

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY



LIMITY EKONOMICKEJ A FINANČNEJ MATEMATIKY

BAKALÁRSKA PRÁCA

2012

Mária PERIGNÁTHOVÁ

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY

LIMITY EKONOMICKEJ A FINANČNEJ MATEMATIKY

BAKALÁRSKA PRÁCA

Študijný program:	Ekonomická a finančná matematika
Študijný odbor:	1114 Aplikovaná matematika
Školiace pracovisko:	Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky
Vedúci práce:	Mgr. Martin Kollár, PhD.

Bratislava 2012

Mária PERIGNÁTHOVÁ



Univerzita Komenského v Bratislave
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

ZADANIE ZÁVEREČNEJ PRÁCE

Meno a priezvisko študenta: Mária Perignáthová
Študijný program: ekonomická a finančná matematika (Jednoodborové štúdium, bakalársky I. st., denná forma)
Študijný odbor: 9.1.9. aplikovaná matematika
Typ záverečnej práce: bakalárska
Jazyk záverečnej práce: slovenský

Názov: Limity ekonomickej a finančnej matematiky

Cieľ: Na konkrétnych motivačných príkladoch z ekonomickej a finančnej matematiky zrozumiteľnou formou (pre maturantov strednej školy a začínajúcich vysokoškolákov) uviesť podstatu niektorých ekonomických úloh a modelov. Naznačiť hranice toho, čo možno týmto študentom ukázať a objasniť bez pomoci vysokoškolských metód (ako napr. diferenciálne alebo diferenčné rovnice, stochastické modely). Limity tu teda chápeme ako matematický pojem aj ako hranice.

Vedúci: Mgr. Martin Kollár, PhD.

Dátum zadania: 16.10.2011

Dátum schválenia: 27.10.2011

doc. RNDr. Margaréta Halická, CSc.
garant študijného programu

.....
študent

.....
vedúci

Podakovanie

Týmto spôsobom chcem úprimne poďakovať svojmu vedúcemu bakalárskej práce Mgr. Martinovi Kollárovi, PhD. za cenné pripomienky, rady a vedenie, za ochotu a pomoc pri realizovaní výskumu a v neposlednom rade za optimizmus a nevyčerpatel'né nadšenie počas celej doby písania práce.

Zároveň vyjadrujem vďaku aj svojim rodičom a priateľom za morálnu podporu, starostlivosť a porozumenie počas tvorby tejto práce.

Abstrakt

PERIGNÁTHOVÁ, Mária: *Limity ekonomickej a finančnej matematiky* [Bakalárska práca], Univerzita Komenského v Bratislave, Fakulta matematiky, fyziky a informatiky, Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky; vedúci práce: Mgr. Martin Kollár, PhD., Bratislava, 2012, 52s.

Práca obsahuje motivačné príklady z oblasti ekonomickej a finančnej matematiky, ktoré sú vysvetľované spôsobom zrozumiteľným aj pre žiaka strednej školy. Príklady sú vybrané z matematickej analýzy, algebry, finančnej matematiky, ekonometrie a teórie hier. V práci sú naznačené limity (hranice) toho, čo možno vysvetliť žiakom stredných škôl bez použitia vysokoškolských metód. Limity sú tiež nástrojom použitým na riešenie niektorých motivačných príkladov. V projektovej časti práce sa potvrdila hypotéza, že žiaci s vyšším matematickým vzdelaním dokážu lepšie uplatniť svoje vedomosti v konkrétnom prípade.

Kľúčové slová: motivácia, limita, financie, riešenie

Abstract

PERIGNÁTHOVÁ, Mária: *The Limits of Economic and Financial Mathematics* [Bachelor Thesis], Comenius University in Bratislava, Faculty of Mathematics, Physics and Informatics, Department of Applied Mathematics and Statistics; Supervisor: Mgr. Martin Kollár, PhD., Bratislava, 2012, 52p.

The Bachelor thesis involves the motivational examples and problems of finance and economics. These are explained and solved in a way that may be comprehensible and understandable for a high school student. Examples are chosen from Mathematical Analysis, Algebra, Financial Mathematics, Econometrics and Theory Game. In the thesis there are indicated the limits of ability of high school students to understand the solution of specific problems without using the methods of solution taught at the universities. In addition, the thesis deals with the limits which are used as a tool for the solution of the problems. The research acknowledged the hypothesis that students with higher mathematical education can deal with the mathematical problems better.

Keywords: motivation, limit, finance, solution

Obsah

Zoznam ilustrácií	8
Zoznam tabuliek	9
Úvod.....	10
1 Úroky a úročenie	11
1.1 Mentálna príprava	11
1.2 Príklad o Oliverovi	12
1.3 Eulerova konštanta	14
2 Fibonacci	17
2.1 Motivácia. Zajačí problém I.....	17
2.2 Mentálna príprava I. (vlastné čísla, vlastné vektory)	19
2.2.1 Príklad	19
2.3 Mentálna príprava II. (Diagonálny tvar matice).....	20
2.4 Zajačí problém II.....	21
2.5 Zlatý rez.....	22
3 Bootstrap metóda a tiež free lunch	24
3.1 Mentálna príprava I. (časová štruktúra úrokových mier)	24
3.2 Príklad o dlhopisoch	25
3.3 Mentálna príprava II. (arbitráž).....	27
3.4 Príklad o obede zdarma	28
4 Lineárny regresný model.....	29
4.1 Príklad o reklame na prací prášok.....	29
4.2 Koeficienty	31
4.3 Test signifikancie odhadov parametrov.....	31
4.4 Test signifikancie regresie	32
4.5 Test normality chýb.....	32
4.6 Testovanie hypotézy s ekonomickou interpretáciou.....	34
4.7 Test multikolinearity	34
5 Vážňova dilemma	34
5.1 Príklad o dvoch vážňoch	35
5.2 Strategický tvar hry	36
5.3 Ekvilíbrio hry	37

6 Projekt výskumu	37
6.1 Cieľ výskumu	38
6.2 Charakteristika vzorky žiakov.....	38
6.3 Hypotézy výskumu	38
6.4 Vyhodnotenie a interpretácia výsledkov	38
6.5 Kvalitatívne vyhodnotenie	41
Záver	42
Zoznam použitej literatúry	44
Prílohy	46

Zoznam ilustrácií

Obr. 1 Jednoduché úročenie	11
Obr. 2 Zložené úročenie	12
Obr. 3 Frekvencia úročenia	14
Obr. 4 Grafické znázornenie limity postupnosti [5]	17
Obr. 5 Rodostrom zajacov [18]	18
Obr. 6 Zlatý rez úsečky [12]	22
Obr. 7 Fibonacciho zlomky a zlatý rez [11]	23
Obr. 8 Časová štruktúra úrokových mier (vľavo rastúca, vpavo klesajúca)	24
Obr. 9 Časová štruktúra vypočítaných úrokových mier	27
Obr. 10 Model popisujúci predajnosť - výstup	31
Obr. 11 Obrázok štruktúry rezíduí	33
Obr. 12 Histogram s popisnými štatistikami	33
Obr. 13 Graf závislosti úspešnosti riešenia od náročnosti príkladu, sledujeme typ žiaka	39
Obr. 14 Graf závislosti úspešnosti riešenia od typu žiaka, sledujeme stupeň náročnosti	40

Zoznam tabuliek

Tab. 1 Vývoj stavu na účte	12
Tab. 2 Ponúkané dlhopisy na trhu (podľa [10], str. 12)	26
Tab. 3 Vypočítané úrokové miery [10]	27
Tab. 4 Tabuľka transakcií (podľa [10]).....	29
Tab. 5 Korelácia medzi premennými modelu	34
Tab. 6 Tabuľka výplat - nesprávna	36
Tab. 7 Tabuľka výplat - správna	36
Tab. 8 Kvantitatívne výsledky výskumu	39

Úvod

Stan Gudder, profesor matematiky, raz povedal, že podstata matematiky nie je robiť z jednoduchých vecí zložité, ale naopak, zjednodušiť veci komplikované. Žart, figliarstvo, či estráda zo strany pána profesora? Len si spomeňme na často krát záhadne znejúce definície vychádzajúce z úst prednášajúceho, či pitoreskné hieroglyfy, skvejúce sa na tabuli po hodine matematiky. Kde je teda pravda?

Ekonomické procesy patria medzi spomínané komplikované deje, ktoré sa snaží matematika zjednodušiť a vniesť do nich svetlo. Keďže ekonomika a financie sa týkajú všetkých ľudí, budeme spracovávať príklady z aplikovanej matematiky.

V práci sa pokúsime vytvoriť rozhranie medzi žiakmi strednej školy a študentmi vysokej školy. Pokiaľ zvládnu maturanti pochopiť učivo, či náročnú terminológiu vysokoškolskej matematiky? Dá sa univerzitná učebná látka vysvetliť zjednodušeným, inovatívnym spôsobom? Na túto otázku budeme hľadať odpoveď na stránkach, ktoré sa snažia spopularizovať matematiku, napríklad v [8], [17] a tiež v gymnaziálnych osnovách. Na druhej strane, občas pomôže precíznejšie vysvetlenie riešenia príkladu a napísanie ho krok po kroku, ktoré budeme zhrádzať v skriptách [1], či iných študijných materiáloch, napríklad v [2], [10].

Cieľom tejto práce je nájsť alebo vytvoriť motivujúce príklady z oblasti ekonomickej a finančnej matematiky, vyriešiť ich zrozumiteľnou formou, čo v tomto prípade znamená, podať ich spôsobom adekvátnym k znalostiam žiakov strednej školy. V neposlednom rade sa zameriame na limity. Limity ako hranice toho, čo môžeme žiakom vysvetliť bez použitia vysokoškolskej matematiky a limity ako matematický nástroj používaný pri riešení niektorých motivačných príkladov. Názov práce by mohol zvädzať k mylnému názoru, že sa budeme zaoberať hranicami použitia matematických aparátov vo finančnom sektore. Napriek zaujímavej myšlienke to nie je náplňou tejto práce a ani to nie je jej cieľom.

O aktuálnosti témy svedčí stále sa znižujúci záujem o štúdium matematiky. Žiakom veľmi rýchlo dochádza trpezlivosť boriť sa s náročnou matematickou syntaxou. V súčasnosti je tendencia všetko získať instantne, vedomosti na počkanie, a ak niečo nie je dostatočne zrozumiteľné, prestať tomu venovať pozornosť. Je preto dôležité, nadchnúť žiakov stredných škôl motivačnými príkladmi, ktoré bude obsahovať táto práca a tiež podať ich riešenia laicky, zjednodušene a zaujímavo.

1 Úroky a úročenie

Úroky, jednoduché a zložené úročenie patria medzi najzákladnejšie finančné pojmy. Stretávame sa s nimi pri bežných bankových úkonoch, ako napríklad sporenie, či pôžička. Požičanie peňazí nie je zadarmo. Človek dokáže vždy nájsť využitie peňazí, a preto ich požičanie musí niečo stáť. Vieme určiť, koľko by toto požičanie malo stáť? Názory sa rôznia. Odlišné miesta účtujú rozličné sumy. Zvyčajne však je suma za požičanie vyjadrená ako percentuálny podiel z požičanej sumy. To sa nazýva úrok.

1.1 Mentálna príprava

Definícia 1 (Podľa [3]). *Úrok je suma peňazí za poskytnutie peňažných prostriedkov na vopred dohodnuté obdobie. Pri vkladoch je to suma, ktorú platí banka klientovi, pri úveroch suma, ktorú platí klient banke.*

Rozlišujeme jednoduchý a zložený úrok. Rozdiel si ukážeme na príklade. Ak si dnes požičiame z banky 100€, tak pri jednoduchom 10 percentnom úroku na 5 rokov, nám v banke vznikne každý rok úrok 10€ (teda 10 percent zo 100). V poslednom 5. roku vrátime banke požičanú sumu 100€ navýšenú o úroky. Za obdobie 5 rokov sa vytvorí úrok 50€. Celkovú sumu vrátime banke vo výške 150€.

Suma	100€	→	110€	→	120 ...
	10% zo 100 ↘		↗ 10% zo 100 ↘		↗ 10% zo 100 ↘
Úrok		10		10	10...

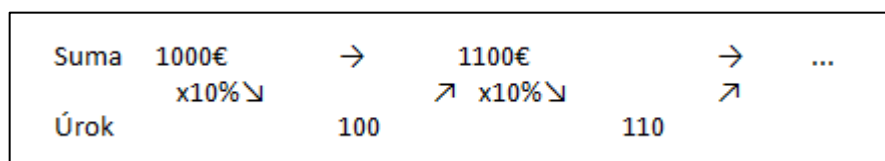
Obr. 1 Jednoduché úročenie

Banka by si však mohla povedať, že ak by sme jej vrátili po roku sumu spolu s úrokom, čiže 110€, ona by nám ich požičala znova, tak úrok v druhom roku by mal byť vypočítaný zo sumy 110€, a nie 100€. Teda úrok v novom období sa nepočíta z pôvodnej sumy, ale už zo sumy navýšenej o úroky. Voláme ho zložený úrok a je to štandardný spôsob počítania úroku [8].

1.2 Príklad o Oliverovi

Študent Oliver sa rozhodne, že keď skončí školu, bude pestovať maliny. Aby sa na to finančne pripravil, rozhodne sa rozbiť svoje prasiatko a peniaze investovať. Oliver chce zistiť, v ktorej banke sa mu to najviac oplatí. Vloží svojich 1000€ na dobu 5 rokov do banky a po uplynutí 5 rokov chce mať čo najviac peňazí.

a) Prvá banka ponúkne Oliverovi ročný 10% zložený úrok. Spôsob, akým sa počíta, je zachytený na obrázku (Obr. 2):



Obr. 2 Zložené úročenie

Pomôžme Oliverovi nakresliť si tabuľku, aby zistil, ako sa bude vyvíjať stav na jeho účte.

Tab. 1 Vývoj stavu na účte

Rok	Suma na začiatku roku	Úrok	Suma na konci roku	$\frac{\text{suma na konci}}{\text{suma na začiatku}}$
0	A=1000	$1000 \times 10\% = 100$	1100	1,1
1	1100	110	1210	1,1
2	1210	121	1331	1,1
3	1331	133,10	1464,1	1,1
4	1464,1	146,41	1610,51	1,1
5	B=1610,51	-	-	-

b) Nájďme pre Olivera vzorec pre výpočet Budúcej hodnoty B (koľko peňazí si po 5 rokoch vyberie z banky), ak Aktuálna vložená suma je $A = 1000\text{€}$.

Pozrime sa najprv na to, čo sa deje prvý rok:

Pôžička + úrok

$$1000 + 1000 \times 10\%$$

To isté môžeme zapísať nasledovne:

$$1000 \times 1 + 1000 \times 0,10$$

$$1000 \times (1 + 0,10)$$

$$1000 \times 1,10$$

Vidíme, že pripočítanie 10 percentného úroku funguje rovnako ako násobenie číslom 1,10 (1000 + 1000 × 10 = 1000 + 100 = 1100 je to isté ako 1000 × 1,10 = 1100).

Uplatníme takéto uvažovanie aj pre ostatné roky:

$$1000 \times 1,10 = 1100 \rightarrow 1100 \times 1,10 = 1210 \rightarrow 1210 \times 1,10 = 1331 \rightarrow \dots$$

Respektíve

$$1000 \times 1,10 \times 1,10 \times 1,10 \times 1,10 \times 1,10 = 1610,51$$

$$B = A(1 + 0,10)^5 = 1000 \cdot 1,10^5 = 1610,51$$

c) Oliver nie je spokojný s výškou svojho výnosu a povie si, že skúsi 10 percentný úrok s mesačným úročením. (Nie 10% každý mesiac, ale mesačný úrok bude $10\%/12$ a takýto úrok sa mu pripočíta každý mesiac, čiže nie len raz za rok, ale 12krát za rok).

Nájdime vzorec pre výpočet Budúcej hodnoty B s mesačným úročením. Koľko peňazí zarobí Oliver týmto spôsobom?

$$B = A\left(1 + \frac{0,1}{12}\right)^{5 \times 12} = 1645,31$$

d) Čo ak sa suma nebude úročiť 12krát za rok, ale n - krát za rok. Ako bude vyzeráť vzorec potom?

$$B = A\left(1 + \frac{0,1}{n}\right)^{5n}$$

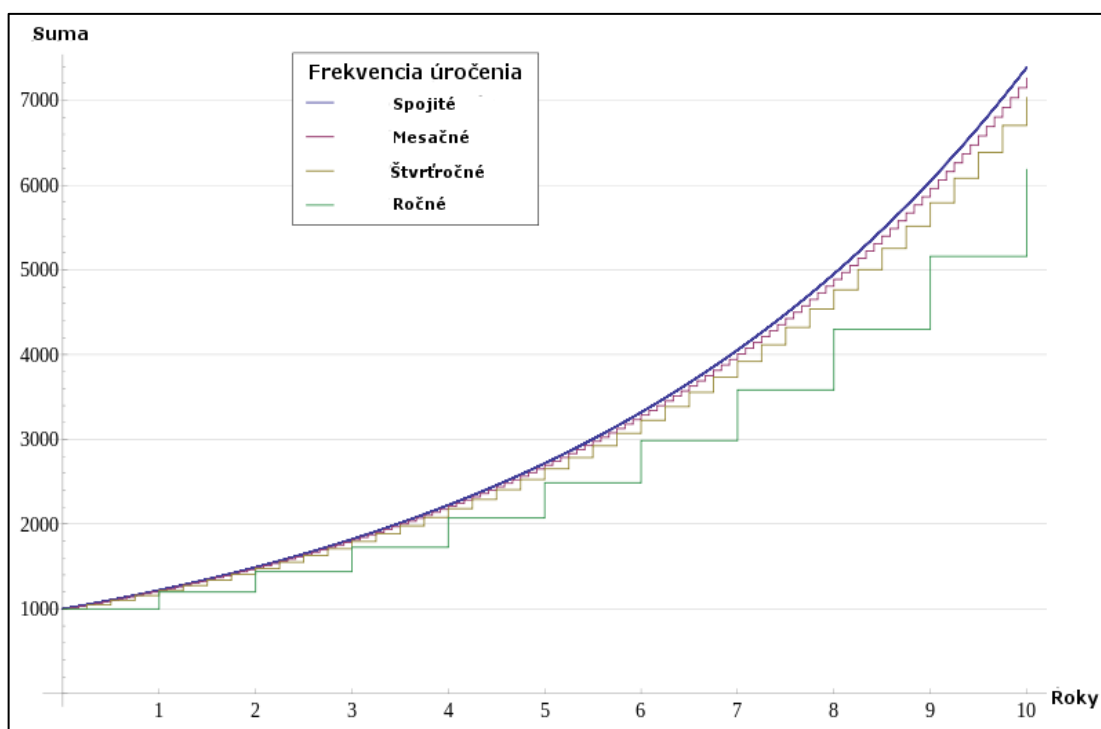
e) Koľko zarobí Oliver, ak n bude veľmi veľké (nekonečné), čiže bude sa úročiť nepretržite, ak vieme, že

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e ?$$

Približná hodnota $e \approx 2,718\dots$

$$B = \lim_{n \rightarrow \infty} 1000 \left(1 + \frac{0,1}{n}\right)^{5n} = \lim_{n \rightarrow \infty} 1000 \left(1 + \frac{0,1}{n}\right)^{\frac{n}{0,1} \times 0,1 \times 5} = 1000 \times e^{0,5} = 1648,72.$$

Pre Olivera, ktorý chcel investovať, sa ako najvýhodnejšie ukázalo spojité úročenie. Avšak, ak by si Oliver peniaze od banky požičiaval, tento spôsob úročenia by sa ukázal ako najnevýhodnejší.



Obr. 3 Frekvencia úročenia

Na Obr. 3 vidíme efekt 20% úroku na počiatočnú investíciu 1000€ pri rôznych frekvenciách úročenia (prevzaté z [19]). S rastúcim časom sa rozdiel medzi jednotlivými frekvenciami úročenia prehľbuje.

1.3 Eulerova konštanta

Pri spojitom úročení sme sa stretli so zaujímavou postupnosťou, ktorú skúmal Jacob Bernoulli už v 17. storočí. Označme si ju $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, $n \in \mathbb{N}$.

Bernoulli pri svojom bádani postrehol, že ak rastie n , hodnota a_n sa zväčšuje a zároveň klesá hodnota prírastku ($a_n - a_{n-1}$). Toto poznanie môžeme zhrnúť nasledujúcim spôsobom:

Veta 1 (Podľa [7]). Postupnosť $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ je rastúca a zhora ohraničená.

Dôkaz [6], [7].

Postupnosť je rastúca práve vtedy, keď platí:

$$a_{n+1} > a_n,$$

to sa dá prepísať ako

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1.$$

Dosadíme do nerovnice našu postupnosť:

$$\begin{aligned}\frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right) \frac{\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}} = \left(1 + \frac{1}{n}\right) \frac{\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}} = \\ &= \left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}\right)^{n+1} = \left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right)^{n+1}\end{aligned}$$

Aplikujme Bernoulliho nerovnosť

$$(1+x)^n > 1+nx, \quad (x > -1, x \neq 0, n \in \mathbb{N}, n > 1)$$

na náš prípad:

$$\left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right)^{n+1} > \left(1 + (n+1)\left(-\frac{1}{(n+1)^2}\right)\right) = 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}$$

Ešte prenásobme výrazom $\left(1 + \frac{1}{n}\right)$, aby sme dostali, čo potrebujeme:

$$\begin{aligned}\left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right)^{n+1} &> \left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(\frac{n}{n+1}\right) = \frac{n+1}{n} + \frac{1}{n+1} = 1 \\ \frac{a_{n+1}}{a_n} &> 1\end{aligned}$$

Vidíme, že postupnosť a_n je rastúca. Potrebujeme ďalej dokázať, že je zhora ohraničená.

Majme takúto funkciu

$$f(x) = x - \ln(1+x), \quad x > -1.$$

Nájďme jej minimum na intervale $(-1, \infty)$:

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{1+x} = 0$$

Teda funkcia nadobúda extrém v bode $x = 0$.

Overme si, že sme našli minimum:

$$f''(x) = \frac{1}{(1+x)^2}$$

Nakoľko

$$\frac{1}{(1+x)^2} > 0,$$

funkcia je konvexná a v danom bode nadobúda minimum. Teda funkcia $f(x)$ klesá na intervale $(-1, 0)$ a rastie na intervale $(0, \infty)$.

Overme, že platí:

$$x \geq \ln(1+x).$$

Túto nerovnosť môžeme prepísať do tvaru

$$x - \ln(1+x) \geq 0,$$

Teda

$$f(x) \geq 0.$$

Keďže funkčná hodnota v bode minima $x = 0$ je $f(0) = 0$, nutne musí platiť $f(x) \geq 0$.

Riešme nerovnicu $x \geq \ln(1+x)$ pre $x = \frac{1}{n}$:

$$\frac{1}{n} \geq \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

$$1 \geq n \cdot \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

$$1 \geq \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

$$e \geq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

Ukázali sme, že postupnosť $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ je zhora ohraničená.

■

Záver.

Ak a_n rastie a je zhora ohraničená, existuje konečná limita a_n (pre $n \rightarrow \infty$) a označuje sa e .

Túto skutočnosť zapisujeme

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.$$

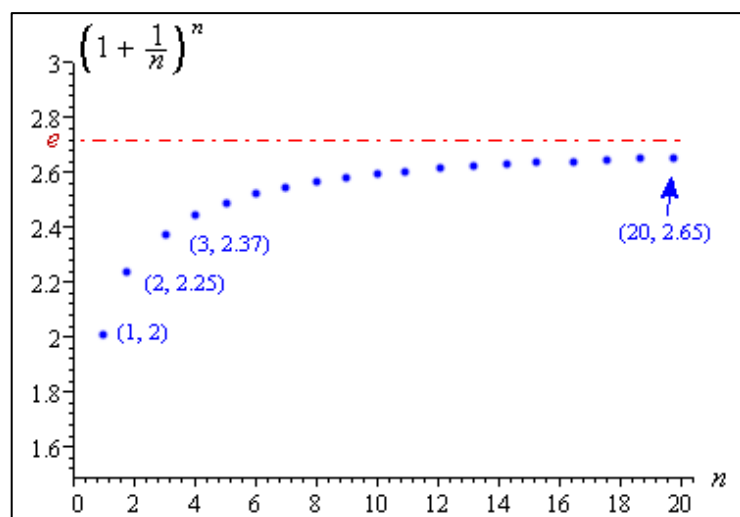
Eulerovo číslo e je dôležitá matematická konštanta, je základom prirodzeného logaritmu.

V praxi sa používa napríklad pri počítaní spojitého úročenia. Meno dostala na počesť švajčiarskeho matematika Leonharda Eulera, ktorý ako prvý dokázal iracionalitu čísla e . [19]

Numerická hodnota čísla e , vyjadrená na 50 desatinných miest je

$$e = 2.71828\ 18284\ 59045\ 23536\ 02874\ 71352\ 66249\ 77572\ 47093\ 69995...$$

Na obrázku (Obr. 4) je znázornené, ako sa hodnota výrazu $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ so zväčšujúcim sa n , stále viac približuje hodnote e .



Obr. 4 Grafické znázornenie limity postupnosti [5]

2 Fibonacci

V tejto kapitole chceme spomenúť možnosti, ktoré nám ponúka fascinujúca Fibonacciho postupnosť a zlatý rez. Pojmy, ktoré vymizli z učebných osnov stredných škôl, zohrali v minulosti významnú úlohu a presiahli rámec matematiky. Fibonacciho postupnosť, napriek svojej zdanlivej jednoduchosti, má spolu so zlatým rezom široké využitie v rôznych oblastiach vedy a umenia, vyskytuje sa v prírode, v anatómií rastlín, v chémii, v astronómii... [17]

V krátkosti sa oboznámme s postupnosťou. Každé číslo vo Fibonacciho postupnosti je súčtom predchádzajúcich dvoch čísel. To znamená, že prvé členy postupnosti sú takéto: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, ... Ľubovoľné číslo postupnosti je približne 1,618-ráz väčšie ako predchádzajúce. Ak vydáme ktorékoľvek číslo postupnosti číslom, ktoré nasleduje, dostaneme približne 0,618, napríklad $8/13=0,6153$, $21/34=0,617$. Tento pomer je známy ako zlatý rez (bližšie si ho špecifikujeme neskôr). [9]

2.1 Motivácia. Zajačí problém I.

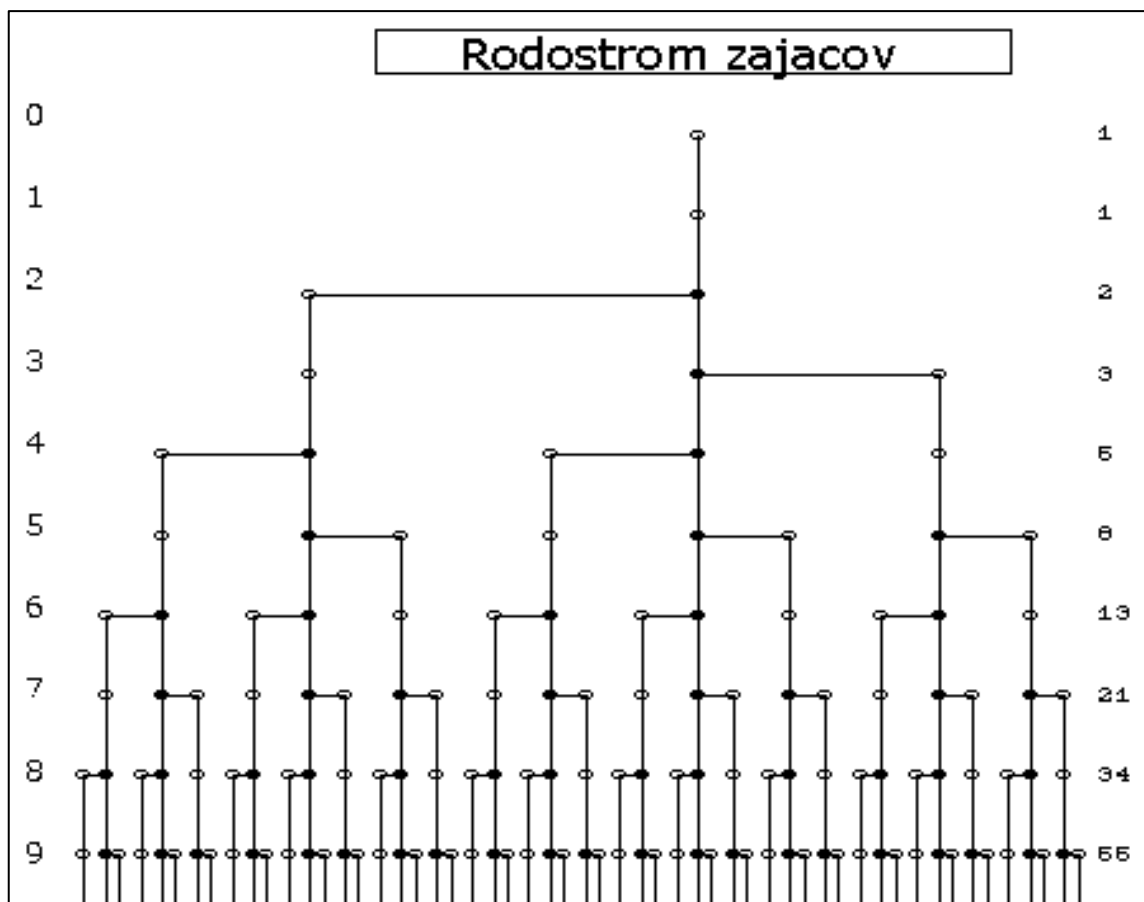
V roku 1202 sa Fibonacci zaoberal reprodukciou zajacov pri ideálnych podmienkach:

- na začiatku máme 1 pár zajacov – samca a samičku, ktorí sú práve narodení
- rozmnožovať sa začínajú po 1. mesiaci
- samička porodí každý mesiac 1 pár zajacov – samca a samičku
- zajace nikdy nezomrú

Koľko párov zajacov tu bude o rok? (Podľa [17]).

0. mesiac: Na začiatku experimentu máme 1 pár zajacov, vychádzajúc z podmienok.
1. mesiac: Prvý pár sa síce spáril, ale ešte nedáva život, preto je stále iba 1 pár zajacov.
2. mesiac: Prvý pár dal život druhému páru, spolu 2 páry zajacov.
3. mesiac: Pôvodný pár znova porodí. Druhý pár sa spáril, ale ešte nedal život, čo dáva spolu 3 páry zajacov.
4. mesiac: Pôvodný pár porodí, pár z druhého mesiaca porodí, pár z tretieho mesiaca sa spáril, spolu 5 párov zajacov.
5. mesiac: Páry, ktoré žijú aspoň 2 mesiace, porodí. To dáva 3 nové páry. Spolu 8 párov.

Vieme predvídať počet párov bez toho, aby sme prechádzali cez každý jeden individuálny pár? Samozrejme, stačí si uvedomiť, že na to, aby sme vypočítali celkový počet zajacov v aktuálnom mesiaci, treba sčítať počet párov, ktoré žili v predchádzajúcich dvoch mesiacoch. Ide teda o Fibonacciho postupnosť.



Obr. 5 Rodostrom zajacov [18]

Nech $F(k)$ označuje počet králikov v k -tom mesiaci a vychádzajúc z podmienok, nech $F(0) = F(1) = 1$. Potom našu postupnosť môžeme zapísať nasledovne:

$$F(k+2) = F(k+1) + F(k)$$

Postupnosť je takto definovaná rekurentne. To znamená, že aby sme našli nasledujúci člen postupnosti, musíme poznať dva (a teda všetky) predchádzajúce členy. To môže byť veľmi náročné pre veľké hodnoty k .

Otázka teda znie: Ako predvídať počet párov bez postupného počítania?

Skúsme nahradiť definičnú rovnosť Fibonacciho postupnosti $F(k+2) = F(k+1) + F(k)$ nejakou maticovou rovnosťou v tvare $u_{k+1} = A * u_k$. Nech A je 2×2 matica a vektor $u_k = \begin{pmatrix} F(k) \\ F(k+1) \end{pmatrix}$.

$$\text{Potom } u_{k+1} = \begin{pmatrix} F(k+1) \\ F(k+2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F(k+1) \\ F(k+1) + F(k) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F(k) \\ F(k+1) \end{pmatrix} = A * u_k.$$

$$\text{Teda } u_{k+1} = A * u_k = A * (A * u_{k-1}) = A * A * u_{k-2} = \dots = A^k * u_1 = A^{k+1} * u_0.$$

To môžeme zapísať ako

$$u_k = A^k * u_0, \text{ kde } u_0 = \begin{pmatrix} F(0) \\ F(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ak by sme vedeli jednoducho vypočítať A^k , už by to bolo ľahké. [15]

2.2 Mentálna príprava I. (vlastné čísla, vlastné vektory)

V nasledujúcej časti budeme skúmať rovnicu tvaru

$$Ax = \lambda x,$$

kde A je $n \times n$ matica, $x \in \mathbb{R}^n$, $\lambda \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$, $x \neq \vec{0}$.

Riešenia takejto rovnice opisujú vlastnosti matice A a majú obrovský význam v diferenčných a diferenciálnych rovniciach.

Definícia 2 [15]. Číslo λ je **vlastná hodnota** matice A , ak $\det(A - \lambda I) = 0$.

Rovnicu $\det(A - \lambda I) = 0$ voláme **charakteristická rovnica** alebo aj **charakteristický polynóm**.

Pre každé riešenie charakteristickej rovnice bude existovať nenulový **vlastný vektor** x , spĺňajúci $Ax = \lambda x$.

2.2.1 Príklad

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & 1 - \lambda \end{pmatrix}$$

$$\det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & 1 - \lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - \lambda - 1 = 0$$

Riešením kvadratickej rovnice dostaneme vlastné hodnoty:

$$\lambda_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{1 \pm \sqrt{1+4}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Dopočítame vlastné vektory:

Pre vlastnú hodnotu $\lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$:

$$(A - \lambda_1 I)x_1 = \begin{pmatrix} \frac{-1-\sqrt{5}}{2} & 1 \\ 1 & 1 - \frac{1+\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix} x_1 = \begin{pmatrix} \frac{-1-\sqrt{5}}{2} & 1 \\ 1 & \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix} x_1 = 0$$

Dostaneme vlastný vektor $x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1+\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix}$.

Pre vlastnú hodnotu $\lambda_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$:

$$(A - \lambda_2 I)x_2 = \begin{pmatrix} \frac{-1+\sqrt{5}}{2} & 1 \\ 1 & 1 - \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix} x_2 = \begin{pmatrix} \frac{-1+\sqrt{5}}{2} & 1 \\ 1 & \frac{1+\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix} x_2 = 0$$

Vypočítame druhý vlastný vektor $x_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix}$.

2.3 Mentálna príprava II. (Diagonálny tvar matice)

Veta 2 (Podľa [15]). Predpokladajme, že pre $n \times n$ maticu A existuje n lineárne nezávislých vlastných vektorov $x_1, x_2, \dots, x_n$. To znamená, že platí $Ax_i = \lambda_i x_i$, pre $i = 1, \dots, n$. Potom platí:

$$S^{-1}AS = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} = \Lambda,$$

kde S je matica tvorená stĺpcami $x_1, x_2, \dots, x_n$. Teda $S = \begin{pmatrix} | & | & | \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ | & | & | \end{pmatrix}$.

Dôkaz [15].

Rovnice $Ax_i = \lambda_i x_i$, t. j. $(A) \begin{pmatrix} | \\ x_i \\ | \end{pmatrix} = \lambda_i \begin{pmatrix} | \\ x_i \\ | \end{pmatrix}$ môžeme zoradiť vedľa seba:

$$(A) \begin{pmatrix} | & | & | \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ | & | & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} | & | & | \\ Ax_1 & Ax_2 & \dots & Ax_n \\ | & | & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} | & | & | \\ \lambda_1 x_1 & \lambda_2 x_2 & \dots & \lambda_n x_n \\ | & | & | \end{pmatrix}$$

Tiež platí:

$$\begin{pmatrix} | & | & | \\ \lambda_1 x_1 & \lambda_2 x_2 & \dots & \lambda_n x_n \\ | & | & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} | & | & | \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ | & | & | \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Z toho máme: $AS = SA$.

Z predpokladu nezávislosti vlastných vektorov $x_1, x_2, \dots, x_n$ je S regulárna matica a existuje inverzná matica S^{-1} . Potom

$$S^{-1}AS = A$$

$$A = SAS^{-1}$$

■

2.4 Zajačí problém II.

Vráťme sa späť k nášmu problému, ako jednoducho vypočítať k -tu mocninu matice A . Ak $A = SAS^{-1}$, potom $A^k = A * A * \dots * A = (SAS^{-1}) * (SAS^{-1}) * \dots * (SAS^{-1}) = SA^kS^{-1}$.

Ak $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} = A$, potom $A^k = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_n^k \end{pmatrix}$. (Podľa [1]). Vidíme, že umocňovanie

diagonálnych matíc je jednoduché. To sa nedá povedať o umocňovaní všeobecných matíc.

Teraz bude už ľahké vyjadriť vzorec pre k -ty člen Fibonacciho postupnosti $F(k)$. Vieme, že

$$u_k = A^k * u_0, \text{ kde } u_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Podľa mentálnej prípravy II. diagonalizujeme maticu A :

$$u_k = SA^kS^{-1} * u_0.$$

Podľa mentálnej prípravy I. a II. máme $S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1+\sqrt{5}}{2} & \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix}$.

K tomu dopočítame inverznú maticu $S^{-1} = -\frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} \frac{1-\sqrt{5}}{2} & -1 \\ -\frac{1+\sqrt{5}}{2} & 1 \end{pmatrix}$.

$$\text{Teda } u_k = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1+\sqrt{5}}{2} & \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k & 0 \\ 0 & \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1-\sqrt{5}}{2} & -1 \\ -\frac{1+\sqrt{5}}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F(k) \\ F(k+1) \end{pmatrix}$$

$F(k)$ dopočítame „metódou mladšieho súrodenca“, to znamená, že nasledujú len jednoduché úpravy, násobenie a sčítavanie, ktoré by dokázal zrealizovať aj „mladší súrodenec“.

Vynásobíme prvé dve matice:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1+\sqrt{5}}{2} & \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k & 0 \\ 0 & \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k & \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k \\ \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1} & \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1} \end{pmatrix}$$

Rovnako aj zvyšné matice:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1-\sqrt{5}}{2} & -1 \\ -\frac{1+\sqrt{5}}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1-\sqrt{5}}{2} - 1 \\ -\frac{1+\sqrt{5}}{2} + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ -\frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Teraz všetko spolu:

$$\begin{aligned} u_k &= \begin{pmatrix} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k & \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k \\ \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1} & \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ -\frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1} \\ \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k+2} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k+2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F(k) \\ F(k+1) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Našli sme vzorec pre k -ty člen Fibonacciho postupnosti a týmto je zajačí problém vyriešený:

$$F(k) = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1} \end{pmatrix}$$

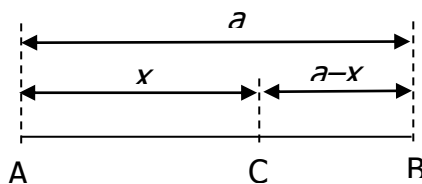
Počet zajačích párov po roku zistíme dosadením do vzorca:

$$F(12) = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{13} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{13} \end{pmatrix} = 233$$

Po roku bude žiť 233 párov zajacov.

2.5 Zlatý rez

Myšlienku zlatého rezu si ukážeme na úsečke (podľa [12]). Ak rozdelíme úsečku dĺžky a na dve časti, tak že pomer dlhšej časti (x) ku kratšej časti ($a - x$) sa bude rovnať pomeru celej dĺžky úsečky (a) ku dlhšej časti (x), tak hovoríme, že sme zostrojili zlatý rez úsečky (bod C na obrázku).



Obr. 6 Zlatý rez úsečky [12]

Matematicky to zapíšeme takto:

$$\frac{x}{a-x} = \frac{a}{x}$$

Aby sme vyčíslili hodnotu zlatého rezu, stačí položiť $a = 1$.

$$\frac{x}{1-x} = \frac{1}{x}$$

Z toho ekvivalentnými úpravami dostaneme kvadratickú rovnicu $x^2 + x - 1 = 0$. Riešením rovnice dostaneme $x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$. Nakoľko hovoríme o dĺžke úsečky, vyhovuje nám iba kladný

koreň, $x = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \doteq 0,6180$. Pomer $\frac{x}{a-x}$, respektíve $\frac{a}{x}$ voláme zlatý pomer a zvykne sa označovať gréckym písmenom φ [Phi]. Teda $\varphi = \frac{a}{x} = \frac{1}{x} \doteq 1,61803$.

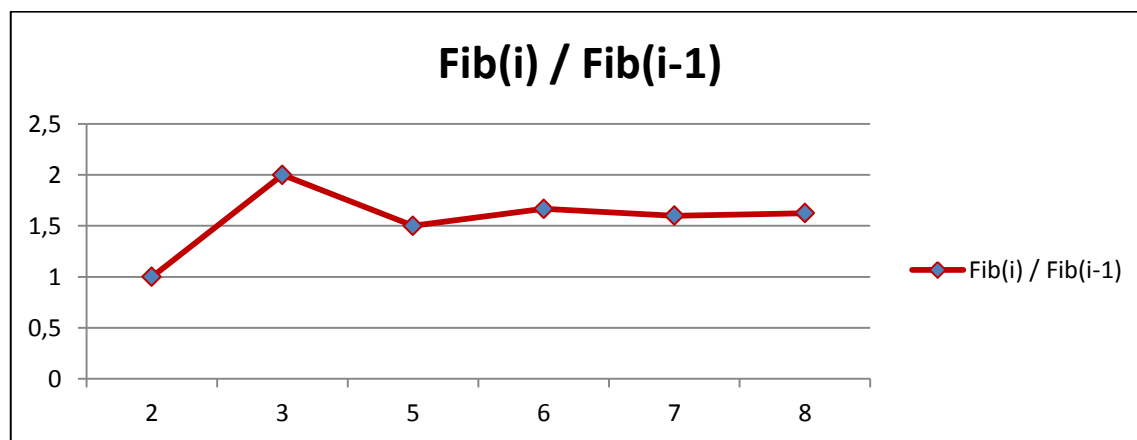
Zaujímavosťou je, že aj pomer rôznych častí ľudského tela sa rovná φ . Napríklad, ak vydelíme dĺžku človeka vzdialenosťou od pásu po zem, dostaneme φ . Alebo pomer vzdialenosti od ramena po konce prstov a dĺžky od lakťa po konce prstov je opäť rovný φ . Podobne aj keď vydelíme dĺžku od bokov po zem dĺžkou od kolien po zem.

Vytvorme z Fibonacciho postupnosti rad zlomkov, a to tak, že každé číslo vydelíme najbližším vyšším číslom. Dostaneme takýto rad: $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{5}, \dots, \frac{233}{377}, \frac{377}{610}, \frac{610}{987}, \dots$ Fibonacciho zlomky majú veľmi blízko k zlatému rezu (Obr. 7). So zväčšujúcimi sa členmi postupnosti, sa hodnota výrazu stále viac približuje k zlatému rezu.

Môžeme napísať

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \varphi.$$

Vyplyva to z implicitného tvaru $F(k)$, pre $k \rightarrow \infty$. Člen $\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1}$ ide limitne k 0, lebo $\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) < 1$. Teda $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{F(k+1)}{F(k)} = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$.



Obr. 7 Fibonacciho zlomky a zlatý rez [11]

3 Bootstrap metóda a tiež free lunch

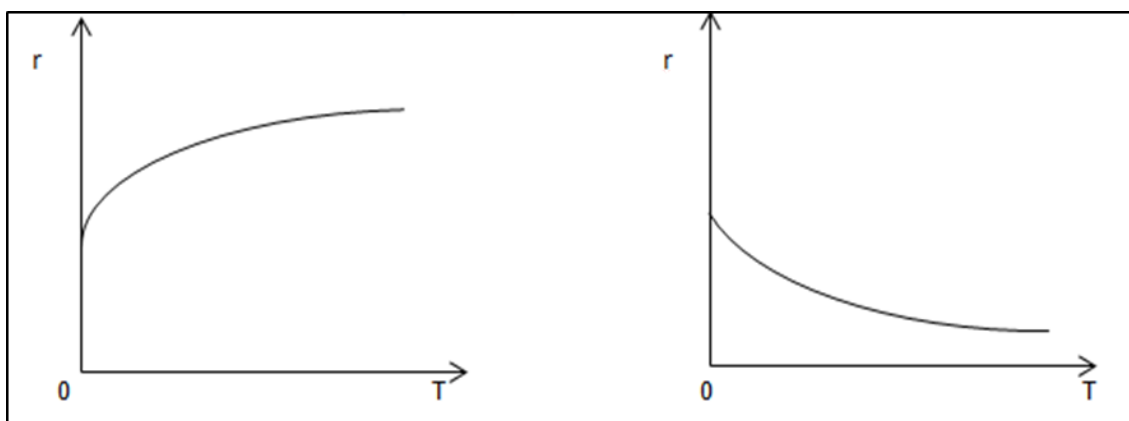
K základnej finančnej gramotnosti patrí znalosť o dlhopisoch, časovej štruktúre úrokových mier a arbitráže.

Definícia 3 [10]. *Dlhopis (bond) je cenný papier, v ktorom sa dlžník zaväzuje, že v stanovenej lehote splatí nominálnu hodnotu a v dohodnutých obdobiach bude vyplácať pravidelný (ročný, polročný, ...) úrok (tzv. kupón).*

Ak si kúpime dlhopis, zaplatíme zaň cenu P (present value), potom v stanovených obdobiach budeme dostávať kupón C (na výške kupónu a intervale platieb sa dohodne ešte pred kúpou) a v čase vypršania dlhopisu dostaneme kupón plus nominálnu cenu F (face value). Teda dlhopis si kúpime za cenu P , náš tok platieb (cash flow), to, čo potom dostávame, môžeme zapísať ako $C, C, C, \dots, C, C+F$. V opačnom prípade, teda pri predaji dlhopisu, dostaneme na začiatku istú sumu, v ďalších (pravidelných) obdobiach sme povinní platiť kupón. Poznáme kupónové a bezkupónové dlhopisy, v prípade bezkupónového dlhopisu máme jednoducho $C = 0$.

3.1 Mentálna príprava I. (časová štruktúra úrokových mier)

Časová štruktúra úrokových mier (term structure of interest rates) predstavuje závislosť výšky úrokov od doby splatnosti dlhopisu (maturity dlhopisu). Zvyčajne platí, že na dlhšiu dobu požičiavame s vyšším úrokom, a teda krivka je rastúca. Avšak v závislosti od očakávaní, môže nastať prípad klesajúcej časovej štruktúry úrokových mier.



Obr. 8 Časová štruktúra úrokových mier (vľavo rastúca, vpravo klesajúca)

V prvej kapitole sme si ukázali, že v prípade spojitého úročenia vieme sumu na účte F (future/face value) v čase t pri počiatočnom vklade P a ročnom nominálnom úroku r vypočítať ako

$$F = \lim_{n \rightarrow \infty} P \left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt} = \lim_{n \rightarrow \infty} P \left(1 + \frac{r}{n}\right)^{\frac{n}{r} \times \frac{r}{n} \times n \times t} = P e^{rt}.$$

V prípade dlhopisu nás však zaujíma hodnota platby dnes, teda počiatočná cena P , za akú máme predať/kúpiť dlhopis, pretože nominálnu cenu F poznáme. Budeme teda robiť opak úročenia, diskontovanie. Metódou mladšieho súrodenca dostávame z predchádzajúceho vzťahu:

$$P = F e^{-r_t t},$$

kde r_t označuje spojitý úrok na obdobie t .

Z tohto vzťahu vyjadríme jednoduchou úpravou spojitý úrok pre bezkupónový dlhopis s nominálnou hodnotou F :

$$r_t = -\frac{1}{t} \ln \frac{P}{F}.$$

Podobným spôsobom vieme vyjadriť cenu kupónového dlhopisu. Rozdiel je v tom, že je potrebné diskontovať nielen nominálnu cenu F , ale každú prichádzajúcu platbu. Teda každý kupón diskontujeme úrokom, ktorý prislúcha danému časovému obdobiu:

$$P = \sum_{i=1}^n C_i e^{-r_i t_i} + F e^{-r_n t_n}.$$

V nasledujúcom príklade si ukážeme, že ak poznáme ceny dlhopisov, vieme z nich pomocou Bootstrap metódy vypočítať jednotlivé úroky. Bootstrap metóda vo všeobecnosti označuje princíp, že nejaký systém sa sám naštartuje. Označenie sa vzťahuje na legendu o barónovi Münchhausenovi, ktorý sa z močiara dostal tak, že vytiahol sám seba za vlasy. V americkej verzii na vytiahnutie z močiara použil remene na čizmách namiesto vlasov, preto sa táto metóda nazýva i bootstrapping (fráza by one's own bootstraps = svojpomocne, vlastným pričinením).

3.2 Príklad o dlhopisoch

K dispozícii máme údaje o piatich dlhopisoch uvedených v tabuľke (Tab. 2). Kupóny sú vyplácané v polročných intervaloch. Nominálna hodnota každého dlhopisu je $F = 100\text{€}$. Postupne budeme počítať úroky – od najkratšej periódy po najdlhšiu (prevzaté z [10], str. 11).

Tab. 2 Ponúkané dlhopisy na trhu (podľa [10], str. 12)

Dlhopis	Maturita (v rokoch)	Ročný kupón	Cena
1	0,25	0 €	97,70 €
2	0,5	0 €	95,30 €
3	1	0 €	90,70 €
4	1,5	8 €	97,10 €
5	2	10 €	99,40 €

Úrokové miery pre bezkupónové dlhopisy vypočítame jednoducho dosadením údajov z tabuľky do vzorca:

$$r_{0,25} = -\frac{1}{0,25} \ln \frac{97,7}{100} = 0,0931 = 9,31\%,$$

$$r_{0,5} = -\frac{1}{0,5} \ln \frac{95,3}{100} = 0,0963 = 9,63\%,$$

$$r_1 = -\frac{1}{1} \ln \frac{90,7}{100} = 0,0976 = 9,76\%.$$

Posledné dva dlhopisy sú kupónové, pri výpočte potrebujeme teda zohľadniť a diskontovať kupóny. Problém je, že nemáme informáciu o úrokových mierach, použijeme svojpomocne (Bootstrap metódou) nájdené úroky $r_{0,25}, r_{0,5}, r_1$.

Tok platieb štvrtého dlhopisu môžeme symbolicky zapísať:

$$4€ (t = 0,5), 4€ (t = 1), 100€ + 4€ (t = 1,5).$$

Hodnota kupónu po pol roku je 4€, teda polovica hodnoty ročného kupónu. V poslednom období (pri maturite dlhopisu) dostane majiteľ dlhopisu kupón aj nominálnu hodnotu dlhopisu. Dosadením týchto hodnôt do vzťahu dostaneme:

$$97,1 = 4e^{-0,0963 \times 0,5} + 4e^{-0,0976 \times 1} + 104e^{-r_{1,5} \times 1,5}.$$

Metódou mladšieho súrodenca

$$r_{1,5} = 0,0989 = 9,89\%.$$

Obdobne uvažujme aj v prípade piateho dlhopisu. Jeho tok platieb bude nasledovný:

$$5€ (t = 0,5), 5€ (t = 1), 5€ (t = 1,5), 100€ + 5€ (t = 2).$$

Dosadením do rovnice

$$99,4 = 5e^{-0,0963 \times 0,5} + 5e^{-0,0976 \times 1} + 5e^{-0,0989 \times 1,5} + 105e^{-r_2 \times 2}$$

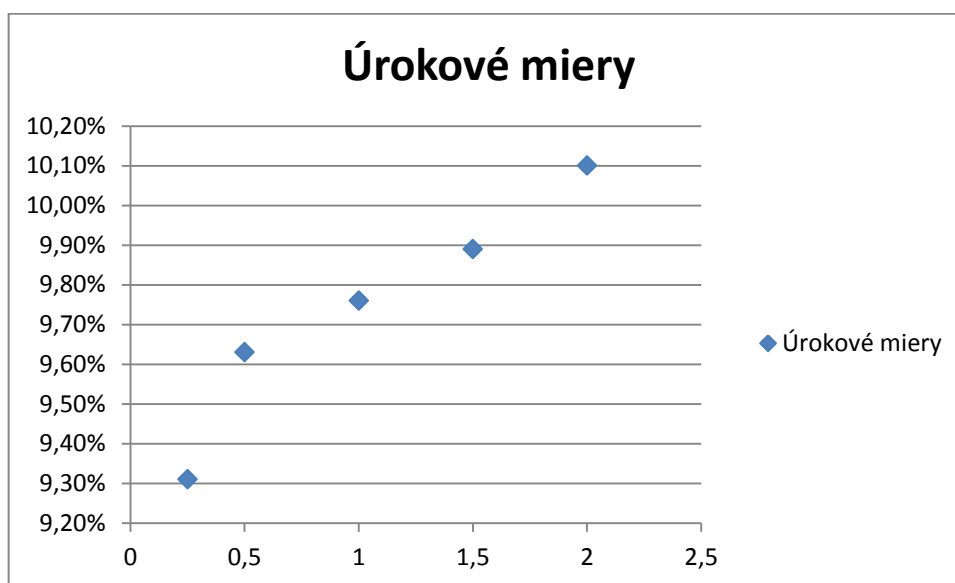
a úpravou máme:

$$r_2 = 0,101 = 10,1\%.$$

Výsledky Bootstrap metódy si znázorníme aj graficky (Tab. 3), (Obr. 9).

Tab. 3 Vypočítané úrokové miery [10]

Maturita (v rokoch)	Úrok
0,25	9,31%
0,5	9,63%
1	9,76%
1,5	9,89%
2	10,10%



Obr. 9 Časová štruktúra vypočítaných úrokových mier

Dostali sme rastúcu časovú štruktúru úrokových mier, čo sme aj očakávali. Vidíme, že naša funkcia nie je spojitá, pretože nevieme povedať, ako sa krivka úrokových mier správa medzi nami vypočítanými hodnotami (zvykne sa aproximovať lineárne).

3.3 Mentálna príprava II. (arbitráž)

Arbitráž („s prázdny vreckom istý zisk“) je v istom zmysle špekulácia, ako dosiahnuť zisk využitím existencie rozdielných cien na rôznych trhoch, ktoré môžu byť oddelené priestorovo, ale aj časovo [4]. Na rozdiel od špekulácie je arbitráž v podstate bezrizikovou operáciou. V angličtine sa pre arbitráž, resp. zákaz arbitráže používa tiež slovné spojenie free lunch, resp. no free lunch.

3.4 Príklad o obede zdarma

Predpokladajme, že trh ponúka bezkupónový dlhopis s dobou splatnosti 1,5 roka a nominálnou hodnotou 100€. Ak súčasná cena dlhopisu je 85€, existuje na trhu príležitosť istého zisku bez rizika? (Podľa [10]).

Aby sme zistili, či na trhu existuje arbitrážna príležitosť, pozrime sa, aká by bola teoretická cena tohto dlhopisu pri spojitom úročení. V predchádzajúcej časti sme zistili, že úrok 1,5 ročného dlhopisu je rovný 9,89%. Túto hodnotu použijeme na výpočet teoretickej súčasnej ceny dlhopisu, dosadením do vzorca:

$$P = Fe^{-rt} = 100 e^{-0,0989 \times 1,5} = 86,2€.$$

Nakoľko sa teoretická cena nezhoduje s trhovou cenou ($86,2 \neq 85$), na trhu existuje príležitosť na istý zisk bez rizika. Ukážme si, ako ho získať.

Našou snahou bude nakupovať a predávať dlhopisy, ktoré máme k dispozícii tak, aby sme v obdobiach 0,5; 1 a 1,5 roka mali nulový tok platieb a v závere zisk. Keďže trhovú cenu 1,5 ročného bezkupónového dlhopisu je nižšia ako spravodlivá teoretická cena, kúpme 1 kus tohto dlhopisu v lacnejšej variante, teda za 85€. Keďže úrok sa môže vyvíjať rôzne, táto transakcia nám ešte nezaistuje zárobok, preto budeme pokračovať v obchodovaní s ďalšími dlhopismi. Kúpou tohto dlhopisu sme prišli o 85€, preto v celkovom súčte bude toto číslo vystupovať so záporným znamienkom. Čo sa týka toku platieb v jednotlivých obdobiach, v čase 0,5 a 1 nedostávame žiaden kupón (nula) a v čase 1,5 roka nám bude vyplatená nominálna cena dlhopisu, teda +100€.

V nasledujúcom kroku sa budeme snažiť vynulovať tok platieb v 1,5 roku. Aby sme to dosiahli, predáme kupónový 1,5 ročný dlhopis. Nepotrebujeme ho však celý, iba jeho časť, pretože celý prináša platbu (v čase 1,5) 104€ a my potrebujeme len 100€. Predáme teda $\frac{100}{104} = 0,9615$ ks tohto dlhopisu. Za predaj takéhoto množstva dlhopisu zinkasujeme 93,36€ (množstvo $\times$ cena dlhopisu = $0,9615 \times 97,1€ = 93,36€$). Rovnakým spôsobom zistíme, koľko nás budú stáť kupóny v časových obdobiach 0,5 a 1 roka ($0,9615 \times 4€ = 3,85$).

Ostáva nám vynulovať tok platieb v predchádzajúcich 2 obdobiach. Dosiahneme to kúpou určitého množstva dlhopisov s príslušnou maturitou. Kúpime $\frac{3,85}{100} = 0,0385$ ks 1 ročného bezkupónového dlhopisu, za ktorý zaplatíme $0,0385 \times 90,7€ = 3,49€$. A tiež $\frac{3,85}{100} = 0,0385$ ks 0,5 ročného bezkupónového dlhopisu za cenu $0,0385 \times 95,3€ = 3,85€$.

Takouto obchodnou stratégiou sme dosiahli zisk 1,2€. Dokázali sme zarobiť s nulovým tokom platieb a bez rizika. Ak by sme nakupovali a predávali dlhopisy vo väčšom množstve, aj náš zisk by sa tým zvýšil.

Tab. 4 Tabuľka transakcií (podľa [10])

popis	0,5 roka	1 rok	1,5 roka	množstvo	cena v €
nákup 1,5 r. bezkupónového dlhopisu	0	0	100	1	-85
predaj 1,5 r. kupónového dlhopisu	-3,85	-3,85	100	0,9615	93,36
nákup 1 r. bezkupónového dlhopisu	0	3,85	0	0,0385	-3,49
nákup 0,5 r. bezkupónového dlhopisu	3,85	0	0	0,0385	-3,67
spolu	0	0	0		1,2

4 Lineárny regresný model

V reálnom svete je často krát potrebné zachytiť realitu nejakým modelom, pretože sa s ním jednoduchšie pracuje a samotný model sa dá omnoho ľahšie skúmať ako realita. Na riešenie ekonomických problémov využívame matematické a štatistické metódy. Odhadovaním ekonomických vzťahov, testovaním hypotéz o vzťahoch medzi ekonomickými premennými, skúmaním toho, ako dobre daný model zobrazuje realitu, sa zaoberá ekonometria.

Regresné modely tvoria jadro ekonometrie. Hoci poznáme veľa štatistických modelov a používame rôzne typy dát, najčastejšie pracujeme s regresnými modelmi alebo ich jemnými obmenami [2]. Najjednoduchším typom regresného modelu je jednoduchý lineárny regresný model, s ktorým sa bližšie zoznámime v nasledujúcom príklade.

Prostredím na analýzu vytvoreného modelu bude Microsoft Excel a programy E-Views a R.

4.1 Príklad o reklame na prací prášok

Firma Procter&Gamble uviedla na trh nový druh prášku ARIEL a počas prvého týždňa ho podporila reklamnou kampaňou v 50 európskych krajinách (dáta v prílohe C). Otestujte vplyv rôznych spôsobov propagácie výrobku na predajnosť (tržby) prášku ARIEL. V príklade tiež testujte signifikantnosť parametrov, ktoré sú zvolené za vysvetľujúce premenné a signifikantnosť celej regresie. Vykonajte test normality rezíduí. Ďalej otestujte, či sa firme Procter&Gamble oplatí investovať do billboardov, ak je v krajine milión obyvateľov a týždenný prenájom jedného billboardu stojí 10 100 eur. Na záver overte, či v modeli nie je problém s multikolinearitou. (Podľa [14]).

Zostavíme lineárny model popisujúci predajnosť:

$$\text{tržba} \sim c_0 + c_1 * \text{billboardy} + c_2 * \text{tlač} + c_3 * \text{televízia} + c_4 * \text{rádio} + \varepsilon,$$

kde c_i , $i = 0, \dots, 4$, sú odhadované konštanty. Premenné modelu a ich vlastnosti sú vysvetlené nižšie. V zátvorkách za stručným popisom premenných je uvedený subjektívne odhadnutý vplyv premennej na predajnosť nového druhu prášku ARIEL.

Závislá premenná:

- **tržba**

Tento stĺpec dát predstavuje tržbu za prvý týždeň (v tisícoch) v danej krajine prepočítanú na milión obyvateľov

Nezávislé premenné:

- **billboardy**

V stĺpci s názvom billboardy sú zaznamenané počty kusov, ktoré firma prenajala. Predpokladáme, že čím vyšší počet, tým viac sa prášok ARIEL dostane do povedomia a firme sa zvýšia tržby z nákupu (pozitívny vplyv).

- **tlač**

Tento stĺpec predstavuje počet reklamných cm^2 v novinách a časopisoch. Opäť očakávame, že viac reklamy bude viesť ľudí k preferencii tohto pracieho prášku pred bežnými pracími práškami (pozitívny vplyv).

- **televízia**

V časti televízia je zaznačený počet zakúpených reklamných minút v televíziách (kladný vplyv).

- **rádio**

V tejto časti je počet zakúpených reklamných minút v rádiách (kladný vplyv).

Na odhadnutie regresného modelu použijeme program E-Views. Dostaneme nasledovný výstup:

Dependent Variable: TRZBA				
Method: Least Squares				
Date: 05/23/12 Time: 18:42				
Sample: 1 50				
Included observations: 50				
Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	1016.153	10.79172	94.16042	0.0000
BILLBOARDY	9.937403	0.052885	187.9058	0.0000
TLAC	0.008454	0.002454	3.444686	0.0012
TELEVIZIA	119.9893	0.009539	12578.78	0.0000
RADIO	0.087638	0.020196	4.339395	0.0001
R-squared	1.000000	Mean dependent var	63096.12	
Adjusted R-squared	1.000000	S.D. dependent var	32825.66	
S.E. of regression	18.07868	Akaike info criterion	8.721983	
Sum squared resid	14707.74	Schwarz criterion	8.913185	
Log likelihood	-213.0496	Hannan-Quinn criter.	8.794794	
F-statistic	40385888	Durbin-Watson stat	2.327377	
Prob(F-statistic)	0.000000			

Obr. 10 Model popisujúci predajnosť - výstup

4.2 Koeficienty

Prvý koeficient c_0 je akési posunutie nadroviny, ktorou sa snažíme aproximovať získané dáta, do „správnych čísel“. Keby sme mali dáta v okolí nulových hodnôt reklamy, tak by sa dal tento koeficient interpretovať ako očakávaná výška tržby bez reklamy, ale v našom prípade by to bolo asi dosť nepresné. Ostatné koeficienty odhadujú, ako jednotlivé spôsoby reklamy vplyvajú na výslednú tržbu.

Napríklad koeficient pri billboardoch je približne 10 a koeficient pri televízii je približne 120, to znamená, že prenájom 12 billboardov zvýši tržby približne rovnako ako minúta reklamy v televízii. Nakoľko všetky odhadnuté koeficienty vyšli kladné, parametre majú pozitívny vplyv na tržby, v zmysle priamej úmery, tak ako sme aj očakávali.

4.3 Test signifikancie odhadov parametrov

Testujeme hypotézu:

$$H_0: c_i = 0,$$

pre $i = 0, \dots, 4$.

Najzaujímavejší je pre nás odhad koeficientu pri parametri tlač, lebo $c_2 = 0,008454$ a to je „približne“ nula, teda hypotézu H_0 „asi“ nezamietame. Budeme to testovať t-testom. [Detailnejšie v 16]. Naša testovacia štatistika bude nasledovná:

$$T = \frac{\text{odhad } c_i}{\sqrt{\text{var}(\text{odhad } c_i)}} \sim t_{n-k}$$

kde n je počet dát, k je počet parametrov a t_{n-k} je Studentovo t-rozdelenie s $n - k$ stupňami voľnosti. Ak H_0 platí, tak $T \sim t_{50-5}$. Hodnotu testovacej štatistiky nájdeme v tabuľke pre každú premennú zvlášť. Napríklad t-štatistika pre tlač je 3,44. Zodpovedajúca p-hodnota testu (tzv. marginálna signifikantná hladina) je v tomto prípade $0,12\% < 5\%$, čo znamená, že testovanú hypotézu zamietame a premenná tlač je signifikantnou premennou. V tabuľke ďalej vidíme, že aj všetky ostatné premenné sú v našom modeli signifikantné.

4.4 Test signifikancie regresie

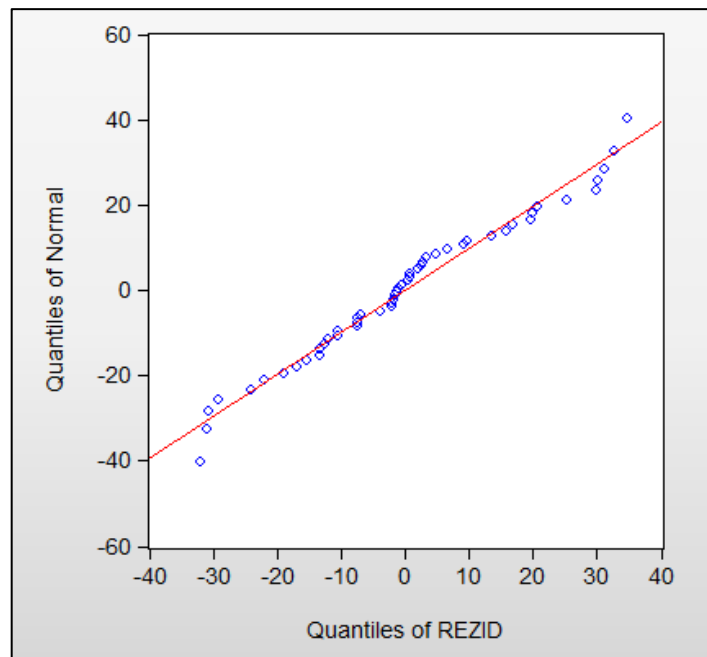
Testujeme hypotézu:

$$H_0: c_0 = c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = 0$$

F-test nám hovorí, že hypotézu H_0 zamietame, nakoľko $p\text{-hodnota} = 0\% < 5\%$. Test ukazuje, nakoľko je náš model nahraditeľný len absolútnym členom, v našom prípade nenahraditeľný len absolútnym členom. Regresia je signifikantná.

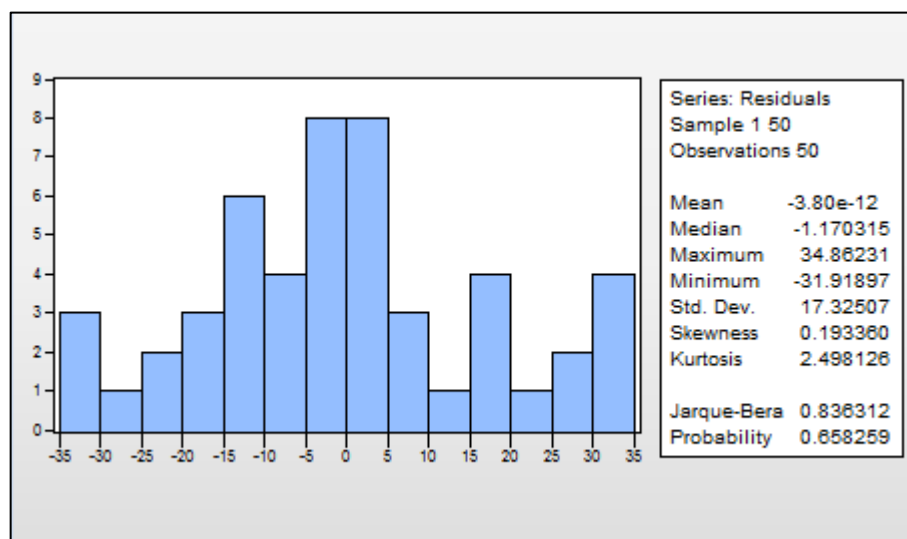
4.5 Test normality chýb

Analýza štruktúry rezíduí je základným prvkom posúdenia kvality modelu. Preto budeme v tejto časti testovať, či náhodné odchýlky ε sú z normálneho rozdelenia.



Obr. 11 Obrázok štruktúry rezíduí

Z Q-Q diagramu (Obr. 11) nie je na pohľad jasné, či sú rezíduá normálne. Ak by boli, graf by pripomínal priamku. Poďme testovať:



Obr. 12 Histogram s popisnými štatistikami

Z histogramu, aj z popisu (Obr. 12) vidíme, že odchýlky v našom modeli sú normálne. Jarque-Bera test nezamietol hypotézu, že rezíduá sú z normálneho rozdelenia (p-hodnota vyšla 65,82%), takže aj chyby epsilon sú z normálneho rozdelenia. Keby predpoklad normality splnený nebol, znamenalo by to, že F-štatistika z predchádzajúcej časti by nemala Fisherovo rozdelenie, takže získaný výsledok by stratil výpovednú hodnotu.

4.6 Testovanie hypotézy s ekonomickou interpretáciou

V ďalšej časti príkladu budeme testovať hypotézu:

$$H_0: c_1 \leq 10,1$$

lebo 10.1 je práve hodnota, keď sa investícia do billboardov vráti. Použijeme test s kontrastom a dostávame p-hodnotu rovnú $99.8\% > 5\%$. To znamená, že test zamietol skúmanú hypotézu H_1 a prijímame $H_0: c_1 \leq 10,1$. Takže prenájom billboardu sa neoplatí, lebo s 95% pravdepodobnosťou neprinesie táto investícia zvýšenie tržby vyššie, ako je cena prenájmu.

4.7 Test multikolinearity

Existuje viacero testov na zisťovanie multikolinearity v modeli. Vyberieme si testovanie pomocou korelačnej matice (Tab. 5), na základe ktorej porovnáme korelácie jednotlivých parametrov:

Tab. 5 Korelácia medzi premennými modelu

	BILLBOARDY	TLAC	TELEVIZIA	RADIO
BILLBOARDY	1.000000	0.055501	-0.025681	-0.069800
TLAC	0.055501	1.000000	-0.058045	0.067147
TELEVIZIA	-0.025681	-0.058045	1.000000	0.128022
RADIO	-0.069800	0.067147	0.128022	1.000000

Prítomnosť multikolinearity v modeli považujeme za podstatnú, ak korelácia medzi dvoma premennými je v absolútnej hodnote väčšia ako 0,8. Z korelačnej matice sme zistili, že v našom modeli sa multikolinearita nevyskytuje.

5 Väžňova dilema

Teória hier vznikla ako časť aplikovanej matematiky a jej využitie nájdeme najmä v ekonómii, politike, psychológii, ale aj v logike a biológii. Je štúdiom analýzy strategického rozhodovania sa hráčov. Exaktnejšie povedané, teória hier je štúdiom matematických modelov, ktoré skúmajú konflikt, spoluprácu, vyjednávanie, komunikáciu medzi hráčmi, ktorí sa racionálne a inteligentne rozhodujú.

Definícia 4 (Podľa [13]).

Trojicu $(I, \{A_i\}, \{u_i\})$, kde

$I = \{1, 2, \dots, n\}$ je množina hráčov,

A_i je množina akcií hráča $i \in I$,

$u_i : A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n \rightarrow \mathbb{R}$ je funkcia výplat hráčov $i \in I$,

voláme hrou v strategickom (normálnom) tvare.

Ľudskou rečou povedané, základnými prvkami hry sú:

- Hráči – nie každý, kto sa zúčastňuje situácie, je hráč, iba ten, kto aj rozhoduje. Napríklad, keby sme sa rozhodli okradnúť suseda, tak sused nie je hráč, lebo nerozhoduje.
- Akcie – stratégie hráčov
- Výplata – závisí od akcií všetkých hráčov. To, čo preferujem, musí mať väčšiu výplatu.

Definícia 5 (Podľa [13]).

Simultánna hra s úplnou informáciou má tieto pravidlá:

1. *Všetci hráči $i \in I$ si zvolia simultánne (bez poznania voľby protihráča) akciu $A_i \in I$*
2. *Hráči zverejnia svoju voľbu $(a_1, a_2, \dots, a_n)$*
3. *Hráči obdržia výplaty $u_i(a_1, a_2, \dots, a_n)$*
4. *Hra končí*

Predpoklady hry:

1. Hráči sú racionálni – maximalizujú svoje výplaty
2. V hre je prítomné všeobecné poznanie

5.1 Príklad o dvoch väzňoch

Dvaja muži sú zatknutí, ale polícia nemá dostatočné množstvo informácií na vznesenie obvinenia. Po oddelení mužov do dvoch separátnych ciel im polícia navrhne nasledovnú dohodu. Ak väzeň pôjde svedčiť proti svojmu partnerovi – zradí ho, zatiaľ čo druhý väzeň ostane ticho – spolupracuje so spoluväzňom, zradca bude oslobodený a kooperátor bude odsúdený na 15 rokov odňatia slobody. Ak budú obaja väzni mlčať, obvinia ich z menších zločinov a odsúdia na 2 roky vo väzení. Ak obaja zradia toho druhého, po 10 rokoch za mrežami ich prepustia na podmienku. Čo by mali väzni urobiť? (Podľa [13]).

5.2 Strategický tvar hry

Zapíšme si hru Väzňova dilema do strategického tvaru:

$$I = \{\text{Väzeň}_1, \text{Väzeň}_2\}$$

$$A_1 = A_2 = \{\text{zradiť, spolupracovať}\}$$

Výplaty by sme mohli zapísať nasledovným spôsobom, kde prvé číslo z dvojice čísel je výplata prvého hráča a druhé číslo je výplata druhého hráča. Teda napríklad, ak Väzeň₁ sa rozhodne spolupracovať a Väzeň₂ si vyberie akciu zradiť, tak výplata 1. hráča je podľa tabuľky výplat 15 a výplata druhého 0.

Tab. 6 Tabuľka výplat - nesprávna

Väzeň ₁ \ Väzeň ₂	Zradiť	Spolupracovať
Zradiť	10, 10	0, 15
Spolupracovať	15, 0	2, 2

Vidíme, že toto je zlý spôsob hodnotenia, pretože byť viac rokov vo väzení sa zaznamenalo vo forme väčšej výplaty. Prerobíme tabuľku výplat tak, aby to, čo preferujeme prinášalo lepšiu výplatu. Nedáme do tabuľky výplat potenciálny počet rokov vo väzení, ale počet rokov, ktoré hráči ušetria. Napríklad, ak obaja zradia, ich výplaty budú 5, 5, pretože namiesto maximálnej pokuty 15 rokov, stravia vo väzení 10, tým pádom ušetria 5 rokov. Skutočná tabuľka výplat bude:

Tab. 7 Tabuľka výplat - správna

Väzeň ₁ \ Väzeň ₂	Zradiť	Spolupracovať
Zradiť	5, 5	15, 0
Spolupracovať	0, 15	13, 13

Definícia 6 (Podľa [13]). Nech a_i, a_i^* sú dve akcie hráča $i \in I$. Potom, ak platí $u_i(a_i, a_{-i}) > u_i(a_i^*, a_{-i})$, pre každé $a_{-i} \in A_{-i}$, hovoríme, že akcia a_i (ostro) dominuje nad akciou a_i^* a akcia a_i^* je (ostro) dominovanou akciou a_i .

Poznámka 1 (Podľa [13]).

$a = (a_1, a_2, \dots, a_n) = (a_i, a_{-i})$, kde a_{-i} je komplementárny profil akcií k akcii a_i , teda

$$a_{-i} = (a_1, a_2, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_n).$$

5.3 Ekvilibrium hry

Pozrime sa na rozhodovanie sa Väzňa_1 (sledujeme prvé čísla v tabuľke výplat):

- ak by Väzeň_2 zradil, výplata Väzňa_1 pre zradu je 5, pre spoluprácu 0, z toho vyplýva, že Väzeň_1 by tiež zradil, lebo je racionálny a maximalizuje svoju výplatu.
- ak by Väzeň_2 spolupracoval, výplata 1. hráča, ak zradí, je 15, ale ak spolupracuje, ušetrí iba 13 rokov. Preto si vyberie zradu.

Podobne vyzerá aj rozhodovanie sa Väzňa_2 (pozorujeme druhé číslo z dvojice čísel v tabuľke):

- ak Väzeň_1 zradí, Väzeň_2 sa rozhoduje, či zradí (výplata 5) alebo spolupracuje (výplata 0)
- ak Väzeň_1 spolupracuje, výplata Väzňa_2 pri zrade je 15, pri spolupráci 13.

V hre väzňova dilema prináša akcia zradiť hráčovi vždy väčšiu výplatu ako akcia spolupracovať. Akcia zradiť dominuje nad akciou spolupracovať. Ekvilibriom dominantných akcií je profil akcií (zradiť, zradiť), aj napriek tomu, že profil akcií (spolupracovať, spolupracovať) obom hráčom prináša na prvý pohľad lepšiu výplatu.

Vidíme, že tento model je klasickým príkladom hry, kde dvaja jednotlivci vzájomne nespupracujú, i keď sa zdá, že je to v ich najlepšom záujme.

Model hry Väzňova dilema môžeme zovšeobecniť:

Hráč_1 \ Hráč_2	Zradiť	Spolupracovať
Zradiť	B, B	D, A
Spolupracovať	A, D	C, C

Pričom platí $A < B < C < D$.

Fakt, že obidvaja spolupracujú, je spoločensky prijateľnejší ako že obaja zradia ($C > B$), ale maximalizovanie výplat jednotlivcov ($B > A$, $D > C$) spôsobí, že obaja hráči si vyberú zradu.

6 Projekt výskumu

Predmetom nášho výskumu je analýza schopnosti žiakov aplikovať získané vedomosti na konkrétny príklad z finančnej matematiky. Ide o príklad Úroky, ktorý sme podrobne analyzovali v 1. kapitole tejto vedeckej práce. Zadanie príkladu vo forme, ktorá bola poskytnutá žiakom, sa nachádza v prílohe. Prieskum sme realizovali v Bratislave na Gymnáziu Grösslingová 18 a na Fakulte matematiky, fyziky a informatiky Univerzity Komenského.

6.1 Cieľ výskumu

Náš výskum v odbore finančná matematika je cielený na porovnanie vedomostnej úrovne žiakov vyšších ročníkov matematického gymnázia a nižších ročníkov vysokej školy matematického zamerania.

6.2 Charakteristika vzorky žiakov

Nášho výskumu sa celkovo zúčastnilo 52 žiakov. Prieskum sa uskutočnil na dvoch vybraných školách v Bratislave a podľa toho sme študentov rozdelili do troch typov:

1. Gymnazisti (G) – v tejto skupine sú žiaci maturitného ročníka na Gymnázium Grösslingová v Bratislave, ktorí nemajú rozšírené vyučovanie matematiky.
2. Matematickí gymnazisti (MG) – do druhej skupiny patria opäť maturanti Gymnázia Grösslingová v Bratislave, ale s rozšírenou výučbou predmetu matematika.
3. Vysokoškooláci (VŠ) – táto vzorka zahŕňa študentov 2. ročníka Ekonomickej a finančnej matematiky na Fakulte matematiky, fyziky a informatiky Univerzity Komenského v Bratislave.

6.3 Hypotézy výskumu

H1: Žiaci s vyšším matematickým vzdelaním dokázali lepšie uplatniť svoje vedomosti (pri fixnom stupni náročnosti úlohy).

H2: So stúpajúcou náročnosťou úlohy klesá schopnosť žiakov správne odpovedať (fixujeme typ žiaka).

6.4 Vyhodnotenie a interpretácia výsledkov

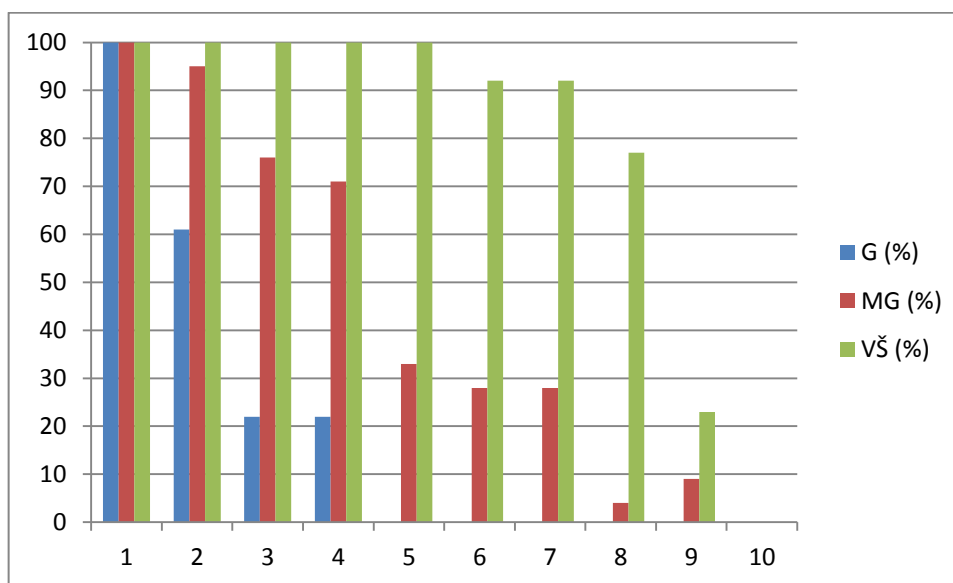
Obťažnosť príkladu sme odstupňovali od 1 do 10, kde 1 reprezentuje najľahšiu časť, 10 najťažšiu. Sledovali sme počet žiakov, ktorým sa podarilo dosiahnuť jednotlivé stupne príkladu. Aby sme zohľadnili nerovnaký počet respondentov v jednotlivých typoch žiakov, sledovali sme percentuálnu úspešnosť v riešení príkladu.

Kvantitatívne výsledky výskumu sú uvedené v nasledujúcej tabuľke:

Tab. 8 Kvantitatívne výsledky výskumu

Stupeň náročnosti	G	G (%)	MG	MG (%)	VŠ	VŠ (%)
1	18	100	21	100	13	100
2	11	61	20	95	13	100
3	4	22	16	76	13	100
4	4	22	15	71	13	100
5	0	0	7	33	13	100
6	0	0	6	28	12	92
7	0	0	6	28	12	92
8	0	0	1	4	10	77
9	0	0	2	9	3	23
10	0	0	0	0	0	0

Fixujeme náročnosť, sledujeme typ žiaka:

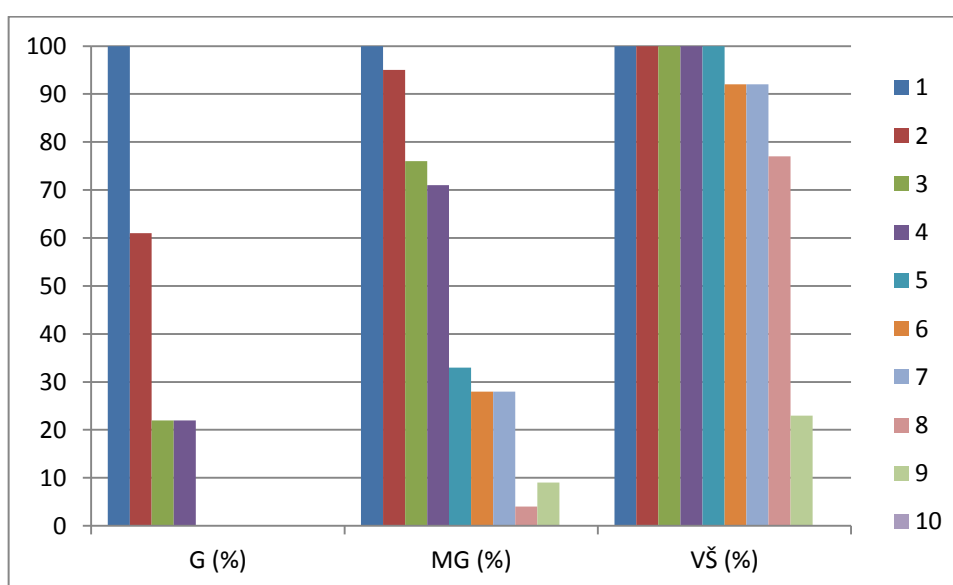


Obr. 13 Graf závislosti úspešnosti riešenia (v %) od náročnosti príkladu, podľa typu žiaka

Štartujúci bod zložitosti 1 zvládli vyriešiť všetci študenti, bez ohľadu na vek a dosiahnuté vzdelanie. V ďalších stupňoch sa už potvrdzuje hypotéza číslo 1, že vysokoškooláci dosahujú výrazne lepšie výsledky ako stredoškooláci – matematici, a títo zase výrazne lepšie ako bežní stredoškooláci. Napríklad stupeň náročnosti 3 nebol pre vysokoškoolákov žiadnym problémom, prekonal ho všetci, zo skupiny MG vypočítalo túto časť 76% danej skupiny žiakov a len 22% bežných gymnazistov dosiahlo danú mätu. Môžeme povedať, že študenti Ekonomickej a finančnej matematiky najlepšie zvládli (v porovnaní s MG a G) uplatniť svoje vedomosti

a využiť ich pri riešení konkrétneho problému. Vysvetlení sa núka hneď niekoľko. S podobným typom príkladu sa žiaci Matematicko-fyzikálnej fakulty veľmi pravdepodobne počas štúdia na VŠ už stretli, a preto mali výhodu oproti gymnazistom. Na druhej strane, gymnazistom – nematematikom podľa všetkého chýbajú vedomosti o limitách a deriváciách, čo spôsobilo ich stagnáciu na 4. stupni. Zaujímavosťou vyniká stupeň 10, ktorý si vyžadoval veľkú dávku algebraickej zručnosti. Jeho nulovú úspešnosť, resp. neúspešnosť si vysvetľujeme nedostatkom času, či trpezlivosti študentov.

Fixujeme typ žiaka, sledujeme úspešnosť v riešení jednotlivých častí príkladu:



Obr. 14 Graf závislosti úspešnosti riešenia od typu žiaka, podľa stupňa náročnosti

Hypotézu číslo dva (so stúpajúcou náročnosťou úlohy klesá schopnosť žiakov správne odpovedať) potvrdzujú obe skupiny študentov gymnáziá. Čo sa týka bežných gymnazistov, pri takmer každom novom stupni môžeme sledovať výrazný pokles v úspešnosti riešenia (až o 40%) oproti predošlému stupňu. U matematických gymnazistov ubúda počet riešenia schopných študentov približne rovnakým tempom ako sa zvyšuje náročnosť úlohy. Nárast počtu žiakov z 8. na 9. stupeň náročnosti si vysvetľujeme nepostačujúcou vzorkou respondentov. 2. hypotézu nám štatisticky „kazia“ vysokoškooláci, pretože prvých päť stupňov zvládli vypočítať všetci. Ďalej vidíme, že sa spomalil „odliv“ a zaznamenali sme menšie skoky medzi jednotlivými stupňami náročnosti príkladu.

6.5 Kvalitatívne vyhodnotenie

Veľmi zaujímavé bolo sledovať spôsob myslenia jednotlivých typov žiakov. Prvá skupina žiakov si volila rôzne metódy pri odvádzaní vzťahov pre zložené úročenie. Spomedzi nich by sme spomenuli napríklad tvorenie zložitejších výrazov so zátvorkami, akýchsi „zjednodušených grafov“ (Príloha D), alebo tzv. „metóda skusmo“, skúsime trafiť vzorec a dosadením zistíme, či sa podarilo. A v neposlednom rade, klasická „študentská metóda“, ktorej podstata spočíva v tom, že si najprv úlohu vyskúšame riešiť pre nejaké malé čísla a z toho odvodíme všeobecný vzorec.

Podobné metódy volili aj stredoškólači s rozšíreným vyučovaním matematiky, ale zvládli to o čosi sofistikovanejšie a vo svojich riešeniach boli úspešnejší ako ich kolegovia (Príloha F, Príloha G).

Vysokoškólači sa líšili predovšetkým tým, že veľa z nich využívalo na riešenie problému iný spôsob, ako im bol navrhnutý v zadaní. Hodnotíme to veľmi pozitívne, pretože sa tým ukázali ich analytické zručnosti a schopnosť samostatne myslieť. Ukážky riešení sa nachádzajú v časti prílohy.

Záver

Vedecká práca obsahuje výber príkladov z oblasti ekonomickej a finančnej matematiky a ich riešení. Ako cieľ práce sme si stanovili vytvoriť alebo nájsť také príklady, ktoré by žiakov motivovali, a vysvetliť podstatu riešenia daných ekonomických úloh zaujímavou a zrozumiteľnou formou. Cieľom práce bolo aj naznačiť hranice toho, čo možno žiakom vysvetliť bez použitia vysokoškolských metód.

Ako prvý a základný príklad sme si vybrali problém zloženého úrokovania, kde sme sa postupne od ročného úročenia prepracovali k spojitému a poukázali na dôležitosť limity postupnosti, ktorá konverguje ku číslu e a je odpoveďou na daný problém zloženého úrokovania. Motiváciou bol samotný pojem úroku, s ktorým sa bežne stretávame pri finančných úkonoch ako napríklad sporenie. Zadanie bolo pripravené podľa [8] tak zrozumiteľne, aby si ho osvojili aj študenti, ktorí neholdujú matematike.

V druhej kapitole sme sa zaoberali Fibonacciho postupnosťou, ktorej motivujúci prvok spočíva v jej vlastnostiach a tiež v jej častom, no len málo známom výskyte v prírode. Na riešenie diferenčnej rovnice sme si vybrali operácie s maticami. Takéto riešenie sa nachádza na rozhraní stredoškolského a univerzitného učiva. V tejto kapitole sme spomenuli limitu podielu dvoch po sebe idúcich členov Fibonacciho postupnosti, ktorá je rovná zlatému rezu.

Pojem dlhopisov, doby splatnosti dlhopisov, časovej štruktúry úrokových mier a arbitráže sme podrobne vysvetlili v tretej kapitole bakalárskej práce. Nakoľko tieto výrazy často zaznievajú v médiách, ich zaradenie do práce by mohlo byť motivačným faktorom pre jej prečítanie študentmi gymnázií a následne rozhodnutie sa pre štúdium ekonomickej a finančnej matematiky.

K riešeniu matematických a štatistických modelov, ktoré vznikajú na základe reálnych potrieb vo finančnom svete, neodmysliteľne patria vedomosti z ekonometrie, či štatistických metód. Z tohto dôvodu sme niektoré postupy uviedli v 4. kapitole. Nakoľko problém lineárnej regresie je široká téma, práca zahŕňa len základné pojmy, ukázané na konkrétnom motivačnom príklade. Túto formu vysvetlenia totiž považujeme za zrozumiteľnejšiu pre žiaka strednej školy.

Do práce sme zaradili aj príklad Vážňova dilema z Teórie hier. Pokladáme ho za nesmierne motivačný. Hoci príklad nie je výpočtovo náročný, dôraz sa kladie na logiku, modelovanie a koncept riešenia. Tieto sú základným predpokladom akýchkoľvek ekonomických úloh. Hranice v tomto príklade sme posunuli viac smerom k stredoškólakom, ktorí zaiste nebudú mať problém porozumieť príkladu, čo ich môže motivovať k ďalšiemu štúdiu v oblasti ekonomickej a finančnej matematiky.

V projektovej časti práce sme sa zaoberali otázkou, či vysoká škola pozitívne ovplyvňuje intelekt mladých ľudí. Príklad o zloženom úrokovaní sme dali vypočítať ako maturantom, tak aj študentom univerzity matematického zamerania. Potvrdila sa testovaná hypotéza, že žiaci s vyšším matematickým vzdelaním dokážu lepšie uplatniť svoje vedomosti. Avšak nakoľko sme pracovali s malou vzorkou, nemôžeme tvrdiť, že výsledok je štatisticky významný.

Možný prínos práce sa dá nájsť v zaplnení čiernej diery, ktorú má literatúra, venujúca sa kontinuite vývinu matematických poznatkov u žiakov v čase prechodu zo strednej školy na univerzitu. Táto práca by mohla byť akýmsi vstupom žiakov do univerzitného sveta a zároveň pomôckou pre učiteľov na vysokej škole, aby pomohli žiakom prekonať ťažkosti na začiatku štúdia.

Okrem toho si dovoľíme tvrdiť, že vedecká práca bude prínosom aj pre takzvaných „nematematikov“, ktorí prejavili záujem dozvedieť sa viac o finančnej matematike, a ktorí si na konkrétnych príkladoch túžia osvojiť pojmy, s ktorými sa často stretávajú v živote a tiež matematické nástroje, ktoré sa využívajú na riešenie daných problémov. Ak sa nám to v práci podarilo dosiahnuť, splnili sme cieľ, napísať prácu do podoby náležitej pre čitateľa iba so základnými vedomosťami z oblasti.

Zoznam použitej literatúry

- [1] Brunovský, P.: *Diferenčné a diferenciálne rovnice*, učebné texty, dostupné na internete (3.12.2011): http://www.iam.fmph.uniba.sk/institute/brunovsky/ddrtext_09-10.pdf
- [2] Davidson, R., MacKinnon, J. G.: *Econometric Theory and Methods*. Oxford University Press, 2003.
- [3] EuroEkonom: *Definícia výrazu úrok*, dostupné na internete (16.4.2012): <http://www.euroekonom.sk/poradna/ekonomicky-slovník/?q=urok>
- [4] Finance: *Arbitráže*, dostupné na internete (16.4.2012): <http://www.finance.sk/investovanie/informacie/forex/arbitraze/>
- [5] Intmstat: *Graf limity e*, dostupné na internete (12.4.2012): <http://intmstat.com/blog/2012/01/e-limit-graph.png>
- [6] Kollár, M.: osobná komunikácia, FMFI UK, Bratislava, 2011
- [7] Kollár, M.: *Matematická analýza*, prednášky, FMFI UK, Bratislava, 2010
- [8] Math is fun: *Compound Interest*, dostupné na internete (3.12.2011): <http://www.mathsisfun.com/index.htm>
- [9] Mathworks: *Fibonacci Numbers*, dostupné na internete (16.4.2012): <http://www.mathworks.com/moler/exm/chapters/fibonacci.pdf>
- [10] Melicherčík, I., Olšarová, L., Úradníček, V.: *Kapitoly z finančnej matematiky*. EPOS, Bratislava, 2005
- [11] Mlynarčíková, M.: *Fibonacciho postupnosť a zlatý rez*, dostupné na internete (5.1.2012): http://www.p-mat.sk/pytagoras/zbornik2006/064_Mlynarcikova_FibPost.pdf
- [12] Nagyová, I.: *Zlatý rez*, dostupné na internete (16.4.2012): <http://www.volny.cz/zlaty.rez/diplomka3.html>
- [13] Pekár, J.: *Úvod do teórie hier*, prednášky, FMFI UK, Bratislava, 2011
- [14] Somorčík, J.: *Úlohy k predmetu počítačova štatistika*, učebné texty, FMFI UK, Bratislava, 2011
- [15] Strang, G.: *Linear Algebra and Its Applications*. Thomson Brooks/Cole, Belmont, 2006
- [16] Siebertová, Z.: *Prednášky z ekonometrie*, učebné texty, dostupné na internete (1.5.2012): <http://www.iam.fmph.uniba.sk/institute/siebertova/ekonometria2012.html>

[17] Thinkquest: The Fibonacci Series, dostupné na internete (3.12.2011):

<http://library.thinkquest.org/27890/theSeries2.html>

[18] Timbers, A., Chia, J., Morris D.: The Life, Death, and Subsequent Vilification of Le Corbusier, dostupné na internete (12.3.2012):

http://www.morrischia.com/david/portfolio/boozy/research/fibonacci%27s_20rabbits.html

[19] Wikipedia: e (mathematical constant), dostupné na internete (12.3.2012):

http://en.wikipedia.org/wiki/E_%28mathematical_constant%29

Prílohy

Príloha A

Študent Oliver sa rozhodne, že keď skončí školu, bude pestovať maliny. Aby sa na to finančne pripravil, rozhodne sa rozbiť svoje prasiatko a peniaze investovať. Oliver chce zistiť, v ktorej banke sa mu to najviac oplatí. Vloží svojich 1000€ na dobu 5 rokov do banky a po uplynutí 5 rokov chce mať čo najviac peňazí.

a) Prvá banka ponúkne Oliverovi ročný 10% zložený úrok (teda úrok v novom období sa nepočíta z pôvodnej sumy, ale už zo sumy navýšenej o úroky).

Obrázok

Suma	1000€	→	1100€	→	...
	x10% ↘		↗ x10% ↘	↗	
Úrok		100		110	

Pomôž Oliverovi nakresliť si tabuľku, aby zistil, ako sa bude vyvíjať stav na jeho účte.

b) Nájdi pre Olivera vzorec pre výpočet Budúcej hodnoty B (koľko peňazí si po 5 rokoch vyberie z banky), ak Aktuálna vložená suma je $A = 1000€$.

c) Oliver nie je spokojný s výškou svojho výnosu a povie si, že skúsi 10 percentný úrok s mesačným úročením.

(Nie 10% každý mesiac, ale mesačný úrok bude $\frac{10\%}{12}$ a takýto úrok sa mu pripočíta každý mesiac, čiže nie len raz za rok, ale 12krát za rok).

Nájdi vzorec pre výpočet Budúcej hodnoty B s mesačným úročením. Koľko peňazí zarobí Oliver týmto spôsobom?

d) Čo ak sa suma nebude úročiť 12krát za rok, ale n - krát za rok. Ako bude vyzeráť vzorec potom?

e) Koľko zarobí Oliver, ak n bude veľmi veľké (nekonečné), čiže bude sa úročiť nepretržite, ak viete, že

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e ?$$

Približná hodnota $e \approx 2,718...$

Označme si $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$

a) Ukážte, že a_n je zhora ohraničená

- $f(x) = x - \ln(1+x), \quad x > -1.$

Nájdite minimum funkcie f na intervale $(-1, \infty)$.

- Dokážte, že $x \geq \ln(1+x)$.
- Riešte túto nerovnicu pre $x = \frac{1}{n}$.

b) Ukážte, že a_n je rastúca postupnosť

- $\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1.$
- Bernoulliho nerovnosť:

$$(1+x)^n > 1+nx, \quad (x > -1, x \neq 0, n \in \mathbb{N}, n > 1).$$

Záver.

Ak a_n rastie a je zhora ohraničená, existuje konečná limita a_n (pre $n \rightarrow \infty$) a označuje sa e .

Príloha C

trzba	billboardy	tlac	televizia	radio
80918	68	1910	660	313
45493,8	87	3445	363	285
35966,7	123	1752	281	174
122026,5	183	979	993	235
78255,5	56	283	639	258
29869,6	182	398	225	103
19994,2	190	1265	142	272
60754,2	139	2075	486	52
113379,2	133	2648	925	150
73971,7	31	1627	605	118
118849,1	57	3652	977	153
89887,4	52	1174	736	449
46430,1	144	1836	366	231
54729,6	89	1330	440	393
21976,1	159	2603	161	442
5484	110	1032	28	215
88907,3	149	1914	720	46
17072,9	199	3065	117	178
56529,9	88	337	455	366
80049,4	160	3501	645	179
121955,5	188	1356	992	321
62042,7	58	3358	503	423
61462,6	137	1387	492	430
23780,3	43	1335	186	205
92677	68	1905	758	200
57434,8	90	3569	462	449
63565,8	22	3457	519	327
28222,2	89	1560	219	374
31618,4	177	3109	240	309
74127,2	81	3842	602	453
71824,3	107	1739	581	157
13227,5	128	2850	91	108
8161,1	109	1600	50	445
79308,5	54	1301	648	259
114370,4	169	3028	930	440
74868,1	140	811	604	107
70730,7	163	2844	567	383
65380,9	39	487	533	366
120744,1	150	982	985	473
63772,7	94	573	515	281
85247,3	168	959	688	360
75366,3	136	236	608	204
32608,8	161	2569	250	64
34552,3	120	3505	269	465
90134	115	3116	733	152
57987	162	3189	461	301
23746,9	24	1821	187	69
92119	106	1640	750	423
16703,6	152	3243	118	169
106520,9	145	2420	867	395

Príloha D

9,6

MIA

a)

Rok	Suma na začiatku roku	Úrok	Suma na konci roku	suma na konci / suma na začiatku
0	A=1000	$1000 \times 10\% = 100$	1100	1,1
1	1100	110	1210	1,1
2	1210	121	1331	1,1
3	1331	133,10	1464,10	1,1
4	1464,10	146,41	1610,51	1,1
5	B=1610,51	-	-	-

$$5 \left((A \cdot 1,1) \cdot 1,1 \right) \cdot 1,1 \cdot 1,1 \cdot 1,1 = 1610,51$$

$(A \cdot 1,1)^5 = 1610,51$ $\rightarrow$ počet rokov po ktorých rokoch máme vybrať peniaze

c, $A = 1000$

$$\frac{1000 \cdot (1,1 \cdot 12)}{100}$$

$$\cdot 5 = 660$$

$$660 + 1000 = 1660$$

d, ~~1000~~

$$e, \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e^2 \quad e \approx 2,718 \dots$$

Príloha E

a)

Rok	Suma na začetku roku	Úrok	Suma na konci roku	suma na konci suma na začetku
0	A=1000	$1000 \times 10\% = 100$	1100	1,1
1	1100	110	1210	1,1
2	1210	121	1331	1,1
3	1331	133,1	1464,1	1,1
4	1464,1	146,41	1610,51	1,1
5	B= 1610,51	-	-	-

Good school

$$A - (1, 1) = B$$

$$(100 + \text{mark } 10\%) / 100$$

20%

$$120/100 = 1,2$$

c) $\rightarrow B = 4 \cdot \left[\frac{100 + \frac{10}{12}}{100} \right]$

$$145.85 / 100$$

$$1500(1.0083)^{47.5} = 1645,308 \checkmark$$

1545, 31 -> delhi barba

$$B = 4. (1.0083)$$

$$\frac{2-1}{10}$$

$$d) \quad B = A \cdot (100 + \frac{10}{100})^{5 \cdot n}$$

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{2}n} = 1$$

$$B = A \cdot \left(10^{-1} \cdot \frac{1}{10} \right)_{10} =$$

$$\frac{0+4}{10}$$

$$B = A \left(\frac{e-1}{10} + 1 \right) \left(1 + \frac{1}{100m} + \frac{1}{100m^2} + \frac{1}{1000m^3} + \frac{1}{10m^4} + \frac{1}{10^5 m^5} \right)$$

$$= \frac{2+4}{10}$$

44718

$$a_1 \frac{1}{2} b$$

KF

B

Označme si $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$

a) Ukážte, že a_n je zhora ohraničená

- $f(x) = x - \ln(1+x)$, $x > -1$.
Nájdite minimum funkcie f na intervale $(-1, \infty)$.
- Dokážte, že $x \geq \ln(1+x)$.
- Riešte túto nerovnicu pre $x = \frac{1}{n}$.

b) Ukážte, že a_n je rastúca postupnosť

- $\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$.
- Bernoulliho nerovnosť:
 $(1+x)^n > 1+nx$, $(x > -1; x \neq 0, n \in \mathbb{N}, n > 1)$.

Záver.

Ak a_n rastie a je zhora ohraničená, existuje konečná limita a_n (pre $n \rightarrow \infty$) a označuje sa e.

$$a) f(x) = 1 - \frac{1}{1+x} \quad x > -1$$

$$1 = \frac{1}{1+x} \quad / \cdot (1+x) (\neq 0)$$

$$\boxed{1+x=1} \quad \boxed{x=0} \quad \checkmark$$

$$f''(x) = + \frac{1}{(1+x)^2} \Big|_{x=0} > 0 \Rightarrow \text{minimum}$$

$$x \geq \ln(1+x)$$

$f(x) = x - \ln(1+x)$ je na $(0, \infty)$ rastúca a má minimum
v $x=0$, kde $f(0)=0$. Keďže $\forall x > 0$ $f(x) > 0$ a keďže
 $x \geq \ln(1+x)$

Pre $x < 0$ máme dolnú hranicu $\ln(1+x)$ kardinálnejšie
ako $y=x$ a preto $x \geq \ln(1+x)$

$$\frac{1}{n} \geq \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

$$1 \geq n \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

$$1 \geq \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \quad \checkmark$$

máme $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ je šora obmedzená číslom 1.

Vzhľadom na to, že funkcia $\ln$ je kardinála
~~monotónne~~ tak aj $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ je šora obmedzená,
a to číslom 2

$$b) \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1 \quad a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

$$\begin{aligned} \frac{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} &= \left(\frac{1+\frac{1}{n+1}}{1+\frac{1}{n}}\right)^n \left(1+\frac{1}{n+1}\right) = \frac{\frac{n+2}{n+1}}{\frac{n+1}{n}} \left(1+\frac{1}{n+1}\right) \frac{n+1}{n} \\ &= \frac{n+2}{n+1} = 1 + \frac{1}{n+1} > 1 \quad \forall n > 0 \end{aligned}$$

~~keďže a_n je kardinála postupnosť.~~