktorými sa menej talentovaní žiaci učia rýchlejšie, zaradili aj vizuálne pomôcky na vyučovaní [9].

Dôvodov, prečo si myslíme, že práca s Galtonovou doskou pomôže študentom rýchlejšie a viac do hĺbky pochopiť celú škálu matematických fenoménov, je niekoľko. Poprvé, vďaka názorným ukázkam si študenti budú preberané učivo vedieť lepšie predstaviť. Podruhé, osobné skúsenosti s odbornou pomôckou im pomôžu prehľbiť/upevniť si vedomosti. Potretie, pozitívne hodnotíme aj fakt, že si žiaci budú môcť namerať vlastné experimentálne dáta k štatistickej analýze.

Niekoľko aktivít, ktoré je pre lepšie pochopenie vysokoškolského učiva možné s Galtonovou doskou realizovať, sme uviedli aj v tejto práci. Okrem nami vyskúšaných experimentov môžu žiaci napr. overovať, aké rozdiely budú v distribúcii guľôčok v priechinkoch pri rôznych nakloneniach

zariadenia, či už vertikálnych alebo horizontálnych. Pokus môže byť základom k problematike šikmosti či špicatosti normálneho rozdelenia. Ďalej môžu žiaci overovať, ako vplýva na konečné rozdelenie guľôčok ich samostatné vpúšťanie (t.j. že ich tam nehádzeme naraz, a teda zvýšime pravdepodobnosť, že pokusy sú navzájom naozaj nezávislé). Pozoruhodné výsledky môže priniesť aj experiment s predmetmi veľmi odlišnými od guľôčok.

Záver

Bakalárska práca je konštrukčného charakteru – po teoretickom úvode do problematiky nasleduje praktická, konštrukčná časť. Práca pokračuje analýzou funkcionality skonštruovaného zariadenia a námetmi na výučbu pravdepodobnosti a štatistiky na vysokých školách.

Galtonova doska je nástrojom na simuláciu Bernoulliho, binomického a normálneho rozdelenia v pravdepodobnosti. Vzťah medzi binomickým a normálnym rozdelením je popísaný centrálnou limitnou vetou. V prvej kapitole práce sme tieto pojmy vysvetlili, a ďalšie úvahy sme stavali na ich základe.

V druhej kapitole sme znalosti z pravdepodobnostných rozdelení aplikovali na Galtonovu dosku. Následne sme navrhli a zrealizovali konštrukciu zariadenia. V tej sme diagnostikovali chybu – guľôčky mali pozdĺž hraničnej dosky tendenciu namiesto odrazov v ďalších úrovniach skĺzavať priamo dole, preto sme sa zariadenie rozhodli rozobrať. Na hraničnú dosku sme podľa výšky kolíkov v jednotlivých úrovniach pripevnili špajdle, ktoré spôsobili, že guľôčky sa v prípade odrazenia na hraničnú dosku nezošmykli, ale pokračovali odrazmi ďalej. To, že sa kvalita zariadenia zlepšila, sme usúdili nielen podľa vizuálneho dojmu, ale aj na základe experimentov realizovaných pred a po umiestnení špajdlí.

Po dokončení verzie zariadenia, ktorú sme sa rozhodli prehlásiť za finálnu, sme zrealizovali experimenty s rôznymi veľkosťami, tvarmi a hmotnosťami „guľôčok“. Experimentálne dáta sme analyzovali metódami matematickej štatistiky – odvodili sme vzorec na výpočet metódy maximálnej vierohodnosti, momentových metód a intervalov spoľahlivosti. Tieto nám slúžili na odhad parametra p , ktorého hodnotu $1/2$ sme sa konštrukciou snažili dosiahnuť. Odhady parametra p pre rôzne guľôčky sme

porovnali najskôr vizuálne, metódou maximálnej vierohodnosti a pomocou prvého momentu. Najplynulejšia bola krivka výsledkov experimentu s cícermi, výsledky najbližšie $1/2$ sme však dosiahli experimentom s korálikmi ($p = 0.4879$). Ani spomínané cícery sa od želanej $1/2$ neodlišovali viac ako o 0.02 – dosiahli $p = 0.5192$, lieskovce sa od $1/2$ odlišovali o 0.0530 . Dokázali sme si, že metódou maximálnej vierohodnosti pre binomické rozdelenie dosahujeme v prípade Galtonovej dosky rovnaké výsledky ako pomocou metódy prvého momentu. Intervalmi spoľahlivosti sme odhadli 90%, 95% aj 99.9% intervaly – jedine v intervale parametra p experimentu s cícerom sa nachádzala $1/2$, avšak aj to len pri $\alpha=0.01\%$. Kombináciou metódy prvého a druhého momentu sme získali záporný parameter p . Odhad pri vyšších momentoch býva občas nepresný, výsledok sme ďalej neanalyzovali. V závere kapitoly sme porovnaním experimentu s cícerom so skutočným binomickým rozdelením zistili, že experimentálne dáta majú ťažšie chvosty.

V poslednej kapitole sme vymenovali niekoľko prác venujúcich sa konštruktivistickému výučbe, na základe ktorých sme chceli poukázať na dôležitosť Galtonovej dosky vo vysokoškolskom vyučovacom procese. Okrem realizovaných experimentov sme čitateľovi navrhli niekoľko ďalších štatistických aktivít s Galtonovou doskou.

Autorke práca pomohla prehĺbiť si poznatky z pravdepodobnosti a štatistiky, ktoré si mala možnosť overiť v praxi. Na základe vlastných experimentálnych dát sa popri vedomostnom základe naučila aj používať niekoľko štatistických metód. Prínosom bola tiež výzva vysvetliť čitateľom pochopené skutočnosti.

Práca je vďaka podrobnému vysvetleniu postupov a niekoľkým námetom na vyučovacie hodiny vhodná ako pre pedagogické potreby, tak aj pre samoštúdium potenciálnych záujemcov o matematickú štatistiku. Galtonova doska je aj z týchto príčin darovaná Katedre aplikovanej matematiky a štatistiky, Fakulte matematiky, informatiky a štatistiky Univerzity Komenského, kde nepochybne nájde svoje uplatnenie.

Použitá literatúra

- [1] Bodová, K., osobná komunikácia, FMFI UK, Bratislava, 2011
- [2] Dekking, F.M., Kraaikamp, C.: *A Modern Introduction to Probability and Statistics*, Springer, Springer, USA, 2005
- [3] Grinstead, Ch.M., Snell, J.L.: *Introduction to probability*, American Mathematical Society, Rhode Island, USA, 1997
- [4] Hejný, M., Novotná, J.: *Dvacet pět kapitol z didaktiky matematiky*, Univerzita Karlova v Praze, Pedagogická, Praha, Česká republika, 2004
- [5] IFA.tv – *Probability Machine, Galton Board, Randomness and Fair Price Simulator*, video dostupné na internete 31.1.2012:
<http://www.youtube.com/watch?v=AUSKTK9ENzg>
- [6] Kozlov, V.V., Mitrofanova, M. Yu.: *Galton Board*, dostupné na internete 3.12.2011:
http://www.turpion.org/php/full/getFT.phtml/rd_8_431.pdf?journal_id=rd&paper_id=255&agree=on&tpdfn=rd_8_431&x=71&y=13
- [7] Janková, K., Pázman, A.: *Pravdepodobnosť a štatistika*, Univerzita Komenského Bratislava, Bratislava, Slovensko, 2011
- [8] Probability demonstration, video dostupné na internete 3.12.2012:
http://www.youtube.com/watch?v=xDIyAOBa_yU
- [9] Solvie, P., Kloek, M.: Using technology tools to engage students with multiple learning styles in a constructivist learning environment. *Contemporary Issues in Technology and Teacher Education*, 7(2), 7-27. University of Minnesota, USA, 2007
- [10] Somorčík, J.: *Štatistické metódy*, prednášky, FMFI UK, Bratislava, 2011
- [11] Strogatz, S.H.: *Nonlinear Dynamics and Chaos: Lab Demonstrations*, dostupné na internete (3.12.2011):
<http://ecommons.cornell.edu/bitstream/1813/97/2/Strogatz%20commentary.pdf>

-
- [12] The Amazing Normal Distribution Function, video dostupné na internete 3.12.2012: http://www.youtube.com/watch?v=xDIyAOBa_yU
- [13] Von Mises, R.: *Probability, statistics, and truth*, str. 169-173, Courier Dover Publications, New York, USA, 1981
- [14] Young, R.M.: *Excursions in Calculus, An Interplay of the Continuous and the Discrete*, The Mathematical Association of America, USA, 1992

Prebraté a upravené obrázky

[Obr.1] Prebraté z: Young, R.M.: *Excursions in Calculus, An Interplay of the Continuous and the Discrete*, The Mathematical Association of America, USA, 1992

[Obr.2] Prebraté z: *Ministry of Education, New Zealand*. Dostupné na internete 2.5.2012: <http://seniorsecondary.tki.org.nz/Mathematics-and-statistics/Glossary/Glossary-page-S>

[Obr.3] Prebraté z: *Domesticating IT*. Dostupné na internete 2.5.2012: <http://www.domesticatingit.com/tag/bell-curve/>

[Obr.4] Prebraté a upravené z: *Optics & Photonics Focus*. Dostupné na internete 2.5.2012:
<http://opfocus.org/index.php?topic=picture&v=13&s=2&p=2>

[Obr.12] Prebraté z: *Wikimedia Commons*. Dostupné na internete 15.5.2012:
http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Confidence_Interval_90P.png

[Obr.13] Prebraté z: *Math Tricks*: Pascalov trojuholník. Dostupné na internete 17.5.2012: <http://mathtricks.org/tag/pascals-triangle/>