UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY

Fyzika v teórii a praxi finančných trhov

BAKALÁRSKA PRÁCA

2012

Lukáš PÍŠ

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY

Fyzika v teórii a praxi finančných trhov

BAKALÁRSKA PRÁCA

Študijný program:	Ekonomická a finančná matematika
Študijný odbor:	1114 Aplikovaná matematika
Školiace pracovisko:	Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky
Vedúci práce:	Doc. RNDr. Július Vanko, PhD.

Bratislava 2012 **Lukáš Píš**

Univerzita Komenského v Bratislave
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

ZADANIE ZÁVEREČNEJ PRÁCE

Meno a priezvisko študenta: Lukáš Píš
Študijný program: ekonomická a finančná matematika (Jednoodborové štúdium, bakalársky I. st., denná forma)
Študijný odbor: 9.1.9. aplikovaná matematika
Typ záverečnej práce: bakalárska
Jazyk záverečnej práce: slovenský

Názov: Fyzika v teórii a praxi finančných trhov

Cieľ: Aplikácia fyzikálnych metodík na modelovanie a prognostiku finančných trhov.

Vedúci: doc. RNDr. Július Vanko, PhD.
Katedra: FMFI.KAMŠ - Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky
Dátum zadania: 16.10.2011

Dátum schválenia: 27.10.2011

doc. RNDr. Margaréta Halická, CSc.
garant študijného programu

....
študent

....
vedúci práce

Poďakovanie Ďakujem vedúcemu bakalárskej práce Doc. RNDr. Júliusovi Vankovi, PhD. za jeho odborné rady, pripomienky a trpezlivosť pri tvorbe tejto bakalárskej práce.

Abstrakt

PÍŠ, Lukáš: Fyzika v teórii a praxi finančných trhov [Bakalárska práca], Univerzita Komenského v Bratislave, Fakulta matematiky, fyziky a informatiky, Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky; školiteľ: doc. RNDr. Július Vanko, PhD., Bratislava, 2012, 32 s.

Cieľom práce je poskytnúť čitateľovi stručný a zrozumiteľný prehľad o dôležitých aplikáciách fyzikálnych metód v ekonómii, pričom dôraz je kladený na analógie medzi dejmi prebiehajúcimi vo fyzikálnych a ekonomických systémoch a následné využitie tychto podobností pri rôznych modeloch a analýzach. V práci sú prezentované fyzikálne výklady rôznych sociálno-ekonomických pojmov ako napríklad informácia, bohatstvo a úžitok, krachové situácie, časový vývoj trhu z hľadiska vzájomnej interakcie medzi ekonomickými agentami a pod.

Práca sa ďalej podrobnejšie venuje "výskytu" mocninových zákonov v ekonomických systémoch a s nimi súvisiacim modelom rozdelenia bohatstva a fluktuácii cien. Na základe výsledkov skorších štúdii sa snaží priblížiť ich niektoré nedostatky, výhody a v neposlednom rade aj ich praktický význam.

Kľúčové slová: ekonofyzika, teória informácie, rovnovážny stav, krachy na burzách, mocninové zákony

Abstract

PÍŠ, Lukáš: Physics in theory and praxis of financial markets [Bachelor thesis], Comenius University in Bratislava, Faculty of mathematics, Physics and Informatics, Department of applied mathematics and statistics; supervisor: Doc. RNDr. Julius Vanko, Phd., Bratislava, 2012, 32 p.

The purpose of this work is to give short and clear survey about applications of physical methods in economics. The main target is to build analogies of processes in physical and economical systems and to apply them in various models and analysis. In the work we show physical explanations of various social and economical terms such as information, wealth and benefit, market crashes, the time evolution of markets etc.

The work also deals with the occurrence of power laws in economical systems and models of wealth distribution and price fluctuations. Based on recent studies the work shows some negatives, positives and at least the practical importance of this models.

Keywords: econophysics, Theory of information, equilibrium, financial crashes, power laws

Obsah

Zoznam obrázkov

Zoznam tabuliek

Úvod

V súčasnosti sa čoraz viac stierajú hranice medzi vednými disciplínami a prakticky už neexistujú dva také vedné odbory, ktoré by nemali spoločnú určitú oblasť výskumu. To ale znamená, že na určitý problém spadajúci do sféry pôsobenia oboch vedných disciplín sa dá nazerať dvoma odlišnými a nezávislými pohľadmi. Tieto pohľady vonkoncom nie sú tak diametrálne odlišné ako sa môže na prvý pohľad zdať a navzájom sa dopĺňajú. Takže pri skúmaní určitého problému môže byť veľmi osožné využívať poznatky a náhľady pochádzajúce z iných vedných disciplín.

Úzke vzťahy existujú aj medzi ekonomickými a prírodnými vedami. V snahe o vysvetlenie mnohých ekonomických javov musia ekonómovia často využívať poznatky iných vied, najmä však štatistiku a rôzne matematické metódy pravdepodobnosti. Avšak v posledných rokoch je čoraz zjavnejší prínos navonok absolutne nesúvisiacej vednej disciplíny-ekonofyziky.

Cieľom našej práce je jednoduchým a pútavým spôsobom poskytnúť všeobecný prehľad najvýznamnejších prínosov fyziky pri skúmaní ekonomických problémov. Pri ich popise sa snažime nezachádzať do prílišnej hĺbky a sústreďujeme sa predovšetkým na hľadanie analógii, pričom v prípade hlbšieho záujmu o danú problematiku čitateľa odkazujeme na odbornú literatúru, v ktorej je daná problematika rozoberaná podrobnejšie.

Práca je členená do troch kapitol:
Prvá kapitola stručne opisuje vznik a význam ekonofyziky poukazujúc na najzreteľnejšie súvislosti medzi ekonómiou a fyzikou.
Druhá kapitola sa rozdeľuje do piatich podkapitol, pričom v každej je prezentovaný a stručne popísaný fyzikálny pohľad na určitý ekonomický problém.
Tretia kapitola sa zaoberá využitím mocninových zákonov v ekonómii. Prezentuje a vysvetľuje tu výsledky štúdií niektorých zahraničných autorov a analyzuje niektoré fyzikálne modely popisujúce situácie na ekonomických trhoch (rozdelenie bohatstva, fluktuácie cien).

1 Vznik a význam ekonofyziky

Čo je to ekonofyzika? Táto otázka stále patrí medzi často kladené, hoci prešlo už takmer dvadsať rokov od medzinárodnej konferencie o štatistickej fyzike v Kalkate, kde tento pojem prvýkrát použil H.E.Stanley. Mnohých stále udivuje, ako môžu byť teórie zamerané na vysvetlenie fyzikálneho sveta použité pri snahe pochopiť zložité sociálne, hospodárske a politické štruktúry v správaní sa ľudských bytostí. Fyzika ako prírodná veda má byť v podstate presná, špecifická a jej schopnosti predpovedať určité javy sú založené na využití niektorých univerzálnych vlastností látok, ktoré sú dostatočné na vysvetlenie mnohých fyzikálnych javov. Ale môžu vôbec existovať podobné objektívne vlastnosti platné pre všetky ľudské bytosti, ktoré na rozdiel od elementárnych častíc určite nie sú navzájom totožné, nech sa na ne pozeráme z akéhokoľvek uhla pohľadu [8]? A ak by aj nejaké existovali, bolo by možné vďaka nim odvodiť aspoň niektoré aspekty zložitého ľudského správania?

Na tieto otázky sa napriek prvotnému zdaniu dá pozitívne odpovedať. V štyridsiatych rokoch minulého storočia prejavil Majorana vedecký záujem o finančné a hospodárske systémy. Napísal priekopnícku knihu o základných štatistických zákonoch vo fyzike a spoločenských vedách. Počas nasledujúcich desaťročí však len málo fyzikov prejavilo záujem o výskum v oblasti sociálnych alebo ekonomických systémoch. Až okolo roku 1990 sa táto interdisciplinárna téma začala dostávať do poľa záujmu širšej vedeckej obce a v posledných rokoch sa objavilo viacero úspešných pokusov o aplikáciu fyzikálnych poznatkov v rozličných oblastiach spoločenských vied. Najmä v kvantitatívnej ekonómií a financiách začal fyzikálny výskum dopĺňať tradičnejšie prístupy ako napríklad stochastické financie [8].

1.1 Prepojenie medzi fyzikou a ekonómiou

Ekonómia sa zaoberá tým, ako spoločnosti efektívne využívajú zdroje na produkovanie cenných komodít a distribuujú ich medzi iných ľudí alebo hospodárske subjekty [8]. Je to disciplína súvisiaca s takmer všetkým okolo nás, od nášho najbližšieho okolia až k udalostiam na národnej úrovni. Na prvý pohľad sa može zdať, že sa jedná o úplne odlišnú situáciu ako vo fyzike, ktorej teórie sú obvykle dobre definované a spojené so štúdiom objektov s minimálnym trením, ako napríklad planét a telies. Avšak pri hlbšom porovnávaní sa objaví oveľa viac analógie než rozdielov. A z analógií sa často stávajú ekvivalencie. Dajme teraz iba niektoré príklady:

Štatistickú fyziku možno veľmi zjednodušene charakterizovať ako odvetvie fyziky, ktoré sa snaží s využitím štatistiky predvídať a vysvetliť správanie sa makroskopických systémov na základe vlastností mikroskopických prvkov týchto systémov. Podobne na pochopenie globálneho správania ekonomických systémov, svojím spôsobom tiež zložených z veľkého množstva prvkov, by sa mohli využiť koncepty ako napríklad stochastická dynamika, korelačný efekt, škálovanie, ktoré sú úspešne využívané v štatistickej fyzike [6].

Aj teória chaosu má určitý vplyv na ekonomické modelovanie. Termín komplexné systémy bol vytvorený kvôli veľkej rôznorodosti systémov, ktoré zahŕňajú príklady z fyziky, chémie, biológie a tiež sociálnych vied.

Fyzikálne modely tiež pomáhajú vzniku nových teórií, ktoré vysvetľujú staré pozorovania v ekonómii. Taliansky sociálny ekonóm Pareto vyšetroval pred vyše sto rokmi bohatstvo jednotlivcov v stabilnej ekonomike, pričom sledoval počet ľudí s príjmom vyšším ako x. Na základe výskumu dospel k nasledovnému rozdeleniu:

$$P(X < x) \sim x^{-\alpha}$$

Toto rozdelenie sa neskôr podarilo vysvetliť práve fyzikom pomocou niektorých elegantných modelov kinetického rozdelenia Aj keď ekonomické aktivity jedincov možno chápať z viacerých hľadísk, ako napr. maximalizácia úžitku, eventuálne výmeny peňazí v obchode môžu byť jednoducho prezentované rôznymi zákonmi zachovania ako aj kinetickou teóriou plynov založenou na maximalizácií entropie [4].

A dotretice uvedieme ešte ďalší príklad analógie medzi fyzikou a ekonómiou. Systémy bez trenia, aj keď veľmi ovplyvnili vývoj fyziky, sa začali neskôr považovať za zriedkavé, a to nielen na mikroskopickej úrovni, kde zrejme predstavujú výnimku vzhľadom na nevyhnutné reakcie s okolím, ale aj na makroskopickej úrovni, kde fluktuácie vnútorného alebo vonkajšieho zdroja robia takmer nemožným predpovedanie budúceho vývoja. Teda rovnovážne a nerovnovážne systémy, teória stochastických procesov a teória chaosu sa stali hlavným nástrojom štúdia reálnych systémov. Tým pádom možno navzájom poprepájané a úzko „trejúce sa“ ekonomické subjekty skúmať analogicky [8].

Uvedené príklady slúžili iba pre úvodnú ilustráciu a pochopenie významu fyzikálnych metód pri snahe o nájdenie a pochopenie základných princípov fungovania ekonomiky. Avšak oblastí, kde sa ekonofyzika snaží prísť s novým a možno správnejším pohľadom ako klasická ekonómia, je oveľa viac a z najrôznejších odvetví a na niektoré problémy v ekonómii sa dá dokonca len v rámci fyziky pozrieť z viacerých pohľadov.

1.2 Hlasy pre a proti ekonofyzike

Mnohí zástancovia ekonofyziky veria, že sa jej podarí nájsť vysvetlenie a samozrejme aj riešenie súčasnej hospodárskej krízy. Očakávajú, že ekonofyzika ponúkne nové pohľady schopné vysvetliť problémy, ktoré súčasné ekonomické teórie so svojim aparátom nie sú schopné riešiť. Objavujú sa dokonca predstavy novej disciplíny-ekonovedy, ktorá v sebe skĺbi tradičné ekonomické teórie, fyzikálne postupy a mnohé iné oblasti vedy. Zastávajú názor, že iba s prístupom založeným na dôkladnej analýze získaných dát je ekonómia schopná stať sa vedou prinášajúcou dôveryhodné výsledky [4].

Naopak, časť ekonómov ekonofyziku stále odmieta používajúc nasledovné argumenty:

- Ekonofyzici neberú do úvahy práce vypracované ekonómami.
- Teoretické modely, ktoré sa snažia vysvetliť určité ekonomické javy, pracujú s nereálnymi predpokladmi.
- Ekonómovia používajú nedostatočne rigorózne a robustné statistické metodológie [2].

Ekonofyzika má samozrejme okrem kladov aj svoje zápory. To však platí pre každý vedný odbor vrátane samotnej ekonómie. Oba názory na ekonofyziku, ktoré sme tu v krátkosti predstavili, sú samozrejme trochu prehnané. Vo všeobecnosti sa ukazuje, že ekonofyzika vie významnou mierou pomôcť ekonómom pri hľadaní riešenia mnohých ekonomických problémov.

2 Prehľad fyzikálnych pohľadov na ekonomické problémy

2.1 Teória informácie

Skoro v každej oblasti ľudskej činnosti, vrátane ekonomickej, hrá dôležitú úlohu informácia. Pojem miera informácie sa zdá byť veľmi abstraktný, aj keď práve množstvo a výmena informácie sú hybnou silou najmä sociálneho života, do ktorého nepochybne spadá aj ekonómia. Preto je veľmi užitočné bližšie sa zaoberať týmto pojmom, prípadne sa ho pokúsiť kvantifikovať. Informácia je veľmi úzko spojená s entropiou, preto pri hľadaní spôsobu, ako tento pojem správne „uchopiť“, môže byť veľmi nápomocná práve fyzika.

2.1.1 Čo je to informácia?

Čo je to teda informácia? Na informáciu sa možno pozerať ako na určitú pravdepodobnostnú funkciu. A táto, ak existuje, musí spĺňať nasledujúce vlastnosti:

1. Miera informácie dvoch udalostí je vyššia ako miera každej z nich.
2. Ak sú dve udalosti nezávislé, ich spoločná miera informácie bude sumou mier informácie každej z nich.
3. Miera informácie každej udalosti je nezáporná.

Matematická funkcia, ktorá spĺňa uvedené vlastnosti, je vyjadrená nasledovným vzťahom:

$$H(P) = -\log_b P \tag{1}$$

kde H je miera informácie, P je pravdepodobnosť spojená s danou udalosťou a b je kladná konštanta. [9]

Uvažujme teraz náhodnú udalosť X. Nech $x_1, x_2, ..., x_n$ sú jej možné hodnoty, každá s pravdepodobnosťou $p_1, p_2, ..., p_n$. Miera informácie X je priemer miery informácie každej hodnoty, čo možno vyjadriť ako:

$$H(X) = -\sum_{j=1}^{n} p_j \log p_j \tag{2}$$

Tento vzťah je v podstate vzťah pre entropiu odvodený Boltzmannom v roku 1780 a tiež je to všeobecný Shannonov vzťah pre informáciu. Teda vidíme tu analógiu medzi mierou informácie (aplikovateľnou okrem iného aj v ekonómii) a teóriou o entropii. Tento vzťah je základným vzťahom teórie informácie. Má dva základné body:

1. Informácia s vyššou mierou je všeobecnejšie ťažšie „získateľná“
2. Množstvo informácie, ktoré je jedinec schopný získať, závisí od jeho poznatkov súvisiacich s novou informáciou.

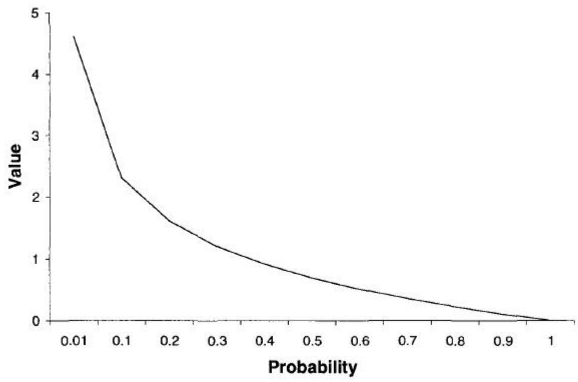
Najdôležitejším dôsledkom Shannonovej teórie o informácii je nasledovný vzťah:

$$R = H(x) - H_y(x) \tag{3}$$

kde R je množstvo informácie, ktorú môže jedinec získať, H je množstvo prichádzajúcej novej informácie a $H_y(x)$ je podmienená entropia, nazývaná tiež ekvivokácia. Jej hodnota je určená závislosťou medzi zdrojom a príjemcom informácie. Pokiaľ sú nezávislé, $H_y(x) = H(x)$ a $R = 0$, teda medzi dvoma objektami, ktoré sú navzájom úplne nezávislé, nemôže nastať výmena informácie. Ak korelácia medzi zdrojom a príjemcom informácie sa rovná jednej, potom $H_y(x) = 0$ a teda $R = H(x)$. Vo všeobecnosti platí, že s narastajúcou koreláciou medzi zdrojom a príjemcom informácie narastá aj účinnosť výmeny informácie [9].

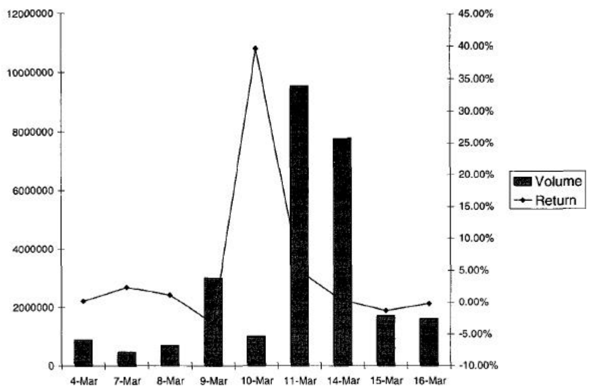
Výhodou tejto definície je, že nezávisí na špecifických charakteristikách zdroja a príjemcu a môže byť preto rovnako dobre aplikovateľná v čisto technických i v sociálnych a ekonomických oblastiach. $H_y(x)$ teda predstavuje veľkosť asymetrie informácie. Keďže ľudia nemajú rovnaké poznatky, nemôžu ani rovnakej miere chápať nové informácie, ktoré prijímajú, a tým pádom vzniká mnohoznačnosť, resp. viacero pohľadov a názorov na tú istú informáciu. Takisto možno nahliadnuť, že existuje časový rozdiel medzi odoslaním a prijatím informácie. To však nesúhlasí s Grossmanovou-Stiglitzovou teóriou informácie, používanou v ekonomickej praxi, kde sa všeobecne predpokladá, že všetci agenti na trhu dokážu okamžite rozpoznať informáciu a ohodnotiť ju.

Ďalším z dôsledkov Shannonovej teórie informácie je fakt, že čím viac ľudí má rovnakú informáciu, tým nižšiu hodnotu táto informácia má, čo ilustruje nasledovný graf:



Obr. 1: Miera informácie a pravdepodobnosť

Pravdepodobnosť tu z ekonomického pohľadu reprezentuje percento investorov, disponujúcich danou informáciou. Ak $P = 1, log(P) = 0$, teda hodnota všeobecne známeho faktu je nulová. Naopak, ak $P \to 0, log(P) \to \infty$, teda hodnota informácie, ktorú pozná iba málo ľudí, je veľmi vysoká. Praktický príklad ukazuje nasledujúci graf:



Obr. 2: Priemerný zisk a objem obchodu s akciami spoločnosti WestJet

Graf zobrazuje objem obchodu a zisk z akcií spoločnosti WestJet v súvislosti s oznámením bankrotu spoločnosti Jetsgo, hlavného konkurenta WestJet. Jestgo oznámila bankrot večer 10. marca. Keď niekto kúpil akcie 10. marca, mal zisk 40 percent. Vidíme, že potom, čo sa informácia o bankrote stala známou, značne stúplo množstvo kupovaných akcií, no zároveň klesol zisk takmer na nula percent, čo súhlasí s dôsledkami vzťahu 3 .

2.1.2 Teória entropie ľudského myslenia

Teória entropie taktiež ponúka zaujímavý pohľad na pochopenie častých vzorov v ľudkej psychike a tým môže byť nápomocná pri hľadaní napríklad aj nových ekonomických modelov. V tejto podkapitole uvedieme pre účel tejto práce iba najzaujímavejšie z nich, pričom čitateľa v prípade hlbšieho záujmu o túto problematiku odkazujeme na [9]

Prvým hlavným vzorom ľudského správania sa je tzv. **konzervatizmus**. Je charakterizovaný ako správanie jedincov, ktorí majú odmietavý postoj k prehodnocovaniu zaužívaných životných postojov tvárou v tvár novej informácii. Táto vlastnosť je prirodzeným dôsledkom teórie informácie. Zo vzťahu 3 vyplýva, že so zvyšujúcim sa množstvom poznatkov klesá hodnota informácie, ktorú jedinec môže prijať, čo presne zodpovedá definícii konzervatizmu. [9]

Ďalším častým javom v ľudskej psychike je tzv. **rámcovanie, reprezentatívnosť a zaujatosť**. Ľudia často rámcujú, resp. delia problémy do kategórií a priraďujú im rozličnú hodnotu založenú na vnímanej relatívnej dôležitosti každého problému. Prečo to robia? Pri hľadaní odpovede na túto otázku môže byť nápomocná štatistická fyzika. Nech $\{p_1, ...p_n\}$ a $\{q_1, ...q_n\}$ sú dva pravdepodobnostné vektory. Potom platí:

$$-\sum_{j=1}^{n} p_j \log p_j \leq -\sum_{j=1}^{n} q_j \log p_j \tag{4}$$

pričom rovnosť platí práve vtedy, ak

$$q_j = p_j \qquad\qquad 1 \leq j \leq n$$

Tento výsledok sa nazýva Gibbsova nerovnosť. V Gibbsovej nerovnosti p_j môže byť chápané ako pravdepodobnosť udalosti j v prírode a q_j je subjektívna pravdepodobnosť nášho posúdenia danej udalosti. Ľavá strana Gibbsovej nerovnosti je priemerná neurčitosť udalosti a pravá strana je neurčitosť nášho subjektívneho posúdenia udalosti. Vo všeobecnosti je rozdiel medzi pravou a ľavou stranou Gibbsovej nerovnosti menší, ked je menší aj rozdiel medzi q_j a p_j. To nám hovorí, že spracovanie informácie je užitočnejšie, keď je subjektívna pravdepodobnosť bližšia objektívnej. Teda, pokiaľ má ľudská myseľ poznatky kategorizované do veľkých tried, tieto sú ľahšie dostupné ako v prípade menších tried. Pravdepodobnejšie udalosti sú totiž ľahšie zapamätateľné ako nepravdepodobnejšie udalosti, (čo výplýva z Gibbsovej nerovnosti) [9].

2.2 Termodynamika a ekonómia

V rámci hľadania analógií medzi ekonomickými systémami a termodynamikou je hlavnou snahou fyzikov ukázať, ako môžu ekonomické veličiny charakterizovať stav ekonomického systému v rovnováhe.

Fyzikálny systém v termodynamickej rovnováhe vyžaduje na určenie svojho stavu nemechanickú premennú- teplotu. Aj v ekonomickom systéme bude pravdepodobne platiť niečo podobné. Okrem toho sa predpokladá, ako sme už uviedli v predchádzajúcej podkapitole, že pre ekonomické systémy bude existovať veličina podobná entropii pre termodynamické systémy [16].

Takisto sa v rámci ekonofyziky rozvíjajú ekonomické analógie k voľnej energii, Maxwellovým vzťahom a Gibbs-Duhemovým vzťahom. Za predpokladu, že ekonomický úžitok sa môže merať, rozvíja sa tiež operačná definícia ekonomickej teplotnej škály [16]. Pokúsime sa teraz objasniť niektoré dôležité analógie.

2.2.1 Základné analógie v termodynamike a ekonómii

Uvažujme merateľnú ekonomickú veličinu *zisk*. Z ekonómie vieme, že platí vzťah:

$$W = \lambda M + pN \tag{5}$$

kde λ a M reprezentujú hodnotu a množstvo peňazí a p a N reprezentujú vektory cien a počet tovarov. Keďže W je zachovaná v transakciách podobne ako celková energia E termodynamického systému, je lákavé považovať ich za analogické.

Ekonómia predpokladá, že množstvo peňazí a majetku jednotlivca je sumarizované hodnotou U, ktorá je obvykle väčšia ako W. Rozdiel je známy ako *prebytok* a budeme ho označovať Ψ. Platí teda:

$$\Psi = U - W \tag{6}$$

I keď sa zdá, že vzťah 6 prináša iba ďalšiu neznámu veličinu, Ψ, je užitočný, pretože má termodynamickú analógiu [16].

Helmholtzova voľná energia systému s N identickými čaticami je definovaná ako

$$F = -PV + \mu N \tag{7}$$

kde P je tlak, V je objem a μ je termodynamický potenciál častíc. Fyzikálna veličina analogická k cene P je termodynamický potenciál μ a vzťah medzi E a F možno vyjadriť za pomoci teploty T a entropie S nasledovne:

$$TS = E - F \tag{8}$$

Porovnaním rovností 6 a 8 dospejeme k ďalšej analógii, a síce medzi Ψ a TS.

Pretože nadbytok je nulový pri nerozvinutej ekonomike, môžme ekonomickú teplotu T chápať v zmysle úrovne ekonomického rozvoja, čo je v súlade s myšlienkou, že T je *intenzvna* veličina [16].

Vidíme, že už jednoduchou sugesciou môžme rozoznávať niektoré významné analógie medzi ekonomickými a termodynamickými veličinami. Tie teraz pre prehľadnosť zhrnieme v nasledujúcej tabuľke:

Tabuľka 1: Sumarizácia analogických veličín

Termodynamika	-F	-E	TS	μ	N
Ekonómia	W(zisk)	U(úžitok)	Ψ (nadbytok)	p(cena)	N(tovaru)

2.2.2 Ekonomická teplota

Uvažujme ekonomický systém s N agentami, medzi ktorých je rozdelený zisk W. Predstavme si, že existuje veľké množstvo možností, ako medzi agentov rozdeliť zisk a je takmer nemožné ich všetky predpovedať. Pre každú možnú hodnotu W definujme počet možností, ako rozdeliť zisk medzi N agentov, $g(W, N)$, ktorý nazveme *štatistická váha stavu* s príjmom W.

Dva systémy sa nachádzajú v rovnovážnom stave, pokiaľ ich vzájomná interakcia nevplýva na ich distribučnú funkciu, čo prenesené do ekonómie znamená, že peňažný tok v absolutnej hodnote je nulový. Nech teda máme dva ekonomické systémy, ktoré spolu interagujú. Tým vznikne nový systém s celkovým ziskom $W1 + W2$ a počtom agentov $N_1 + N_2$.

Za predpokladu, že každý stav rozdelenia zisku môže nastať s rovnakou pravdepodobnosťou a pokiaľ pripustíme presun agentov medzi systémami, vieme sa dopracovať k podmienke rovnovážneho stavu:

$$\frac{\partial \ln n_1(W_1, N_1)}{\partial W_1} = \frac{\partial \ln n_2(W_2, N_2)}{\partial W_2} \tag{9}$$

Teda dva systémy sú v rovnováhe, pokiaľ sú charakterizované rovnakým parametrom $\frac{\partial \ln n(W,N)}{\partial W}$, čo je však podľa termodynamiky $\frac{1}{T}$. Teda na to, aby boli dva systémy v rovnováhe, musia mať rovnakú *ekonomickú teplotu* , ktorú možno chápať opäť v zmysle analógie ako priemerný zisk na jedného agenta [10].

2.2.3 Migračný potenciál

Predpokladajme, že máme dva systémy s celkovým počtom agentov $N_1 + N_2 = N$ a pričom vzájomná výmena agentov je možná. Rovnovážny stav potom vieme charakterizovsť nasledovnými rovnosťami:

$$\frac{\partial S_1(N_1, W_1)}{\partial N_1} = \frac{\partial S_2(N_2, W_2)}{\partial N_2} \tag{10}$$

$$\frac{\partial S_1(N_1, W_1)}{\partial W_1} = \frac{\partial S_2(N_2, W_2)}{\partial W_2} \tag{11}$$

Vzťah 11 možno napísať ako $\frac{1}{T_1} = \frac{1}{T_2}$, teda platí podmienka rovnakých teplôt.

Chemický potenciál je definovaný ako:

$$\mu = -T\frac{\partial S(N, W)}{\partial N} \tag{12}$$

Použitím analogického vzťahu pre migračný potenciál môžme vzťah 10 chápať ako rovnosť migračných potenciálov. Teda jednoducho povedané, agenti budú migrovať zo systému s vyšším potenciálom do systému s nižším potenciálom až dokým sa nedosiahne rovnovážny stav [10].

2.2.4 Termodynamika a trh tovarov

Pokiaľ začneme brať do úvahy aj tok tovarov, možme pomocou už definovaných podmienok rovnováhy systémov modelovať trh tovarov.

Trh tovarov je určený predaným množstvom (objemom) tovarov $V(t)$ za čas t a množstvom peňazí $W(t)$ použitých na ich kúpu. Pokiaľ sú tieto časovo invariantné, jedná sa o stacionárny trh, a práve takýto trh budeme pre jednoduchosť uvažovať. Pri modelovaní môžme taktiež zavádzať rôzne reštrikcie (ktoré však nesmú v čase meniť), čím dosiahneme, že model bude bližší skutočnosti, no pre väčšiu prehľadnosť budeme v našej práci uvažovať len tzv. *voľný trh*, teda rozdelenie príjmu a tovarov nebudeme žiadnym spôsobom obmedzovať.

Majme teda dva trhy tovarov, medzi ktorými môže dochádzať k výmene peňazí a tovarov. Nech teda platí:

$$W_n = nW_0 \quad V_m = mV_0 \tag{13}$$

kde V_0, W_0 sú jednotkové množstvá tovaru a peňazí, m, n sú prirodzené čísla. Množina prípustných stavov trhu je určená množstvom spôsobov, akými môžme rozdeliť tovar medzi kupujúcich. Uvažujme len jedného predajcu, ktorý nebude mať vplyv na tok prichádzajúcich tovarov. Ďalej budeme používať marginálnu cenu, pre ktorú bude platiť vzťah:

$$P = T\frac{\partial S}{\partial V} \tag{14}$$

Keďže neuvažujeme žiadne obmedzenia, rozdelenia zisku a tovarov sú nezávislé a celkovú entropiu môžme jednoducho charakterizovať pomocou vzťahu:

$$S(E, V) = S(W) + S(V) \tag{15}$$

Na výpočet štatistickej váhy $g(W_n, N)$ toku W_n, ktorý je rozdelený medzi N agentov, použijeme vzorec:

$$g(W_n, N) = \frac{(N-1+n)!}{n!(N-1)!} \tag{16}$$

Na aproximovanie entropie (logaritmus štatistickej váhy) použijeme Stirlingov vzorec:

$$S(W_n) \approx (N+n-\frac{1}{2})\ln(N+n-1)-(N-\frac{1}{2})\ln(N-1)-(n+\frac{1}{2})\ln n-\frac{1}{2}\ln(2\pi) \quad (17)$$

Teplotu dostaneme diferencovaním podľa W:

$$\frac{1}{T}=\frac{1}{W_0}\frac{\partial S(W_n)}{\partial n}\approx\frac{1}{W_0}\ln(\frac{N-1+n}{n}) \quad (18)$$

Ak $n \gg N$, môžme výraz 18 ešte zjednodušiť na $\frac{1}{T}=\frac{1}{W_0}\frac{N}{n}=\frac{N}{W}$

Analogicky platí:

$$\frac{\partial S(V_m)}{\partial V_m}=\frac{1}{V_0}\frac{N}{m}=\frac{N}{V} \quad (19)$$

Na základe Maxwellových rovníc sa táto derivácia rovná $\frac{P}{T}$, teda pre voľný trh tovarov musí platiť:

$$P=T\frac{N}{V} \quad (20)$$

a tým pádom vidíme, že marginálna cena P sa rovná priemernej cene $\frac{W}{V}$.

Ako sme už ukázali, pomocou teploty môžme určiť, či sú systémy v rovnováhe. Ak teraz budeme uvažovať voľný presun tovarov pri fixnom počte agentov v rámci systému, môžme rovnako ako pri teplote odvodiť podmienky rovnosti teplôt resp. marginálnych cien pre rovnovážny stav:

$$\frac{\partial S_1}{\partial W_1}=\frac{\partial S_2}{\partial W_2} \quad \frac{\partial S_1}{\partial V_1}=\frac{\partial S_2}{\partial V_2} \quad (21)$$

2.3 Ďalšie fyzikálne pohľady na trh

Termodynamika nie je zďaleka jediným odvetvím fyziky, ktoré umožňuje nový pohľad na trh tovarov. Všetko závisí od toho, ktorým smerom sa vydáme pri hľadaní analógií medzi fyzikálnymi a ekonomickými veličinami, resp. ktorú stránku trhu sa rozhodneme bližšie skúmať. V tejto podkapitole uvedieme v stručnosti ďalšie pohľady na trh, ktoré nám umožňujú modelovať a predvídať najrôznejšie stavy a zmeny na finančných trhoch.

2.3.1 Trh ako elektrodynamické pole

Pokiaľ chceme vidieť analógiu medzi trhom a elektrodynamickým poľom, musíme sa zamerať na problém arbitráže a hľadať tzv. bezarbitrážne podmienky. Arbitráž je v podstate možnosť profitu bez akéhokoľvek rizika a bez nutnosti počiatočného kapitálu. Krátkodobej arbitráži sa dôsledkom neustálych cenových fluktuácií nedá zabrániť, avšak vďaka racionalite subjektov na finančnom trhu tento stav nikdy nie je dlhodobý.

Majme teda na trhu dve rôzne meny A a B s výmenným kurzom $F(t)$ závislým od času t a s úrokovými mierami r_a a r_b. Potom bezarbitrážnu podmienku môžme zapísať ako:

$$F(t).(1+r_a) = F(t+dt).(1+r_b) \tag{22}$$

Ak by sme si v prípade nerovnosti napr. požičali určité množstvo meny A v čase t a hneď ju vymenili za menu B a potom ich podržali do času $t+dt$, mohli by sme následnou výmenou za menu A dosiahnuť bezrizikový zisk bez potreby akéhokoľvek vstupného kapitálu.

Vidíme, že sa vlastne jedná o tok peňazí po dvoch rôznych trajektóriách so spoločným počiatočným a koncovým bodom.

Máme teda peňažný tok s dvoma rôznymi trajektóriami, ktoré majú spoločný počiatočný a koncový bod. Pre obe meny musia platiť nasledovné vzťahy:

$$R(c) = F^{-1}(t).(1+r_B)^{-1}.F(t+dt).(1+r_A) - 1 \tag{23}$$

$$R(-c) = F(t).(1+r_B).F^{-1}(t+dt).(1+r_A)^{-1} - 1 \tag{24}$$

Arbitrážnu príležitosť môžme vyjadriť vzťahom:

$$R = R(c) + R(-c) \tag{25}$$

Je zrejmé, že pokiaľ chceme zabrániť arbitráži, musí sa výraz 25 rovnať nule, čo je ekvivalentné s podmienkou 22.

Podľa [11] sa peniaze pohybujú od aktív pod cenou k preceneným a dlh sa pohybuje opačne. Ak budeme peniaze chápať ako častice so silovým potenciálom, dlh bude potom reprezentovaný časticami s opačným nábojom. Tok peňazí a dlhu pritom samozrejme ovplyvňuje cenu aktív. Teda finančný systém možno chápať ako analógiu k systému častíc v silovom poli, ktoré ho vytvárajú a zároveň ovplyvňujú. Tok peňazí uvažovaný v bezarbitrážnych podmienkach môžme teda chápať v zmysle elektrodynamického poľa, len s tým rozdielom, že nebudeme pracovať v troj-rozmernom, ale iba v dvoj-rozmernom priestore (dve meny A a B). Týmto sme zjednodušene popísali princíp tzv. Gauge Theory of Arbitrage (GTA) [11].

Základom GTA je pohyb v geometrickom priestore zloženom z bázy B a vlákien V napojenách na body bázy. Poloha častice pri pohybe pozdĺž vlákien je určená čiastkovou koordinátou bázy x a koordinátou $F(x)$ vo vlákne prislúchajúcom x. Ak sa na množstvo peňazí vymieňaných medzi menami A a B pozeráme ako na pohyb častice v tomto zväzku vlákien, intenzitu elektromagnetického poľa môžme prirovnať k hraničnému výnosu. Hodnota R je zas analogická s energiou poľa a elektormagnetickom poli. Teda snahu o elimináciu arbitrážnych príležitostí môžme chápať ako minimalizáciu energie [11].

2.3.2 Trh ako kontrolný mechanizmus

Majme určitý počet agentov, ktorí neustále sledujú situáciu na trhu a snažia sa čo najrýchlejšie reagovať na akúkoľvek zmenu v snahe maximalizovať svoj úžitok. Môžme ich teda chápať ako určitý druh senzorov, ktoré sledujú a hodnotia stav systému a následne naň reagujú podľa určitého kontrolného mechanizmu [7].

Môžme si to predstaviť ako n hmotných bodov, pričom susedné body sú spojené pružinou. Pokiaľ by neexistoval kontrolný mechanizmus, bol by celý systém veľmi nestabilný a náchylný k rozkmitaniu aj pri minimálnej výchylke ľubovoľného z bodov. Tento systém môžme popísať pomocou rovníc:

$$\dot{x}_i = v_i \tag{26}$$

$$\dot{x}_i = k(x_{i-1} - x_i) + k(x_{i+1} - x_i) + fx_i - gv_i + H_i \tag{27}$$

kde x_i je výchylka hmotného bodu i , v_i je rýchlosť, k tuhosť pružiny, f destabilizačný silový koeficient, g tlmiaci silový koeficient a H_i je kontrolná sila pôsobiaca na hmotný bod i [7].

Hmotné body budú v ekonomickej predstave spotrebiteľmi, výrobcovia zas budú vonkajším zdrojom sily, ktorú v tomto prípade reprezentuje obchodované množstvo. Spotrebitelia sa správajú podľa svojej úžitkovej funkcie, ktorá väčšinou pôsobí proti vychýleniu z rovnovážnej polohy. Príkladom takejto funkcie môže byť napríklad nasledovný vzťah:

$$U_i = -\frac{1}{2w_i} pQ^2 + bQ|X_i| \tag{28}$$

kde $X_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_{ij}$ je lineárnou kombináciou výchyliek všetkých spotrebiteľov, p je cena, w_i zárobok spotrebiteľa a Q je množstvo tovaru, o ktorý má spotrebiteľ záujem. Maximalizáciou tejto funkcie užitočnosti získame dopytovú funkciu [7]. V prípade, že spotrebiteľ i neberie do úvahy výchylky ostatných spotrebiteľov, dopytová funkcia pre i-teho spotrebiteľa bude mať tvar:

$$Q_i(p) = b|X_i|\frac{w_i}{p} \tag{29}$$

Celkový dopyt bude potom:

$$Q^d(p) = \sum \frac{b}{p}|X_i|w_i \tag{30}$$

Takisto, aj výrobcovia sa usilujú o čo najväčší zisk $\pi = pQ - C(Q)$.

Nech $C(Q) = \frac{1}{2a}Q^2$. Celková ponuková funkcia bude mať potom tvar:

$$Q^s(p) = nap \tag{31}$$

Keďže platí, že $Q^d(p) = Q^s(p)$, môžme zo vzťahov 30 a 31 vyjadriť rovnovážnu cenu:

$$p^E = \sqrt{\frac{b}{na}\sum_{i=1}^{n}|X_i|w_i} \tag{32}$$

2.4 Krachy na burzách a štatistická fyzika

Donedávna najviac akceptovaná ekonomická teória považovala finančný trh za efektívny a pripisovala mu nasledujúce vlastnosti:

- Každý účastník na trhu má úplnú informáciu.
- Reakcia každého účastníka na vonkajšie podnety bude vždy korešpondovať so snahou o maximalizáciu úžitku (racionalita).
- Každý účastník považuje ostatných za racionálnych a disponujúcich taktiež s úplnou informáciou [18].

Ako si však v takomto prípade vieme vysvetliť vznik krachu? Na to by bol potrebný nejaký vonkajší spúšťací faktor (napríklad získanie vonkajšej informácie). Ak sa však bližšie pozrieme napríklad na krachy na Wall Street v rokoch 1929 a 1987, vidíme, že žiadny vplyv zvonka nenastal.

Ukazuje sa teda, že trh ako veľmi zložitý systém nekorešponduje s predstavami doteraz uznávaných ekonomických teórií. Jeden z nových postupov pri hľadaní vhodnejšieho modelu, ktorý má veľmi blízko k štatistickej fyzike, je prístup sledujúci mikroskopickú úroveň systému. Agenti, ako účastníci trhu, majú v podstate len tri možnosti akcie: nakúpiť, predať, alebo čakať. Prechod medzi jednotlivými možnosťami je proces prechodu cez istú hranicu, ktorú predstavuje najmä cena tovaru. Lenže agenti dostávajú informáciu o trhu len prostredníctvom zmien ceny a reakcií určitého obmedzeného počtu iných agentov. Dá sa nahliadnuť, že samotní agenti svojim rozhodovaním a prechodom medzi rôznymi hladinami resp. možnosťami akcie ovplyvňujú cenu a tým pádom konanie ostatných. Podobné správanie vrámci systému sa môže prirovnať napríklad k lavínam, poruchám materiálu alebo zemetraseniam, ktoré sa ale dajú opísať pomocou fyzikálnych modelov [17].

Tu však máme jednoduchšiu situáciu v porovnaní s finančným trhom, kde sa objavuje viacero ťažko zodpovedateľných otázok, napr. ako určiť vzdialenosť, do ktorej sa ešte agenti dokážu navzájom ovplyvňovať?

Teraz sa však vráťme k hľadaniu možného spúšťacieho faktora pri krachových situáciách. Keď vezmeme do úvahy veľkú členitosť finančných trhov a množstvo navzájom interagujúcich agentov, môžme sa na trh pozerať ako na systém správajúci sa podľa mechanizmov tzv. pozitívnej a negatívnej odozvy, ktoré stoja proti sebe. Pozitívna odozva je reakcia na pôsobenie sily, ktorá má za následok znásobenie jej účinku. Negatívna odozva je naopak snaha systému pôsobiť proti sile, ktorá zmenu vyvolala. Pozitívna odozva teda posúva systém ďalej od rovnováhy a negatívna opačne, bližšie k rovnováhe. A možno nahliadnuť, že práve pozitívna odozva môže byť hybnou silou pri vzniku krachovej situácie [18].

Davový efekt, ktorý v prípade finančného trhu priamo súvisí s mechanizmom pozitívnej odozvy, negatívne závisí od miery informácie agentov. Nastáva v prípade, ak sa väčšina agentov rozhodne akceptovať informáciu získanú od iných a prispôsobí svoje správanie novej informácii. Uvažujme teraz nasledujúcu situáciu.

Majme sieť agentov označených čislami od 1 po n , pričom ich počet zostáva konštantný. Nech $N(i)$ prislúcha množine agentov susediacich s agentom i. Pokiaľ budeme pre jednoduchosť uvažovať iba dva možné stavy rozhodnutia agenta $s_i = \pm 1$ (kúpiť vs. predať) dá sa odvodiť vzťah pre rozhodnutie agenta i v čase t:

$$s_i(t) = sgn(K \sum_{j \in N_i} s_j + (1-K)\varepsilon_i) \tag{33}$$

kde K je váha, ktorú pripisuje svojmu okoliu a ε_i je z normalizovaného Normálneho rozdelenia a reprezentuje názor agenta. Tento vzťah v podstate vyjadruje správanie sa agenta, ktorý na zaklade rozhodovaní agentov zo svojho okolia dedukuje situáciu na trhu a podľa toho upravuje svoje vlastné rozhodnutie.

Podľa [11] existuje kritická hodnota K_c, na základe ktorej sa dá určiť stabilnosť systému: ak $K < K_c$, neprevláda tu pozitívna reakcia a teda šanca pre vznik krachovej situácie nie je veľká. Po prekročení tejto hodnoty sa situácia dramaticky zmení a systém sa stane nestabilným, teda finančný trh sa dostane do krachovej situácie.

Ďalej podľa [17] môžme systém charakterizovať *náchylnosťou ku krachu* X, ktorú vieme približne vyjadriť ako $X \approx A(K_c - K)^{-\gamma}$, kde A je kladná konštanta a γ je tzv. *exponent náchylnosti*, pričom jeho hodnota sa pre jednotlivé modely určuje experimentálne.

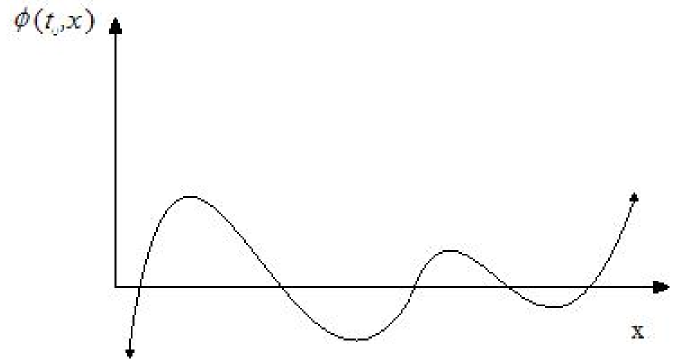
Dá sa vytvoriť viacero spôsobov, ako pomocou aparátu, ktorý sme tu v stručnosti predstavili, možno modelovať situáciu na finančných trhoch. Najjednoduchší model uvažuje konštatnosť parametra K, čo však je v rozpore z realitou, pretože v skutočnosti účastníci na trhu menia aj svoju náchylnosť rozhodovať sa podľa okolia v závislosti od situácie. Reálnejšie sú preto modely, kde K bude tiež závisieť od času t. Experimenty prezentované vo viacerých prácach napr.[17] potvrdili, že takto postavené modely naozaj korešpondujú s realitou a majú teda relevantnú výpovednú hodnotu.

2.5 Forwardove úrokové miery a kvantová fyzika

Forwardové úrokové miery (forward interest rates) sú úrokové miery medzi dvoma budúcimi časovými obdobiami, pre ktoré platia podmienky dohodnuté v súčasnosti. Budeme ich označovať $f(t,x)$ kde t označuje čas uravretia dohody na úrok pre čas x na krátku dobu, t je menšie ako x [14]. Platí: $f(t,t) = r(t)$. Definíciu forwardovej úrokovej miery predstavuje rovnica:

$$f(t,T) = -\frac{\partial}{\partial T} \ln P(t,T) \tag{34}$$

Úlohou kvantovej mechaniky je popísať, ako prechádza častica kvantovým vývojom. Pri kvantovej teórii poľa sa jedná o popis kvantového vývoja celého systému častíc. Najjednoduchšie si to možno predstaviť ako jednorozmerný reťazec bodov, ktorý môžme popísať pomocou vzdialenosti $\Phi(t,x)$ od rovnováhy v čase t a priestore x [1]. Príklad takéhoto reťazca nám ukazuje obrázok 3: Stupeň voľnosti je pritom počet kmitajúcich



Obr. 3: Jednorozmerný reťazec v okamihu t_o

častíc resp. tých častíc, ktoré prechádzajú kvantovým vývojom. Za takýto reťazec bodov môžme považovať aj výnosovú krivku. Teda forwardové úrokové miery môžme v zmysle kvantovej teórie poľa chápať ako bozónové pole, t.j. $f(t,x)$ chápeme ako nezávislú náhodnú premennú pre všetky t aj x, pričom x nie je priestorová ale časová premenná [1].

3 Mocninové zákony v ekonómii

3.1 Rozdelenie bohatstva a príjmu

Pred vyše storočím sledoval Pareto, taliansky sociológ, rozdelenie osobných príjmov a snažil sa tak opísať celkovú majetkovú situáciu krajiny. Pritom si všimol, že toto rozdelenie nie je náhodné, ale sleduje určitý univerzálny zákon, a to za každých okolností a v každej sledovanej krajine.

Tento zákon sa dá vyjadriť nasledovným vzťahom:

$$P(x) = x^{-\alpha} \tag{35}$$

pričom hodnota exponentu bola pre väčšinu krajín blízka -1,5 .

Gini v roku 1922 opäť preskúmal štatistické údaje a prišiel so záverom, že mocninové zákony tu naozaj platia, avšak hodnoty exponentov sa líšia a sú vlastné iba jednej krajine. V priebehu ďalších rokov vznikli snahy o charakterizovanie rozdelenia bohatstva pomocou iných rozdelení, napr. Levyho, Gamma, log-normálne a ďalších.

V rokoch 1935-1936 sledovali Montroll a Shlesinger individuálne príjmy v USA a pozorovali, že jedno percento najbohatších obyvateľov sa dá opísať mocninovým zákonom s exponentom -1,63 a zvyšok sa správa podľa log-normálneho rozdelenia.

Pred niekoľkými rokmi Drugulescu a Yakovenko [5] vypracovali analýzu rozdelenia bohatstva pre Veľkú Britániu a USA a podľa nich možno na opísanie určitej časti rozdelenia bohatstva použiť vo fyzike známy Boltzmannov-Gibbsov zákon, ktorý opisuje distribučnú funkciu energie ε:

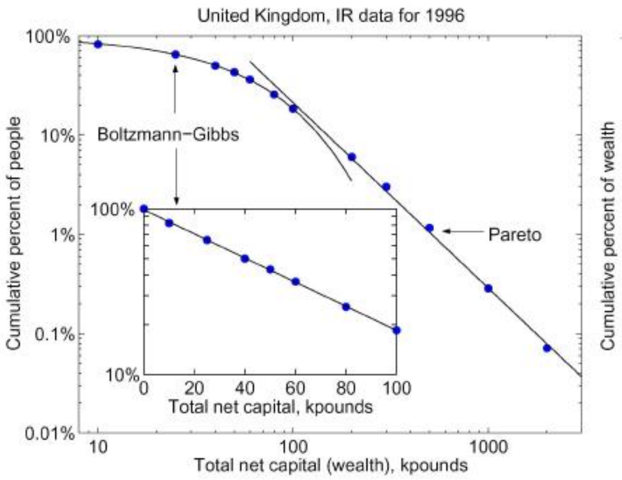
$$P(\varepsilon) = Ce^{-\varepsilon/T} \tag{36}$$

kde T je teplota a C normalizačná konštanta.
Obaja autori sa zaoberali kumulatívnym pravdepodobnostným rozdelením bohatstva $P(w)$, chápaným ako počet jedincov s bohatstvom väčším ako w. Pri aproximácii údajov využili tieto rozdelenia:

- mocninový zákon $P(w) \sim 1/w^{\alpha}$
- exponenciálny zákon $P(w) \sim \exp(-w/T)$

kde α je charakteristický exponent a T je ekonomická teplota.

Problémom však je, že pojem bohatstvo je sám o sebe dosť abstraktný a ťažko merateľný, preto sa pri analyzovaní údajov pracuje s tzv. čistým kapitálom, čo predstavuje rozdiel medzi aktívami a pasívami.



Obr. 4: Pravdepodobnostné rozdelenie bohatstva v log-log mierke (vonkajší obrázok) a log-lin mierke (vnútorný obrázok).

Na obrázku 4 vidíme, že mocninové rozdelenie s exponentom $\alpha = 1,9$ dobre aproximuje bohatstvo v log-log mierke pre hodnoty väčšie ako 100 k£ a pre hodnoty menšie ako 100 $k£$ je pre mierku log-lin dobré exponenciálne rozdelenie s teplotou $T_{UK} = 59.6k£$.

Rozdelenie bohatstva je analogické s príjmom π. Ľudí s nižším príjmom môžme aproximovať exponenciálnym rozdelením $N(\pi) \sim \exp(-\pi/T)$ a vyššie príjmové skupiny možno aproximovať mocninovým rozdelením $N(\pi) \sim 1//\pi^{\alpha}$. Pri analýze skutočných údajov pre USA sa dospelo k záveru, že rozdelenie príjmu veľkej väčšiny obyvateľov možno aproximovať Boltzmann-Gibbsovým zákonom a zostávajúcu malú časť Paretovým mocninovým zákonom [3].

3.1.1 Lorenzova krivka

Dôchodkovú nerovnosť môžme merať dvoma základnými spôsobmi, a to graficky pomocou *Lorenzovej krivky* alebo pomocou *Giniho koeficientu.*

Lorenzová krivka zachytáva rozdelenie príjmov pre jednodlivé domácnosti. Pritom existujú dva spôsoby klasifikácie domácností.

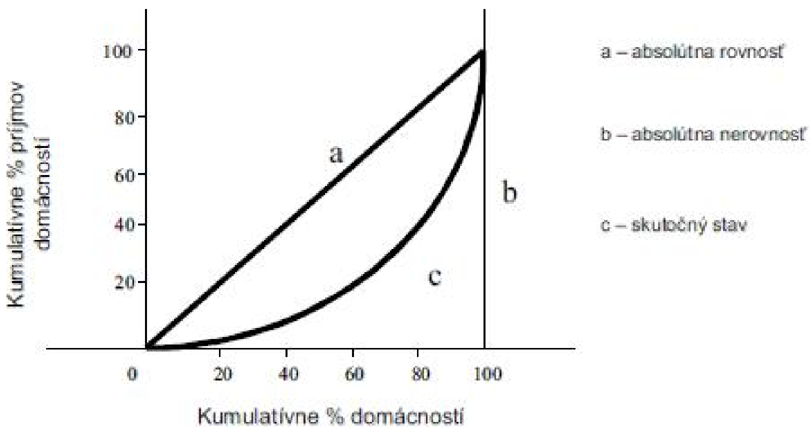
Pri *prvom spôsobe* vyčleníme určitú veľkosť dôchodku v peňažných jednotkách a zisťujeme, aký je percentuálny podiel domácností, ktoré poberajú dôchodok v danom intervale.

Pri *druhom spôsobe* rozdelíme domácnosti na niekoľko skupín podľa veľkosti poberaných dôchodkov od najnižších po najvyššie.

Pojem Lorenzova krivka v sebe obsahuje hypotetický predpoklad absolútnej rovnosti a nerovnosti. *Absolútna rovnosť* nastáva, ak sú dôchodky rovnomerne rozdelené medzi všetkými domácnosťami. *Absolútna nerovnosť* nastáva, pokiaľ jednej skupine domácností prislúchajú všetky dôchodky.

Reálny stav rozdelenia dôchodkov ukazuje krivka k na obrázku 5. Čím je Lorenzova krivka výpuklejšia, tým väčšia je v danej spoločnosti/krajine vyššia dôchodková nerovnosť.

Získanie reálnej predstavy o skutočnom rozdelení dôchodkov v spoločnosti však čelí viacerým problémom. Jednak časť dôchodkov sa nevyužíva na spotrebu alebo úspory. Účasťou na tieňovej ekonomike získavajú domácnosti ďalšie prostriedky a tieto nepodliehajú zdaneniu. Táto forma dôchodkov očividne skresľuje všetky štúdie štruktúry domácnosti z hľadiska oficiálnych dôchodkov [3].



Obr. 5: Lorenzova krivka.

3.1.2 Giniho koeficient

Pokiaľ chceme dôchodkovú nerovnosť vyjadriť konkrétnym číslom, použijeme Giniho koeficient. Existuje viacero spôsobov jeho vyjadrenia:

- Označme obsah plochy ohraničenej skutočnou a ideálnou krivkou S_1 a obsah plochy pod ideálnou krivkou S_2. Giniho koeficient g vypočítame ako pomer týchto dvoch obsahov, teda $g = \frac{S_1}{S_2}$ a nadobúda hodnoty z intervalu $\langle 0, 1 \rangle$.
- Giniho koeficient môžme vypočítať aj ako pomer obsahov plochy pod skutočnou krivkou a pod ideálnou krivkou. Koeficient je opäť z rozsahu $\langle 0, 1 \rangle$.
- Dotretice sa Giniho koeficient počíta ako dvojnásobok obsahu plochy medzi reálnou a skutočnou krivkou.

3.2 Simulácie a modely

V tejto podkapitole teraz predstavíme niektoré teoretické modely, ktoré simulujú distribúciu bohatstva v spoločnosti. V týchto je dôležitá aplikácia metód používaných v štatistickej fyzike.

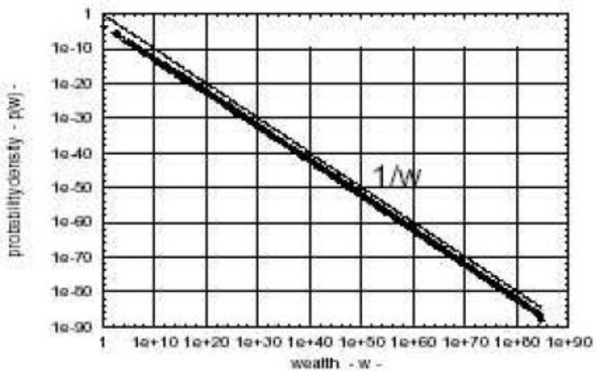
Scafetta, Picozzi a West[15] vo svojej štúdii odvodili niekoľko modelov, ktoré popisujú rozdelenie bohatstva v spoločnosti, pričom do úvahy brali najmä podmienky, ktoré platia pri vzájomnej interakcii medzi agentami v rámci ekonomického systému. Štandardne sa spoločnosti západných krajín rozdeľujú na tri triedy: chudobní, stredná trieda a bohatí, pričom v stabilnej spoločnosti je napočetnejšia stredná trieda a najmenej početná je trieda chudobných. Spomínaní autori zohľadňovali aj tieto tri triedy a vo svojej práci odvodili a skúmali viacero modelov rozdelenia bohatstva:

Model 1-dokonalá obchodná cena

Tento najjednoduchší model predpokladá, že bohatstvo resp. peniaze sú konštantné a všetky transakcie medzi agentami prebiehajú pri dokonalej cene. Tento model je úplne symetrický, t.j. každý agent získa presne také isté množstvo peňazí, ktoré iný agent stratí. Teda konečné rozdelenie bohatstva v uzavretom systéme je rovnaké ako počiatočné rozdelenie, čo však absolútne nekorešponduje s pozorovanou realitou.

Model 2-náhodná symetrická obchodná cena

Tu sa predpokladajú ceny, ktoré náhodne fluktuujú okolo dokonalej ceny. Veľkosti v bohatstve jednotlivých agentov môžu byť kladné alebo záporné v závislosti od rozhodnutí, ktoré urobili. Aj tu predpokladáme symetriu, čiže pri ľubovoľnom výbere dvoch agentov majú obaja z dvojce rovnakú pravdepodobnosť straty resp. zisku. Obrázok 6 ukazuje, ako bude vyzerať rozdelenie bohatstva po 100 miliónoch náhodných transakciách. Môžme tu vidieť enormný rozdiel medzi bohatstvom najchudobnejšieho a najbohatšieho agenta.



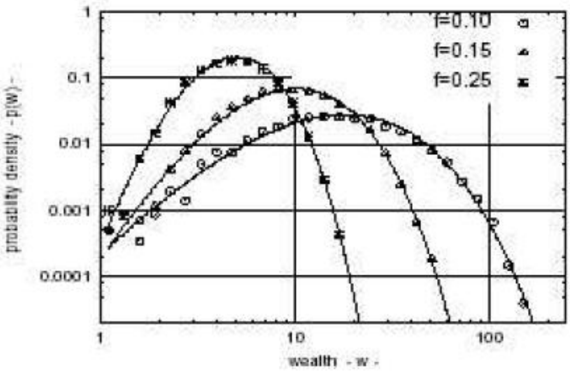
Obr. 6: Pravdepodobnostné rozdelenie-náhodná symetrická obchodná cena, bohatstvo (wealth) je merané v jednotkách bohatstva najchudobnejšieho spomedzi agentov.

Model 3-náhodná asymetrická obchodná cena

Základný predpoklad v tomto modeli hovorí, že chudobnejší z dvojice agentov je pri obchodovaní mierne zvýhodnený a má väčšiu pravdepodobnosť dobrého rozhodnutia. Tento predpoklad sa zohľadní zakomponovaním nasledovného vzťahu:

$$P(\pi) = 0,5 + f\frac{w_b - w_c}{w_b - w_c} \tag{37}$$

kde $0 \leq f \leq 1$ je asymetricky sa meniaci parameter, w_b a w_r je bohatstvo bohatšieho a chudobnejšieho agenta. Vidíme, že pri rovnakom majetku budú mať obaja agenti rovnakú šancu urobiť dobré rozhodnutie a v prípade nerovnosti majetkov má chudobnejší z dvojice väčšiu pravdepodobnosť správneho rozhodnutia.



Obr. 7: Pravdepodobnostné rozdelenie-náhodná asymetrická obchodná cena

Tento model k vedie k rozdeleniu vyjadrenému vzťahom:

$$P(w) = \alpha w^{\gamma} \exp(-bw^{\delta}) \tag{38}$$

Ako vidíme z obrázka 7, táto distribúcia skutočne rozdeľuje spoločnosť na bohatých, strednú triedu a chudobných, pričom platí, že najpočetnejšia je stredná trieda a najmenej početná je najbohatšia trieda.

Model 4-náhodná asymetrická obchodná cena s dynamickým bohatstvom

V poslednom modeli budeme uvažovať dynamickosť bohatstva t.j. v rámci vývoja systému môže dôjsť k jeho úbytku alebo prírastku. Túto vlastnosť vieme matematicky vyjadriť nasledovne:

$$w_i(t+1) = (1 + r\xi) w_i(t) \tag{39}$$

pričom $w_i(t)$ je bohatstvo i-teho agenta po i-tej iteracii, ξ je náhodná premenná s normalizovaným normálnym rozdelením a $r > 0$ je štandardná odchylka úbytku/prírastku bohatstva. Takisto ako v predchádzajúcom modeli, aj tento model možno charakterizovať distribučnou funkciou 38.

Všetky predpoklady, ktoré boli vyslovené v poslednom modeli, naozaj korešpondujú so skutočnosťou. Pre stabilitu spoločnosti je nevyhnutné, aby boli chudobnejší obyvatelia istým spôsobom chránení a aby im bola poskytnutá určitá výhoda pri interakciách s bohatšími obyvateľmi. Takisto, spoločnosť, v ktorej malá skupina obyvateľov vlastní takmer všetko jej bohatstvo, skôr či neskor skolabuje, alebo zanikne revolúciou [3].

3.3 Fluktuácia cien

3.3.1 Bachelierov model

Dlhú dobu sa predpokladalo, že ceny akcií odrážajú viac-menej náhodné udalosti vo svete podnikania a ich kolísanie je teda prakticky úplne náhodné. Keď sa pozrieme na grafy zaznamenávajúce časový vývoj cien (obr.8), máme pocit absolútneho chaosu a náhodilosti. Tento pohľad na fluktuácie na burzách mal aj Luis Bachelier, ktorý v svojej práci z roku 1900 modeloval pohyby cien ako náhodnú prechádzku bodu x, resp. aktuálnej ceny po reálnej osi. Na základe toho odvodil, že pravdepodobnosť, že za čas $\triangle t$ sa cena zmení o $\triangle x$, je daná normálnym rozdelením

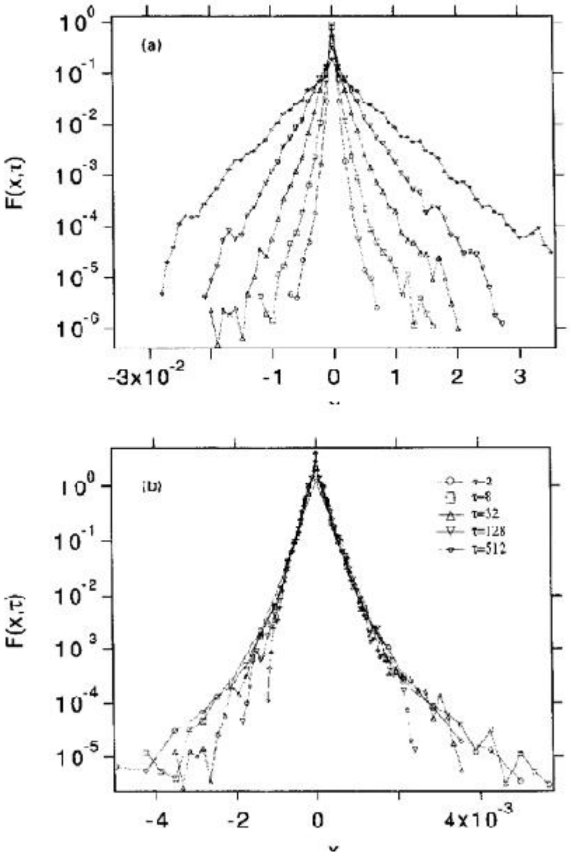
$$P_{\Delta t}(\Delta x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \exp\left(-\frac{(\Delta x)^2}{2\sigma}\right) \tag{40}$$

kde σ je parameter v ekonómii najčastejšie označovaný ako volatilita. Podľa Bacheliera táto rastie s časom podľa vzorca $\sigma = \sigma_0\sqrt{\Delta t}$. Presne tak je však opisovaná difúzia, ktorá nám hovorí, ako ďaleko sa dokáže častica dostať od počiatočného bodu za čas Δt pri Brownovom pohybe. Jednak sa však na túto dávnu analógiu na dlhý čas zabudlo a okrem toho sa ukázalo, že Bachelierov vzorec je veľmi približný a veľmi zle popisuje relatívne veľké zmeny ceny. Bachelierova teória totiž predpokladá, že pokles akcií o 5 percent za jeden deň môže nastať jednoducho povedané raz za milión rokov, čo však je v absolutnom rozpore so skutočnosťou, keďže k takýmto poklesom dochádza aj niekoľkokrát ročne [13].

Záčiatkom šesťdesiatych rokov prišiel s lepšou myšlienkou Benoit Mandelbrot. Pri sledovaní vývoja cien bavlny si uvedomil, že zmena ceny sa dá omnoho lepšie popísať tzv. Lévyho rozdelením. Toto sa vyznačuje najmä tým, že pre veľké zmeny ceny sa blíži k mocninovému rozdeleniu v tvare

$$P(\Delta x) \approx \Delta x^{-1-\alpha}. \tag{41}$$

Dôležité je poznamenať, že mocninové rozdelenie je väčšinou prejavom tzv. fraktálovej geometrie, ktorej objaviteľom je tiež B. Mandelbrot. a mocninové rozdelenie zmien ceny nám poukazuje na fraktálne rysy cenovej fluktuácie, bez ohľadu na to, či sa jedná o komodity, aktíva alebo menové kurzy. V ekonómii je však veľmi subtílnym prejavom fraktálnosti tzv. škálovanie. Pozrime sa preto, čo sa stane s rozdelením cenových



Obr. 8: Pravdepodobnostné rozdelenie cenových zmien pre rôzne časové odstupy τ. V hornom paneli hrubé údaje, v dolnom vidíme, ako pri zmene škálovania splynú všetky údaje na jednej krivke.

zmien, pokiaľ zmeníme škálovanie času. Pokiaľ namiesto sekúnd budeme chcieť merať v minútach, bude nás zaújimať namiesto zmeny ceny za čas Δt zmena ceny za čas $s.\Delta t$. Vlastnosť škálovania znamená, že pravdepodobnostné rozdelenie sa nezmení, pokiaľ pri zmene škálovania času vhodne zmeníme aj škálovanie cien. Môžme to vyjadriť nasledovne:

$$P_{\Delta t}(\Delta x) = (\Delta t)^{-H} f((\Delta t)^{-H} \Delta x) \tag{42}$$

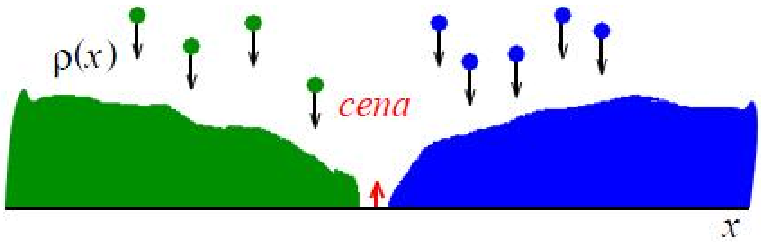
kde f je nejaká funkcia, ($f(y) \approx y^{-1-\alpha}$) a H je konštanta nazývaná tiež Hursov exponent. Bachelierova dávna predstava fluktuácie cien tiež spĺňa vlastnosť škálovania s hodnotou $H = 1/2$. Problémom je, že reálne údaje vykazujú vyššiu hodnotu, okolo $2/3$. Táto zvýšená hodnota je okrem iného tiež dôvodom, prečo je náhodná prechádzka nevhodným modelom fluktuácií na burzách a teda treba hľadať lepší model [13].

3.3.2 Maslovov model

Pri modelovaní cenových fluktuácií je najdôležitejšie si uvedomiť, že cenové fluktuácie sú len posledným malým článkom zložitého procesu obchodovania, ktorý je skrytý v takzvanej knihe príkazov, ktorá obsahuje všetky nevybavené požiadavky na predaj alebo kúpu akcií. Princíp knihy príkazov si ukážeme na príklade:

Predstavme si makléra, ktorý zadá požiadavok na nákup 100 kusov akcií spoločnosti ABCDE za cenu max. 5 eur. Táto požiadavka sa zaznamená v knihe príkazov a tam čaká na predajcu, ktorý bude ochotný pri zadanej limitnej cene akciu predať. V knihe príkazov sa nachádzajú aj tzv. trhové príkazy požadujúce nákup alebo predaj daného množstva akcií pri ľubovoľnej cene.

Procesy prebiehajúce v knihe príkazov si možno z fyzikálneho pohľadu predstaviť ako prúd častíc dopadajúcich na jednorozmerný podklad. Každá limitná požiadavka na nákup alebo predaj akcie je reprezentovaná jednou časticou a cenovú os si môžme predstaviť ako jednorozmerný podklad. Trhové príkazy spôsobujú odlietavanie častíc z cenovej osy v blízkosti aktuálnej ceny [13].



Obr. 9: Kniha príkazov ako prúd častíc. Zelená je oblasť kúpy akcií, modrá je oblasť predaja akcií.

Aktuálna cena, ako vidíme aj na obrázku 9, je cena, ktorá platila pri poslednej minulej transakcii a delí cenovú os na dve časti. Príkazy k predaju sú napravo a príkazy k nákupu sú naľavo od aktuálnej ceny.

Tento model sa dá relatívne ľahko numericky simulovať a výsledky skutočne súhlasia s empirickými údajmi pre fluktuácie cien. Avšak hodnota Hurtovho experimentu tu vychádza $H = 1/4$, čo je značne odlišné v porovnaní s empiricnými výsledkami. Preto bol Maslovov model modifikovaný za účelom dosiahnutia lepšej zhody, avšak podrobný opis týchto modifikácií presahuje rámec našej práce.

Záver

Hlavným cieľom našej práce bolo sumarizovať a stručne objasniť aplikáciu základných fyzikálnych princípov v ekonomických systémoch.
V prvej kapitole sme veľmi stručne opísali počiatky a ďalší vývoj relatívne nového vedného odboru-ekonofyziky. Na príkladoch analógií zo štatistickej fyziky, teórie chaosu a systémov bez trenia sme ukázali, že napriek prvotnému zdaniu, fyzikálne a ekonomické systémy majú veľa spoločných charakteristík a teórie budované pre fyzikálne systémy teda môžu byť aplikované aj v ekonómii.
V druhej kapitole sme sumarizovali doterajšie cenné príspevky ekonofyziky, pričom sme poukazovali na vzájomné súvislosti a analogizmy.
V podkapitole 2.1 sme predstavili teóriu informácie. Opísali sme základné matematické vzťahy charakterizujúce proces prijímania a odovzdávania informácie a ich platnosť sme ukázali na príklade spoločnosti WestJet. Následne sme prezentovali nový pohľad vysvetľujúci najčastejšie vzory ľudského správania, ktoré podmieňujú okrem iného aj ekonomické rozhodovanie.
Vrámci hľadania analógie medzi ekonomickými systémami a termodynamikou sme v podkapitole 2.2 ukázali podobnosť medzi termodynamickými a ekonomickými veličinami, predstavili sme veľmi dôležitú veličinu-ekonomickú teplotu a ukázali sme, ako možno pomocou rovnovážnych vzťahov v termodynamike odvodiť podmienky rovnováhy v ekonómii.
V ďalšej podkapitole sme predstavili ďalšie ekonomické pohľady na finančné trhy. Využitím bezarbitrážnych podmienok sme ukázali, že finančné trhy možno chápať ako elektromagnetické pole. Ďalej sme uviedli pohľad na trh ako na kontrolný mechanizmus a opísali sme, ako možno na základe tohto pohľadu odvodiť vzťah pre rovnovážnu cenu.
V podkapitole 2.4 sme demonštrovali modely správania sa ekonomických agentov vedúce ku krachovým situáciám. Poukázali sme pritom na experimenty prezentované v prácach [17] a [18] , ktoré potvrdili relevantnosť týchto modelov.
Na záver druhej kapitoly sme veľmi stručne ukázali pohľad na forwardove úrokové miery v zmysle kvantovej teórie.
V tretej kapitole sme sa detailnejšie venovali mocninovým zákonom. Podrobne sme opí-

sali niektoré modely popisujúce rozdelenie bohatstva v spoločnosti, pričom sme opäť na základe skorších prác zahraničných autorov (napr. [15]) ukázali niektoré ich nedostatky a výhody. Taktiež sme stručne charakterizovali dva základné spôsoby merania dôchodkovej nerovnosti a to Lorenzovu krivku a Giniho koeficient.
V podkapitole 3.3.1 sme predstavili dva modely opisujúce fluktuácie cien- Bachelierov a Maslovov model a vysvetlili sme základnú predstavu použitú pri vytváraní týchto modelov.

Táto práca pomôže aj nezainteresovanému čitateľovi disponujúcemu iba základnými poznatkami z oblastí matematiky a fyziky získať prehľad a jasnú predstavu o význame ekonofyziky pri modelovaní rôznych ekonomických javov. Práca bola prospešná aj pre autora, ktorý pri jej písaní získal väčší prehľad o aplikácii fyziky v ekonomických systémoch a naučil sa hľadať analógie a podobnosti.

Zoznam použitej literatúry

[1] Baaguie, B.E.: *Quantum finance, Cambridge University Press, Cambrigde, 2004*

[2] Ball, P.: *Econophysics: Culture Crash*, Nature 441, 2006

[3] Braník, M.:*Vybrané problémy ekonofyziky*, diplomová práca, FMFI UK, Bratislava, 2004

[4] Burda, Z., Jurkiewicz, J., Nowak, M.A.: *Is Econophysics a Solid Science*, cond-mat, 2009

[5] Dragulescu, A.A., Yakovenko, V.M.:*Exponencial and power law probability distributions of wealth and incom in the United Kingdom and the United States*, Condensed Matter 1, 2001

[6] Gallegati, M. a kol.: *Worrying trends in econophysics*, Acta Physica Polonica B34, 2003, dostupné na internete (11.3.2012): www.arxiv.org/abs/cond-mat/0301096

[7] Guenther, O., Hogg, T., Huberman, B.A.: *Power Markets for Controlling Smart Matter*, Condensed Matter 1, 1997

[8] Chakraborti, A. a kol.: *Econophysics rewiew: I. Empirical facts*, Quantitative Finance 11, 2011

[9] Chen, J.: *The Physical Foundation of Economics: An Analytical Thermodynamic Theory*,World Scientific Publishing, Singapore, 2005

[10] Chen, X.J., Kleinert, H.: *Boltzmann Distribution and Temperature of Stock Markets*, Physica A 383, 2007

[11] Illinski, K.: *Gauge Theory od Finance*, Int. J. Mod. Phys. 9, 1998

[12] Illinski, K.: *Physics od Finance*, High Energy Physics-Theory 1, 1997

[13] Jak fyzika pomáhá ekonomii, dostupné na internete (14.2.2012):www.archiv.otevrena-veda.cz/users/image/default/C2Seminare/MultiObSem/113.pdf

[14] Melicherčík, I., Olšárová, L., Úradníček, V.: *Kapitoly z finančnej matematiky*, EPOS, Bratislava, 2005

[15] Picozzi, S., Scafetta, N., West, B.J.: *Pareto´s law: a model of human sharing and creativity*, Statistical mechanics 1, 2002

[16] Saslow, W.M.,: *An economic analogy to thermodynamics*, American Journal of Physics 67, 1999

[17] Sornette, D.: *Critical Market Crashes*, Physics Reports 378, 2003

[18] Vozár, M.:*Krachy na burzách z pohľadu ekonofyziky*, diplomová práca, FMFI UK, Bratislava, 2006