

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY



IZOPERIMETRICKÉ NEROVNOSTI A DISKRÉTNĚ
ANALÓGIE

BAKALÁRSKA PRÁCA

2012

Zosia Oravcová

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY

**IZOPERIMETRICKÉ NEROVNOSTI A DISKRÉTNÉ
ANALÓGIE**

BAKALÁRSKA PRÁCA

Študijný program: Ekonomická a finančná matematika
Študijný odbor: 1114 Aplikovaná matematika
Školiace pracovisko: Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky
Vedúci práce: prof. RNDr. Daniel Ševčovič, CSc.



Univerzita Komenského v Bratislave
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

ZADANIE ZÁVEREČNEJ PRÁCE

Meno a priezvisko študenta: Zosia Oravcová
Študijný program: ekonomická a finančná matematika (Jednoodborové štúdium, bakalársky I. st., denná forma)
Študijný odbor: 9.1.9. aplikovaná matematika
Typ záverečnej práce: bakalárska
Jazyk záverečnej práce: slovenský

Názov: Izoperimetrické nerovnosti a diskkrétne analógie

Cieľ: Cieľom práce je analyzovať spojité i diskkrétne analógie izoperimeterických nerovností, ktoré súvisia s optimalizačnou otázkou minimalizácie obvodu pri zachovaní obsahu rovinného útvaru.

Vedúci: prof. RNDr. Daniel Ševčovič, CSc.

Dátum zadania: 16.10.2011

Dátum schválenia: 27.10.2011

doc. RNDr. Margaréta Halická, CSc.
garant študijného programu

.....
študent

.....
vedúci

Pod'akovanie

Ďakujem svojmu školiteľovi prof. RNDr. Danielovi Ševčovičovi, CSc. za cenné rady, ktoré mi poskytol pri tvorbe tejto bakalárskej práce.

Abstrakt v štátnom jazyku

Oravcová, Zosia : Izoperimetrické nerovnosti a diskkrétne analógie [Bakalárska práca], Univerzita Komenského v Bratislave, Fakulta matematiky, fyziky a informatiky, Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky; vedúci: prof. RNDr. Daniel Ševčovič, CSc., Bratislava, 2012, 54 s.

V práci sa zaoberáme izoperimetrickým kvocientom rôznych rovinných uzavretých kriviek. Na úvod uvádzame niektoré základne poznatky matematickej analýzy. V prvej časti počítame izoperimetrický kvocient pre hladké krivky pomocou eliptických parametrických integrálov. Odvodzujeme si vzorce na výpočet elementárnej oblasti a dĺžky pre nie hladké krivky, pomocou ktorých následne počítame ich kvocient. Odvozujeme si predpis na výpočet kvocientu pre hypocykloidu. Na začiatku druhej časti dokážeme izoperimetrickú nerovnosť. Nasleduje numerické počítanie izoperimetrických kvocientov pre snehové kryštály (vločky). Na výpočty používame matematický softvér Matlab.

Kľúčové slová: Izoperimetrický kvocient, Eliptické integrály, Hypocykloida, Vločky

Abstract

Oravcová, Zosia : Isoperimetric inequality and discrete analogies [Bachelor Thesis], Comenius University in Bratislava, Faculty of Mathematics, Physics and Informatics, Department of Applied Mathematics and Statistics; Supervisor: prof. RNDr. Daniel Ševčovič, CSc., Bratislava, 2012, 54 p.

In this work we deal with isoperimetric quotient of different plane closed curves. At introduction, we summarize some fundamentals of mathematic analysis. In the first part we compute isoperimetric quotient for smooth closed curves, using an elliptic parametric integrals. We deduce some formulas which help us to compute an area enclosed by a closed, not smooth curve, and length of this curve. We also deduce formula for computation isoperimetric quotient for hypocycloid . At the beginning of the second part we prove an isoperimetric inequality. Than we calculate izoperimetric quotient for snow crystals (snowflakes). To calculation we using mathematical software Matlab.

Key words: Isoperimetric quotient, Elliptic parametric integrals, Hypocycloid, Snowflakes

Obsah

Úvod	8
1 Izoperimetrická nerovnosť, izoperimetrický kvocient	10
2 Spojité krivky	12
2.1 Elipsa	13
2.2 Hypocykloida	17
2.2.1 Asteroida	17
2.2.2 Hypocykloida(pre $r = 1$)	19
2.3 Cassiniho ovál	24
2.3.1 Lemniskáta	25
2.3.2 "Piškóta"	28
3 Diskrétne Analógie	32
3.1 Dôkaz izoperimetrickej nerovnosti	33
3.2 Vločky	39
Záver	51
Zoznam použitej literatúry	53

Úvod

Izoperimetrický problém, resp. izoperimetrická úloha je známa ľudstvu už po tisícročia. Zo slova izoperimetrický (*izo* -rovnaký, *perimeter* -obvod) možno vytušiť, že ide o úlohu maximalizácie obsahu pri zachovaní obvodu. Prvé počiatky izoperimetrického problému siahajú do antického Grécka, a síce k príbehu kráľovnej Dido a jej problému s vytýčením hraníc. Podľa povesti, Dido utiekla z mesta Tyros (dnešný Súr) do Afriky, po tom, čo jej brat z lakomosti zavraždil manžela. Za poklady svojho muža, ktoré vzala so sebou, mala možnosť kúpiť od libyjského kráľa toľko zeme, koľko sa dá ohraničiť byvolou kožou. Dido dala rozrezať byvoliu kožu na čo najtenšie prúžky, aby mohla ohraničiť čo najväčší kus zeme. Keďže sa nachádzala na pobreží, rozhodla sa pre polkruh.

Keby sme sa vrátili do staroveku a čias obvodovej výmery, ktorou sa evidovali pozemky, rýchlo by sme si asi všimli, že náš obdĺžnikový pozemok je rozlohou menší než susedov štvorcový, hoci obvod a teda aj výmera je rovnaká. Prirodzene by sme teda prišli k otázke: „Spomedzi všetkých útvarov s rovnakým obvodom, existuje nejaký, ktorý má väčší obsah, než všetky ostatné?“

„Bees, then, know just this fact which is useful to them, that the hexagon is greater than the square and the triangle and will hold more honey for the same expenditure of material in constructing each. But we, claiming a greater share of wisdom than the bees, will investigate a somewhat wider problem, namely that, of all equilateral and equiangular plane figures having the same perimeter, that which has the greater number of angles is always greater, and the greatest of them all is the circle having its perimeter equal to them.“

„Včely, vedia len tento fakt, ktorý je užitočný pre ne, že hexagón je väčší ako štvorec (obsahovo) a väčší ako trojuholník a udrží viac medu pri rovnakých nákladoch na konštrukciu. Ale my tvrdíme, že si vieme zobrať väčší podiel z tejto múdrosti ako včely, a síce, že zo všetkých pravidelných mnohoúholníkov majúcich rovnaký obvod, je vždy väčší (mysliac obsahovo) ten, ktorý má väčší počet uhlov a najväčší z nich je kruh.“¹

Pappus of Alexandria (ca 300 A.D)

¹Pozn. Vyššie uvedený, voľne parafrázovaný text si vykladáme nasledovne. Nákladmi na konštrukciu máme na mysli materiál, ktorý včely minú na vytvorenie jednej zložky plástu, čiže jedného plášťa hranola so štvoruholníkovou, trojuholníkovou resp. šesťuholníkovou podstavou.

Môžeme teda povedať, že izoperimetrický problém, indikuje úlohu maximalizácie obsahu plochy, ohraničenej krivkou, pri zachovaní obvodu, alebo tiež minimalizácie obvodu pri zachovaní obsahu, pričom už intuitívne tušíme, že riešením je kružnica.

Existuje veľa zovšeobecnení izoperimetrickej nerovnosti do viacrozmerného priestoru, ako napríklad sféricka izoperimetrická nerovnosť, ktorá porovnáva dĺžku jednoduchej uzavretej krivky na povrchu guľovej plochy s obsahom, ktorý na tejto zakrivenej ploche ohraničuje. Taktiež existuje zovšeobecnenie nerovnosti na povrch v trojrozmernom euklidovskom priestore, a síce spomedzi všetkých jednoduchých uzavretých plôch s daným obsahom povrchu, uzatvára oblasť maximálneho objemu práve guľa. Analogické tvrdenie platí pre Euklidovské priestory akejkoľvek dimenzie. V našej práci sa však týmito zovšeobecneniami zaoberať nebudeme.

Predkladaná bakalárska práca pozostáva z úvodu, 3 kapitol a záveru. V prvej kapitole si povieme o prechode izoperimetrického problému k izoperimetrickej nerovnosti. Hlavne nás však bude zaujímať izoperimetrický kvocient, ktorý prislúcha jednotlivým typom kriviek a ako sa mení spolu s krivkou. Budú nás zaujímať ako spojité, tak i diskrétné analógie, a teda nie hladké krivky a ich kvocienty. Ukážeme, že riešenie izoperimetrického problému pre nie hladké krivky je pravidelný mnohouholník.

Izoperimetrická nerovnosť je pojem veľmi široký, existuje veľa zovšeobecnení do viacrozmerného priestoru. V našej práci sa však budeme zaoberať výhradne izoperimetrickou nerovnosťou v dvojrozmernom priestore, teda v rovine. Je to verzia nerovnosti s ktorou sa stretávame v každodennom živote.

Zámer práce je priblížiť ľuďom bez matematického vzdelania jednoduchý matematický poznatok, ktorý sa vôkol nás vyskytuje a aplikuje neustále. Ako napríklad v prípade včelích plastov, príroda sa skrátka sama zariadi tak, aby to bolo pre ňu energeticky najvýhodnejšie.

1 Izoperimetrická nerovnosť, izoperimetrický kvocient

V úvode sme už uviedli, že izoperimetrický problém je úloha nájsť útvar, ktorý pri danom obvode maximalizuje svoj obsah. Rovnako sme spomenuli, že existuje riešenie tejto úlohy a tým riešením je kružnica, ako neskôr ukážeme. Od izoperimetrického problému k izoperimetrickej nerovnosti prejdeme jednoducho. Ak krivka maximalizujúca obsah, pri danom obvode je kružnica s dĺžkou L , tak obsah maximálnej oblasti je $A = \pi r^2 = \pi \left(\frac{L}{2\pi}\right)^2 = \frac{L^2}{4\pi}$.

Pre každú inú uzavretú krivku dĺžky L platí $A \leq \frac{L^2}{4\pi}$, teda platí nerovnosť $4\pi A \leq L^2$ a analogicky aj nerovnosť $L^2 - 4\pi A \geq 0$. Pre kružnicu a ňou ohraničený kruh platí rovnosť. Keďže je to jediné riešenie, ako neskôr ukážeme, platí rovnosť vtedy a len vtedy, ak ide o kružnicu. Teraz už vieme, že izoperimetrická nerovnosť porovnáva druhú mocninu dĺžky krivky s obsahom ohraničeným danou krivkou.

Izoperimetrický problém môžeme interpretovať tromi spôsobmi. Prvá možnosť: hľadáme spomedzi všetkých uzavretých jednoduchých kriviek s rovnakým obvodom tú, ktorá ohraničuje maximálny obsah. Druhá možnosť je pozrieť sa na to opačne, teda hľadáme spomedzi všetkých uzavretých kriviek s rovnakým obsahom takú, ktorá má minimálny obvod. Nakoniec je tu možnosť tretia, nahradiť izoperimetrický problém analytickou nerovnosťou.

$$4\pi A \leq L^2$$

Na základe doterajších skúseností odvodíme pojem izoperimetrický kvocient. Začneme tradičnou otázkou: "Ktorý spomedzi všetkých tvarov jednoduchých uzavretých kriviek, pri danom obvode dáva najväčší obsah?" Aby sme mohli porovnávať tvary kriviek s rôznymi obvody, obvod každej krivky naškálujeme na hodnotu 1, tak, že týmto obvodom predelíme jej lineárny rozmer. Keďže obsah je priamo umerný štvorcu lineárnej dimenzie, obsah ohraničený krivkou s upraveným obvodom je pôvodný obsah predelený druhou mocninou pôvodného obvodu, asíce $\frac{A}{L^2}$. Teda, pomer obsahu a druhej mocniny obvodu je obsah, ktorý by mala daná krivka, ak by jej obvod bol 1. Ak to spravíme so všetkými krivkami, tak krivka, ktorá bude mať tento pomer najväčší je odpoveďou na našu otázku. Keďže my už ale odpoveď tušíme, maximálna hodnota pomeru bude pre kružnicu, pre ktorú platí:

$$\frac{A}{L^2} = \frac{\pi r^2}{(2\pi r)^2} = \frac{\pi r^2}{4\pi^2 r^2} = \frac{1}{4\pi}$$

Odkiaľ dostávame pomer : $Q = \frac{4\pi A}{L^2}$, ktorý tiež nazývame **izoperimetrický kvocient**.

Bude platiť $\frac{4\pi A}{L^2} \leq 1$, teda všetky ostatné krivky ohraničujú pri rovnakom obvode, menší obsah ako kružnica.

Izoperimetrický kvocient môžeme tiež definovať ako pomer oblasti ohraničenej uzavretou jednoduchou krivkou a oblasti ohraničenej kružnicou. Pre kružnicu je tento pomer 1, pre útvar, ktorý nemá takmer žiadny obsah je tento pomer takmer nula.

Takže čím je kvocient bližšie k jednotke, tým bližšie má tvar krivky ku kružnici, tým je útvar “plnší” a zas naopak čím bližšie je kvocient k nule, tým je krivka “členitejšia” resp. útvar, ktorý sebou vykresľuje je “chudší”.

Pre ilustráciu vypočítame izoperimetrický kvocient pre obdĺžnik, so stranami a, b ($a, b \in R; a \neq b$) jedným aj druhým spôsobom.

Pre obvod a obsah daného obdĺžnika platí : $L = 2(a + b)$; $A = a \cdot b$

Prvý spôsob : cez odvodený pomer

$$Q = \frac{4\pi A}{L^2} = \frac{4\pi ab}{4(a + b)^2} = \frac{\pi ab}{(a + b)^2}$$

.

Druhý spôsob : cez pomer obsahov

Aby sme mohli porovnávať obsahy potrebujeme kruh s rovnakým obvodom ako je náš obdĺžnik, teda musí platiť : $L = 2(a + b) = 2\pi r$

Z toho vyplýva $r = \frac{a + b}{\pi}$

Takže pre obsah platí : $S = \pi r^2 = \pi \left(\frac{a + b}{\pi} \right)^2 = \frac{(a + b)^2}{\pi}$

A teda pomer obsahov je : $\frac{A}{S} = \frac{ab}{\frac{(a + b)^2}{\pi}} = \frac{\pi ab}{(a + b)^2}$.

2 Spojité krivky

Teraz už vieme, že izoperimetrický kvocient nám hovorí o tom, na koľko percent sa daný útvar približuje k riešeniu izoperimetrického problému. Do akej miery maximalizuje svoj obsah. V kapitole "Spojité krivky" sa pozrieme na niekoľko známych uzavretých kriviek a analyticky spočítame ich izoperimetrické kvocienty. Z poznatkov matematickej analýzy viacerých premenných si pripomenieme niekoľko definícií a tvrdení, ktoré budeme neskôr pri výpočtoch používať.

Definícia 2.1 (Definícia regulárneho zobrazenia) *Nech $g : \Omega' \subset \mathbb{R}^N \rightarrow \Omega \subset \mathbb{R}^M$*

$$g(y) = \begin{pmatrix} g_1(y_1, y_2, \dots, y_N) \\ g_2(y_1, y_2, \dots, y_N) \\ \cdot \\ \cdot \\ g_M(y_1, y_2, \dots, y_N) \end{pmatrix}$$

je prosté zobrazenie, pričom $g(\Omega') = \Omega$. Označme Jakobiho maticu

$$g'(y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial y_1}(y) & \frac{\partial g_1}{\partial y_2}(y) & \dots & \frac{\partial g_1}{\partial y_N}(y) \\ \frac{\partial g_2}{\partial y_1}(y) & \frac{\partial g_2}{\partial y_2}(y) & \dots & \frac{\partial g_2}{\partial y_N}(y) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial g_M}{\partial y_1}(y) & \frac{\partial g_M}{\partial y_2}(y) & \dots & \frac{\partial g_M}{\partial y_N}(y) \end{pmatrix}$$

kde $\frac{\partial g_i}{\partial y_j}(y)$, je parciálna derivácia funkcie g_i podľa y_j v bode y .

Nech $I_g(y)$ je determinant z horeuvedenej matice Jakobiho matice, t.j. Jakobián. Ak $I_g(y) \neq 0$ hovoríme, že zobrazenie g je regulárne. Poznamenajme, že v takom prípade je $n \times n$ matica $g'(y)$ invertovateľná.

Veta 2.2 *Nech f je Riemannovsky integrovateľná funkcia na oblasti Ω a nech $g : \Omega' \subset \mathbb{R}^N \rightarrow \Omega \subset \mathbb{R}^N$ je C^1 difeomorfizmus (t.j. g je regulárne). Ak $x = g(y) \in \Omega$, tak*

$$\int_{\Omega} f(x) dx = \int_{\Omega'} f(g(x)) |I_g(y)| dx$$

kde $I_g(y)$ je determinant Jakobiho matice zobrazenia g , t.j. Jakobián.

Z vlastností integrálu vieme, že $\int_{\Omega} 1 dx = |\Omega|$, teda ak za $f(x)$ dosadíme jednotku budeme počítat obsah oblasti Ω .

Transformácie súradníc vo všeobecnosti veľmi uľahčujú výpočet niektorých zložitejších integrálov. V našej práci budeme najviac využívať najznámešiu a najpoužívanejšiu transformáciu do polárnych súradníc.

Transformácia pomocou polárnych súradníc na oblasti

$G : \rho > 0, 0 < \varphi < 2\pi$, je daná predpisom

$$x = \rho \cos(\varphi), y = \rho \sin(\varphi)$$

Definícia 2.3 *Nech $x_1, x_2 : I \rightarrow \mathbb{R}$ sú spojité funkcie, kde $I \subset \mathbb{R}$ je interval. Krivkou v rovine \mathbb{R}^2 nazývame množinu $\Gamma = \{x(t) = (x_1(t), x_2(t)), t \in I\}$.*

Definícia 2.4 *Krivka $\Gamma = \{x(t), t \in I\}$, kde $I = [a, b]$, sa nazýva uzavretá, ak platí $x(a) = x(b)$.*

Definícia 2.5 *Krivka $\Gamma = \{x(t), t \in I\}$ sa nazýva C^1 hladká, ak $x : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ je spojité diferencovateľné zobrazenie.*

Veta 2.6 *Nech je daná krivka $\Gamma = \{x(t), t \in I\} \subset \mathbb{R}^2$ a nech $x_i = x_i(t)$ sú C^1 diferencovateľné funkcie také, že existuje integrál*

$$\int_I \sqrt{|x_1'|^2 + |x_2'|^2} dt < \infty$$

Potom krivka Γ má konečnú dĺžku $|\Gamma|$ (t.j je rektifikovateľná)

$$|\Gamma| = \int_I \sqrt{|x_1'|^2 + |x_2'|^2} dt < \infty$$

2.1 Elipsa

Teraz, keď už máme v rukách akési nástroje na počítanie integrálov zrátame izoperimetrický kvocient pre elipsu. Zoberieme kanonickú rovnicu elipsy:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 ; \text{ kde } a, b \in \mathbb{R}$$

Bez ujmy na všeobecnosti môžeme predpokladať, že b -hlavná poloos, a -vedľajšia poloos, teda platí $a \leq b$.

Na výpočet obsahu použijeme transformáciu do polárnych súradníc:

$$x = ar \cos \varphi$$

$$y = ar \sin \varphi,$$

Jakobián zobrazenia je $J = abr$; pre $r \in (0, 1)$, $\varphi \in (0, \frac{\pi}{2})$

$$A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 |J| dr d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 abr dr d\varphi = 2ab \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi = 2ab \frac{\pi}{2} = \pi ab$$

Pre výpočet dĺžky elipsy L použijeme vzorec z vety 3.6. Použijeme parametrizáciu:

$x = a \cos \varphi$; $y = b \sin \varphi$ pre $\varphi \in (0, \frac{\pi}{2})$

$$\begin{aligned} L &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{|x'|^2 + |y'|^2} d\varphi = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi} d\varphi \\ &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2 \sin^2 \varphi + b^2(1 - \sin^2 \varphi)} d\varphi = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{b^2 - (b^2 - a^2) \sin^2 \varphi} d\varphi \\ &= 4b \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \left(\frac{b^2 - a^2}{b^2}\right) \sin^2 \varphi} d\varphi = 4b \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} d\varphi \end{aligned}$$

Výpočtom sme sa dopracovali k parametrickému integrálu,

kde $k = \sqrt{1 - \frac{a^2}{b^2}} < 1$.

Pozn1. Parametrickým integrálom rozumieme :

$$F(y) = \int_{\Omega} f(x, y) dx$$

Definícia 2.7 *Eliptické parametrické integrály :*

1. druhu :

$$\int_0^{\varphi} \frac{du}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 u}} = F(k, \varphi)$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{du}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 u}} = F(k) \text{ pre } \varphi = \frac{\pi}{2}$$

2. druhu :

$$\int_0^\varphi \sqrt{1 - k^2 \sin^2 u} du = E(k, \varphi)$$
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 u} du = E(k) \text{ pre } \varphi = \frac{\pi}{2}$$

$F(k, \varphi)$ sa nazýva neúplný eliptický parametrický integrál 1. druhu

$E(k, \varphi)$ sa nazýva neúplný eliptický parametrický integrál 2. druhu

$F(k)$ sa nazýva úplný eliptický parametrický integrál 1. druhu

$E(k)$ sa nazýva Eulerov parametrický integrál .

V našom príklade o elipse, vyšla dĺžka krivky rovná násobku Eulerovho eliptického integrálu v bode k , kde k závisí od pomeru hlavnej a vedľajšej poloosi. Tento integrál sa dá počítať len numericky, je tabulovaný pre rôzne hodnoty parametra k . My sa pozrieme, ako bude vyzeráť izoperimetrický kvocient v hraničných prípadoch.

1. prípad : ” Chudá elipsa ”

Pozrieme sa na elipsu, pre ktorú platí, že pomer hlavnej a vedľajšej poloosi sa blíži k nekonečnu. Teda, uvažujeme prípad :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$
$$a \leq b$$
$$\frac{b}{a} \rightarrow \infty$$

Graficky s rastúcim pomerom, sa elipsa natáhuje do výšky a zužuje zo šírky.

Pre koeficient k dostávame :

$$k = \sqrt{1 - \frac{a^2}{b^2}} \quad k \rightarrow 1$$

Hodnota Eulerovho parametrického integrálu sa vtedy blíži k $E(1)$:

$$E(1) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \sin^2 \varphi} d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos^2 \varphi} d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\cos \varphi| d\varphi = [\sin \varphi]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$$

Z príkladu o elipse vieme:

$$L = 4b \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} d\varphi = 4bE(k) \rightarrow 4bE(1) = 4b$$

$$A = \pi ab$$

Teda pre izoperimetrický koeficient dostávame:

$$Q = \frac{4\pi A}{L^2} = \frac{4\pi^2 ab}{8b^2} = \frac{\pi^2 a}{2b}$$

keďže $\frac{b}{a} \rightarrow \infty$; $\frac{a}{b} \rightarrow 0$; $Q \rightarrow 0$.

Ukázali sme, že pre elipsu, ktorej sa dĺžka hlavnej poloosi blíži k nekonečnu a dĺžka vedľajšej poloosi ostáva konštantná, sa izoperimetrický kvocient blíži ku $Q = 0$.

Krivka, má limitne nulový obsah pri nekonečnom obvode. Teda v porovnaní s kružnicou, takáto elipsa sa správa presne opačne ako kružnica, na daný obvod minimalizuje svoj obsah.

2.případ : " Okrúhla elipsa "

V tomto prípade sa pozrieme na elipsu, ktorej pomer vedľajšej a hlavnej poloosi je limitne blízko jednotke. Zoberieme teda dĺžku vedľajšej poloosi a , približujúcu sa zdola k dĺžke hlavnej poloosi b .

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad a \leq b \quad b \cong a$$

$$a \leq b ; a \rightarrow b \Rightarrow \frac{a^2}{b^2} \leq 1 ; \frac{a^2}{b^2} \rightarrow 1 \Rightarrow k = \sqrt{1 - \frac{a^2}{b^2}} \rightarrow 0$$

$$\text{Teda : } E(k) \rightarrow E(0) = \frac{\pi}{2}$$

$$L = 4bE(k) \rightarrow 4bE(0) = 2b\pi$$

$$A = \pi ab$$

Teda pre izoperimetrický kvocient dostávame :

$$Q = \frac{4\pi A}{L^2} = \frac{4\pi^2 ab}{4\pi^2 b^2} = \frac{a}{b}$$

$b \cong a \Rightarrow Q \rightarrow 1$, Q sa zdola približuje k jednotke.

Na tomto príklade sme si ukázali, ako neskôr dokážeme, že naozaj platí:

Ak sa krivka približuje ku kružnici, jej izoperimetrický kvocient sa približuje k jednotke.

Ukázali sme to aproximáciou elipsy ku kružnici, kde nám vyšlo, že ak pre vedľajšiu

poloos platí, že sa približuje svojou dĺžkou k hlavnej, tak z analytického výpočtu nám vyjde, že ak budeme približovať do nekonečna, izoperimetrický kvocient bude v nekonečne rovný 1, teda krivka maximalizuje svoj obsah. Týmto sme akoby urobili skúšku správnosti k doterajším poznatkom o izoperimetrickom kvociente.

2.2 Hypocykloida

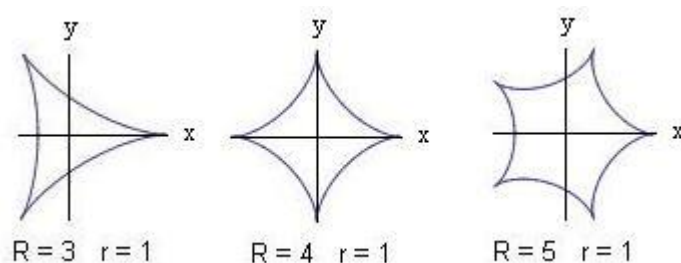
Ďalšia krivka, ktorou sa budeme zaoberať je **hypocykloida**.

Krivka hypocykloidy vznikne ako dráha bodu kružnice s polomerom r , ktorá sa kotúľa zvnútra po pevnej kružnici s polomerom R .

Parametrické vyjadrenie hypocykloidy:

$$x = (R - r) \cos \varphi + r \cos \frac{R-r}{r} \varphi$$

$$y = (R - r) \sin \varphi - r \sin \frac{R-r}{r} \varphi$$



Obr.1: Hypocykloidy

Na Obr. 1, môžeme vidieť jednotlivé hypocykloidy pre rôzne hodnoty polomeru R , pri fixnom polomere $r = 1$. Polomer r fixujeme, aby sme dostali nepresekajúcu sa krivku, pretože máme v úmysle počítať iba s takými.

2.2.1 Asteroida

Asteroida je krivka z triedy **hypocykloíd** a na Obr.1 ju spoznáваме ako druhú v poradí. Jej parametrické vyjadrenie je :

$$x = 3 \cos \varphi + \cos 3\varphi$$

$$y = 3 \sin \varphi - \sin 3\varphi$$

My ju však poznáme skôr z karteziánskeho tvaru : $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$

kde a je vzdialenosť priesečníka krivky s osou x resp. y (keďže krivka je symetrická) od počiatku.

Najprv si vypočítame obsah tejto krivky. Vo výpočte použijeme jej karteziánske vyjadrenie. Obsah asteroidy vypočítame klasicky cez dvojný integrál.

$$x \in (0, a)$$

$$y \in (0, (a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}})$$

Počítame $\frac{1}{4}$ obsahu :

$$\begin{aligned} \int_0^a \int_0^{(a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}} dx dy &= \int_0^a (a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}} dx = \left| \begin{array}{l} x = a \sin^3 t \\ dx = 3a \sin^2 t \cos t dt \end{array} \right| \\ &= 3a \int_0^{\frac{\pi}{2}} (a^{\frac{2}{3}} - a^{\frac{2}{3}} \sin^2 t)^{\frac{3}{2}} \sin^2 t \cos t dt \\ &= 3a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^2 t)^{\frac{3}{2}} \cos t \sin^2 t dt \\ &= 3a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^4 t - \cos^6 t) dt \end{aligned}$$

$$\text{využijeme poznatok : } \cos^2 t = \left(\frac{1 + \cos 2t}{2} \right)$$

$$= 3a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{16} + \frac{1}{8} \cos 2t - \frac{\cos 4t}{16} \right) dt - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{8} \cos^3 2t dt = I_1 - I_2$$

Prvý z rozdielu integrálov I_1 , je triviálny na výpočet, $\cos 2t$ sa zintegruje na $\frac{\sin 2t}{2}$ a $\cos 4t$ analogicky, teda po zintegrovaní a dosadení hraníc dostávame: $I_1 = a \frac{3a^2 \pi}{32}$.

Druhý z rozdielu integrálov I_2 , sa tiež spočíta jednoducho a síce cez substitúciu $\sin 2t = a$. Po zintegrovaní a dosadení hraníc dostávame, že $I_2 = 0$.

Teda pre obsah asteroidy dostávame: $A = \frac{3a^2 \pi}{8}$.

Pre výpočet dĺžky asteroidy si transformujeme súradnice x a y nasledovne :

$$x = a \cos^3 \varphi ; y = a \sin^3 \varphi$$

$$x' = -3a \cos^2 \varphi \sin \varphi ; y' = -3a \sin^2 \varphi \cos \varphi$$

Podľa vety (3.6) vieme, že dĺžku krivky môžeme počítať :

$$L = \int_I \sqrt{|x_1'|^2 + |x_2'|^2} dt = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{9a^2 \cos^4 \varphi \sin^2 \varphi + 9a^2 \sin^4 \varphi \cos^2 \varphi} d\varphi$$

$$\begin{aligned}
&= 12a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos^2 \varphi \sin^2 \varphi} d\varphi = 12a \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\cos \varphi \sin \varphi| d\varphi = 12a \int_0^1 x dx \\
&= 12a \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^1 = 6a
\end{aligned}$$

Použili sme substitúciu $\cos \varphi = x$; $\sin \varphi d\varphi = -dx$

$|\cos \varphi \sin \varphi| = \cos \varphi \cdot \sin \varphi$; pretože obe funkcie sú na intervale $(0, \frac{\pi}{2})$ kladné.

Teda pre izoperimetrický kvocient dostávame:

$$Q = \frac{4\pi A}{L^2} = \frac{\pi^2}{24} = 0.4112 < 1$$

Mohli by sme teda povedať, že asteroida sa k riešeniu izoperimetrického problému približuje na 41 %. Čím máme na mysli, že obsah ohraničený daným obvodom by mohol byť až $\frac{9a^2}{\pi}$, zatiaľ čo je $\frac{3a^2\pi}{8}$.

2.2.2 Hypocykloida (pre $r = 1$)

Teraz si vypočítame izoperimetrický kvocient pre ľubovoľnú **hypocykloidu**, ktorej polomer $r = 1$.

V podstate ukážeme, ako sa dá všeobecne vypočítať obsah a obvod **hypocykloidy** s polomerom $r = 1$. Na to si však budeme musieť pripomenúť definície a tvrdenia z matematickej analýzy.

Definícia 2.8 (Definícia krivkového integrálu 2.druhu) *Nech je daná hladká rektifikovateľná krivka $\Gamma = \{x(t), t \in I = [a, b]\}$. Nech $F : M \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ je spojité vektorová funkcia. Potom hodnota Riemannovho integrálu $\int_a^b [F_1(x_1(t), x_2(t)) \cdot x_1'(t) + F_2(x_1(t), x_2(t)) \cdot x_2'(t)] dt$ nezávisí na parametrizácii $x : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ krivky Γ orientovanej v smere z bodu $A = x(a)$ do bodu $B = x(b)$ a vyjadruje hodnotu tzv. krivkového integrálu 2.druhu*

$$\oint_{\Gamma} F_1(x_1, x_2)dx_1 + F_2(x_1, x_2)dx_2 = \int_a^b [F_1(x_1(t), x_2(t))x_1'(t) + F_2(x_1(t), x_2(t))x_2'(t)]dt$$

vektorovej funkcie $F = (F_1, F_2)$ po orientovanej krivke Γ .

Veta 2.9 Vzťah medzi krivkovým integrálom 2.druhu a dvojným integrálom.

$$\oint_{\Gamma} F_1dx_1 + F_2dx_2 = \iint_{\Omega} \left(\frac{\partial F_2}{\partial x_1} - \frac{\partial F_1}{\partial x_2} \right) dx_1dx_2 \quad (1)$$

Majme uzavretú krivku ohraničujúcu oblasť Ω hranicou Γ . Zoberme za vektorovú funkciu $F = \left(-\frac{1}{2}x_2, \frac{1}{2}x_1 \right)$ podľa vzťahu (1) dostávame :

$$\frac{1}{2} \oint_{\Gamma} x_1dx_2 - x_2dx_1 = \iint_{\Omega} 1dx_1dx_2 \equiv A$$

Pozn.2

Dostávame nový vzorec na výpočet obsahu oblasti ohraničenej krivkou :

$$A = \frac{1}{2} \oint_{\Gamma} x_1dx_2 - x_2dx_1$$

Podme teda vypočítať obsah oblasti A , ohraničenej krivkou hypocykloidy.

Zvolíme substitúciu :

$$x = (R - r) \cos \varphi + r \cos \frac{R-r}{r} \varphi$$

$$y = (R - r) \sin \varphi - r \sin \frac{R-r}{r} \varphi$$

Derivácie súradníc x a y podľa parametra φ :

$$dx = -(R - r) \sin \varphi - (R - r) \left(\sin \frac{R-r}{r} \varphi \right)$$

$$dy = (R - r) \cos \varphi - (R - r) \left(\cos \frac{R-r}{r} \varphi \right)$$

Teda pre obsah dostávame :

$$A = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} xdy - ydx$$

Vyjadrime si rozdiel :

$$\begin{aligned}
xdy - ydx &= ((R - r) \cos \varphi + r \cos \frac{R-r}{r} \varphi)((R - r) \cos \varphi - (R - r)(\cos \frac{R-r}{r} \varphi)) \\
&\quad + ((R - r) \sin \varphi - r \sin \frac{R-r}{r} \varphi)((R - r) \sin \varphi + (R - r)(\sin \frac{R-r}{r} \varphi))
\end{aligned}$$

Z druhej a štvrtej zátvorky možno vyňať $(R - r)$, teda tak spravíme a $(R - r)$ pôjde von pred integrál, keďže je to rozdiel skalárov. Následne po roznásobení zátvoriek dostávame:

$$\begin{aligned}
xdy - ydx &= (R - r) \cos^2 \varphi - (R - r) \cos \frac{R-r}{r} \varphi \cos \varphi + r \cos \frac{R-r}{r} \varphi \cos \varphi \\
&\quad - r(\cos \frac{R-r}{r} \varphi)^2 \\
&\quad + (R - r) \sin^2 \varphi + (R - r) \sin \frac{R-r}{r} \varphi \sin \varphi - r \sin \frac{R-r}{r} \varphi \sin \varphi \\
&\quad - r(\sin \frac{R-r}{r} \varphi)^2 \\
&= (R - r) - (R - r)(\cos \frac{R-r}{r} \varphi \cos \varphi - \sin \frac{R-r}{r} \varphi \sin \varphi) \\
&\quad + r(\cos \frac{R-r}{r} \varphi \cos \varphi - \sin \frac{R-r}{r} \varphi \sin \varphi) - r
\end{aligned}$$

Zo súčtových vzorcov vieme :

$$\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$

Teda :

$$\cos \frac{R-r}{r} \varphi \cos \varphi - \sin \frac{R-r}{r} \varphi \sin \varphi = \cos(\frac{R-r}{r} \varphi + \varphi) = \cos \frac{R}{r} \varphi$$

Naspäť k nášmu rozdielu :

$$\begin{aligned}
xdy - ydx &= (R - r) - (R - r)(\cos \frac{R}{r} \varphi) + r(\cos \frac{R}{r} \varphi) - r \\
&= (R - r)(1 - \cos \frac{R}{r} \varphi) + r(\cos \frac{R}{r} \varphi - 1) \\
&= (R - 2r)(1 - \cos \frac{R}{r} \varphi)
\end{aligned}$$

Naspäť k nášmu integrálu:

$$\begin{aligned}
A &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} xdy - ydx = \frac{1}{2}(R - r) \int_0^{2\pi} (R - 2r)(1 - \cos \frac{R}{r} \varphi) d\varphi \\
&= \frac{1}{2}(R - r)(R - 2r) \int_0^{2\pi} (1 - \cos \frac{R}{r} \varphi) d\varphi = \frac{1}{2}(R - r)(R - 2r)2\pi
\end{aligned}$$

Poslednú úpravu sme spravili nasledovne. Po rozdelení integrálu dostávame dva, prvý integrál je $\int_0^{2\pi} 1 d\varphi = 2\pi$.

Druhý integrál, $\int_0^{2\pi} \cos \frac{R}{r} \varphi d\varphi$ sa po substitúcií : $\frac{R}{r} \varphi = t$; $Rd\varphi = dt$, prevedie na integrál

$$\int_0^{2\pi R} \cos t dt, \text{ a teda dostávame integrál } R \int_0^{2\pi} \cos t dt.$$

Vieme, že $\int_0^{2\pi} \cos t \, dt = 0$, teda tento integrál celkom vypadne.

Teda pre obsah **hypocykloidy**, pre ktorú platí $r = 1$, dostávame:

$$A = \frac{1}{2}(R-1)(R-2)2\pi$$

Podme teraz spočítať dĺžku L takejto krivky. Podľa vzorca z vety 3.7 vieme:

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{|x'|^2 + |y'|^2} d\varphi$$

Vyjadríme si súčet:

$$\begin{aligned} |x'|^2 + |y'|^2 &= (R-r)^2 \sin^2 \varphi + (R-r)^2 (\sin(\frac{R-r}{r}\varphi))^2 + 2(R-r)^2 \sin \frac{R-r}{r}\varphi \sin \varphi \\ &\quad + (R-r)^2 \cos^2 \varphi + (R-r)^2 (\cos(\frac{R-r}{r}\varphi))^2 + 2(R-r)^2 \cos \frac{R-r}{r}\varphi \cos \varphi \\ &= (R-r)^2 + (R-r)^2 + 2(R-r)^2 (\sin(\frac{R-r}{r}\varphi) - \cos(\frac{R-r}{r}\varphi)) \\ &= 2(R-r)^2 + 2(R-r)^2 (-\cos \frac{R}{r}\varphi) \\ &= 2(R-r)^2 (1 - \cos \frac{R}{r}\varphi) \end{aligned}$$

Naspäť k integrálu:

$$\begin{aligned} L &= \int_0^{2\pi} \sqrt{2(R-r)^2 (1 - \cos \frac{R}{r}\varphi)} d\varphi = \sqrt{2}(R-r) \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - \cos \frac{R}{r}\varphi} d\varphi \\ &= \sqrt{2}(R-r) \int_0^{2\pi} \sqrt{2 \sin^2 \frac{R}{2r}\varphi} d\varphi = 2(R-r) \int_0^{2\pi} |\sin \frac{R}{2r}\varphi| d\varphi \\ &= 2(R-1) \frac{2}{R} \int_0^{R\pi} |\sin t| dt = 2(R-1) \frac{2}{R} R \int_0^{\pi} |\sin t| dt = \underline{8(R-1)} \end{aligned}$$

Od prvého riadku k druhému sme prešli na základe poznatku $\sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos \alpha}{2}$. Pri prechode z druhého riadku do tretieho sme spravili hneď dve úpravy.

Prvá úprava spočívala v dosadení $r = 1$.

Druhá úprava spočívala v substitúcii $\sin \frac{R\varphi}{2} = t$; $\frac{R}{2}d\varphi = dt$. Poslednú úpravu sme spravili zo znalosti $\int_0^{\pi} |\sin t| dt = 2$.

Teraz, keď sa nám podarilo vyjadriť si vzorce na dĺžku **hypocykloidy** a obsah oblasti,

ktorú ohraničuje, vieme vypočítať izoperimetrický kvocient, pre ľubovoľnú krivku hypocykloidy, pre ktorú platí $r = 1$.

Ako prvé si odskúšame správnosť našich vzorcov na **asteroide**, ktorú sme už raz spočítali.

Z našich výpočtov o **asteroide**:

$$A = \frac{3a^2\pi}{8}$$

$$L = 6a$$

kde a je vzdialenosť priesečníka krivky asteroidy s osou x od počiatku.

Pre nájdenie tohto priesečníka dosadíme $\varphi = 0$, $r = 1$ do parametrického vyjadrenia

$$x = (R - r) \cos \varphi + r \cos \frac{R-r}{r} \varphi.$$

Dostávame rovnosť $a = R$.

Teda pre **asteroidu**:

$$R = 4$$

$$A = \frac{3a^2\pi}{8} = \frac{3 \cdot 4^2 \cdot \pi}{8} = 6\pi$$

$$L = 6a = 24$$

Z nových vzorcov:

$$A = \frac{1}{2}(R - 1)(R - 2)2\pi = \frac{1}{2}(4 - 1)(4 - 2)2\pi = 6\pi$$

$$L = 8(R - 1) = 8 \cdot 3 = 24$$

Naše vzorce prešli skúškou správnosti. Možno ich aplikovať na ostatné **hypocykloidy**.

A ukázať ako sa mení izoperimetrický kvocient ak sa R zvyšuje. Z Obr.1, očakávame, že so zvyšujúcim R sa bude kvocient zvyšovať, nakoľko sa nám zdá, že sa útvar vtedy približuje ku kružnici.

Izoperimetrický kvocient :

$$Q = \frac{4\pi A}{L^2} = \frac{4\pi \frac{1}{2}(R - 1)(R - 2)2\pi}{(8(R - 1))^2} = \frac{\pi^2(R - 2)}{16(R - 1)}$$

Hypocykloida (R=3;r=1)

$$Q_3 = \frac{\pi^2(3 - 2)}{16(3 - 1)} = \frac{\pi^2}{32} \cong 0.3084$$

Hypocykloida (R=4;r=1)

$$Q_4 = \frac{\pi^2(4 - 2)}{16(4 - 1)} = \frac{\pi^2}{24} \cong 0.4112$$

Hypocykloida (R=5;r=1)

$$Q_5 = \frac{\pi^2(5 - 2)}{16(5 - 1)} = \frac{3\pi^2}{64} \cong 0.4626$$

Hypocykloida($R=6;r=1$)

$$Q_6 = \frac{\pi^2(6-2)}{16(6-1)} = \frac{\pi^2}{20} \cong 0.4935$$

Hypocykloida($R=7;r=1$)

$$Q_7 = \frac{\pi^2(7-2)}{16(7-1)} = \frac{5\pi^2}{96} \cong 0.5140$$

Hypocykloida($R=100;r=1$)

$$Q_{100} = \frac{\pi^2(100-2)}{16(100-1)} \cong 0.6160$$

Hypocykloida($R=2000;r=1$)

$$Q_{2000} = \frac{\pi^2(2000-2)}{16(2000-1)} \cong 0.6165$$

Ako sme si mohli všimnúť konvergencia sa spomaľuje. Pre limitu tohto izoperimetrického kvocientu platí:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Q_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi^2(R-2)}{16(R-1)} = \frac{\pi^2}{16} \cong 0.6168$$

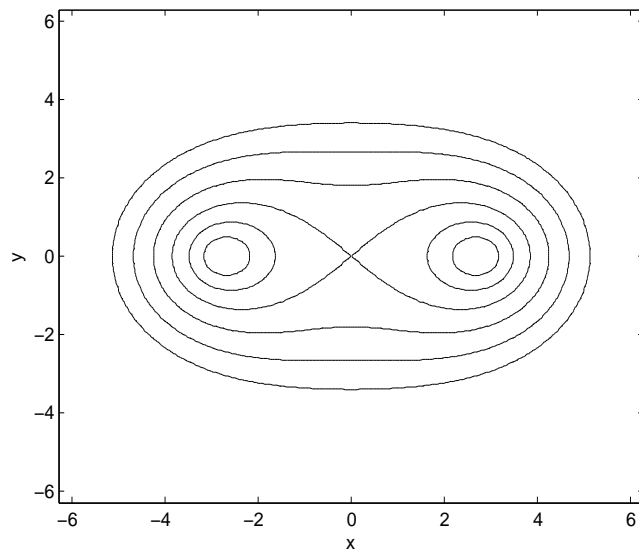
Teda izoperimetrický kvocient s rastúcim R konverguje k $\frac{\pi^2}{16}$.

Môžeme povedať, že **hypocykloida** s R rastúcim do nekonečna, bude maximalizovať svoj obsah takmer na 61.6 percenta.

2.3 Cassiniho ovál

V poslednej časti kapitoly Spojité krivky, sa pozrieme na Cassiniho ovál. Táto krivka nesie názov po francúzskom astronómovi Giovannim Domenicu Casininim, objaviteľovi štyroch Saturnových prstencov. V roku 1680 popísal ovál ako domnelú dráhu pohybu Zeme okolo Slnka, pričom Slnko sa nachádza v jednom ohnisku.

Nech F , G sú dva body v rovine a k je konštanta. Potom Cassiniho ovál s ohniskami F a G je definovaný ako množina takých bodov X , pre ktoré platí, že súčin vzdialenosti bodu X od ohniska G , a bodu X od ohniska F , je rovný štvorcu konštanty.



Obr.2: Cassiniho ovál pre $k = 0.6e, 0.8e, e, 1.2e, 1.4e, 1.6e$

F, G ohniská ; $k = \text{konšt.}$

Cassiniho ovál je množina bodov, vyhovujúcich rovnici:

$$|Fx| \cdot |Gx| = k^2$$

vzdialenosť ohnísk : $|FG| = 2e$; vzdialenosť ohniska od počiatku je e .

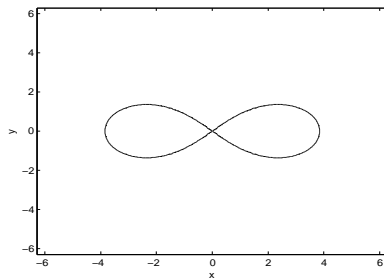
Rovnica Cassiniho oválu v karteziánskych súradniciach je nasledovná :

$$(x^2 + y^2)^2 + 2e^2(y^2 - x^2) + e^4 = k^4, \text{ kde } [x,y] \text{ su súradnice bodu } X.$$

Po prepísaní do polárnych súradnic s počiatkom $[0, 0]$ dostávame:

$$r^2 - 2e^2 r^2 \cos 2\theta = k^4 - e^4$$

2.3.1 Lemniskáta



Obr.3 : Lemniskata

Teraz sa pozrieme na špeciálnu krivku Cassiniho oválu, **lemniskátu**. Pre **lemniskátu** platí $e = k$ a teda jej rovnica vyzerá :

$$\text{Karteziánsky : } (x^2 + y^2)^2 = 2e^2(x^2 - y^2)$$

$$\text{Polárne : } r^4 = 2e^2r^2 \cos 2\theta$$

Keďže sa budeme zaoberať krivkami Cassiniho oválu, pre porovnanie výsledkov by sme chceli pracovať s parametrom definujúcim danú krivku, ktorý je pri každej krivke iný. Keď sa pozrieme na grafické vyjadrenie analytického predpisu krivky v obr.2, všimneme si, že vzdialenosť ohnísk sa nemení, a teda e sa ako najvhodnejší porovnávacie znamenie objaví.

Čo sa ale mení, je priesečník krivky s x-ovou osou.

Podme si teraz všeobecne vyjadriť tento priesečník :

Rovnica Cassiniho oválu:

$$(x^2 + y^2)^2 + 2e^2(y^2 - x^2) + e^4 = k^4$$

Nech $y = 0$

$$x^4 - 2e^2x^2 + e^4 - k^4 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{2e^2 \pm \sqrt{4e^2 - 4(e^4 - k^4)}}{2} = e^2 \pm k^2$$

$$x = \pm \sqrt{e^2 \pm k^2}$$

Pre lemniskátu dostávame :

$$k = e \quad \text{teda} \quad x = 0; \pm \sqrt{2}e$$

Náš hľadaný parameter, vzdialenosť priesečníka od počiatku, je $a = \sqrt{2}e$, teda si prepíšeme rovnicu lemniskáty, e nahradíme a čiže dostávame :

$$(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$$

a z toho parametrické vyjadrenie :

$$r^2 = 2e^2 \cos 2\varphi = a^2 \cos 2\varphi; \text{ kde } r = f(\varphi)$$

Pozn.3

Uvedieme si vzorce na výpočet obsahu elementárnej oblasti a dĺžky krivky, pre uzavreté krivky dané parametricky.

Obsah :

$$P = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} f^2(\varphi) d\varphi$$

Délka :

$$L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{f^2(\varphi) + [f'(\varphi)]^2} d\varphi \quad , \quad \text{kde } \varphi \in (\alpha, \beta)$$

Pomocou daných vzorců a našeho předpisu teraz vypočítame obsah lemniskáty.

$f^2(\varphi) = a^2 \cos 2\varphi$; kde $\varphi \in (0, \frac{\pi}{4})$, teda pre $\frac{1}{4}P$ dostávame :

$$\frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} f^2(\varphi) d\varphi = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} a^2 \cos 2\varphi d\varphi = \frac{1}{2} a^2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2\varphi d\varphi = \frac{1}{2} a^2 \left[\frac{\sin 2\varphi}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{4} a^2$$

Teda pre obsah P :

$$P = 4 \frac{1}{4} a^2 = a^2$$

Ak chceme počítat délku lemniskáty, podľa vzorca z Pozn.3, potrebujeme zistiť $f'(\varphi)$.

$$f^2(\varphi) = r^2(\varphi) = a^2 \cos 2\varphi$$

$$r^2(\varphi) = a^2 \cos 2\varphi \quad / \text{zderivujeme obe strany podľa } \varphi$$

$$2r(\varphi)r'(\varphi) = -2a^2 \sin 2\varphi$$

$$r' = \frac{-a^2 \sin 2\varphi}{r}$$

A teda platí :

$$\begin{aligned} \sqrt{r^2 + (r')^2} &= \sqrt{a^2 \cos 2\varphi + \frac{a^4 \sin^2 2\varphi}{r^2}} = \sqrt{\frac{a^4 \cos^2 2\varphi + a^4 \sin^2 2\varphi}{r^2}} = \frac{a^2}{r} \\ &= \frac{a^2}{\frac{a^2}{\sqrt{a^2 \cos 2\varphi}}} = \frac{a}{\sqrt{\cos 2\varphi}} \end{aligned}$$

Počítajme délku L :

$$\begin{aligned} \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{f^2(\varphi) + (f'(\varphi))^2} d\varphi &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{a}{\sqrt{\cos 2\varphi}} d\varphi = 4a \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\sqrt{\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi}} d\varphi \\ &= 4a \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\sqrt{1 - 2\sin^2 \varphi}} d\varphi \end{aligned}$$

V tomto tvare na základe **Pozn.2** spoznáваме Eliptický parametrický integrál 1.druhu, a teda pre délku lemniskáty platí :

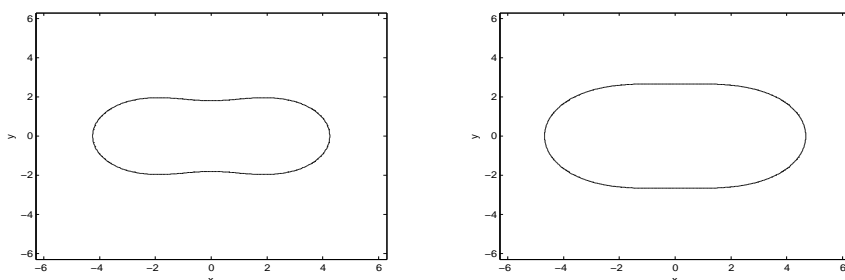
$$L = 4aF(\sqrt{2}, \frac{\pi}{4})$$

A teda pre izoperimetrický kvocient lemniskáty dostávame :

$$Q = \frac{4\pi A}{L^2} = \frac{4\pi a^2}{16a^2 F(\sqrt{2}, \frac{\pi}{4})} = \frac{\pi}{4F(\sqrt{2}, \frac{\pi}{4})} = 0.4594$$

Môžeme teda povedať, že lemniskáta maximalizuje svoj obsah približne na 46 percent.

2.3.2 "Piškóta"



Obr.4 : Piškóta pre $k = 1.2e, 1.4e$

V tejto časti podkapitoly Cassiniho oválu, sa pozrieme na krivku, ktorá svojím tvarom pripomína piškótu. Táto krivka vznikne ak, parameter k má hodnotu približne z intervalu $[e, 1.5e]$.

My sa pozrieme na Cassiniho ovál pre $k = 1.2e$.

Jeho rovnica v karteziánskom tvare :

$$(x^2 + y^2)^2 + 2e^2(y^2 - x^2) + e^4 - (1.2e)^4 = 0$$

Odvodíme si tvar v polárnych súradniciach :

$$x = r \cos \varphi$$

$$y = r \sin \varphi$$

Po dosadení do karteziánskeho tvaru :

$$r^4 - r^2 2e^2 \cos \varphi - 1.0736e^4 = 0$$

$$r_{1,2}^2 = \frac{2e^2 \cos \varphi \pm \sqrt{4e^4 \cos^2 \varphi + 4e^4 1.0736}}{2} = e^2 (\cos 2\varphi \pm \sqrt{\cos^2 2\varphi + 1.0736})$$

$$r > 0 \rightarrow r^2 = e^2 (\cos 2\varphi + \sqrt{\cos^2 2\varphi + 1.0736}), \text{ kde } \varphi \in [0, \frac{\pi}{2}]$$

Podme teda spočítať obsah P :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{4}P &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} r^2 \varphi d\varphi = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^2 (\cos 2\varphi + \sqrt{\cos^2 2\varphi + 1.0736}) d\varphi \\
&= \frac{e^2}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2\varphi + \sqrt{1 - \sin^2 2\varphi + 1.0736} d\varphi \\
&= \frac{e^2}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2\varphi d\varphi + \frac{e^2}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{2.0736 - \sin^2 2\varphi} d\varphi = I_1 - I_2
\end{aligned}$$

Prvý integrál $I_1 = \frac{e^2}{2} \left[\frac{\sin 2\varphi}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 0$; a teda zo súčtu vypadne a my pokračujeme vo výpočtoch bez neho.

$$\begin{aligned}
I_2 &= \frac{e^2}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{2.0736 - \sin^2 2\varphi} d\varphi = \left| \begin{array}{l} 2\varphi = u \\ 2d\varphi = du \end{array} \right| = \frac{e^2}{4} \int_0^{\pi} \sqrt{2.0736 - \sin^2 u} du \\
&= \sqrt{2.0736} \frac{e^2}{4} \int_0^{\pi} \sqrt{1 - \frac{\sin^2 u}{2.0736}} du \longrightarrow P = \sqrt{2.0736} e^2 E\left(\frac{1}{\sqrt{2.0736}}, \pi\right)
\end{aligned}$$

Ako sme už spomínali pri **lemniskáte**, budeme sa snažiť izoperimetrický pomer vyjadriť cez a , kde a je vzdialenosť piesečníka krivky s x -ovou osou od počiatku. Teda si obsah, dodatočne vyjadríme cez a . Všeobecne sme vypočítali, v časti **lemniskáta**, že $a = \sqrt{e^2 \pm k^2}$.

$$a = \sqrt{e^2 \pm 1.2^2 e^2}$$

$$a > 0 \text{ takže } a = \sqrt{e^2 + 1.2^2 e^2} = 2.44e \rightarrow e = \frac{a}{2.44}$$

Pre obsah teda platí:

$$P = \sqrt{2.0736} \frac{a^2}{2.44^2} E\left(\frac{1}{\sqrt{2.0736}}, \pi\right)$$

Práve sme vypočítali obsah oblasti ohraničenej cassiniho oválom pre hodnotu parametra $k = 1.2e$. Keďže by neskôr bude zaujímať ako sa mení izoperimetrický kvocient pre rôzne krivky cassiniho oválu, pozrieme sa teraz na výpočet obsahu oblasti ohraničenej cassiniho oválom pre krivku, pre ktorú platí, že $k = p.e$, kde $p \in (1, 1.6)$

Výpočet bude analogický, čiže :

Rovnica v karteziánskom tvare :

$$(x^2 + y^2)^2 + 2e^2(y^2 - x^2) + e^4 - (p.e)^4 = 0$$

$$x = r \cos \varphi$$

$$y = r \sin \varphi$$

Tvar v polárnych súradniciach:

$$r^4 - r^2 2e^2 \cos \varphi - (p^4 - 1)e^4 = 0$$

$$r^2 = e^2(\cos 2\varphi + \sqrt{\cos^2 2\varphi + (p^4 - 1)}), \text{ kde } \varphi \in [0, \frac{\pi}{2}]$$

Teda pre obsah dostávame :

$$\begin{aligned} \frac{1}{4}P &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} r^2 \varphi d\varphi = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^2(\cos 2\varphi + \sqrt{\cos^2 2\varphi + (p^4 - 1)}) d\varphi \\ &= \frac{e^2}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{p^4 - \sin^2 2\varphi} d\varphi = p^2 \frac{e^2}{4} \int_0^{\pi} \sqrt{1 - \frac{\sin^2 \varphi}{p^4}} d\varphi \\ P &= p^2 e^2 E\left(\frac{1}{p^2}, \pi\right) = p^2 \frac{a^2}{p^2 + 1} E\left(\frac{1}{p^2}, \pi\right) \end{aligned}$$

Teraz by sme radi spočítali dĺžku L cassiniho oválu. Najprv sa pokúšame ju spočítať vzorcom z **Pozn.3**, na výpočet dĺžky krivky danej parametricky, analogicky ako v prípade **lemniskáty**, no dostávame sa k veľmi nepríjemnému výrazu s ktorým ďalej nevieme pohnúť:

$$\begin{aligned} r^2 + (r')^2 &= e \left(\frac{4 \cos^4 2\varphi + (8b + 4) \cos^2 2\varphi + 4b^2 + 8 \cos^3 2\varphi \sqrt{\cos^2 2\varphi + b}}{4(\cos^2 2\varphi + b)(\cos 2\varphi + \sqrt{\cos^2 2\varphi + b})} \right) \\ &+ e \left(\frac{8b \cos 2\varphi \sqrt{\cos^2 2\varphi + b} + 4b + 4 \sin 2\varphi \sin 4\varphi \sqrt{\cos^2 2\varphi + b} + \sin^2 4\varphi}{4(\cos^2 2\varphi + b)(\cos 2\varphi + \sqrt{\cos^2 2\varphi + b})} \right) \end{aligned}$$

kde $b = 1.0736$.

Druhý spôsob ako spočítať dĺžku L je cez vzorec z **vety 3.7**, pomocou ktorého sme spočítali dĺžku krivky **hypocykloidy** a **elipsy**, nedostávame sa však ku krajšiemu výrazu:

$$\begin{aligned} |x'|^2 + |y'|^2 &= e \left(\frac{4 \sin^2 2\varphi \cos^2 2\varphi + (16 + 4b) \sin^2 2\varphi + 16 \sin^2 2\varphi \sqrt{\cos^2 2\varphi + b}}{(\cos^2 2\varphi + b)(\cos 2\varphi + \sqrt{\cos^2 2\varphi + b})} \right) \\ &+ e \left(\frac{2 \cos^4 2\varphi + 3b \cos^2 2\varphi + \cos^3 2\varphi \sqrt{\cos^2 2\varphi + b} + b \cos 2\varphi \sqrt{\cos^2 2\varphi + b} + b^2}{(\cos^2 2\varphi + b)(\cos 2\varphi + \sqrt{\cos^2 2\varphi + b})} \right) \end{aligned}$$

Akokoľvek skúšame použiť súčtové vzorce a známe vzťahy medzi $\sin x$ a $\cos x$ nedarí sa nám ani jeden z výrazov upraviť, tak aby sme z jeho odmocniny vedeli vypočítať integrál.

Piškóta numericky

Keďže sa nám nepodarilo spočítať piškótu analyticky, spočítame si ju v matlabe numericky. Vpodstate by sa nám nepodarilo piškótu spočítať exaktne, aj keby sme ju rátali cez integrály, nakoľko by nám opäť vyšiel len eliptický parametrický integrál, ktorého hodnoty sú tabulované. Teda počítané numericky.

Postup počítania v Matlabe, spočíva v označení dostatočného počtu bodov v obrázku krivky, ktorý je presne vygenerovaný matlabovskou funkciou a upravený do správnych rozmerov, tak aby x -ová a y -ová os mali rovnakú mierku. Následne sa pomocou daných hodnôt spočíta obsah a obvod útvaru, a z toho izoperimetrický kvocient. Viac o tomto postupe si povieme v podkapitole "Vločky", kvôli ktorej bol celý postup pôvodne zavedený. Teraz si spočítame izoperimetrický kvocient pre dve piškóty.

Piškóta pre $k = 1.2e$

Podľa neskôr spomenutých funkcií obvodu a obsahu, sme obvod a obsah zráтали nasledovne:

$$L = 840.8181$$

$$A = 44470$$

A teda izoperimetrický kvocient je:

$$Q = \frac{4\pi A}{L^2} = 0.7904$$

Piškóta pre $k = 1.5e$

$$L = 1089.2$$

$$A = 86352$$

Izoperimetrický kvocient je:

$$Q = \frac{4\pi A}{L^2} = 0.9146$$

Teda tak ako by sme očakávali s rastúcim k rastie izoperimetrický pomer Q a piškóta sa svojim tvarom približuje ku kružnici.

3 Diskrétne Analógie

V tejto kapitole sa zameriame na n -uholníky. Odvodíme si vzorce na výpočet ich obvodu a obsahu, cez ktoré budeme počítať izoperimetrické kvocienty. Ukážeme izoperimetrickú nerovnosť pre nie hladké krivky, a tiež, že optimálny útvar maximalizujúci obsah n -uholníka je práve pravidelný n -uholník, ktorý pre $n \rightarrow \infty$ konverguje ku kružnici. Nakoniec sa pozrieme na izoperimetrické kvocienty snehových vločiek, ktorým prislúcha k veľkému obvodu malý obsah.

Majme n -uholník s bodmi $x_i = (x_{i1}, x_{i2})^T \in \mathbb{R}^2$, teda n -uholník je daný množinou bodov $X = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{2n}$, pričom platí: $x_{n+1} = x_1$, aby bola splnená podmienka uzavretosti krivky.

Vieme, že vzdialenosť dvoch bodov je norma ich rozdielu, a teda pre dĺžku n -uholníka dostávame jednoduchý vzorec :

$$L(x) = \sum_{i=1}^{n-1} \|x_{i+1} - x_i\|$$

Z **Pozn.2** naväzujúcej na **vetu 3.9** z podkapitoly o **hypocykloide** vieme, že obsah oblasti ohraničenej krivkou, môžeme počítať:

$$A = \frac{1}{2} \oint_{\Gamma} x_1 dx_2 - x_2 dx_1$$

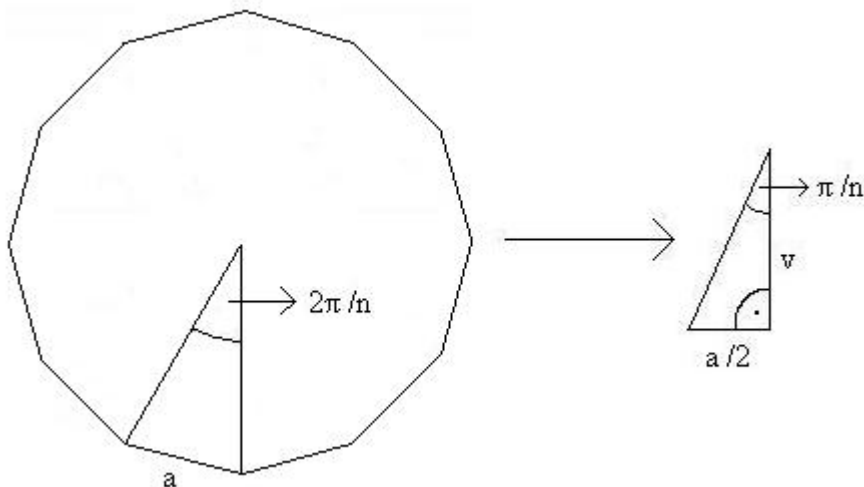
Teda pre obsah elementárnej oblasti A platí :

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2} \oint_{\Gamma} x_1 dx_2 - x_2 dx_1 = \frac{1}{2} \oint_{\Gamma} \begin{vmatrix} x_1 & dx_1 \\ x_2 & dx_2 \end{vmatrix} dt = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n-1} \begin{vmatrix} x_{i,1} & x_{i+1,1} - x_{i,1} \\ x_{i,2} & x_{i+1,2} - x_{i,2} \end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n-1} \det(x_i, x_{i+1} - x_i) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n-1} \det(x_i, x_{i+1}), \text{ kde } \det(a, b) = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

Pozn.4

Od integrálu k sume sme prešli, pretože prechádzame do nespojitého priestoru (vieme, že integrál je vlastne spojitá suma) a posledný krok sme urobili úpravou determinantu.

Teraz si spočítame izoperimetrický kvocient pre pravidelný n -uholník, ktorý neskôr použijeme v dôkaze izoperimetrickej nerovnosti.



Obr.5 : n -uholník

Z obrázku č.5 počítame: $\tan\left(\frac{\pi}{n}\right) = \frac{a}{2v} \rightarrow v = \frac{\frac{a}{2}}{\tan\left(\frac{\pi}{n}\right)}$

Teda pre jednu "n-tinu" obsahu dostávame :

$$S = \frac{a}{2}v = \frac{a^2}{4 \tan\left(\frac{\pi}{n}\right)} \rightarrow \text{obsah } n\text{-uholníka } A = \frac{na^2}{4 \tan\left(\frac{\pi}{n}\right)} ; \text{ obvod } L = na$$

Izoperimetrický kvocient pre pravidelný n -uholník : $Q = \frac{4\pi A}{L^2} = \frac{\pi}{n \tan\left(\frac{\pi}{n}\right)}$

3.1 Dôkaz izoperimetrickej nerovnosti

Dôkaz izoperimetrickej nerovnosti spravíme v dvoch krokoch. V prvom kroku budeme hľadať n -uholník, ktorý má pri danom obsahu minimálny obvod a ukážeme, že je to pravidelný n -uholník.

V druhom kroku ukážeme, že všetky ostatné n -uholníky majú menší izoperimetrický kvocient, a že pre kvocient pravidelného n -uholníka platí, že je menší ako jedna. Nakoniec ukážeme, že pre $n \rightarrow \infty$ je izoperimetrický kvocient 1, inak je vždy menší, čím

dokážeme izoperimetrickú nerovnosť. Najprv si však pripomenieme pojmy z matematickej analýzy.

Definícia 3.1 (*Definícia viazaného extrému*) Nech $f : D(f) \subseteq \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$, a nech $g : D(g) \subset D(f) \subseteq \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ je väzba. Pod viazaným lokálnym maximom (resp. minimom) rozumieme bod $\bar{x} \in M = \{x, g(x) = 0\}$ pre ktorý platí : $f(x) \leq f(\bar{x})$ (resp. $f(x) \geq f(\bar{x})$) pre $\forall x \in O \cap M$, kde O je nejaké okolie bodu \bar{x} .

Definícia 3.2 (*Definícia Lagrangeovej funkcie*) Nech $f : D(f) \subseteq \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$, a nech $g : D(g) \subset D(f) \subseteq \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ je väzba. Pod Lagrangeovou funkciou definovanou na $(D(g), \mathbb{R})$ rozumieme :

$$L(x, \lambda) = f(x) - \lambda g(x)$$

Tvrdenie Pre uzavretú krivku platí:

$$\frac{4\pi A}{L^2} \leq 1$$

kde A je obsah oblasti ohraničenej danou krivkou a L je dĺžka tejto krivky.

Dôkaz

Vieme :

$$\frac{4\pi A}{L^2} \leq 1 \iff \frac{L^2}{4\pi A} \geq 1$$

keďže A aj L^2 sú kladné čísla.

Teda si môžeme vybrať, ktorú nerovnosť chceme dokazovať. My si vyberieme druhú nerovnosť tzv. *anizoperimetrickú nerovnosť*.

Teda chceme dokázať $\frac{L^2}{4\pi A} \geq 1$.

1.časť

Hľadáme n -uholník, ktorý má pri danom obsahu minimálny obvod .

Úloha : $\min L(X) ; A(X) = \text{const.}$

Dostávame úlohu na viazaný extrém, kde minimalizujeme funkciu $L(x)$ pri danej väzbe $A(x)$.

Zostrojíme si Lagrangeovu funkciu : $L(X, \lambda) = L(X) - \lambda A(X)$

kde X je vektor bodov n -uholníka:

$$X = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{2n} ; \text{ kde } x_i = (x_{i1}, x_{i2})^T \in \mathbb{R}^2$$

Pre hľadanie extrémumu položíme deriváciu Lagrangeovej funkcie rovnú nule.

$$L'(X, \lambda) = L'(X) - \lambda A'(X) = 0$$

Podme derivovať dĺžku $L(X)$ podľa x_j . Pozrieme sa, kde v $L(X)$ sa vyskytuje x_j .

$$L(X) = \sum_{i=1}^{n-1} \|x_{i+1} - x_i\|$$

V celej sume sa x_j vyskytuje len vo výrazoch $\|x_j - x_{j-1}\|$ a $\|x_{j+1} - x_j\|$. Teda derivácia bude spočívať len v zderivovaní súčtu týchto výrazov.

Pracujeme s euklidovskou normou, teda :

$$\|x_j - x_{j-1}\| + \|x_{j+1} - x_j\| = \sqrt{(x_{j,1} - x_{j-1,1})^2 + (x_{j,2} - x_{j-1,2})^2} + \sqrt{(x_{j+1,1} - x_{j,1})^2 + (x_{j+1,2} - x_{j,2})^2}$$

Derivujeme:

$$\frac{\partial L(X)}{\partial x_{j,1}} = \frac{x_{j,1} - x_{j-1,1}}{\|x_j - x_{j-1}\|} + \frac{x_{j,1} - x_{j+1,1}}{\|x_{j+1} - x_j\|}$$

$$\frac{\partial L(X)}{\partial x_{j,2}} = \frac{x_{j,2} - x_{j-1,2}}{\|x_j - x_{j-1}\|} + \frac{x_{j,2} - x_{j+1,2}}{\|x_{j+1} - x_j\|}$$

$$L'_{x_j} = \left(\frac{x_j - x_{j-1}}{\|x_j - x_{j-1}\|} + \frac{x_j - x_{j+1}}{\|x_{j+1} - x_j\|} \right) = - \left(\frac{x_{j+1} - x_j}{\|x_{j+1} - x_j\|} - \frac{x_j - x_{j-1}}{\|x_j - x_{j-1}\|} \right)$$

Podme derivovať obsah $A(X)$ podľa x_j . Pozrieme sa, kde v $A(X)$ sa vyskytuje x_j .

$$A(X) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n-1} \det(x_i, x_{i+1} - x_i)$$

V celej sume sa x_j vyskytuje len v dvoch výrazoch.

Vo výraze $\det(x_{j-1}, x_j - x_{j-1})$ a $\det(x_j, x_{j+1} - x_j)$

Teda derivácia bude spočívať len v zderivovaní súčtu týchto výrazov. Najpr si ich ale upravme:

$$\begin{aligned} \det(x_{j-1}, x_j - x_{j-1}) &= \begin{vmatrix} x_{j-1,1} & x_{j,1} - x_{j-1,1} \\ x_{j-1,2} & x_{j,2} - x_{j-1,2} \end{vmatrix} \\ &= x_{j-1,1}(x_{j,2} - x_{j-1,2}) + x_{j-1,2}(x_{j,1} - x_{j-1,1}) \\ &= x_{j-1,1}x_{j,2} - x_{j-1,2}x_{j,1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\det(x_j, x_{j+1} - x_j) &= \begin{vmatrix} x_{j,1} & x_{j+1,1} - x_{j,1} \\ x_{j,2} & x_{j+1,2} - x_{j,2} \end{vmatrix} \\
&= x_{j,1}(x_{j+1,2} - x_{j,2}) + x_{j,2}(x_{j+1,1} - x_{j,1}) \\
&= x_{j,1}x_{j+1,2} - x_{j,2}x_{j+1,1}
\end{aligned}$$

Teda súčet:

$$\begin{aligned}
\det(x_{j-1}, x_j - x_{j-1}) + \det(x_j, x_{j+1} - x_j) &= x_{j-1,1}x_{j,2} - x_{j-1,2}x_{j,1} \\
&\quad + x_{j,1}x_{j+1,2} - x_{j,2}x_{j+1,1}
\end{aligned}$$

Derivujeme:

$$\frac{\partial A(X)}{\partial x_{j,1}} = \frac{1}{2}(-x_{j-1,2} + x_{j+1,2})$$

$$\frac{\partial A(X)}{\partial x_{j,2}} = \frac{1}{2}(x_{j-1,1} - x_{j+1,1})$$

$$A'_{x_j} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -x_{j-1,2} + x_{j+1,2} \\ x_{j-1,1} - x_{j+1,1} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} x_{j+1,2} - x_{j-1,2} \\ -(x_{j+1,1} - x_{j-1,1}) \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}(x_{j+1} - x_{j-1})^\perp$$

Poslednú úpravu sme spravili na základe poznatku : $(a, b)^\perp = (-b, a)$

$L'(X, \lambda) = 0$, teda pre $\forall y \in \mathbb{R}^2$ platí $L'(X, \lambda)y = 0$

$$L'(X, \lambda)y = L'_{x_j}y - \lambda A'_{x_j}y = 0$$

$$L'(X, \lambda)y = - \left(\frac{x_{j+1} - x_j}{\|x_{j+1} - x_j\|} - \frac{x_j - x_{j-1}}{\|x_j - x_{j-1}\|}, y \right) + \frac{\lambda}{2}((x_{j+1} - x_{j-1})^\perp, y) = 0$$

Pozrieme sa na to po zložkách, pre $y = (1, 0)^T$ a $y = (0, 1)^T$

Pre $\forall j = 1, 2 \dots n - 1$ platí :

$$\frac{x_{j+1} - x_j}{\|x_{j+1} - x_j\|} - \frac{x_j - x_{j-1}}{\|x_j - x_{j-1}\|} = \frac{\lambda}{2}(x_{j+1} - x_{j-1})^\perp \in \mathbb{R}^2$$

Nech $T_j = \frac{x_{j+1} - x_j}{\|x_{j+1} - x_j\|}$, kde $\|T_j\| = 1$

$$T_j - T_{j-1} = \frac{\lambda}{2}(x_{j+1} - x_{j-1})^\perp$$

Nech vektor $T_j - T_{j-1} = (a, b)$, sa skladá zo zložiek a a b .

Nech vektor $(x_{j+1} - x_{j-1})^\perp = (c, d)$, sa skladá zo zložiek c a d .

Teda vektor $(x_{j+1} - x_{j-1}) = (-d, c)$, sa skladá zo zložiek $-d$ a c .

Nech $y = (1, 0)^T$, po zložkách dostávame:

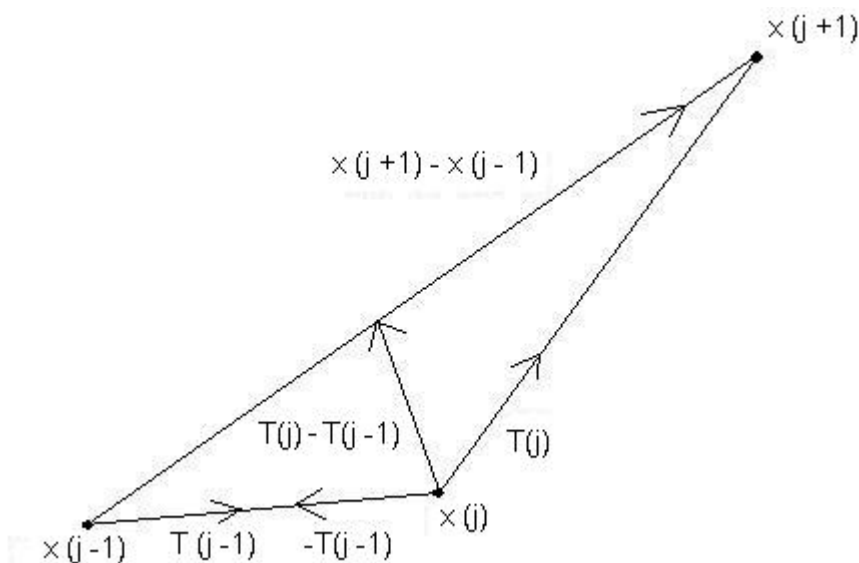
Na ľavej strane rovnice dostávame prvú zložku vektora $T_j - T_{j-1}$ na pravej prvú zložku vektora $(x_{j+1} - x_{j-1})^\perp$ teda rovnosť:

$$a = \frac{\lambda}{2}c$$

Analogicky pre $y = (0, 1)^T$ berieme len druhé súradnice vektorovej rovnice. Teda dostávame rovnosť :

$$b = \frac{\lambda}{2}d$$

Zobrazme si situáciu, ktorú rozoberáme, obrázkom.



Obr.6 : Ilustrácia situácie

Pozrime sa na skalárny súčin $(T_j - T_{j-1}, x_{j+1} - x_{j-1})$.

$$(T_j - T_{j-1}, x_{j+1} - x_{j-1}) = a(-d) + bc = \frac{\lambda}{2}c(-d) + \frac{\lambda}{2}dc = 0$$

Skalárny súčin vyšiel nula, z toho vyplýva, že dané vektory sú na seba kolmé, teda musí platiť $\|x_{j-1} - x_j\| = \|x_j - x_{j+1}\|$, a teda $\angle x_{j+1}x_{j-1}x_j = \angle x_jx_{j+1}x_{j-1}$ teda náš hľadaný útvar je naozaj pravidelný n -uholník.

Ale je to naozaj minimum? Našli sme kandidáta na extrém, treba ešte overiť, že je to

naozaj minimum. Vieme si predstaviť, že maximum to byť nemôže, pretože ho funkcia nenadobúda, pri konštantnom obsahu by sme mohli zväčšovať obvod do nekonečna, ako keby sme natáhovali do šírky obdĺžnik. Ak teda existuje minimum, existuje ich nekonečne veľa, každý pravidelný n -uholník s ľubovoľným otočením a posunutím. Otočenia a posunutia sa môžeme zbaviť tak, že budeme navyše predpokladať väzbu $x_1 = (0, 0)$ a napríklad $x_{2,2} = 0$, teda, že n -uholník má jeden vrchol v počiatku a rameno x_1x_2 je v osi x . Tieto dve nové podmienky nezmenia nutnú podmienku viazaného minima v ostatných bodoch, ktoré nesusedia s x_1 a x_2 .

S týmito dvoma novými podmienkami bude zrejmé, že infimum $L(x)$ sa dosahuje v nejakej veľkej guľi v \mathbb{R}^{2n} obsahujúcej počiatok. (Sporom ak by nie tak potom dĺžka by musela ísť do nekonečna pri pevnej ploche, čo nie je minimum ako sme už vyššie spomínali). Táto guľa v prieniku a väzbou $A(x) = \text{const}$ je potom kompaktná množina v \mathbb{R}^{2n} a $L(x)$ je spojitá funkcia na tejto množine a preto nadobúda minimum na tejto množine.

Teda naozaj náš pravidelný n -uholník je nami hľadaným minimom.

2.časť

Ak pre pravidelný n -uholník ukážeme, že $\frac{L^2}{4\pi A} \geq 1$ tak dokážeme túto nerovnosť pre všetky ostatné n -uholníky, pretože pre pravidelný je $L(X)$ minimálne, teda aj hodnota zlomku na ľavej strane je minimálna, teda pre všetky ostatné n -uholníky je väčšia.

Z nášho výpočtu o pravidelnom n -uholníku vieme:

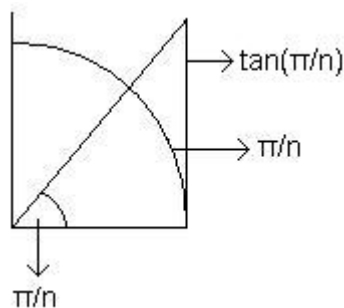
$$Q_n = \frac{\pi}{n \tan(\frac{\pi}{n})} \longrightarrow \frac{L^2}{4\pi A} = \frac{n \tan(\frac{\pi}{n})}{\pi}$$

$$\frac{n \tan(\frac{\pi}{n})}{\pi} = 1 + \frac{n \tan(\frac{\pi}{n}) - \pi}{\pi}$$

Chceme dokázať, že $\frac{n \tan(\frac{\pi}{n}) - \pi}{\pi}$ je kladné, čím ukážeme platnosť $\frac{L^2}{4\pi A} \geq 1$ pre n -uholníky.

CH.D : $\frac{n \tan(\frac{\pi}{n}) - \pi}{\pi} > 0 \iff \frac{n \tan(\frac{\pi}{n})}{\pi} > 1 \iff \tan(\frac{\pi}{n}) > \frac{\pi}{n}$

Pri dôkaze si pomôžeme obrázkom jednotkovej kružnice.



Obr.7 : Jednotková kružnica

Celá kružnica má obvod 2π teda dĺžka nášho oblúku na obrázku je $\frac{\pi}{n}$. Z obrázku vidíme, že obsah výseku je menší ako obsah trojuholníka. Keďže vieme, že obsah celej kružnice, teda obsah prislúchajúci obvodu 2π je $\pi r^2 = \pi$, vieme si cez priamu úmeru vypočítať obsah x prislúchajúci dĺžke oblúku $\frac{\pi}{n}$ nasledovne:

$$\frac{x}{\pi} = \frac{\frac{\pi}{n}}{2\pi} \rightarrow x = \frac{\pi}{2n}$$

Keďže obsah výseku je menší ako obsah trojuholníka platí:

$$\frac{\pi}{2n} < \frac{\tan \frac{\pi}{n} \cdot 1}{2} \rightarrow \frac{\pi}{n} < \tan \frac{\pi}{n} \quad \blacksquare$$

Na záver si ukážeme, že pre $n \rightarrow \infty$ n -uholník aproximuje ku kružnici a hodnota $\frac{L^2}{4\pi A}$ sa rovná jednej.

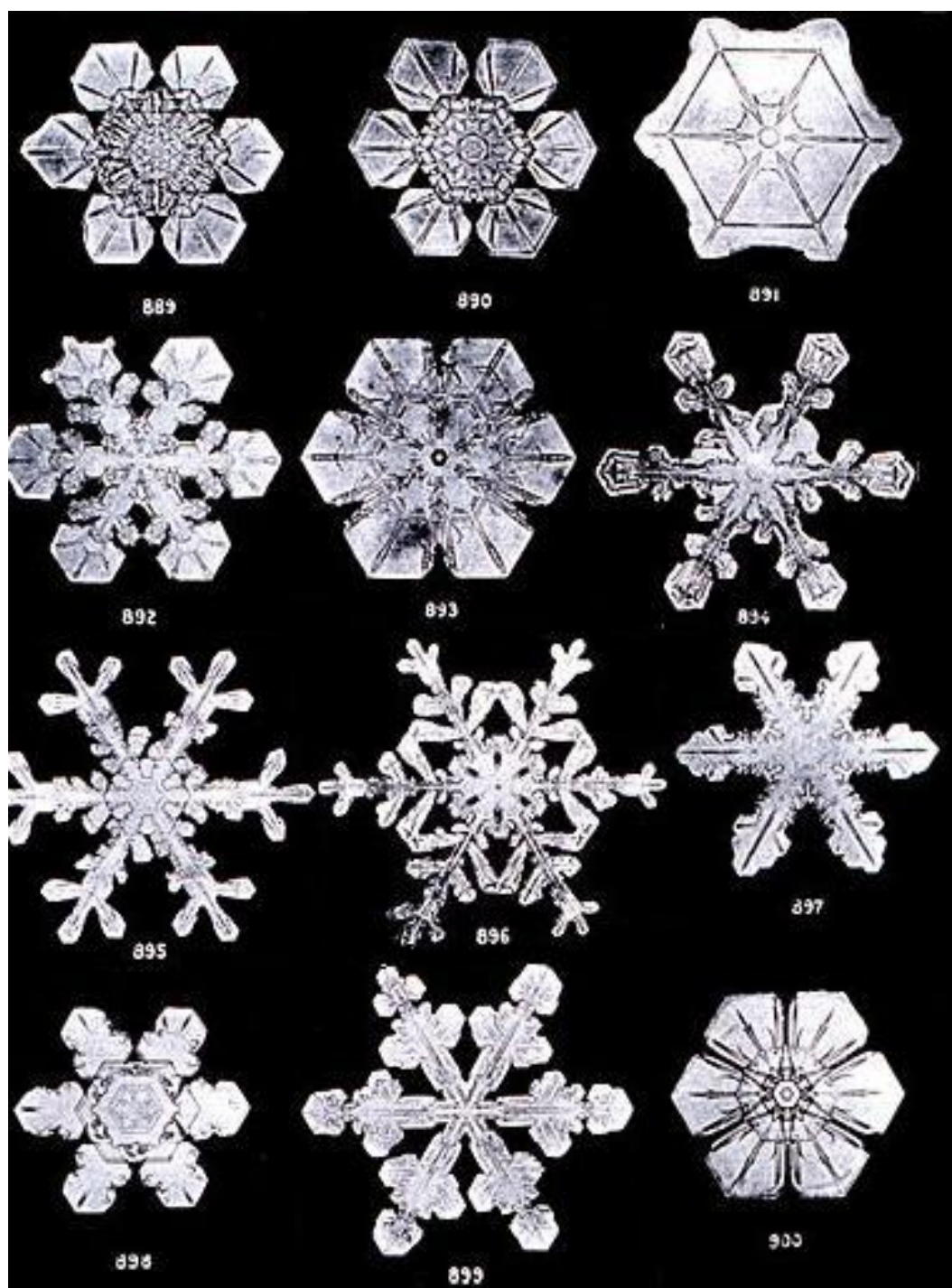
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \tan(\frac{\pi}{n})}{\pi} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\tan(\frac{\pi}{n})}{\frac{\pi}{n}} = 1 \quad \blacksquare$$

3.2 Vločky

"Under the microscope, I found that snowflakes were miracles of beauty"

Wilson Bentley

Wilson Bentley, farmársky samouk prilákal koncom 19.storočia pozornosť ľudstva svojou priekupníckou prácou v oblasti mikrofotografie. Po rokoch pokusov a omylov sa stal v roku 1885 prvým človekom, ktorému sa podarilo odfotiť snehovú vločku. Za celý život sa mu podarilo zozbierať 5000 snímok snehových vločiek, z ktorých žiadne dve neboli rovnaké. V roku 1931 vychádza publikácia "Snow Crystals" (Snehové Kryštály), v ktorej sa nachádza 2400 fotografií snehových vločiek.



Obr.8 : Bentleyho vločky

V tejto záverečnej podkapitole sa pozrieme na izoperimetrické kvocienty snehových vločiek, ktoré sú špecifické svojim malým obsahom k danému obvodu. Izoperimetrický

kvocient budeme počítat numericky a na výpočty budeme používať matematický softvér Matlab.

Ako prvé si vyhliadneme vložky, s ktorými budeme pracovať, tak aby sme pokryli čo najväčšiu reprezentatívnu množinu. Keďže pri bližšom pozorovaní snehových vločiek si môžeme všimnúť isté príbuzenské vzťahy, podobné štruktúry a vetvenia, vyberieme vložky, čo možno najrôznejšie.

V našej práci spočítame izoperimetrický kvocient pre vybraných osem snehových vločiek.

Postup spočíva v ručnom označení bodov $X(x, y)$ v obrázku mikrofotografie a následným počítaním s týmito hodnotami.

Práca v matlabe:

Načítame obrázok do Matlabu. Do Command Window zadáme príkaz:

```
>>data = imread('vlocka1.jpg');
```

Na zobrazenie obrazku a následne načítanie hodnôt z neho, použijeme nasledovné príkazy:

```
>>figure(88);  
>>clf;  
>>h = imagesc(data);  
>>axis image;  
>>[x, y] = ginput(600);
```

Príkaz $[x, y] = \text{ginput}(n)$ načíta súradnice (x, y) každého bodu na ktorý myšou v obrázku klikneme. Postupne teda označíme, čo najpresnejšie, n bodov po obvode vločky, čím dostaneme vektor $[x, y] \in \mathbb{R}^{2n}$, tvoriacich n -uholník, ktorý je pretransformovaním hladkej krivky do nehladkej, s čo možno najmenšou odchýlkou od pôvodného obvodu, obsahu. Podľa zložitosti členitosti obvodu vločky volíme hodnoty pre n .

Vločka.č.1



Obr.9 : Vločka.č.1

Prvá vločka je dosť členitá, a preto po pár pokusoch zvolíme dosť vysoký počet bodov, $n = 600$. Aby sme na opísanie jedného zo šiestich ramien mali približne 100 bodov. Vyššie spomínaným postupom vytvoríme vektor $X[x, y]$. Tento vektor bodov je pre našu vločku reprezentatívny, ďalšie výpočty budeme robiť s ním. Ako prvé si spočítame dĺžku takto určenej uzavretej krivky.

Z odvodeného vzorca na výpočet dĺžky krivky:

$$L(x) = \sum_{i=1}^{n-1} \|x_{i+1} - x_i\|$$

naprogramujeme v Matlabe algoritmus na výpočet obvodu n -uholníka cez body $[x, y]$ vektora $X[x, y]$. Jednoducho budeme k sebe pripočítavať vzdialenosti dvoch vedľa seba ležiacich bodov. Používať budeme Euklidovskú normu:

Norma vektora $x = (a, b) \in \mathbb{R}^2$, $\|x\| = \sqrt{a^2 + b^2}$

```
>> function [L] = obvod (x,y,N)}
```

Definujeme funkciu obvod (x,y,N) so vstupnými argumentami $X[x, y]$ a N , a výstupným argumentom L .

```
>> A=[x';y'];
```

Vytvoríme si maticu A , ktorej prvý riadok bude vektor x -ových a druhý y -ových súradníc bodov $X[x, y]$.

```
>> L=0;
```

Položíme počiatočnú dĺžku nulovú.

```
>>for i=1:N-1
    if i == N-1
        a = A(:,i);
        b = A(:,1);
    else
        a = A(:,i);
        b = A(:,i+1);
    end
    z = b-a;
    c = norm(z);
    L = L+c;
end
L
```

Náš n -uholník sa skladá zo 600 vrcholov $X_1, X_2, \dots, X_{n-1}; X_{n-1} = X_{600}$. Keďže predpokladáme uzavretosť krivky, platí $X_1 = X_n$. Princíp spočíva vo vytvorení jednotlivých bodov X_1 až X_{n-1} a následne vytvorení jednotlivých vektorov $X_{i+1} - X_i$, ktorých súčet euklidovských noriem je naša hľadaná dĺžka krivky, reps. obvod 600-uholníka. Náš program pracuje nasledovne, pre $i = 1, 2, \dots, n-2$ sa vo **for** cykle riadi vetvou **else**: V prvom kroku ak $i = 1$, $a = X_1$, $b = X_2$, prírastok k celkovej dĺžke predstavuje $c = |X_2 X_1|$. Analogicky postupujeme aj v ďalších krokoch, až prídeme po $i = n-2$ odkiaľ dostaneme $c = |X_{n-2} X_{n-1}|$.

Ostalo nám pripočítať posledný vektor spájajúci posledný bod X_{n-1} s prvým X_1 , čo vykoná podmienka **if**, kde $a = X_{n-1}$ a $b = X_1$.

Teda program postupne pripočítava aktuálnu dĺžku hrany n -uholníka, na ktorej sa nachádza pri danom i k súčtu predošlých, až vyčerpá všetky hrany a vráti výstup L .

Zavoláme funkciu obvod (x, y, N), kde $N = 601$, keďže $n - 1 = 600$.

```
>> obvod (x,y,601);
```

```
>> L = 3.8067e+003;
```

Teda pre obvod dostávame $L = 3,8067 \cdot 10^3$.

Pre zistenie obsahu n -uholníka použijeme funkciu zabudovanú v Matlabe **polyarea(x,y)**. Táto funkcia spája postupne za sebou nami zadané body $X(x, y)$, X_1 s X_2 , následne X_2 s X_3 , atď., až uzavrie celý n -uholník. Teda body treba označovať poriadne v poradí.

```
>>polyarea(x,y)
```

```
>>A = 2,3879e+004
```

Pre obsah dostávame $A = 2,3879 \cdot 10^4$.

Izoperimetrický kvocient pre vložku.č.1 je:

$$Q = \frac{4\pi A}{L^2} = 0,0207$$

Predpokladáme, že odchýlka od skutočného izoperimetrického kvocientu vložky, spôsobená konečným počtom bodov, nie je signifikantná, pretože sme zvolili dostatočne veľký počet bodov. Teda môžeme svoje tvrdenia o 600-uholníku preniesť na vložku. Vložka.č.1 má izoperimetrický kvocient **0,0207**.

Vložka.č.2

Vložka č.2 má tiež "bohate" rozvinuté ramená, tak ako Vložka.č.1, ktorá ich má trochu kostnatejšie. Narozdiel od Vložky.č.1 sa nám už ukazuje aj viac rozvinutý stred vložky, ktorý u prvej nevznikol. Pre vložku.č.2 vyberáme po pár pokusoch $n = 720$ bodov. Čiže na opis jedného "ramena" približne 120 bodov. Analogicky použijeme nami odvodený algoritmus **obvod(x,y,N)** a matlabovskú funkciu **polyarea(x,y)** na zistenie obvodu a obsahu nami skonštruovaného 720-uholníka.



Obr.10 : Vločka.č.2

```
>>obvod (x,y,721)
>>L = 5.9964e+003
>>polyarea(x,y)
>>A = 7.8298e+004
```

Pre obvod dostávame $L = 5.9964 \cdot 10^3$, pre obsah $A = 7.8298 \cdot 10^4$.

Teda izoperimetrický kvocient pre vločku.č.2 je $Q = \frac{4\pi A}{L^2} = \mathbf{0,0274}$.

Vločka.č.3

Tretia vločka v poradí je rovnako ako jej predchodkyne na ramenách dosť členitá, avšak opäť iným spôsobom, preto sme si ju pre výpočet vybrali. Tak ako pri vločke.č.2 aj tu sa nám vytvoril akýsi stred, ktorý bude pridávať obsah na daný obvod, teda zvyšovať izoperimetrický kvocient. Tak ako pri prvej vločke aj na opis vločky.č.3 použijeme 600 bodov, teda 100 bodov na opis jedného ramena.



Obr.11 : Vločka.č.3

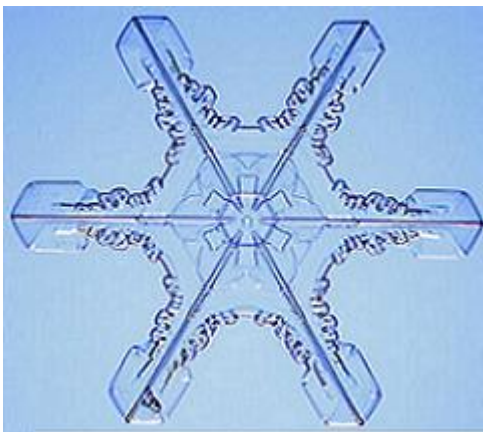
Výpočet obvodu a obsahu danej vločky:

```
>>obvod (x,y,601)
>>L = 3.3973e+003
>>polyarea(x,y)
>>A = 1.7078e+004
```

Teda pre vločku č.3 nám vyjde izoperimetrický kvocient:

$$Q = \frac{4\pi A}{L^2} = \mathbf{0,0186}$$

Vločka.č.4



Obr.12 : Vločka.č.4

Vločka č.4 je opäť menej členitá na ramenách v porovnaní s predošlými vločkami. Menej obsahu zbiera na ramenách a viac kumuluje svoj obsah v strede, kde vytvará pekný obrazec. Po pár pokusoch s označovaním bodov zistíme, že na opis tejto vločky nám bude stačiť 300 bodov, teda na jedno rameno pripadne približne 50 bodov.

Výpočet obvodu a obsahu danej vločky:

```
>>obvod (x,y,301)
```

```
>>L = 2.0697e+003
```

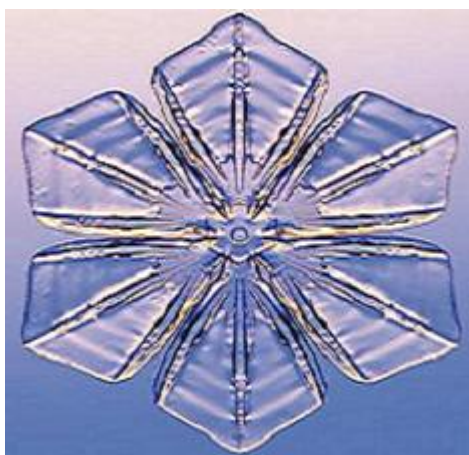
```
>>polyarea(x,y)
```

```
>>A = 4.9983e+004
```

Teda pre vločku č.4 dostávame izoperimetrický kvocient:

$$Q = \frac{4\pi A}{L^2} = \mathbf{0,1466}$$

Vločka.č.5



Obr.13 : Vločka.č.5

Vločka.č.5 je úplne iná ako predošlé, zatiaľ čo ony boli skôr "chudšie", až na vločku.č.4, ktorá už začala obsah kumulovať do stredu viac ako na ramenách. Našu v poradí piatu vločku by sme radili najskôr k "plnším". Táto vločka svojím jednoduchým vzhľadom pripomína kvietok so šiestimi krásne symetrickými lupeňmi. Pre jej jednoduchosť a takmer žiadnu členitosť nám stačí na jej opis 120 bodov, čo je cca 20 bodov na jedno rameno.

Výpočet obvodu a obsahu danej vločky:

```
>>obvod (x,y,301)
>>L = 2.4021e+003
>>polyarea(x,y)
>>A = 6.9378e+004
```

Teda pre vločku č. 5 dostávame izoperimetrický kvocient:

$$Q = \frac{4\pi A}{L^2} = \mathbf{0,1511}$$

Vločka.č.6



Obr.14 : Vločka.č.6

Vločka č.6 je opäť niečím odlišná od predošlých. Mohli by sme povedať, na základe toho čo sme tu zatiaľ mali, že je stredne členitá, niečo medzi prvou a piatou vločkou. Čím sa líši od predošlých a prečo sme si ju vybrali na výpočet je, že väčšinu obsahu ma viditeľne práve v ramenách. Pre danú vločku volíme počet opisných bodov $n= 300$, čiže približne 50 bodov na jedno rameno.

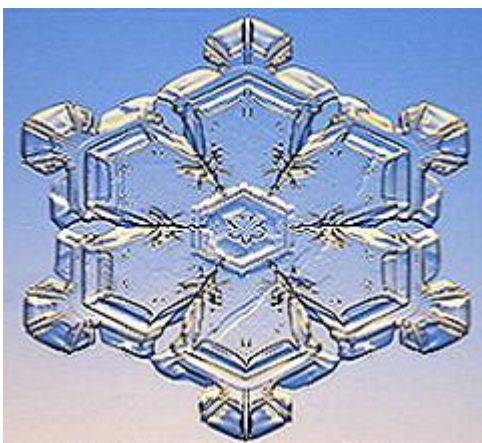
Výpočet obvodu a obsahu :

```
>>obvod (x,y,301)
>>L = 2.8355e+003
>>polyarea(x,y)
>>A = 7.5360e+004
```

Teda izoperimetrický kvocient vločky.č.6 je:

$$Q = \frac{4\pi A}{L^2} = \mathbf{0,1178}$$

Vločka.č.7



Obr.15 : Vločka.č.7

Siedma vločka je zaujímavá, pretože z prvého pohľadu nám nie je celkom jasné, kde končí stred a začínajú ramená. Táto vločka je jednoznačne "najplnšia", spomedzi spomínaných pred ňou, v zmysle, že na daný obvod vyzerá, že vyplňa najviac obsahu. Teda tak trochu tušíme, že táto vločka by mala mať najväčší izoperimetrický kvocient. Pre vločku č.7 po pár pokusoch, volíme počet bodov opisu $n = 180$. Nakoľko nie je priveľmi členitá bude nám pre opis jedného ramena stačiť 30 bodov.

Výpočet obvodu a obsahu :

```
>>obvod (x,y,301)
```

```
>>L = 1.9348e+003
```

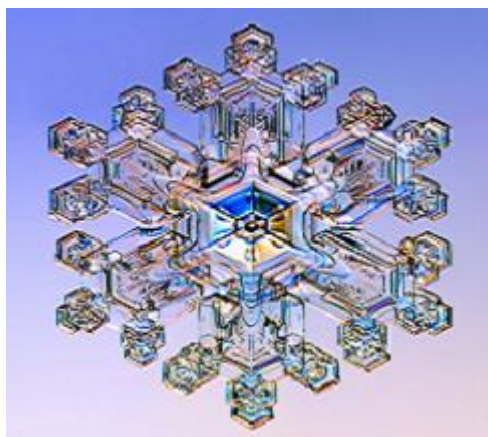
```
>>polyarea(x,y)
```

```
>>A = 6.1049e+004
```

Izoperimetrický kvocient vločky.č.7 je:

$$Q = \frac{4\pi A}{L^2} = \mathbf{0,2049}$$

Vločka.č.8



Obr.16 : Vločka.č.8

Ako poslednú vločku si spočítame vločku.č.8, ktorá je sama o sebe špecifická, štruktúrou síce pripomína vločku.č.7, no je oveľa komplikovanejšia, dokonca najkomplikovanejšia zo všetkých, aké sme doposiaľ spočítali.

Výpočet obvodu a obsahu :

```
>>obvod (x,y,301)
```

```
>>L = 4.5960e+003
```

```
>>polyarea(x,y)
```

```
>>A = 1.9725e+005
```

Izoperimetrický kvocient vločky.č.8 je:

$$Q = \frac{4\pi A}{L^2} = \mathbf{0,1173}$$

Záver

V našej práci sme sa zaoberali izoperimetrickým kvocientom Q uzavretých kriviek, ktorý môžeme chápať ako pomer obsahu oblasti ohraničenej danou krivkou a obsahu kružnice s rovnakým obvodom. Tento pomer môžeme interpretovať ako percentuálne vyjadrenie maximalizácie obsahu danej krivky. Nakoľko daná krivka, využíva potenciál svojho možného obsahu. Koľko percent obsahu kružnice s rovnakým obvodom, tvorí obsah oblasti ohraničenej našou krivkou. Ukázali sme si, ako možno Q spočítať pre rôzne krivky rôznymi spôsobmi. Na začiatku práce sme sa zamerali na hladké uzavreté krivky, v kapitole **Spojité krivky**. Hneď v úvode tejto kapitoly sme si vypočítali Q pre elipsu. Najprv sme si zobrali tzv. "Chudú elipsu", pre ktorú sa pomer hlavnej a vedľajšej poloosi blíži k nekonečnu. Ukázali sme si, že jej Q sa blíži k nule. Teda ak budeme zväčšovať obvod do nekonečna pri konštantnom obsahu, je to presný opak riešenia izoperimetrickej úlohy maximalizovať obsah pri danom obvode. Ako druhú elipsu sme zobrali tzv. "Okrúhlu elipsu", ktorej polomer hlavnej a vedľajšej poloosi sa blíži k jednotke, teda elipsa sa tvarom blíži k riešeniu izoperimetrického problému, asíce ku kružnici. Q sa v tomto prípade približuje k jednotke.

Ďalej sa nám v tejto kapitole podarilo spočítať Q pre ľubovoľnú krivku *Hypocykloidy*, ktorej polomer $r = 1$. Ukázali sme, že pre $R \rightarrow \infty$ sa Q limitne blíži k $\frac{\pi^2}{16}$, a teda *Hypocykloida* už pre $R \geq 100$ maximalizuje svoj obsah približne na 61,6%.

Nakoniec sme sa v tejto kapitole pozreli na *Cassiniho ovál*, kde sme si vytýčili cieľ vypočítať ako sa mení spolu s tvarom krivky jej izoperimetrický kvocient. Čiže vypočítať Q pre ľubovoľnú krivku *Cassiniho oválu*. Podarilo sa nám všeobecne cez parameter, ktorý odzrkadľuje zmenu krivky, vypočítať obsah oblasti ohraničenej takouto krivkou. Avšak napriek veľkej snahe sa nám už nepodarilo vyjadriť si dĺžku tejto krivky, kvôli komplikovaným integrálom. A tak sme sa rozhodli spočítať krivku *Cassiniho oválu* numericky, tak ako sme počítali nie hladké krivky v podkapitole **Vločky**. V práci sme uviedli výpočty pre dve "piškóty" s parametrom $k = 1,2$ a $k = 1,5$. Môžeme to vidieť graficky, rovnako výpočtom sme potvrdili, že so zvyšujúcim sa k , sa zvyšuje Q . Už pre parameter $k = 1,5$ nadobúda izoperimetrický kvocient hodnotu 0.9146, teda táto piškóta maximalizuje svoj obsah už na vyše 91 %.

V poslednej podkapitole **Vločky** sme si dokázali izoperimetrickú nerovnosť. Pozreli sme sa na izoperimetrické kvocienty rôznych vločiek, ktoré sme ráтали numericky v ma-

tematickom softvéri Matlab. Najmenší izoperimetrický kvocient nám vyšiel pre vložku č.3, $Q = 0.0186$, teda maximalizuje svoj obsah len na približne 1.86 %. Najväčší kvocient sme dostali pre vložku č.7, $Q = 0.2049$, teda táto vložka maximalizuje svoj obsah približne na 20.5 %.

V práci sme sa naučili, ako sa dajú komplikované integrály pre výpočet obsahu a obvodu napríklad *lemniskáty* alebo *piškóty*, previesť na "Eliptické parametrické integrály", ktoré sú tabulované. Odvodili sme "kvázi vzorec" na výpočet izoperimetrického kvocientu *hypocykloidy* s polomerom $r = 1$. Naučili sme sa počítať nie len analyticky, ale aj numericky pomocou Matlabu. Ukázali sme si rôzne spôsoby na výpočet dĺžky krivky a obsahu oblasti ohraničenej touto krivkou, teda ak nevieme vypočítať obsah, resp. dĺžku krivky jedným spôsobom môžeme použiť iný. Hlavne sme sa však naučili tvoriť matematický text.

Táto práca je prínosom, pre každého, kto sa kedy márne pokúšal počítať dĺžku či obsah elementárnej oblasti krivky, keďže v práci ponúkame hneď niekoľko spôsobov ako na to. Rovnako je prínosom poznatok, že ak niečo nevieme počítať analyticky, ešte stále sa to dá počítať numericky s istou nepresnosťou, ktorú vieme minimalizovať.

Do budúcnosti by bolo možné dopočítať dĺžku *piškóty* a vyjadriť ju parametricky, tak ako sa nám to podarilo s obsahom. Tým pádom by bolo možné vyjadriť analyticky izoperimetrický kvocient pomocou parametra k , ktorý by symbolizoval tvar krivky. Čím väčšie k tým sa krivka viac podobá kružnici, tým je Q väčšie.

Tiež by bolo možné sa pozrieť na počítanie obvodu vložiek inak. Vieme totiž, že vložky rastú v každom smere inou rýchlosťou, a teda by sme mohli dĺžke v danom smere priradiť váhu na základe rýchlosti, akou vložka rastie v danom smere. Teda by sme dostali nejaký váhovaný obvod, ktorý by bol súčtom jednotlivých dĺžok v daných smeroch vynásobených koeficientom, ktorý by interpretoval rýchlosť rastu v danom smere. Izoperimetrický pomer by sme nahradili anizoperimetrickým.

Zoznam použitej literatúry

- [1] Encyclopedia of Mathematics : *izoperimetrická nerovnosť*, dostupné na internete (31.5.2012):
http://www.encyclopediaofmath.org/index.php/Isoperimetric_inequality
- [2] Fyzikálna olympiáda: cassiniho oval, dostupné na internete (31.5.2012):
<http://fyzikalniolympiada.cz/texty/matematika/mkrivek.pdf>
- [3] Img.groundspeak: obrázok vločky.č.1, dostupné na internete (31.5.2012):
<http://img.groundspeak.com/cache/9f065d9f-fac2-4c36-ac37-8851dacb5dd2.jpg>
- [4] Isifa: obrázok vločky.č.3, dostupné na internete (31.5.2012):
http://www.isifa.com/data/dispatches/ed/167/_main.jpg
- [5] Its caltech: obrázok vločky.č.8, dostupné na internete (31.5.2012):
<http://www.its.caltech.edu/atomic/snowcrystals/vermont/w041219b055.jpg>
- [6] Jo-online: obrázok vločky.č.2, dostupné na internete (31.5.2012):
<http://jo-online.vsb.bc.ca/keller/wp-content/uploads/2010/11/snowflakes.jpg>
- [7] Kollár, M., Kossaczká, L., Ševčovič, D.: *Diferenciálny a integrálny počet funkcií viac premenných v príkladoch*, vysokoškolské skriptá, Univerzita Komenského, Bratislava, (1996)
- [8] Matalyza: vzorce pre krivky dané parametricky, dostupné na internete (31.5.2012): <http://matalyza.wz.cz/temy/tema6.pdf>
- [9] Patrow: obrázok vločky.č.7, dostupné na internete (31.5.2012):
http://www.partow.net/images/snowflakes/images/snow_flake_01.jpg
- [10] Proof4truth: obrázok vločky.č.6, dostupné na internete (31.5.2012):
http://proof4truth.com/wp-content/uploads/2010/07/snow_flake_0.jpg
- [11] SnowflakeBentley: Bentley, obrázok Bentleyho vločky, dostupné na internete (31.5.2012): <http://snowflakebentley.com/bio.htm>

- [12] Ševčovič, D., Yazaki, S.: *Evolution of plane curves with a curvature adjusted tangential velocity*, The JJIAM Publishing Committee and Springer(24.2.2011), 422-426
- [13] The Mathematical Sciences Digital Library: citácia, dostupné na internete (31.5.2012): <http://mathdl.maa.org/mathDL/46/?pa=content&sa=viewDocument&nodeId=2344&pf=1>
- [14] The Math Forum: izoperimetrický kvocient, dostupné na internete (31.5.2012): <http://mathforum.org/library/drmath/view/55406.html>
- [15] Wolfram Math World: izoperimetrický kvocient, dostupné na internete (31.5.2012): <http://mathworld.wolfram.com/IsoperimetricQuotient.html>
- [16] Wolfram Math World: eliptické parametrické integrály, dostupné na internete (31.5.2012): <http://mathworld.wolfram.com/EllipticIntegral.html>
- [17] Wolfram Math World: hypocykloida, dostupné na internete (31.5.2012): <http://www.wolframalpha.com/input/?i=hypocykloid>
- [18] Wordpress: obrázok vložky.č.4, dostupné na internete (31.5.2012): <http://milanturek.files.wordpress.com/2010/07/sneh-vlocka4.jpg>
- [19] Wordpress: obrázok vložky.č.5, dostupné na internete (31.5.2012): <http://milanturek.files.wordpress.com/2010/07/sneh-vlocka8.jpg>
- [20] Zdráhal, T.: *Příručka k sázecímu systému LaTeX*, (22.6.2004)