

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE  
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY



FOURIEROVE RADY - PRÍKLADY

BAKALÁRSKA PRÁCA

2012

Martin ŠTEFÁNIK

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE  
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY

**FOURIEROVE RADY - PRÍKLADY**

**BAKALÁRSKA PRÁCA**

Študijný program: Ekonomická a finančná matematika  
Študijný odbor: 1114 Aplikovaná matematika  
Školiace pracovisko: Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky  
Vedúci práce: RNDr. Ľubica Kossaczká, CSc.



Univerzita Komenského v Bratislave  
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

---

## ZADANIE ZÁVEREČNEJ PRÁCE

**Meno a priezvisko študenta:** Martin Štefánik  
**Študijný program:** ekonomická a finančná matematika (Jednoodborové štúdium, bakalársky I. st., denná forma)  
**Študijný odbor:** 9.1.9. aplikovaná matematika  
**Typ záverečnej práce:** bakalárska  
**Jazyk záverečnej práce:** slovenský

**Názov:** Fourierove rady - príklady

**Cieľ:** Oboznámiť sa hlbšie s teóriou Fourierových radov a vypočítať príklady.

**Vedúci:** RNDr. Ľubica Kossaczká, CSc.

**Dátum zadania:** 16.10.2011

**Dátum schválenia:** 27.10.2011

doc. RNDr. Margaréta Halická, CSc.  
garant študijného programu

.....  
študent

.....  
vedúci

**Pod'akovanie** Touto cestou sa chcem poďakovať svojej vedúcej bakalárskej práce RNDr. Ľubici Kossaczkej, CSc. za ochotu, pomoc, odborné rady a podnetné pripomienky, ktoré mi pomohli pri písaní tejto práce. Ďakujem aj svojej rodine za trpezlivosť a podporu a taktiež priateľke za podporu a pomoc pri skontrolovaní pravopisu.

## Abstrakt v štátnom jazyku

ŠTEFÁNIK, Martin: Fourierove rady - príklady [Bakalárska práca], Univerzita Komenského v Bratislave, Fakulta matematiky, fyziky a informatiky, Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky; školiteľ: RNDr. Ľubica Kossaczká, CSc., Bratislava, 2012, 42 s.

Naša práca sa zaoberá témou Fourierových radov, spracovanou v knihe [10]. Táto práca má rešeršný charakter. V práci sme prevzali definície a vety zo zdroja [10]. V tejto knihe boli vety dokázané, no dôkazy obsahovali myšlienkové skoky. My sme tieto dôkazy doplnili, rozšírili a myšlienkové skoky sme odstránili. V práci sme zadefinovali Fourierove rady pre funkcie z priestoru  $L_\pi$ . Ďalej sme riešili počítanie koeficientov pre Fourierove rady a vlastnosti Fourierových radov. Vo vetách sme zhrnuli vlastnosti Fourierových radov a neskôr sme sa zamerali aj na vlastnosti Fourierových radov v Hilbertovom priestore. V práci sme dokázali Riemannovu lokalizačnú vetu, ktorá hovorí o tom, že ak dve funkcie z  $L_\pi$  navzájom súhlasia v okolí bodu  $a$ , tak ich Fourierove rady majú v bode  $a$  rovnaké konvergenčné správanie. Tiež sme dokázali vetu o rovnomernej konvergencii, ktorá hovorí, že ak dve funkcie navzájom súhlasia v otvorenom intervale  $J$  a Fourierov rad jednej z funkcií je v kompaktnom podintervale  $I$  rovnomerne konvergentný, tak aj Fourierov rad druhej funkcie je v  $I$  rovnomerne konvergentný. V inej časti sme dokázali ďalšiu vetu a síce vetu o úplnosti trigonometrických ortogonálnych postupností, ktorá hovorí, že zavedené ortonormálne postupnosti sú úplné. Ako jednu z posledných sme dokázali vetu o absolútnej konvergencii, ktorá hovorí, že ak  $f \in AC_\pi$  a derivácia  $f' \in L_\pi^2$ , tak Fourierov rad funkcie  $f$  v  $\mathbb{R}$  konverguje absolútne a rovnomerne ku  $f$ . V tretej kapitole sme riešili príklady, ktorých zadania pochádzajú zo zdroja [10]. Pri tom sme využili nadobudnuté vedomosti a aj poznatky nadobudnuté z knihy [9]. Vieme opísať periodické funkcie, čo môže nájsť využitie v matematike alebo fyzike, pri opise trigonometrických systémov, zvuku, či signálu.

**Kľúčové slová:** Fourierov rad, Hilbertov priestor, Trigonometrický rad, Periodická funkcia

## Abstract

ŠTEFÁNIK, Martin: Fourier series - Examples [Bachelor Thesis], Comenius University in Bratislava, Faculty of Mathematics, Physics and Informatics, Department of Applied Mathematics and Statistics; Supervisor: RNDr. Ľubica Kossaczká, CSc., Bratislava, 2012, 42p.

Our work deal with theme of Fourier series, processed in book [10]. This work has the character of the research. We took definitions and theorems over from source [10]. In this book were theorems proven, but with ideal jumps. We completed this proofs. We extended them and we removed ideal jumps. We defined Fourier series for function from space  $L_\pi$  in this work. As further we handled with counting of Fourier series coefficients and properties of Fourier series. We compiled properties of Fourier series in theorems and than we fixated to properties of Fourier series in Hilbert space. In work we proved Rieman localisation theorem, that tells, if two functions from  $L_\pi$  mutually agree in surround of point  $a$ , then their Fourier series had in point  $a$  the same convergence behaviour. We proved theorem of uniform convergence, too. This tells, if two functions mutually agree in opened interval  $J$  and Fourier serie of one from functions is uniform convergent in compact subinterval  $I$ , then is Fourier serie of second function uniform convergent in  $I$ , too. We proved next theorem in other part of work. This was theorem about completeness of the orthogonal trigonometric sequences. The theorem tells, established orthonormal sequences are complete. As one of the latest, we proved theorem about absolut convergence, that tells, if  $f \in AC_\pi$  and derivation  $f' \in L_\pi^2$ , then Fourier serie of funktion  $f \in \mathbb{R}$  converge absolut and uniform to  $f$ . In third chapter we solved examples from source [10]. By solving we used acquired knowledge and information acquired from book [9]. We know, how to describe periodic function, what can be used in mathematics and physics, by description of trigonometric systems, sound, or signal.

**Keywords:** Fourier serie, Hilbert space, Trigonometric serie, Periodic function

## Obsah

Zoznam obrázkov	8
Zoznam použitých symbolov	10
Úvod	11
1 Fourierove rady	13
2 Hilbertov priestor	27
3 Príklady	37
Záver	51
Zoznam použitej literatúry	52
Príloha	53

## Zoznam obrázkov

1	Súčet prvých 5 členov Fourierovho radu funkcie $t^2$ pre $ t  \leq \pi$ . . . . .	37
2	Súčet prvých 10000 členov Fourierovho radu funkcie $t^2$ pre $ t  \leq \pi$ . . . . .	37
3	Fourierov rad funkcie $t^2$ pre $ t  \leq \pi$ . . . . .	38
4	Fourierov rad funkcie $\cos(0.3t)$ pre $ t  \leq \pi$ . . . . .	39
5	Fourierov rad funkcie $\cos(1.5t)$ pre $ t  \leq \pi$ . . . . .	39
6	Súčet prvých 4 členov Fourierovho radu funkcie $\operatorname{sgn}(t)$ pre $ t  \leq \pi$ . . . . .	40
7	Súčet prvých 50 členov Fourierovho radu funkcie $\operatorname{sgn}(t)$ pre $ t  \leq \pi$ . . . . .	40
8	Súčet prvých 4 členov Fourierovho radu funkcie $t$ pre $ t  \leq \pi$ . . . . .	41
9	Súčet prvých 100 členov Fourierovho radu funkcie $t$ pre $ t  \leq \pi$ . . . . .	41
10	Súčet prvých 100 členov Fourierovho radu $\sin t + \frac{\sin 2t}{2} + \frac{\sin 3t}{3} + \frac{\sin 4t}{4} + \dots$ . . . . .	42
11	Párne rozšírenie funkcie $(t - c)^+$ pre $c = 2$ . . . . .	43
12	Súčet prvých 100 členov Fourierovho radu párneho rozšírenia funkcie $(t - c)^+$ pre $c = 2$ . . . . .	44
13	Súčet prvých 100 členov Fourierovho radu párneho rozšírenia funkcie $(t - c)^+$ pre $c = 1$ . . . . .	44
14	Nepárne rozšírenie funkcie $(t - c)^+$ pre $c = 2$ . . . . .	45
15	Súčet prvých 100 členov Fourierovho radu nepárneho rozšírenia funkcie $(t - c)^+$ pre $c = 2$ . . . . .	45
16	Súčet prvých 1000 členov Fourierovho radu nepárneho rozšírenia funkcie $(t - c)^+$ pre $c = 2$ . . . . .	45
17	Súčet prvých 100 členov Fourierovho radu nepárneho rozšírenia funkcie $(t - c)^+$ pre $c = 1$ . . . . .	46
18	Nepárne rozšírenie funkcie $h(t)$ pre $c = 2$ . . . . .	47
19	Súčet prvých 1000 členov Fourierovho radu nepárneho rozšírenia funkcie $h(t)$ pre $c = 2$ . . . . .	47
20	Súčet prvých 1000 členov Fourierovho radu nepárneho rozšírenia funkcie $h(t)$ pre $c = 1$ . . . . .	47
21	Párne rozšírenie funkcie $h(t)$ pre $c = 2$ . . . . .	48
22	Súčet prvých 100 členov Fourierovho radu párneho rozšírenia funkcie $h(t)$ pre $c = 2$ . . . . .	49



---

23	Súčet prvých 100 členov Fourierovho radu párneho rozšírenia funkcie $h(t)$ pre $c = 1$ . . . . .	49
----	--	----

## Zoznam použitých symbolov

V našej práci použijeme nasledovné symboly, ktoré v ďalšom texte upresníme:

$C^k(\mathbb{R}^n)$	priestor funkcií, ktoré sú na $\mathbb{R}^n$ k-krát spojitě diferencovateľné
$C_0^k(\mathbb{R}^n)$	množiny všetkých funkcií z $C^k(\mathbb{R}^n)$ s kompaktným nosičom ( $0 \leq k \leq \infty$ )
$C_\pi^k$	trieda funkcií, ktoré sú $2\pi$ -periodické a k-krát spojitě diferencovateľné na $\langle -\pi, \pi \rangle$
$AC(J)$	trieda absolútne spojitých funkcií na množine $J$
$AC_\pi$	trieda absolútne spojitých funkcií na množine $\langle -\pi, \pi \rangle$
$l^2$	Hilbertov priestor postupností
$L^p - norma$	norma, ktorú definujeme ako $\ f\ _p := (\int_B  f(x) ^p dx)^{1/p}$ , $1 \leq p < \infty$
$L^p(B)$	priestor, ktorý obsahuje všetky na $B$ Lebesgueovsky merateľné funkcie s konečnou $L^p - normou$
$\rightrightarrows$	rovnomerná konvergencia

## Úvod

V súčasnosti žije človek v multimedialnej dobe, obklopený množstvom technických vymožeností, ktoré mu spríjemňujú život. Medzi takéto patria hudobné prehrávače, televízory, počítače a mnohé iné. Ak si chce človek napríklad vypočuť hudbu, zapne si rádio alebo hudobný prehrávač. Veľká väčšina ľudí počúva každodenne rozhlasové vysielanie bez toho, aby sa zamýšľala nad tým, akým spôsobom sa hlas moderátora alebo speváka zmení na signál a opätovne na zvuk, ktorý vychádza z rádia. Zvuk, signál, pohyby planét, záchvevy pri zemetrasení, neharmonické elektrické veličiny, to všetko sa dá popísať pomocou matematiky a čísel.

Na túto skutočnosť prišli už dávne civilizácie. Babylončania vedeli, že nebeské telesá sa pohybujú podľa prísnych číselných zákonov. Grécki Pytagorci objavili, že aj hudba sa riadi číselnými zákonitosťami. Uchvátení týmto zistením, prišli so záverom, že podstatou vecí sú čísla a javy na nebi a na zemi sú ovládané matematickými vzťahmi, ktoré treba nájsť.

Pytagorasov monochord (strunový nástroj) ovplyvnil matematiku a mechaniku ne-  
tušeným spôsobom. Teória chvenia strún viedla k „harmonickej analýze“ a vývinu funkcií v trigonometrických radoch. Tento problém podnietil analýzu nasledujúcich storočí viac ako akýkoľvek iný matematický predmet. Problémom bolo opísať pohyb na oboch koncoch upevnenej struny dĺžky  $L$  pomocou funkcie  $u$ . Týmto problémom sa zaoberali vo svojich prácach matematici ako Bernoulli, D'Alembert, Lagrange a Euler, ktorý našiel integrálne vyjadrenie Fourierových koeficientov. Joseph Fourier pojednáva v jednom zo svojich diel množstvo problémov vedenia tepla cez rozvoje radov. Pri tom hral rozvoj ľubovoľných funkcií v trigonometrických radoch nosnú úlohu. Základný prínos k teórii Fourierových radov priniesol Dirichlet.

Pomocou Fourierových radov je možné opísať rôzne príklady vlnenia, ako sú napr. zvuk, signál, či záchvevy pri zemetrasení. To sa dá využiť pri mnohých výskumoch alebo prácach, ako je napr. analýza dát po zemetrasení alebo digitalizácia hudby. Téma Fourierových radov je bežne prednášaná na hodinách matematickej analýzy [8], je rozpracovaná v mnohých publikáciách a článkoch [2], [3], [5], [10], [11] a je témou niektorých záverečných prác [1], [4]. Hlavným zdrojom informácií pre túto prácu boli texty z kníh o matematickej analýze [5], [7], [9], [10].

Cieľom tejto bakalárskej práce je bližšie sa oboznámiť s teóriou Fourierových radov a vedieť aplikovať nadobudnuté vedomosti na riešenie príkladov k Fourierovým radom.

V práci vyslovíme sled definícií a viet pochádzajúcich z knihy [10], ktoré následne dokážeme. Pri rátaní príkladov použijeme najmä vedomosti nadobudnuté v knihách [7], [9] a [10].

# 1 Fourierove rady

V nasledujúcom texte budeme používať rôzne pojmy a značenia, preto si niektoré z nich teraz zdefinujeme. Tieto definície pochádzajú z knihy [10].

**Definícia 1.1.** *Definícia pochádzajúca z [10], strana 258.*

**Nosič** (support) funkcie  $f$  je uzáver množiny všetkých bodov v  $\mathbb{R}^n$ , kde  $f$  nie je nulová,  $\text{supp}(f) = \text{uzáver}\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \neq 0\}$ . Funkcia, ktorá je nulová mimo ohraničenej množiny, sa preto nazýva funkcia s kompaktným nosičom. Znakom  $C_0^k(\mathbb{R}^n)$  sa značia množiny všetkých funkcií z  $C^k(\mathbb{R}^n)$  s kompaktným nosičom ( $0 \leq k \leq \infty$ ).

*Definícia z knihy [10], strana 358.*

V  $\mathbb{R}$  definovaná,  $2\pi$ -periodická funkcia  $f$  je z triedy  $C_\pi^k$ , ak je v  $\mathbb{R}$   $k$ -krát spojitely diferencovateľná.

*Definícia nachádzajúca sa v [10], strana 341.*

Nech  $J \subset \mathbb{R}$  je ľubovoľný interval. Funkcia  $f : J \rightarrow \mathbb{R}$  sa volá **absolútne spojitá** v  $J$ , skrátene  $f \in AC(J)$ , ak sa k ľubovoľnému  $\varepsilon > 0$  dá zadať  $\delta > 0$  tak, že pre každý konečný systém  $((\alpha_i, \beta_i))_{i=1}^p$  po pároch disjunktných otvorených čiastkových intervalov  $J$  platí, že  $\sum_{i=1}^p (\beta_i - \alpha_i) < \delta \Rightarrow \sum_{i=1}^p |f(\beta_i) - f(\alpha_i)| < \varepsilon$ . Ak sa tu položí  $p = 1$ , tak máme definíciu rovnomernej spojitosti. Ak  $f \in AC(J)$  a  $\phi$  je na množine  $f(J)$  lipšicovsky spojitá, tak  $\phi \circ f \in AC(J)$ . Ak  $f$  je na  $J$  lipšicovsky spojitá, tak  $f \in AC(J)$ .

*Definícia, ktorú sme prebrali z [10], strana 358.*

V  $\mathbb{R}$  definovaná,  $2\pi$ -periodická funkcia  $f$  je z triedy  $AC_\pi$ , ak je v  $\langle -\pi, \pi \rangle$  absolútne spojitá.

*Definícia, ktorú nájdeme v zdroji [10], strana 20.*

Hilbertov priestor postupností  $l^2$  definujeme ako priestor všetkých reálnych alebo komplexných postupností  $\alpha = \{\alpha_n\}_{n=1}^\infty$  s konvergentnou kvadratickou sumou,

$l^2 = \{\{\alpha_n\}_{n=1}^\infty; \sum_{n=1}^\infty \alpha_n^2 < \infty\}$ . V tomto priestore sa definuje skalárny súčin cez  $\langle x, y \rangle := \sum_{j=1}^\infty x_j y_j$ , ktorého norma vznikne ako  $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots}$ .

Definícia pochádzajúca z [10], strana 323.

Nech  $B \subset \mathbb{R}^n$  je merateľná. Funkcia  $f : B \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  je Lebesgueovsky integrovateľná, ak  $J(f) \equiv \int_B f(x) dx$  Lebesgueov integrál existuje. Množina Lebesgueovsky integrovateľných funkcií na množine  $B$  sa značí  $L(B)$ .

Definícia nachádzajúca sa v publikácii [10], strana 337.

$L^p$ -normu definujeme ako  $\|f\|_p := (\int_B |f(x)|^p dx)^{1/p}$ ,  $1 \leq p < \infty$ . Priestor  $L^p(B)$  obsahuje všetky na  $B$  merateľné funkcie s konečnou  $L^p$  - normou.  $L(B) = L^1(B)$ ,  $L_\pi = L(-\pi, \pi)$ .

Ak v texte použijeme, že funkcia mizne, budeme tým myslieť, že jej hodnota je rovná nule na určitej množine.

Teraz si zadefinujeme trigonometrický a Fourierov rad. Táto definícia pochádza z knihy [10], strana 358.

### Definícia 1.2. Trigonometrický rad a Fourierov rad

Pod pojmom trigonometrický rad rozumieme výraz vo forme

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nt + b_n \sin nt) \quad (1)$$

alebo v komplexnej forme

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{int} := \lim_{p \rightarrow \infty} \sum_{n=-p}^p c_n e^{int}, \quad (2)$$

pričom pre koeficienty platia rovnice

$$c_0 = \frac{1}{2}a_0, \quad c_n = \frac{1}{2}(a_n - ib_n), \quad c_{-n} = \frac{1}{2}(a_n + ib_n) \quad (n = 1, 2, 3, \dots). \quad (3)$$

Alebo ekvivalentne

$$a_0 = 2c_0, \quad a_n = c_n + c_{-n}, \quad b_n = i(c_n - c_{-n}) \quad (n = 1, 2, 3, \dots). \quad (4)$$

Potom platí

$$a_n \cos nt + b_n \sin nt = c_n e^{int} + c_{-n} e^{-int} \quad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

$P$ -te čiastkové sumy oboch radov sú tak identické,

$$s_p(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^p (a_n \cos nt + b_n \sin nt) = \sum_{n=-p}^p c_n e^{int}. \quad (5)$$

Na  $\mathbb{R}$  definovaná,  $2\pi$ -periodická funkcia  $f$  je z triedy  $C_\pi^k$  prípadne  $AC_\pi$  alebo  $L_\pi$ , ak je na  $\mathbb{R}$   $k$ -krát spojite diferencovateľná prípadne na  $[-\pi, \pi]$  absolútne spojitá alebo je z priestoru  $L(-\pi, \pi)$ . Platí  $C_\pi^1 \subset AC_\pi \subset C_\pi^0 \equiv C_\pi \subset L_\pi$ .

Pre funkciu  $f \in L_\pi$  teraz zdefinujme integrály:

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos nt dt \quad (n \geq 0), \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin nt dt \quad (n \geq 1), \quad (6)$$

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int} dt \quad (n \in \mathbb{Z}).$$

Vzorce (6) sa nazývajú Euler-Fourierove vzorce,  $a_n$ ,  $b_n$  prípadne  $c_n$  sa volajú Fourierovými koeficientami funkcie  $f$ . Ak je nutné vyjadriť závislosť na  $f$ , používajú sa označenia  $a_n(f), \dots, c_n(f), s_p(t; f)$ . Trigonometrický rad utvorený podľa (1) alebo (2) s týmito koeficientami sa nazýva Fourierov rad utvorený funkciou  $f$ . Označuje sa  $S(t; f)$ ,

$$S(t; f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{int}.$$

Pokračujme vetou z knihy [10], strana 359, ktorú dokážeme.

### Veta 1.3. Pravidlá rátania

Nech funkcie  $f, g \in L_\pi$   $2\pi$ -periodické. Znakom  $f_a$  označme posunutie funkcie  $f$ ,  $f_a(t) := f(a + t)$  a znakom  $\|f\|_1$   $L^1$ -normu  $\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)| dt$ .

- a)  $\int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt = \int_{-\pi}^{\pi} f(a+t)dt \equiv \int_{-\pi}^{\pi} f_a(t)dt$ , špeciálne  $\|f\|_1 = \|f_a\|_1$ .
- b) *Linearita.*  $c_n(\lambda f + \mu g) = \lambda c_n(f) + \mu c_n(g)$  a podobne pre  $a_n, b_n, s_p$  a  $S$  (v prípade konvergencie).
- c)  $c_n(f_a) = e^{ina}c_n(f)$ .
- d)  $s_p(t; f_a) = s_p(a+t; f)$ , takže  $S(t; f_a) = S(a+t; f)$  v prípade, že rad konverguje.
- e)  $c_n(e^{it}f) = c_{n-1}(f)$ .
- f)  $c_n(e^{int}) = \delta_{mn}$  (t.j. = 1 pre  $n = m$ , = 0 inak).
- g) Pre  $f \equiv \text{const.} = \lambda$  je  $s_p(t; \lambda) = \lambda$ , takže  $S(t; \lambda) = \lambda$ .
- h)  $|c_n(f)| \leq \|f\|_1/2\pi$  pre všetky  $n \in \mathbb{Z}$ .
- i) Ak je funkcia  $f$  párna resp. nepárna, tak je  $b_n(f) = 0$  resp.  $a_n(f) = 0$  pre všetky  $n$ .
- j) Pre funkciu  $f \in C^1_{\pi}$  je  $c_n(f') = inc_n(f)$ , t.j. Fourierove koeficienty funkcie  $f'$  získame tak, že Fourierov rad funkcie  $f$  zderivujeme člen po člene.
- k) Pre funkciu  $f \in C^2_{\pi}$  je  $|c_n(f)| \leq K/n^2$  pre  $n \neq 0$  s  $K = \|f''\|_1/2\pi$ .  
Z toho vyplýva, že Fourierov rad funkcie  $f$  konverguje v  $\mathbb{R}$  absolútne a aj rovnomerne.

**Dôkaz:**

- a)  $f$  je  $2\pi$ -periodická. V dôkaze využijeme periodicitu funkcie  $f$  a definíciu integrálu, čiže

$$\|f\|_1 = \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|dt = \int_{-\pi+a}^{\pi+a} |f(t)|dt = \int_{-\pi}^{\pi} |f(a+t)|dt = \int_{-\pi}^{\pi} |f_a(t)|dt = \|f_a\|_1. \quad \square$$

- b) V tomto dôkaze využijeme linearitu a asitivitu integrálu:

$$\begin{aligned} c_n(\lambda f + \mu g) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (\lambda f(t) + \mu g(t))e^{-int} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \lambda f(t)e^{-int} + \mu g(t)e^{-int} dt = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \lambda f(t)e^{-int} dt + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \mu g(t)e^{-int} dt = \frac{1}{2\pi} \lambda \int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-int} dt + \end{aligned}$$



$$+ \frac{1}{2\pi} \mu \int_{-\pi}^{\pi} g(t) e^{-int} dt = \lambda c_n(f) + \mu c_n(g) \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$\begin{aligned} a_n(\lambda f + \mu g) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (\lambda f(t) + \mu g(t)) \cos ntdt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \lambda f(t) \cos nt + \mu g(t) \cos ntdt = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \lambda f(t) \cos ntdt + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \mu g(t) \cos ntdt = \frac{1}{\pi} \lambda \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos ntdt + \\ &+ \frac{1}{\pi} \mu \int_{-\pi}^{\pi} g(t) \cos ntdt = \lambda a_n(f) + \mu a_n(g) \quad n \geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_n(\lambda f + \mu g) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (\lambda f(t) + \mu g(t)) \sin ntdt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \lambda f(t) \sin nt + \mu g(t) \sin ntdt = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \lambda f(t) \sin ntdt + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \mu g(t) \sin ntdt = \frac{1}{\pi} \lambda \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin ntdt + \\ &+ \frac{1}{\pi} \mu \int_{-\pi}^{\pi} g(t) \sin ntdt = \lambda b_n(f) + \mu b_n(g) \quad n \geq 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S(t; \lambda f + \mu g) &= \sum_{-\infty}^{\infty} c_n(\lambda f + \mu g) e^{int} = \sum_{-\infty}^{\infty} (\lambda c_n(f) + \mu c_n(g)) e^{int} = \\ &= \sum_{-\infty}^{\infty} \lambda c_n(f) e^{int} + \sum_{-\infty}^{\infty} \mu c_n(g) e^{int} = S(t; \lambda f) + S(t; \mu g). \quad \square \end{aligned}$$

c) Tu využijeme, že funkcia  $f(t)e^{-int}$  má periódu  $2\pi$ ,

$$\begin{aligned} c_n(f_a) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f_a(t) e^{-int} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(a+t) e^{-int} dt = \frac{1}{2\pi} e^{ina} \int_{-\pi}^{\pi} f(a+t) e^{-in(a+t)} dt = \\ &= \frac{1}{2\pi} e^{ina} \int_{-\pi+a}^{\pi+a} f(s) e^{-ins} ds = \frac{1}{2\pi} e^{ina} \int_{-\pi}^{\pi} f(s) e^{-ins} ds = e^{ina} c_n(f). \quad \square \end{aligned}$$

d) V tomto dôkaze použijeme práve dokázanú vlastnosť c).

$$\begin{aligned} s_p(t; f_a) &= \sum_{n=-p}^p c_n(f_a) e^{int} = \text{pravidlo c)} = \sum_{n=-p}^p e^{ina} c_n(f) e^{int} = \\ &= \sum_{n=-p}^p c_n(f) e^{in(a+t)} = s_p(a+t; f) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S(t; f_a) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(f_a) e^{int} = \text{pravidlo c)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{ina} c_n(f) e^{int} = \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(f) e^{in(a+t)} = S(a+t; f). \quad \square \end{aligned}$$

e) Vyplýva z definície koeficientu  $c_n(f)$  v rovnici (6)

$$c_n(e^{it} f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{it} f(t) e^{-int} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-it(-1+n)} dt = c_{n-1}(f). \quad \square$$

$$\text{f) } c_n(e^{imt}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{imt} e^{-int} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{it(m-n)} dt =$$

$$* = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} 1 dt = \frac{\pi}{2\pi} - \frac{-\pi}{2\pi} = \frac{2\pi}{2\pi} = 1 \quad (m = n)$$

$$\begin{aligned} ** &= \frac{1}{2\pi} \left[ \frac{e^{it(m-n)}}{i(m-n)} \right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{2\pi i(m-n)} [e^{\pi i(m-n)} - e^{-\pi i(m-n)}] = \\ &= \frac{1}{2\pi i(m-n)} [\cos \pi(m-n) + i \sin \pi(m-n) - (\cos(-\pi(m-n)) + i \sin(-\pi(m-n)))] = \\ &= \frac{1}{2\pi i(m-n)} [\cos \pi(m-n) - \cos(-\pi(m-n)) + i \sin \pi(m-n) - i \sin(-\pi(m-n))] = \\ &= \frac{1}{2\pi i(m-n)} [\cos \pi(m-n) - \cos(\pi(m-n)) + i \sin \pi(m-n) + i \sin(\pi(m-n))] = \\ &= \frac{i \sin \pi(m-n)}{i\pi(m-n)} = \frac{\sin \pi(m-n)}{\pi(m-n)} = \frac{0}{\pi(m-n)} = 0 \quad (m \neq n). \quad \square \end{aligned}$$

$$\mathbf{g)} \quad a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \lambda dt = \frac{\lambda}{\pi} (\pi + \pi) = \frac{2\lambda\pi}{\pi} = 2\lambda$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos nt dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \lambda \cos nt dt = \frac{\lambda}{\pi} \left[ \frac{\sin nt}{n} \right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{\lambda}{\pi n} (\sin n\pi - \\ &- \sin(-\pi n)) = \frac{\lambda}{\pi n} (\sin n\pi + \sin \pi n) = \frac{2\lambda}{\pi n} \sin n\pi = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin nt dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \lambda \sin nt dt = \frac{\lambda}{\pi} [-\cos nt]_{-\pi}^{\pi} = \frac{-\lambda}{\pi n} (\cos n\pi - \\ &- \cos(-\pi n)) = \frac{-\lambda}{\pi n} (\cos n\pi - \cos n\pi) = 0 \end{aligned}$$

$$s_p(t; \lambda) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^p (a_n \cos nt + b_n \sin nt) = \frac{1}{2} 2\lambda = \lambda$$

$$S(t; \lambda) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nt + b_n \sin nt) = \frac{1}{2} 2\lambda = \lambda. \quad \square$$

**h)** V tomto dôkaze využijeme, že platí  $\left| \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx \right| \leq \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)| dx$  a  $|e^{-int}| = 1$ :

$$\begin{aligned} |c_n(f)| &= \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int} dt \right| = \frac{1}{2\pi} \left| \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int} dt \right| \leq \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t) e^{-int}| dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)| |e^{-int}| dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)| dt = \frac{1}{2\pi} \|f\|_1. \quad \square \end{aligned}$$

**i)** Vieme, že integrál nepárnej funkcie  $\int_{-a}^a f(t) dt$  na  $\langle -a, a \rangle$  je 0. To uplatníme v nasledujúcom dôkaze:

$f$  je párna  $\Rightarrow g = f(t) \sin nt$  je nepárna a ak je  $f$  nepárna, tak

$h = f(t) \cos nt$  je nepárna a integrál nepárnej funkcie = 0, čiže ak  $f$  je párna, tak  $b_n = 0$  a ak  $f$  je nepárna, tak  $a_n = 0$

$g$  je nepárna  $\Rightarrow$  jej integrál na  $(-\pi; \pi)$  je nulový

$$\begin{aligned} \text{Dôkaz: } \int_{-\pi}^{\pi} g(t) dt &= \int_{-\pi}^0 g(t) dt + \int_0^{\pi} g(t) dt = | \text{substitúcia v prvom integrále } t = -s, \\ dt &= -ds | = - \int_0^{\pi} g(-s) ds + \int_0^{\pi} g(t) dt = \int_0^{\pi} g(-s) ds + \\ &+ \int_0^{\pi} g(t) dt = - \int_0^{\pi} g(s) ds + \int_0^{\pi} g(t) dt = 0. \quad \square \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{j) } c_n(f') &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)' e^{-int} dt = \frac{1}{2\pi} ([f(t)e^{-int}]_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} f(t)(-in)e^{-int} dt) = \\ &= | \frac{1}{2\pi} [f(t)e^{-int}]_{-\pi}^{\pi} = 0 \text{ pretože } f(t)e^{-int} \text{ je } 2\pi\text{-periodická} | = \frac{1}{2\pi} (0 + \\ &+ in \int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-int} dt) = inc_n(f) \\ &\text{V dôkaze sme použili metódu per partes pre } f \in AC_{\pi}. \quad \square \end{aligned}$$

**k)** Podľa predpokladu bodu k)  $f \in C_{\pi}^2$  a teda  $f' \in C_{\pi}^1$ . Z toho vyplýva, že  $f \in AC_{\pi}$  aj  $f' \in AC_{\pi}$ , lebo  $C_{\pi}^1 \subset AC_{\pi}$  aj  $C_{\pi}^2 \subset AC_{\pi}$ . Teraz môžeme využiť bod j):

$$\text{podľa j) } c_n(f'') = -n^2 c_n(f) \Rightarrow c_n(f) = \frac{c_n(f'')}{-n^2}$$

$$\begin{aligned} \text{podľa h) } |c_n(f)| &\leq \frac{\|f\|_1}{2\pi} \Rightarrow |c_n(f)| = | \frac{c_n(f'')}{-n^2} | = | \frac{c_n(f'')}{n^2} | \leq \frac{\|f''\|_1}{2\pi n^2} = \\ &= \frac{\|f''\|_1}{2\pi} \frac{1}{n^2} = K \frac{1}{n^2} \end{aligned}$$

ohraničili sme  $c_n(f)$  postupnosťou nezáporných čísel;

$$\text{platí } |c_n e^{int}| = |c_n| \text{ a } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty. \text{ Takže rad } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{K}{n^2} \text{ je majorantný k radu } \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|.$$

Z toho vyplýva absolútna konvergencia radu  $S = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{int}$  a spolu s Weierstrass-kritériom dostávame aj rovnomernú konvergenciu.  $\square$

V dôkaze sme použili Weierstrassovo kritérium z knihy [6].

### Weierstrassovo kritérium

Nech  $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$  je postupnosť funkcií ohraničených na neprázdnej množine  $M$ , nech  $\{j_n\}_{n=1}^{\infty}$  je postupnosť nezáporných čísel taká, že  $|f_n(x)| \leq j_n$ ,  $x \in M$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Ak číselný rad  $\sum_{n=1}^{\infty} j_n$  konverguje, tak funkcionálny rad  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$  konverguje rovnomerne na  $M$ .

**Dôkaz:** Uvedená veta je len pomocná a preto ju uvádzame bez dôkazu.

Ďalej budeme pokračovať vetou, opäť z publikácie [10], strana 360, ktorú dokážeme.

**Veta 1.4.** Nech je daný trigonometrický rad  $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \gamma_n e^{int}$ , ktorý konverguje rovnomerne na  $\langle -\pi, \pi \rangle$ . Označme pomocou  $f$  jeho súčet, takže  $f \in C_{\pi}^0$  a čísla  $\gamma_n$  sú práve Fourierove koeficienty tejto funkcie,  $\gamma_n = c_n(f)$ . Inými slovami: Rovnomerne konvergentný trigonometrický rad je Fourierov rad svojho súčtu.

**Dôkaz:** Spojitosť  $f$  vyplýva z rovnomernej konvergencie a  $f$  je tiež periodická. Pre čiastkové sumy  $\sigma_p(t) = \sum_{n=-p}^p \gamma_n e^{int}$  platí podľa b) (linearita) a f) ( $c_n(e^{imt}) = \delta_{mn}$ )

$$c_k(\sigma_p) = \sum_{n=-p}^p \gamma_n c_k(e^{int}) = \gamma_k \quad \text{pre } |k| \leq p.$$

Keďže

čiastkové sumy  $\sigma_p(t)$  rovnomerne konvergujú k  $f(t)$  pre  $p \rightarrow \infty$ , môže sa v predpise  $c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int} dt$  prejsť v integráli k limite, t.j.  $c_k(f) = \lim_{p \rightarrow \infty} c_k(\sigma_p) = \gamma_k$ .  $\square$

Nasledovná veta je z knihy [10], strana 340, použijeme ju ako pomocnú v dôkaze ďalšej vety a preto ju nebudeme dokazovať.

### Veta o hustote

Nech  $G \subset \mathbb{R}^n$  je otvorená množina. Potom je množina  $C_0^{\infty}(G)$  hustá v priestore  $L^p(G)$ ,  $1 \leq p < \infty$ , t.j. k funkcii  $f \in L^p(G)$  existuje, ak zadáme  $\varepsilon > 0$ , funkcia  $\phi \in C_0^{\infty}(G)$  s vlastnosťou  $\|f - \phi\|_p < \varepsilon$ .

Nasleduje veta z literatúry [10], strana 361, ktorú dokážeme.

### Veta 1.5. Riemann-Lebesgueova veta

Pre  $f \in L_{\pi}$  je  $\lim_{n \rightarrow +\infty} c_n(f) = 0$  a  $\lim_{n \rightarrow -\infty} c_n(f) = 0$ ,

t.j. Fourierove koeficienty  $a_n, b_n$  prípadne  $c_n, c_{-n}$  smerujú k nule.

**Dôkaz:** K  $\varepsilon > 0$  vieme podľa vety o hustote nájsť funkciu  $\phi \in C_0^2(-\pi, \pi)$  takú, že  $\|f - \phi\|_1 < \varepsilon$ . Ak rozšírime  $\phi$   $2\pi$ -periodicky na  $\mathbb{R}$ , tak  $\phi \in C_{\pi}^2$  lebo  $\phi$  sa v okolí  $\pi$  a  $-\pi$  vynuluje. Podľa 1.3 k) tak získame ohraničenie  $|c_n(\phi)| \leq K/n^2$ . Z bodu 1.3 h) vyplýva, že  $|c_n(f - \phi)| \leq \|f - \phi\|_1 / 2\pi < \varepsilon / 2\pi$ . Ďalej platí:  $c_n(f) - c_n(\phi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int} dt - \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \phi(t) e^{-int} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f(t) - \phi(t)) e^{-int} dt = c_n(f - \phi)$ . Vďaka vzťahu  $c_n(f) = c_n(\phi) + c_n(f - \phi)$  platí:  $|c_n(f)| = |c_n(\phi) + c_n(f - \phi)| \leq |c_n(\phi)| + |c_n(f - \phi)| < K/n^2 + \varepsilon / 2\pi$ .  $\square$

Znenie vety, ktorá nasleduje a ktorú dokážeme pochádza z knihy [10], strana 361.

**Veta 1.6.** *Nech  $f \in L_\pi$  a  $f(t)/t \in L(-\delta, \delta)$  pre  $\delta > 0$ . Potom Fourierov rad funkcie  $f$  v bode 0 konverguje k hodnote 0,  $S(0; f) = \lim_{p \rightarrow \infty} s_p(0; f) = 0$ .*

**Dôkaz:**  $f(t)/t \in L(-\pi, \pi)$ . Zavedieme si nasledovnú premennú

$g(t) := \frac{f(t)}{1-e^{it}} \in L_\pi$ . Funkcia  $\phi(t) = it/(e^{it} - 1)$  je na množine  $0 < |t| \leq \pi$  spojitá a pre  $t \rightarrow 0$  konverguje k 1 (vďaka  $(e^s - 1)/s \rightarrow 1$  pre (komplexné)  $s \rightarrow 0$ ). Takže  $\phi$  je ohraničená a síce  $|\phi(t)| \leq K$  v intervale  $[-\pi, \pi]$ .

Z odhadu

$$|g(t)| = \left| \frac{f(t)}{t} \cdot \frac{1}{i} \cdot \frac{it}{e^{it} - 1} \right| \leq \left| \frac{f(t)}{t} \right| \cdot 1 \cdot K = K \cdot \left| \frac{f(t)}{t} \right|$$

pre  $0 < |t| \leq \pi$  a z periodicity  $g$  vyplýva  $g \in L_\pi$ . Medzi Fourierovými koeficientami  $f$  a  $g$  vznikne podľa vlastnosti e) z vety 1.3. vzťah

$$f(t) = (1 - e^{it})g(t) \Rightarrow c_n(f) = c_n(g) - c_{n-1}(g).$$

Suma  $\sum_{-p}^p c_n(f)$  je teleskopický rad,

$$s_p(0; f) = \sum_{n=-p}^p c_n(f) = c_p(g) - c_{-p-1}(g)$$

a podľa Riemann-Lebesgueovej vety (veta 1.5) konverguje pravá strana k 0 pre  $p \rightarrow \infty$ .  $\square$

Ďalšiu vetu sme prebrali z publikácie [10], strana 362 a ideme ju dokázať.

**Veta 1.7. Veta o konvergencii**

*Nech  $f \in L_\pi$ ,  $a \in [-\pi, \pi]$  a  $c$  je (reálne prípadne komplexné) číslo s vlastnosťou, že funkcia*

$$\frac{f(t) - c}{t - a} \in L(a - \delta, a + \delta)$$

*pre  $\delta > 0$ . Potom Fourierov rad funkcie  $f$  v bode  $a$  konverguje k hodnote  $c$ ,  $S(a; f) = c$ .*

**Dôkaz:** Majme funkciu  $g(t) = f(a + t) - c$ . Z podmienky vo vete

$\frac{f(t)-c}{t-a} \in L(a - \delta, a + \delta)$  dostaneme po substitúcii  $t = s + a$  výraz

$\frac{f(s+a)-c}{s} \in L(-\delta, \delta)$ . Teda  $\frac{g(t)}{t} = \frac{f(t+a)-c}{t} \in L(-\delta, \delta)$ . Pre  $g(t)$  potom platí  $S(0; g) = 0$ .

Podľa 1.3. b), d) a g) získame  $c = c + S(0; g) = S(a; f) = S(0; g + c) = S(0; f_a) = d = S(a; f)$ .  $\square$

Text nasledujúcej vety, ktorú ideme dokázať, nájdeme v literatúre [10], strana 362.

**Veta 1.8.** Ak vyhovuje  $f \in L_\pi$  v bode  $a$  Hölderovej podmienke

$$|f(t) - f(a)| \leq K|t - a|^\alpha$$

pre  $|t - a| < \delta$  ( $0 < \alpha \leq 1$ ), tak platí  $S(a; f) = f(a)$ . Ak je teda  $f \in C_\pi^0$  hölderovsky spojitá (t.j.  $|f(s) - f(t)| \leq K|s - t|^\alpha$  pre  $s, t \in \mathbb{R}$   $0 < \alpha \leq 1$ ), tak Fourierov rad funkcie  $f$  konverguje v každom bode  $k$   $f$ . To platí predovšetkým pre funkcie z  $C_\pi^1$  a pre lipschitzovsky spojité funkcie. Pre funkcie z  $C_\pi^2$  je konvergencia podľa 1.2. k) rovnomerná.

**Dôkaz:** Majme splnenú Hölderovu podmienku  $|f(t) - f(a)| \leq K|t - a|^\alpha$  pre  $0 < \alpha \leq 1$ . Keď predelíme výrazy v nerovnosti výrazom  $|t - a|$ , dostaneme  $\frac{|f(t) - f(a)|}{|t - a|} \leq K|t - a|^{\alpha-1}$ . Teraz sa dá využiť veta o konvergencii, kde  $c = f(a)$ , čiže  $\frac{|f(t) - f(a)|}{|t - a|} \leq K|t - a|^{\alpha-1} \in L(a - \delta, a + \delta)$  pre  $-1 < \alpha - 1 \leq 0$ . Na záver ukážeme, že  $\int_{a-\delta}^{a+\delta} |t - a|^{\alpha-1} dt$  konverguje.

$$\begin{aligned} \int_{a-\delta}^{a+\delta} |t - a|^{\alpha-1} dt &= |\text{substitúcia } t - a = s \quad dt = ds| = \int_{-\delta}^{\delta} |s|^{\alpha-1} ds = 2 \int_0^{\delta} |s|^{\alpha-1} ds = \\ &= 2 \int_0^{\delta} s^{\alpha-1} ds = 2 \left[ \frac{s^\alpha}{\alpha} \right]_0^{\delta} = 2 \frac{\delta^\alpha}{\alpha} - 0 = 2 \frac{\delta^\alpha}{\alpha}. \quad \square \end{aligned}$$

Veta, ktorou pokračujeme a ktorú dokážeme, sa nachádza v knihe [10], strana 363.

**Veta 1.9. Konvergencia v miestach skoku**

Nech  $f \in L_\pi$ ,  $a \in \mathbb{R}$  a nech sú dané dve čísla  $c^+, c^-$ . Ak

$$\frac{f(t) - c^-}{t - a} \in L(a - \delta, a) \quad a \quad \frac{f(t) - c^+}{t - a} \in L(a, a + \delta) \quad \text{pre } \delta > 0,$$

tak Fourierov rad funkcie  $f$  konverguje v bode  $a$  k hodnote  $c := \frac{1}{2}(c^+ + c^-)$ . Ak sa pri  $c^-$  a  $c^+$  jedná o jednostranné limity  $f(a-)$  a  $f(a+)$ , tak

$$S(a; f) = \frac{1}{2}[f(a+) + f(a-)].$$

**Dôkaz:** Majme funkciu

$$g(t) = f(t) - \lambda V(t - a) \quad s \quad \lambda = \frac{1}{2}(c^+ - c^-) \quad a \quad V(t) = \text{sgn}(t).$$

Potom  $f(t) - c^- = g(t) - c$  pre  $t < a$  a  $f(t) - c^+ = g(t) - c$  pre  $t > a$ , takže  $(g(t) - c)/(t - a) \in L(a - \delta, a + \delta)$  a podľa vety o konvergencii  $S(a; g) = c$ . Podľa 1.3. d)  $S(a; V(t - a)) = S(0; V) = 0$  a teda  $S(a; f) = S(a; g) + \lambda S(0; V) = c$ .  $\square$

Ďalšiu definíciu nájdeme v publikácii [10], strana 364.

**Definícia 1.10. Párne a nepárne rozšírenie**

Funkcia  $f$  definovaná na intervale  $(0, \pi)$  sa dá rozšíriť na  $\mathbb{R}$  tak, že zadáme párnú resp. nepárnú  $2\pi$ -periodickú funkciu. Ak označíme rozšírenie  $f_p$  resp.  $f_n$ , tak platí

$$f_p(t) = f(-t) \quad \text{resp.} \quad f_n(t) = -f(-t) \quad \text{pre} \quad -\pi < t < 0.$$

V prípade párneho rozšírenia nepodliehajú hodnoty  $f_p(0)$  a  $f_p(\pi) = f_p(-\pi)$  žiadnemu obmedzeniu, ak nie je zadané vopred. Naproti tomu vedie podmienka, že  $f_n$  je nepárna a  $2\pi$ -periodická k nutnosti, aby  $f_n(0) = 0$  a  $f_n(\pi) = f_n(-\pi) = 0$  (podľa vety o konvergencii v miestach skoku).

Keď teraz rozšírime funkciu  $2\pi$ -periodicky, tak zostane párna resp. nepárna. Fourierov rad  $f_p$  je podľa 1.3. i) kosínusový rad a Fourierov rad  $f_n$  je sínusový. Oba rady predstavujú  $f$  na intervale  $(0, \pi)$ .

Pokračujeme definíciou, ktorú nájdeme v literatúre [10], strana 364.

**Definícia 1.11. Prerátanie na iné dĺžky periód**

Nech  $f$  je periodická s periódou  $2T$  ( $T > 0$ ). Funkcia  $g(s) = f(\frac{T}{\pi}s)$  potom má periódu  $2\pi$  a pre vhodné, konvergenciu zaisťujúce predpoklady získame z Fourierovho rozvoja  $g(s) = \sum c_n e^{ins}$  odpovedajúci rozvoj pre  $f$ .

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\pi t/T} \quad \text{kde} \quad c_n = \frac{1}{2T} \int_{-T}^T f(t) e^{-in\pi t/T} dt$$

alebo v reálnej forme

$$f(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos \frac{n\pi}{T}t + b_n \sin \frac{n\pi}{T}t),$$

$$a_n = \frac{1}{T} \int_{-T}^T f(t) \cos \frac{n\pi}{T}t dt \quad (n \geq 0), \quad b_n = \frac{1}{T} \int_{-T}^T f(t) \sin \frac{n\pi}{T}t dt \quad (n \geq 1).$$

Nasleduje veta so znením z knihy [10], strana 365, ktorú dokážeme.

**Veta 1.12. Riemannova lokalizačná veta**

Ak dve funkcie  $f, g \in L_\pi$  navzájom súhlasia v okolí bodu  $a$ , tak majú ich Fourierove

radu v bode  $a$  rovnaké konvergenčné správanie. To znamená, že ak konverguje jedna funkcia v bode  $a$ , tak aj druhá a ak jedna diverguje, tak aj druhá. Ak konvergujú, majú tú istú sumu,  $S_p(a; f) - S_p(a; g) = 0$ .

**Dôkaz:** Hoci Fourierove koeficienty  $c_n(f)$  ako integrály závisia od priebehu  $f$  v celom intervale  $[-\pi, \pi]$ , sú pre konvergenciu Fourierovho radu v bode  $a$  určujúce len funkčné hodnoty v blízkosti  $a$ . Keďže funkcia  $h = f - g \in L_\pi$  mizne v intervale  $(a - \delta, a + \delta)$ , konverguje čiastková suma podľa vety o konvergencii  $s_p(a; h) = s_p(a; f) - s_p(a; g)$  pre  $p \rightarrow \infty$  k hodnote 0, z čoho vyplýva tvrdenie vety.  $\square$

Znenie ďalšej vety v poradí, ktorú dokážeme, pochádza z publikácie [10], strana 365.

**Veta 1.13. Veta o rovnomernej konvergencii**

Ak dve funkcie  $f, g \in L_\pi$  navzájom súhlasia v otvorenom intervale  $J$  a Fourierov rad funkcie  $f$  je v kompaktnom intervale  $I \subset J$  rovnomerne konvergentný, tak je aj Fourierov rad funkcie  $g$  v  $I$  rovnomerne konvergentný.

**Dôkaz:** Na základe 1.3d) môžeme náš kompaktný interval posunúť tak, aby mal stred v bode 0, teda tak, aby  $I = [-\gamma, \gamma]$  a  $J = [-\delta, \delta]$  s  $0 < \gamma < \delta < \pi$ . K funkcii  $h = f - g$ , ktorá mizne na  $J$  a k zadanému  $\varepsilon > 0$  určíme podľa vety o hustote, ktorú sme uviedli v dôkaze Riemann-Lebesgueovej vety, funkciu  $\phi$  s vlastnosťami

$$\phi \in C_\pi^1, \quad \phi = 0 \quad \text{v} \quad J, \quad \|h - \phi\|_1 < \alpha\varepsilon$$

kde  $\alpha = |1 - e^{i(\delta - \gamma)}| = |1 - \cos(\delta - \gamma) + i \sin(\delta - \gamma)| = \sqrt{(1 - \cos(\delta - \gamma))^2 + \sin^2(\delta - \gamma)} =$   
 $= \sqrt{1 - 2\cos(\delta - \gamma) + \cos^2(\delta - \gamma) + \sin^2(\delta - \gamma)} = \sqrt{1 + 1 - 2\cos(\delta - \gamma)} =$   
 $= \sqrt{2 - 2\cos(\delta - \gamma)} = \sqrt{2}\sqrt{1 - \cos(\delta - \gamma)} > 0$  čiže  $\alpha > 0$ . Teraz aproximujeme  $h$  podľa vety o hustote v intervale  $J^- = (-\pi, -\delta)$  cez funkciu z  $C_0^1(J^-)$ . Podobne na intervale  $J^+ = (\delta, \pi)$  a definujeme  $\phi$  ako sumu týchto dvoch funkcií,  $2\pi$ -periodicky rozšírenú. Následne zvolíme  $a$ ;  $|a| \leq \gamma$ . Teraz zavedieme funkcie

$$r(t, a) = \frac{h(a+t)}{1 - e^{it}} \quad \text{a} \quad \rho(t, a) = \frac{\phi(a+t)}{1 - e^{it}} \quad \text{pre} \quad |a| \leq \gamma.$$

Obe funkcie miznú (vďaka ohraničeniu pre  $a$ ) pre  $|t| \leq \delta - \gamma$ . Označme si menovateľ ako  $E(t)$ . Ukážeme si, že  $\frac{1}{|E(t)|} \leq \frac{1}{|\alpha|}$  pre  $|t| \geq \delta - \gamma$ .

$$\frac{1}{|E(t)|} \leq \frac{1}{|\alpha|} \Leftrightarrow$$



$$\begin{aligned}
 &\Leftrightarrow |\alpha| = |1 - e^{i(\delta-\gamma)}| \leq |E(t)| = |1 - e^{it}| \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow \sqrt{(1 - \cos(\delta - \gamma))^2 + \sin^2(\delta - \gamma)} \leq \sqrt{(1 - \cos(t))^2 + \sin^2(t)} \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow \sqrt{1 - 2\cos(\delta - \gamma) + \cos^2(\delta - \gamma) + \sin^2(\delta - \gamma)} \leq \sqrt{1 - 2\cos(t) + \cos^2(t) + \sin^2(t)} \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow \sqrt{2 - 2\cos(\delta - \gamma)} \leq \sqrt{2 - 2\cos t} \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow 2 - 2\cos(\delta - \gamma) \leq 2 - 2\cos t \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow 2\cos t \leq 2\cos(\delta - \gamma) \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow \cos t \leq \cos(\delta - \gamma) \quad \text{pre } |t| \geq \delta - \gamma,
 \end{aligned}$$

čo platí. Ukázali sme si, že  $E(t) \geq \alpha$  pre  $|t| \geq \delta - \gamma$ . Chceme nájsť platný odhad  $c_n(r)$  pre všetky  $a$ . Vieme, že  $c_n(r) = c_n(r - \rho) + c_n(\rho)$ .

$$\begin{aligned}
 |c_n(r - \rho)| &\leq (\text{veta 1.3 h))} \frac{\|r - \rho\|_1}{2\pi} \leq \|r - \rho\|_1 = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{|h(a+t) - \phi(a+t)|}{|1 - e^{it}|} dt = \\
 &= \int_{|t| \geq \delta - \gamma} \frac{|h(a+t) - \phi(a+t)|}{|1 - e^{it}|} dt + \int_{|t| \leq \delta - \gamma} \frac{|h(a+t) - \phi(a+t)|}{|1 - e^{it}|} dt = \\
 &= \int_{|t| \geq \delta - \gamma} \frac{|h(a+t) - \phi(a+t)|}{|E(t)|} dt + \int_{|t| \leq \delta - \gamma} 0 dt \leq \\
 &\leq \frac{1}{\alpha} \int_{|t| \geq \delta - \gamma} |h(a+t) - \phi(a+t)| dt + \frac{1}{\alpha} \int_{|t| \leq \delta - \gamma} 0 dt = \\
 &= \frac{1}{\alpha} \int_{-\pi}^{\pi} |h(a+t) - \phi(a+t)| dt = \frac{1}{\alpha} \|h(a+t) - \phi(a+t)\|_1 = \\
 &= (\text{veta 1.3 a))} \frac{1}{\alpha} \|h(t) - \phi(t)\|_1 < \frac{1}{\alpha} \alpha \varepsilon = \varepsilon.
 \end{aligned}$$

Teraz si odvodíme deriváciu funkcie  $\rho$ :

$$\rho(t) = \frac{\phi_a(t)}{1 - e^{it}}$$

rozderivovaním dostávame:

$$\rho'(t) = \frac{\phi'_a(t)(1 - e^{it}) - \phi_a(t)(-ie^{it})}{(1 - e^{it})^2} = \frac{\phi'_a(t)}{1 - e^{it}} + \frac{i\phi_a(t)e^{it}}{(1 - e^{it})^2}.$$

Čiže

$$\rho'(t) = \frac{\phi'_a(t)}{E(t)} + \frac{i\phi_a(t)e^{it}}{E(t)^2}.$$

Derivácia  $\rho'$  je teda rovná  $\phi'_a/E + ie^{it}\phi_a/E^2$ . Z toho a z 1.3 j) dostávame od  $a$  nezávislý odhad

$$\begin{aligned}
 |n||c_n(\rho)| &= |c_n(\rho')| = \left| c_n\left(\frac{\phi'_a}{E}\right) + c_n\left(\frac{ie^{it}\phi_a}{E^2}\right) \right| \leq \left| c_n\left(\frac{\phi'_a}{E}\right) \right| + \left| c_n\left(\frac{ie^{it}\phi_a}{E^2}\right) \right| \leq \\
 &\leq (\text{veta 1.3 h))} \quad \left\| \frac{\phi'_a}{E} \right\|_1 + \left\| \frac{ie^{it}\phi_a}{E^2} \right\|_1 = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{|\phi'_a|}{|E|} dt + \int_{-\pi}^{\pi} \frac{|ie^{it}\phi_a|}{|E^2|} dt = \\
 &= (\text{veta 1.3 a))} \quad \int_{-\pi}^{\pi} \frac{|\phi'|}{|E|} dt + \int_{-\pi}^{\pi} \frac{|ie^{it}\phi|}{|E^2|} dt = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{|\phi'|}{|E|} dt + \int_{-\pi}^{\pi} \frac{|\phi|}{|E^2|} dt \leq \\
 &\leq \int_{-\pi}^{\pi} \frac{|\phi'|}{|\alpha|} dt + \int_{-\pi}^{\pi} \frac{|\phi|}{|\alpha^2|} dt = (\alpha > 0) \quad \int_{-\pi}^{\pi} \frac{|\phi'|}{\alpha} dt + \int_{-\pi}^{\pi} \frac{|\phi|}{\alpha^2} dt = \\
 &= (\text{v } \alpha \text{ nevystupuje t)} \quad \frac{1}{\alpha} \int_{-\pi}^{\pi} |\phi'| dt + \frac{1}{\alpha^2} \int_{-\pi}^{\pi} |\phi| dt = \frac{1}{\alpha} \|\phi'\|_1 + \frac{1}{\alpha^2} \|\phi\|_1 =: K(\phi).
 \end{aligned}$$

Platí  $|c_n(r)| = |c_n(r - \rho) + c_n(\rho)| \leq |c_n(r - \rho)| + |c_n(\rho)| < \varepsilon + \frac{K}{|n|} < 2\varepsilon$  pre  $|n| > \frac{K}{\varepsilon}$ .

Fourierove koeficienty  $r(t)$  konvergujú rovnomerne pre  $|a| < \gamma$  k hodnote  $\theta$ , ak  $|n| \rightarrow \infty$ .

Ako v dôkaze vety 1.6  $c_n(h_a) = c_n((1 - e^{it})r(t, a)) = c_n(r(t, a)) - c_{n-1}(r(t, a))$ , čiže

$$s_p(a; f) - s_p(a; g) = s_p(a; h) = s_p(0; h_a) = \sum_{n=-p}^p c_n(h_a) = c_p(r) - c_{-p-1}(r).$$

Pravá strana konverguje pre  $p \rightarrow \infty$  rovnomerne pre  $a \in [-\gamma, \gamma]$  k hodnote  $\theta$  a veta je dokázaná.  $\square$

## 2 Hilbertov priestor

Definícia, ktorá nasleduje v texte pochádza zo zdroja [5].

### Definícia 2.1. Cauchyho postupnosť

Postupnosť  $\{j_n\} \subset X$ , kde  $(X, \|\cdot\|)$  je lineárny normovaný priestor, sa nazýva Cauchyho, ak

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \forall n > n_0 \forall p \in \mathbb{N} : \|x^{n+p} - x^n\| < \varepsilon.$$

Nasledovná definícia je z publikácie [5].

### Definícia 2.2. Úplný priestor

Lineárny normovaný priestor  $(X, \|\cdot\|)$  sa nazýva úplný priestor, ak každá Cauchyho postupnosť prvkov z  $X$  má limitu v  $X$ .

Definícia, ktorou pokračujeme, sa nachádza v literatúre [10], strana 20.

### Definícia 2.3. Hilbertov priestor $l^2$

Uvažujme priestor všetkých reálnych postupností  $x = (x_j)_{j=1}^{\infty}$  s konvergentnou sumou druhých mocnín  $\sum_{j=1}^{\infty} x_j^2 < \infty$ . V tomto priestore, označenom  $l^2$ , sa definuje skalárny súčin cez  $\langle x, y \rangle := \sum_{j=1}^{\infty} x_j y_j$ , ktorého norma vznikne ako  $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots}$ .

Znenie ďalšej vety v poradí, ktorú dokážeme, nájdeme v knihe [10], strana 366.

### Definícia 2.4. Ortonormálne postupnosti v Hilbertovom priestore

Nech  $H$  je reálny alebo komplexný Hilbertov priestor s vnútorným súčinom  $\langle u, v \rangle$  a normou  $\|u\| = \sqrt{\langle u, u \rangle}$ . Dva členy  $u, v \in H$  nazývame ortogonálne,  $u \perp v$ , ak  $\langle u, v \rangle = 0$ .

Postupnosti  $(u_n)_0^{\infty}$  z  $H$  nazývame ortonormálnymi, ak sú  $u_n$  po pároch ortogonálne a znormované na dĺžku 1, ak teda  $\langle u_m, u_n \rangle = \delta_{mn}$ . Ďalej sa zameriame na hore uvedený Hilbertov priestor  $l^2$ . Pozostáva zo všetkých reálnych resp. komplexných postupností  $\alpha = (\alpha_n)_0^{\infty}$  s konvergentnou sumou štvorcov,  $\sum_0^{\infty} |\alpha_n|^2 < \infty$ . Skalárny súčin dvoch členov  $\alpha, \beta \in l^2$  je definovaný v komplexnom prípade ako  $\langle \alpha, \beta \rangle_{l^2} = \sum_0^{\infty} \alpha_n \overline{\beta_n}$ .

Normu v  $l^2$  označujeme  $\|\alpha\|_{l^2}$ .

V ďalšom budeme uvažovať komplexný Hilbertov priestor, čím je zahrnutý tiež reálny prípad. Koefficienty  $\alpha_n, \beta_n, \dots$  sú teda komplexné čísla a  $\{u_n\}$  je ortonormálna postupnosť.

(a) Nech  $A \subset \mathbb{N}$  je konečná indexová množina a  $\sum_A$  označuje cez indexy  $n \in A$

ohraničenú konečnú sumu. Pre  $g = \sum_A \alpha_n u_n, h = \sum_A \beta_n u_n$  je

$$\langle g, h \rangle = \langle \sum_A \alpha_m u_m, \sum_A \beta_n u_n \rangle = \sum_{m,n \in A} \alpha_m \overline{\beta_n} \langle u_m, u_n \rangle = \sum_A \alpha_n \overline{\beta_n}$$

a  $\|g\|^2 = \sum_A \alpha_n^2$ . Teraz rozšírime (a) na nekonečnú sumu. Pri tom hrá úplnosť priestoru  $H$  dôležitú úlohu.

Veta, ktorou pokračujeme v texte a ktorú dokážeme, je zo zdroja [10], strana 367.

**Veta 2.5.** Rad  $\sum_0^\infty \alpha_n u_n$  je konvergentný v  $H$  práve vtedy, keď  $\alpha = (\alpha_n)_0^\infty$  je z  $l^2$ . Ak sú

$\alpha$  a  $\beta$  z  $l^2$ , tak pre  $g = \sum_0^\infty \alpha_n u_n, h = \sum_0^\infty \beta_n u_n$  platia rovnosti

$$\langle g, h \rangle = \sum_{n=0}^\infty \alpha_n \overline{\beta_n} = \langle \alpha, \beta \rangle_{l^2} \quad a \quad \|g\|^2 = \sum_{n=0}^\infty |\alpha_n|^2 = \|\alpha\|_{l^2}^2.$$

Špeciálne  $\langle g, u_n \rangle = \alpha_n$ .

**Dôkaz:** Ak je rad  $\sum_{n=0}^\infty \alpha_n u_n$  konvergentný a konverguje k prvku, ktorý označíme  $u$ , tak sú čiastkové sumy ohraničené a síce  $\|s_p\|^2 \leq \|u\|^2$ . Z (a) vyplýva, že aj čiastkové sumy  $\sum |\alpha_n|^2$  majú ohraničenie  $\|u\|^2$  a teda  $\sum |\alpha_n|^2 \leq \|u\|^2$ . Takže  $\alpha \in l^2$ .

Nech teraz  $\alpha = (\alpha_n)_0^\infty$  je z  $l^2$ . Uvažujme čiastkové sumy  $s_p = \sum_0^p \alpha_n u_n$ . Ak použijeme (a)

na množinu  $A = \{p+1, \dots, q\}$ , tak dostávame  $\|s_q - s_p\|^2 = \sum_{p+1}^q |\alpha_n|^2$ . Vďaka konvergencii

radu  $\sum |\alpha_n|^2$  existuje ku  $\varepsilon > 0$  index  $N$  taký, že  $\sum_{p+1}^q |\alpha_n|^2 < \varepsilon$  vypadne, pre  $q > p \geq N$ .

Pre také indexy  $p, q$  je teda  $\|s_q - s_p\|^2 < \varepsilon$  a odtiaľ sa dá vidieť, že čiastkové sumy tvoria v  $H$  Cauchyovskú postupnosť. Vďaka úplnosti  $H$  konvergujú čiastkové sumy k členu  $g \in H$ .

Druhú časť vety dokážeme z (a). Pre  $s_p$  a  $t_p = \sum_0^p \beta_n u_n$  je  $\langle s_p, t_p \rangle = \sum_0^p \alpha_n \overline{\beta_n}$

a z  $s_p \rightarrow g$  a  $t_p \rightarrow h$  vyplýva  $\lim_{p \rightarrow \infty} \langle s_p, t_p \rangle = \langle g, h \rangle = \lim_{p \rightarrow \infty} \sum_0^p \alpha_n \overline{\beta_n} = \sum_0^\infty \alpha_n \overline{\beta_n}$ . Špeciálny prípad dostávame, ak zvolíme  $\beta_n = 1, \beta_i = 0$  pre  $i \neq n$ .  $\square$

Definícia, ktorou pokračujeme, pochádza z knihy [10], strana 367.

**Definícia 2.6.** *Fourierove rady vzťahujúce sa k ortonormálnej postupnosti*

Pre  $f \in H$  sa nazývajú čísla  $\gamma_n := \langle f, u_n \rangle$  Fourierovými koeficientami funkcie  $f$  vzťahujúce sa na ortonormálnu postupnosť  $\{u_n\}_0^\infty$ .

Nasledujúca veta, ktorú dokážeme, sa nachádza v literatúre [10], strana 367.

**Veta 2.7.** *Ďalej sa budeme zaoberať problémom, ako najlepšie aproximovať  $f$  cez sumu  $\sum_A \alpha_n u_n$ , kde  $\alpha_n \in \mathbb{C}$ . Pri tom je  $A$  konečná indexová množina. Potom sa dostaneme k nasledovnej aproximačnej rovnici*

$$\|f - \sum_A \alpha_n u_n\|^2 = \|f\|^2 - \sum_A |\gamma_n|^2 + \sum_A |\alpha_n - \gamma_n|^2.$$

**Dôkaz:** Nech  $g = \sum_A \alpha_n u_n$ . Potom platí:

$$\|f - g\|^2 = \langle f - g, f - g \rangle = \|f\|^2 + \|g\|^2 - \langle f, g \rangle - \langle g, f \rangle.$$

Sem dosadíme hodnotu  $\langle f, g \rangle = \sum_A \overline{\alpha_n} \langle f, u_n \rangle = \sum_A \overline{\alpha_n} \gamma_n$  podľa označenia, ktoré sme si zaviedli vo vete. Ďalej využijeme  $\langle g, f \rangle = \sum_A \alpha_n \overline{\gamma_n}$  a  $\|g\|^2 = \sum_A |\alpha_n|^2$  (podľa 2.4 (a)). Ak teraz zohľadníme  $|\alpha_n - \gamma_n|^2 = |\alpha_n|^2 + |\gamma_n|^2 - \overline{\alpha_n} \gamma_n - \alpha_n \overline{\gamma_n}$ , čiže  $|\alpha_n|^2 - \overline{\alpha_n} \gamma_n - \alpha_n \overline{\gamma_n} = |\alpha_n - \gamma_n|^2 - |\gamma_n|^2$ , dostávame aproximačnú rovnicu.

$$\begin{aligned} \|f - g\|^2 &= \langle f - g, f - g \rangle = \|f\|^2 + \underbrace{\|g\|^2 - \langle f, g \rangle - \langle g, f \rangle}_{\sum_A |\alpha_n|^2 - \sum_A \overline{\alpha_n} \gamma_n - \sum_A \alpha_n \overline{\gamma_n}} \\ \|f - g\|^2 &= \langle f - g, f - g \rangle = \|f\|^2 + \underbrace{\sum_A |\alpha_n|^2 - \sum_A \overline{\alpha_n} \gamma_n - \sum_A \alpha_n \overline{\gamma_n}}_{\sum_A |\alpha_n|^2 - \sum_A |\gamma_n|^2 + \sum_A |\alpha_n - \gamma_n|^2} \\ \|f - \sum_A \alpha_n u_n\|^2 &= \|f\|^2 - \sum_A |\gamma_n|^2 + \sum_A |\alpha_n - \gamma_n|^2. \quad \square \end{aligned}$$

Znenie ďalšej vety, ktorú dokážeme, sme prevzali z publikácie [10], strana 368.

**Veta 2.8.** *Veta o aproximácii*

Nech  $A$  je konečná indexová množina. Medzi všetkými lineárnymi kombináciami  $\sum_A \alpha_n u_n$  predstavuje člen  $f_A = \sum_A \gamma_n u_n$  a len tento člen najlepšiu aproximáciu funkcie  $f$ . Platí

$$\|f - f_A\|^2 = \|f\|^2 - \sum_A |\gamma_n|^2 \leq \|f - \sum_A \alpha_n u_n\|^2,$$

kde  $\alpha_n \in \mathbb{C}$  je ľubovoľná.

**Dôkaz:** Z predchádzajúcej vety vo výraze

$$\|f - \sum_A \alpha_n u_n\|^2 = \|f\|^2 - \sum_A |\gamma_n|^2 + \sum_A |\alpha_n - \gamma_n|^2$$

$$\begin{aligned} \text{zvolíme } \alpha_n &= \gamma_n. \text{ Tak dostávame } \|f - \sum_A \gamma_n u_n\|^2 = \|f\|^2 - \sum_A |\gamma_n|^2 + \sum_A |\gamma_n - \gamma_n|^2 = \\ &= \|f\|^2 - \sum_A |\gamma_n|^2 + \sum_A |0|^2 = \|f\|^2 - \sum_A |\gamma_n|^2 \leq \|f\|^2 - \sum_A |\gamma_n|^2 + \sum_A |\alpha_n - \gamma_n|^2 = \\ &= \|f - \sum_A \alpha_n u_n\|^2. \quad \square \end{aligned}$$

Vďaka  $0 \leq \|f - f_A\|^2 = \|f\|^2 - \sum_A |\gamma_n|^2$  majú všetky sumy na  $A$   $\sum_A |\gamma_n|^2$  horné ohraničenie  $\|f\|^2$ . Postupnosť  $\gamma = (\gamma_n)_0^\infty$  teda patrí do priestoru  $l^2$ . Rad  $\sum_0^\infty \gamma_n u_n$  je potom podľa vety 2.5 konvergentný. Tento rad budeme volať Fourierovým radom  $f = \sum_{n=0}^\infty \gamma_n u_n$ , kde  $\gamma_n = \langle f, u_n \rangle$  je vzťahujúci sa k ortonormálnej postupnosti  $(u_n)_0^\infty$ .

Pokračujeme vetou, ktorú sme prevzali zo zdroja [10], strana 368 a ktorú dokážeme.

### Veta 2.9. Veta o konvergencii

Pre  $f \in H$  je príslušný Fourierov rad konvergentný (v  $H$ ). S označením  $f^* = \sum_{n=0}^\infty \gamma_n u_n$ ,  $\gamma_n = \langle f, u_n \rangle$  je

$$\|f - f^*\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{n=0}^\infty |\gamma_n|^2 = \|f\|^2 - \|\gamma\|_2^2$$

a tiež  $\langle f - f^*, u_n \rangle = 0$  pre všetky  $n$ . Zároveň  $\gamma_n \in l^2$ .

**Dôkaz:** Vzťah  $\|f - f^*\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{n=0}^\infty |\gamma_n|^2 = \|f\|^2 - \|\gamma\|_2^2$  dostaneme, ak vo vete o aproximácii pre  $A = \{0, 1, \dots, p\}$  pošleme  $p$  do nekonečna,  $p \rightarrow \infty$ . Rovnosť  $\langle f^*, u_n \rangle = \gamma_n$  bola dokázaná vo vete 2.5, čiže  $\langle f^*, u_n \rangle = \langle \sum_{k=0}^\infty \gamma_k u_k, u_n \rangle = \sum_{k=0}^\infty \gamma_k \delta_{nk} = \gamma_n$ .  $\square$

Definícia, ktorá nasleduje pochádza z textu knihy [10], strana 368.

### Definícia 2.10. Úplnosť ortonormálnej postupnosti

Ortonormálna postupnosť  $(u_n)_0^\infty$  sa nazýva úplná (alebo maximálna), ak z  $\langle f, u_n \rangle = 0$  pre všetky  $n = 0, 1, \dots$  vyplýva  $f = 0$ . Inak povedané, ak je 0 jediný ortogonálny člen z  $H$  ku všetkým  $u_n$ .

V texte budeme pokračovať vetou zo zdroja [10], strana 368, ktorú dokážeme.

**Veta 2.11. Veta o zobrazení**

Ak je ortonormálna postupnosť  $(u_n)_0^\infty$  úplná, tak je každý člen  $f \in H$  zobrazený cez jeho Fourierov rad,

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n u_n \quad \text{s} \quad \gamma_n = \langle f, u_n \rangle.$$

Platí Besselova rovnosť

$$\|f\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} |\gamma_n|^2, \quad \text{t.j.} \quad \|f\| = \|\gamma\|_{l^2}.$$

Ak má  $g \in H$  Fourierove koeficienty  $\delta_n = \langle g, u_n \rangle$ , Parsevalova rovnosť prechádza do tvaru

$$\langle f, g \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n \overline{\delta_n} = \langle \gamma, \delta \rangle_{l^2}.$$

**Dôkaz:** Podľa predošlej vety je  $\langle f - f^*, u_n \rangle = 0$  pre všetky  $n$ , z čoho na základe úplnosti ortonormálnej postupnosti vyplýva  $f - f^* = 0$ . Čiže vo vete o konvergencii dostávame  $\|f - f^*\|^2 = 0 = \|f\|^2 - \|\gamma\|_{l^2}^2$ , takže  $\|f\|^2 = \|\gamma\|_{l^2}^2$ . A teda dostávame Besselovu rovnosť a po odmocnení  $\|f\| = \|\gamma\|_{l^2}$ . Ak má  $g$  Fourierove koeficienty  $\delta_n = \langle g, u_n \rangle$ , tak podľa prvej časti vety  $g = \sum_{n=0}^{\infty} \delta_n u_n$ . Teraz  $\langle f, g \rangle = \langle \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n u_n, \sum_{n=0}^{\infty} \delta_n u_n \rangle =$   
 $=$  podľa vety 2.5  $= \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n \overline{\delta_n}$ .  $\square$

**Poznámka:** Úplná ortonormálna postupnosť  $(u_n)_{n=0}^\infty$  sprostredkúva lineárne, bijektívne a izometrické zobrazenie  $U$  z  $H$  do  $l^2$ ,

$$U : H \rightarrow l^2, \quad Uf = (\langle f, u_n \rangle)_0^\infty$$

s inverzným zobrazením

$$U^{-1} : l^2 \rightarrow H, \quad U^{-1}\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n u_n.$$

Platí  $\langle f, g \rangle = \langle Uf, Ug \rangle_{l^2}$  pre  $f, g \in H$  a teda  $\|f\| = \|Uf\|_{l^2}$ . To je vecný obsah vety o zobrazení.

Teraz zadáme v Hilbertovom priestore  $L^2(-\pi, \pi)$  ortonormálne postupnosti zodpovedajúce klasickým Fourierovým radom.

Nasleduje definícia z publikácie [10], strana 337.

**Definícia 2.12.**  $L^p$ -normu definujeme ako  $\|f\|_p := (\int_B |f(x)|^p dx)^{\frac{1}{p}}$  pre  $1 \leq p < \infty$ . Priestor  $L^p(B)$  definujeme ako priestor, ktorý obsahuje všetky na  $B$  merateľné funkcie s konečnou  $L^p$ -normou. Priestor  $L^2(B)$  nazývame Banachovým priestorom  $L^2(B)$ .

Veta, ktorou pokračujeme a ktorú dokážeme, sa nachádza v literatúre [10], strana 369.

**Veta 2.13. Hilbertov priestor  $L^2_\pi$**

V predchádzajúcej definícii sme si zadefinovali Banachov priestor  $L^2(-\pi, \pi)$ . Ďalej ho budeme označovať  $L^2_\pi$ . Budeme uvažovať reálny aj komplexný priestor, čiže funkcie s reálnymi aj komplexnými hodnotami. Pre  $f, g \in L^2_\pi$  zavedieme súčin

$$\langle f, g \rangle := \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \overline{g(t)} dt$$

(v reálnom prípade  $\bar{g} = g$ ). Funkcia  $f\bar{g}$  je na základe Hölderovej nerovnosti integrovateľná na  $(-\pi, \pi)$ . Dá sa vidieť, že  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  vyhovuje podmienkam skalárneho súčinu a  $\sqrt{\langle f, f \rangle} = \|f\|_2$ . Priestor  $L^2_\pi$  je teda Hilbertovým priestorom. Konvergencia v priestore  $L^2_\pi$  znamená, že

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = f \quad \text{v} \quad L^2_\pi \Leftrightarrow \int_{-\pi}^{\pi} |f(t) - f_n(t)|^2 dt \rightarrow 0 \quad \text{pre} \quad n \rightarrow \infty.$$

Teraz zavedieme ortonormálne postupnosti v priestore  $L^2_\pi$  podľa knihy [10], strana 370:

(a) reálny prípad:  $(u_n)_0^\infty = \frac{1}{\sqrt{\pi}} (\frac{1}{2}\sqrt{2}, \cos t, \sin t, \cos 2t, \sin 2t, \cos 3t, \sin 3t, \dots)$ ,

(b) komplexný prípad:  $(v_n)_0^\infty = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (1, e^{it}, e^{-it}, e^{2it}, e^{-2it}, e^{3it}, \dots)$ .

Vieme, že platia vzťahy

(c)  $v_{2n-1} + v_{2n} = \sqrt{2}u_{2n-1} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos nt$ ,

$v_{2n-1} - v_{2n} = i\sqrt{2}u_{2n} = i\sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin nt$  pre  $n = 1, 2, \dots$  a  $u_0 = v_0$ .

Ortonormálnosť  $(v_n)_0^\infty$  vyplýva z dôkazu vety 1.3 f).

Fourierove koeficienty vytvorené funkciami  $u_n$  alebo  $v_n$  sú rovnaké s predošlými číslami  $a_n, b_n$  respektíve  $c_n$ , až na pre násobenie konštantami. Súčiny vystupujúce v



odpovedajúcich Fourierových radoch sú tiež rovnaké

$$\begin{aligned} a_n(f) \cos nt + b_n(f) \sin nt &= c_n(f)e^{int} + c_{-n}(f)e^{-int} = \\ &= \langle f, u_{2n-1} \rangle u_{2n-1} + \langle f, u_{2n} \rangle u_{2n} = \langle f, v_{2n-1} \rangle v_{2n-1} + \langle f, v_{2n} \rangle v_{2n} \end{aligned}$$

pre  $n \geq 1$  tak ako  $\frac{1}{2}a_0(f) = c_0(f) = \langle f, u_0 \rangle u_0 = \langle f, v_0 \rangle v_0$ .

$N$ -té čiastkové sumy predošlých Fourierových radov v reálnej (1) aj komplexnej (2) forme (obe sa rovnajú podľa rovnice (5)) sú tiež rovné  $2n$ -tej čiastkovej sume Fourierových radov  $\sum_0^\infty \langle f, u_n \rangle u_n$  a  $\sum_0^\infty \langle f, v_n \rangle v_n$  (aj tieto sa rovnajú).

Ďalej budeme pokračovať vetou zo zdroja [10], strana 370, ktorú dokážeme.

**Veta 2.14. Úplnosť trigonometrických ortonormálnych postupností**

Ortonormálne postupnosti  $(u_n)_0^\infty$  a  $(v_n)_0^\infty$ , ktoré sme zaviedli v (a) a (b) sú úplné.

**Dôkaz:** Dôkaz dokážeme sporom. Budeme uvažovať len komplexnú postupnosť  $v_n$ , keďže ňou môže byť vyjadrená postupnosť  $u_n$ . Nech teraz  $\exists 0 \neq f \in L_\pi^2$  ortogonálna ku všetkým  $v_n$ ,  $\langle f, v_n \rangle = 0$  pre  $\forall n$ . Podľa vety o hustote  $\forall \varepsilon > 0 \exists \phi \in C_\pi^2 : \|\phi - f\|_2 < \varepsilon$ . Podľa vety 1.8 konvergujú čiastkové sumy  $s_p(t) := s_p(t, \phi)$  k  $\phi$ ,  $s_p(t, \phi) \rightrightarrows \phi$  na intervale  $[-\pi, \pi]$ . Z toho vyplýva, že  $\exists K > 0$  také, že  $|s_p(t)| = |\overline{s_p}(t)| \leq K$  pre všetky  $p$ , takže  $|f(t)\overline{s_p}(t)| \leq K(\phi)|f(t)|$ . Z ortogonalita  $f$  a  $v_n$ ,  $\langle f, v_n \rangle = 0$ , vyplýva aj ortogonalita  $f$  a  $s_p$ ,  $\langle f, s_p \rangle = 0$ . V tejto časti dôkazu si ideme ukázať, že  $\lim_{p \rightarrow \infty} |\langle f(t), s_p(t, \phi) \rangle - \langle f(t), \phi(t) \rangle| = 0$ . Napíšeme si vzťah pre rovnomernú konvergenciu  $s_p$  k  $\phi$ :

$$\forall \varepsilon_1 \exists p_0 \forall p > p_0 : |s_p(t, \phi) - \phi(t)| < \varepsilon_1.$$

Podľa toho následne platí:

$$\begin{aligned} |\langle f(t), s_p(t, \phi) \rangle - \langle f(t), \phi(t) \rangle| &= \left| \int_{-\pi}^{\pi} f(t)(s_p(t, \phi) - \phi(t)) dt \right| \leq \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)| |s_p(t, \phi) - \phi(t)| dt \leq \\ &\leq \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)| \varepsilon_1 dt \leq \varepsilon_1 \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)| dt \leq \varepsilon_1 \|1\|_{L_2} \|f\|_{L_2}. \end{aligned}$$

Keďže  $s_p \rightrightarrows \phi$ , tak  $\varepsilon_1 \rightarrow 0$  pre  $p \rightarrow \infty$ . A teda

$$\lim_{p \rightarrow \infty} |\langle f(t), s_p(t, \phi) \rangle - \langle f(t), \phi(t) \rangle| = 0 \Leftrightarrow \langle f(t), s_p(t, \phi) \rangle \rightarrow \langle f(t), \phi(t) \rangle$$

Pretože  $f$  je ortogonálne na všetky  $v_n$  a tým aj na všetky  $s_p$ , tak  $\langle f(t), s_p(t, \phi) \rangle = 0$  pre všetky  $p$ . Z toho a konvergencie  $\langle f(t), s_p(t, \phi) \rangle \rightarrow \langle f(t), \phi(t) \rangle$  vyplýva, že  $\langle f(t), \phi(t) \rangle = 0$ . Teraz si zoberieme postupnosť funkcií  $\phi_k \in C_\pi^2$  také, že  $\|f - \phi_k\|_2 < \frac{1}{k}$  pre  $k = 1, 2, \dots$ , takže  $\phi_k \rightarrow f$  v  $L_2$ . Z  $\langle f, \phi_k \rangle = 0$  a z  $\phi_k \rightarrow f$  v  $L_2$  dostávame  $\langle f, f \rangle = 0$ , lebo

$$|\langle f, f \rangle| = |\langle f, \phi_k \rangle + \langle f, f - \phi_k \rangle| \leq |\langle f, f - \phi_k \rangle| \leq \|f\|_{L_2} \|f - \phi_k\|_{L_2} \rightarrow \|f\|_{L_2} 0 = 0,$$

a teda  $f$  musí byť nulové, čo je spor s naším predpokladom. Neexistuje teda žiadna nenulová funkcia, ktorá by bola ortogonálna na všetky členy postupnosti  $(v_n)_0^\infty$ , čiže ortonormálna postupnosť tvorená týmito členmi je úplná.  $\square$

Veta, ktorou pokračujeme v texte a ktorú dokážeme, je v knihe [10], strana 370.

**Veta 2.15.** Nech  $f \in L_\pi^2$  s Fourierovými koeficientami  $c_n$  podľa definície 1.2. Potom konvergujú čiastkové sumy Fourierovho radu funkcie  $f$  k funkcii  $f$ ,

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t) - \sum_{n=-p}^p c_n e^{int}|^2 dt = 0,$$

a platí Besselova rovnosť

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt.$$

Ak je  $f$  s reálnymi hodnotami a  $a_n$  a  $b_n$  sú reálnymi Fourierovými koeficientami funkcie  $f$ , tak limita ostáva s reálnymi čiastkovými sumami

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t) - \frac{1}{2}a_0 - \sum_{n=1}^p (a_n \cos nt + b_n \sin nt)|^2 dt = 0$$

a Besselova rovnosť vyzerá takto

$$\frac{1}{2}a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(t) dt.$$

**Dôkaz:** V predchádzajúcej vete sme si ukázali, že postupnosť  $(v_n)_0^\infty$  je úplná. Podľa vety 2.11 (Vety o zobrazení) je funkcia  $f \in H$  zobrazená svojím fourierovým radom

$f = \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n u_n$  s  $\gamma_n = \langle f, u_n \rangle$ . Vieme, že priestor  $L^2_{\pi}$  je Hilbertov. Členy  $u_n$  z vety sú v tejto chvíli členy ortonormálnej postupnosti  $v_n$ ,  $u_n = v_n$ . Členy  $\gamma_n = \langle f, u_n \rangle$  sú v našom prípade  $c_n = \langle f, v_n \rangle$ . Keď to spojíme, dostávame konvergenciu v  $L^2_{\pi}$ , čiže v kvadratickom člene, čo vyjadruje

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t) - \sum_{n=-p}^p c_n e^{int}|^2 dt = 0.$$

Besselovu rovnosť dostávame z Besselovej rovnosti z Vety o zobrazení a z toho ako sme si zadefinovali súčin v priestore  $L^2_{\pi}$   $\|f\|^2 = \langle f, f \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \overline{f(t)} dt$ . Keďže

$$\|v_n\|^2 = \langle v_n, v_n \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} v_n \overline{v_n} dt = \int_{-\pi}^{\pi} 1 dt = 2\pi, \text{ tak}$$

$$\|f\|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt = \left\langle \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n v_n, \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n v_n \right\rangle = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 2\pi,$$

čo po predelení  $2\pi$  dáva Besselovu rovnosť. Reálnu časť vety dostaneme zo vzťahu medzi reálnym a komplexným vyjadrením Fourierových koeficientov.  $\square$

Nasledujúca veta, ktorú dokážeme, pochádza z publikácie [10], strana 371.

### Veta 2.16. Veta o jednoznačnosti

Ak majú dve funkcie  $f, g \in L^2_{\pi}$  totožné Fourierove koeficienty, tak sú tieto funkcie ako členy Hilbertovho priestoru  $L^2_{\pi}$  rovnaké. Z toho vyplýva, že  $f(x) = g(x)$  pre skoro všetky  $x \in [-\pi, \pi]$ .

**Dôkaz:**  $f$  a  $g$  majú rovnaké Fourierove koeficienty, t.j.  $f = \sum c_n v_n$  a  $g = \sum c_n v_n$ , kde  $c_n = \langle f, v_n \rangle = \langle g, v_n \rangle \forall n$ . Keď teda  $\langle f, v_n \rangle = \langle g, v_n \rangle \forall n \Rightarrow \langle f - g, v_n \rangle = 0 \forall n \Rightarrow f - g \perp \forall v_n \Rightarrow f - g = 0$  vďaka tomu, že  $v_n$  je úplná.  $\square$

Ďalej nasleduje veta z literatúry [10], strana 371, ktorú dokážeme.

### Veta 2.17. Veta o absolútnej konvergencii

Nech  $f \in AC_{\pi}$  a derivácia  $f' \in L^2_{\pi}$ . Potom konverguje Fourierov rad funkcie  $f$  v  $\mathbb{R}$  absolútne a rovnomerne ku  $f$ . Toto platí predovšetkým pre lipschitzovské spojité funkcie, napríklad pre  $f \in C^1_{\pi}$ .

**Dôkaz:** Nech  $f$  má Fourierove koeficienty  $c_n$  a  $f'$  má  $c'_n$ . Potom  $|c'_n| = |nc_n|$  podľa 1.3 j). Aplikovaním Cauchy-Schwarzovej nerovnosti dostávame

$$\left(\sum |c_n e^{int}|\right)^2 = \left(\sum |c_n|\right)^2 = \left(\sum \frac{|c'_n|}{|n|}\right)^2 \leq \sum |c'_n|^2 * \sum \frac{1}{n^2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f'(t)|^2 dt * \sum \frac{1}{n^2}.$$

V poslednej rovnosti sme využili Besselovu rovnosť a dostali sme konečné ohraničenie, keďže  $f'(t) \in L^2_\pi$  a  $\sum \frac{1}{n^2}$  je konvergentná. Našli sme teda majorantu pre rad  $\sum |c_n e^{int}|$  a na základe Weierstrass-kritéria sme dokázali rovnomernú absolútnu konvergenciu Fourierovho radu funkcie  $f$ . Funkcia  $g(t) = \lim_{p \rightarrow \infty} s_p(t; f)$  je teda spojitá. Z rovnomernej konvergenzie vyplýva konvergencia v  $L^2$ ,

$$\lim_{p \rightarrow \infty} s_p(t; f) = g(t) \Leftrightarrow \int_{-\pi}^{\pi} |g(t) - s_p(t)|^2 dt \rightarrow 0.$$

Z vety o jednoznačnosti vyplýva, že  $f = g$  v  $L^2_\pi$ , teda  $f(t) = g(t)$  skoro všade. Funkcie  $f, g$  sú ale spojité a preto platí rovnosť pre všetky  $t$ .  $\square$

Veta, ktorá je ďalšia v texte a ktorú dokážeme, sa nachádza v publikácii [10], strana 371.

### Veta 2.18. Dôsledok

Ak je funkcia  $f \in L_\pi$  absolútne spojitá v otvorenom intervale  $J$  a  $f' \in L^2(J)$ , tak Fourierov rad funkcie  $f$  konverguje v každom kompaktnom podintervale  $J$  rovnomerne k  $f$ .

**Dôkaz:** Zavedieme si kompaktný interval  $I$  vo vnútri  $J$ ,  $I \subset J \subset [-\pi, \pi]$ . Teraz si zdefinujeme funkciu  $\phi \in AC[-\pi, \pi]$  s nosičom  $\text{supp}\phi \subset J$ , ktorá bude na  $I$  rovná 1. Zadáme si funkciu  $g = \phi f$ . Ak ju  $2\pi$ -periodicky rozšírime, dostávame funkciu s predpokladmi, ktoré mala funkcia  $f$  vo vete o rovnomernej konvergencii. Tvrdenie vety potom vyplýva z vety o rovnomernej konvergencii.  $\square$

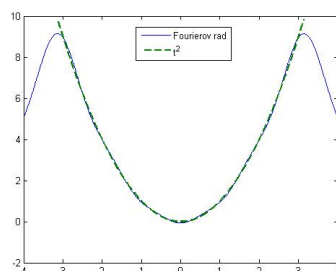
### 3 Príklady

V tejto kapitole uplatníme nadobudnuté vedomosti a pomocou nich prerátame príklady, ktoré sa nachádzajú v knihe [10], strana 372.

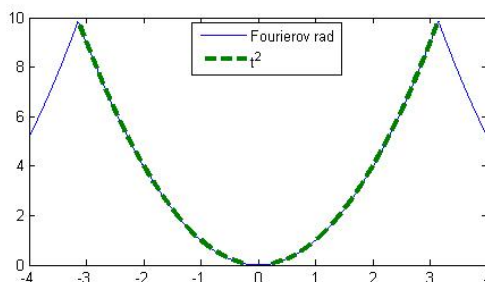
**Príklad 1:** Ukážte, že platí  $t^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos nt$  pre  $|t| \leq \pi$ .

**Riešenie:**  $t^2$  je párna funkcia  $\Rightarrow$  bude mať len kosínusový rad

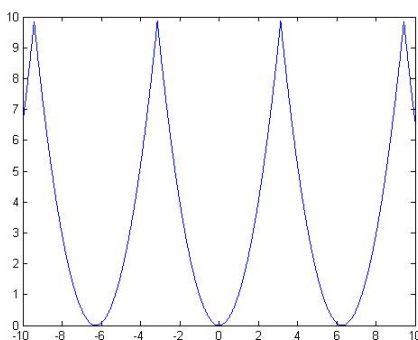
$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t^2 dt = \frac{1}{\pi} \left[ \frac{t^3}{3} \right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{\pi^2}{3} + \frac{\pi^2}{3} = \frac{2\pi^2}{3} \\ a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos ntdt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t^2 \cos ntdt = \frac{1}{\pi} \left[ t^2 \frac{\sin nt}{n} \right]_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} 2t \frac{\sin nt}{n} dt = \\ &= \frac{\pi^2}{\pi} \frac{\sin n\pi}{n} - \frac{\pi^2}{\pi} \frac{\sin n(-\pi)}{n} - \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} 2t \frac{\sin nt}{n} dt = 0 + 0 - \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} 2t \frac{\sin nt}{n} dt = \\ &= \frac{1}{\pi} \left[ 2t \frac{\cos nt}{n^2} \right]_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} 2 \frac{\cos nt}{n^2} dt = \frac{1}{\pi} \left( 2\pi \frac{\cos n\pi}{n^2} + 2\pi \frac{\cos n(-\pi)}{n^2} \right) - \frac{2}{\pi} \left[ \frac{\sin nt}{n} \right]_{-\pi}^{\pi} = \\ &= \frac{\pi}{\pi} \left[ \frac{2}{n^2} (-1)^n + \frac{2}{n^2} (-1)^n \right] + 0 = \frac{4}{n^2} (-1)^n \\ t^2 &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nt = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2} (-1)^n \cos nt = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos nt \end{aligned}$$



Obr. 1: Súčet prvých 5 členov Fourierovho radu funkcie  $t^2$  pre  $|t| \leq \pi$



Obr. 2: Súčet prvých 10000 členov Fourierovho radu funkcie  $t^2$  pre  $|t| \leq \pi$

Obr. 3: Fourierov rad funkcie  $t^2$  pre  $|t| \leq \pi$ 

**Príklad 2:** Ukážte, že platí

$$\cos \alpha t = \frac{\sin \alpha \pi}{\pi} \left( \frac{1}{\alpha} - \frac{2\alpha}{\alpha^2-1^2} \cos t + \frac{2\alpha}{\alpha^2-2^2} \cos 2t - \frac{2\alpha}{\alpha^2-3^2} \cos 3t + \dots \right) \text{ pre } \alpha \notin \mathbb{Z}, |t| \leq \pi.$$

**Riešenie:**

$\cos x$  je párna funkcia  $\Rightarrow$  bude mať kosínusový rad

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos \alpha t dt = \frac{1}{\pi} \left[ \frac{\sin \alpha t}{\alpha} \right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{\pi} \frac{\sin \alpha \pi}{\alpha} - \frac{1}{\pi} \frac{\sin(-\alpha \pi)}{\alpha} = \frac{1}{\pi} \frac{\sin \alpha \pi}{\alpha} + \frac{1}{\pi} \frac{\sin \alpha \pi}{\alpha} = \frac{2}{\pi} \frac{\sin \alpha \pi}{\alpha}$$

Pri výpočte  $a_n$  využijeme nasledovné vzorce:

$$\sin(x - y) = \sin x \cos y - \sin y \cos x$$

$$\sin(x + y) = \sin x \cos y + \sin y \cos x$$

$$\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$

$$\cos(x - y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos \alpha t \cos n t dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos(\alpha t + n t) + \cos(\alpha t - n t)}{2} dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left[ \frac{\sin(\alpha+n)t}{\alpha+n} + \frac{\sin(\alpha-n)t}{\alpha-n} \right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{2\pi} \left[ \frac{\sin(\alpha+n)\pi}{\alpha+n} + \frac{\sin(\alpha-n)\pi}{\alpha-n} - \frac{\sin(\alpha+n)(-\pi)}{\alpha+n} - \frac{\sin(\alpha-n)(-\pi)}{\alpha-n} \right] =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left[ \frac{\sin(\alpha+n)\pi}{\alpha+n} + \frac{\sin(\alpha-n)\pi}{\alpha-n} + \frac{\sin(\alpha+n)\pi}{\alpha+n} + \frac{\sin(\alpha-n)\pi}{\alpha-n} \right] = \frac{1}{2\pi} \left( \frac{2\sin(\alpha+n)\pi}{\alpha+n} + \frac{2\sin(\alpha-n)\pi}{\alpha-n} \right) =$$

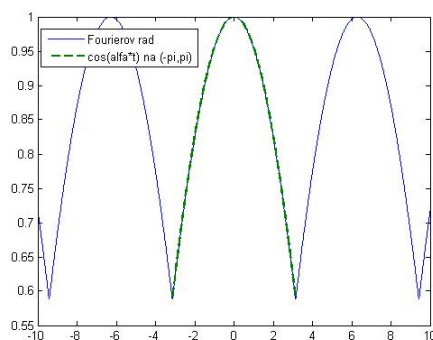
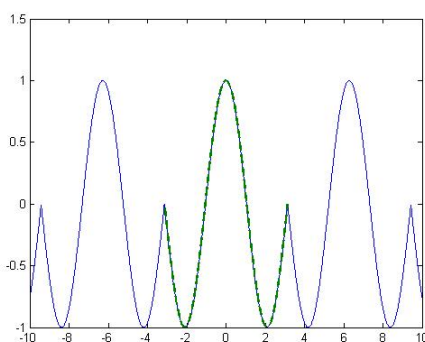
$$= \frac{1}{2\pi} \frac{2(\alpha-n)\sin(\alpha+n)\pi + 2(\alpha+n)\sin(\alpha-n)\pi}{\alpha^2 - n^2} = \frac{2}{2(\alpha^2 - n^2)} \left( (\alpha-n)[\sin \alpha \pi \cos n \pi + \sin n \pi \cos \alpha \pi] + \right.$$

$$\left. + (\alpha+n)(\sin \alpha \pi \cos n \pi - \sin n \pi \cos \alpha \pi) \right] = \frac{1}{\pi} (\alpha 2 \sin \alpha \pi \cos n \pi - n 2 \sin n \pi \cos \alpha \pi) =$$

$$= \frac{1}{\pi} (\alpha 2 \sin \alpha \pi (-1)^n - n 2 \sin n \pi \cos \alpha \pi) = \frac{2(-1)^n \alpha}{\pi(\alpha^2 - n^2)} \sin \alpha \pi$$

$$\cos \alpha t = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n t =$$

$$= \frac{\sin \alpha \pi}{\pi} \left( \frac{1}{\alpha} - \frac{2\alpha}{\alpha^2-1^2} \cos t + \frac{2\alpha}{\alpha^2-2^2} \cos 2t - \frac{2\alpha}{\alpha^2-3^2} \cos 3t + \dots \right)$$

Obr. 4: Fourierov rad funkcie  $\cos(0.3t)$  pre  $|t| \leq \pi$ Obr. 5: Fourierov rad funkcie  $\cos(1.5t)$  pre  $|t| \leq \pi$ 

**Príklad 3:** Ukážte, že platí  $\sin t + \frac{\sin 2t}{2} + \frac{\sin 3t}{3} + \frac{\sin 4t}{4} + \dots = \begin{cases} -(\pi + t)/2 & \text{pre } -\pi \leq t < 0, \\ 0 & \text{pre } t = 0, \\ (\pi - t)/2 & \text{pre } 0 < t \leq \pi. \end{cases}$

**Riešenie:**

Najprv si vyrátame dva pomocné príklady, pomocou ktorých vyrátame tento príklad.

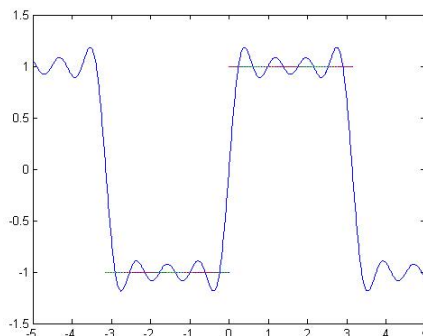
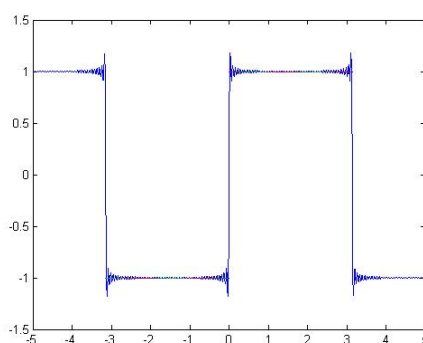
Tieto príklady nájdeme v literatúre [10], strana 362.

Ako prvý vyrátame Fourierov rad pre funkciu  $V(t) = \operatorname{sgn}(t)$  pre  $|t| < \pi$ .

$V(t) = \operatorname{sgn}(t)$  je nepárna funkcia  $\Rightarrow$  bude mať sínusový rad

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sgn}(t) \sin nt \, dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 (-1) \sin nt \, dt + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} 1 \sin nt \, dt = \\ &= \frac{1}{\pi} \left[ \frac{\cos nt}{n} \right]_{-\pi}^0 + \frac{1}{\pi} \left[ -\frac{\cos nt}{n} \right]_0^{\pi} = \frac{1}{\pi n} (1 - (-1)^n) - \frac{1}{\pi n} (-1 + (-1)^n) = \\ &= \frac{1}{\pi n} (1 - (-1)^n) + \frac{1}{\pi n} (1 - (-1)^n) = \frac{2}{\pi n} (1 - (-1)^n) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{sgn}(t) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi n} (1 - (-1)^n) \sin nt = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{\pi(2n-1)} \sin(2n-1)t = \\ &= \frac{4}{\pi} \left( \sin t + \frac{\sin 3t}{3} + \frac{\sin 5t}{5} + \dots \right) \end{aligned}$$

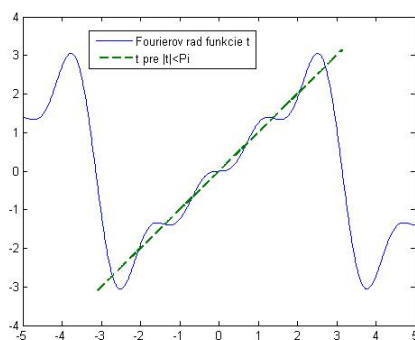
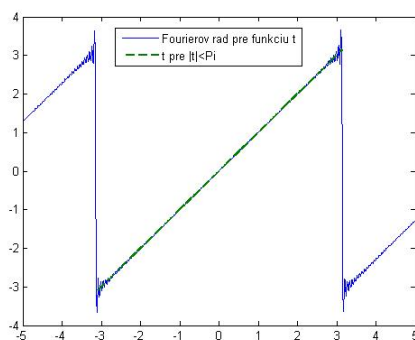
Obr. 6: Súčet prvých 4 členov Fourierovho radu funkcie  $\operatorname{sgn}(t)$  pre  $|t| \leq \pi$ Obr. 7: Súčet prvých 50 členov Fourierovho radu funkcie  $\operatorname{sgn}(t)$  pre  $|t| \leq \pi$ 

Ako druhý si zrátame rad pre funkciu  $Z(t) = t$  pre  $|t| < \pi$ .

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t \sin nt dt = \frac{1}{\pi} \left[ -t \frac{\cos nt}{n} \right]_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} -\frac{\cos nt}{n} dt = \frac{1}{\pi} \left[ -t \frac{\cos nt}{n} \right]_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos nt}{n} dt = \\ &= \frac{1}{\pi} \left[ -\pi \frac{\cos n\pi}{n} - \pi \frac{\cos n(-\pi)}{n} \right] + \frac{1}{\pi} \left[ \frac{\sin nt}{n^2} \right]_{-\pi}^{\pi} = -\frac{\cos n\pi}{n} - \frac{\cos n(-\pi)}{n} = \\ &= -\frac{1}{n} (-1)^n - \frac{1}{n} (-1)^n = \frac{2}{n} (-1)^{n+1} \end{aligned}$$

$$t = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n} (-1)^{n+1} \sin nt = 2 \left( \sin t - \frac{\sin 2t}{2} + \frac{\sin 3t}{3} - \frac{\sin 4t}{4} + \dots \right)$$



Obr. 8: Súčet prvých 4 členov Fourierovho radu funkcie  $t$  pre  $|t| \leq \pi$ Obr. 9: Súčet prvých 100 členov Fourierovho radu funkcie  $t$  pre  $|t| \leq \pi$ 

Vyrátali sme teda, že:

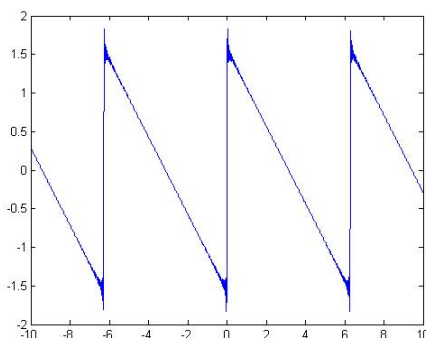
$$A = \sin t + \frac{\sin 3t}{3} + \frac{\sin 5t}{5} + \dots = \begin{cases} -\frac{\pi}{4} & \text{pre } -\pi < t < 0, \\ \frac{\pi}{4} & \text{pre } \pi < t < 0, \\ 0 & \text{pre } t = 0, -\pi, \pi, \end{cases}$$

a

$$B = \sin t - \frac{\sin 2t}{2} + \frac{\sin 3t}{3} - \frac{\sin 4t}{4} + \dots = \begin{cases} \frac{1}{2}t & \text{pre } -\pi < t < \pi, \\ 0 & \text{pre } t = -\pi, \pi. \end{cases}$$

Zložením týchto dvoch radov dostávame nami chcený výsledok:

$$2A - B = \sin t + \frac{\sin 2t}{2} + \frac{\sin 3t}{3} + \frac{\sin 4t}{4} + \dots = \begin{cases} -(\pi + t)/2 & \text{pre } -\pi \leq t < 0, \\ 0 & \text{pre } t = 0, \\ (\pi - t)/2 & \text{pre } 0 < t \leq \pi. \end{cases}$$



Obr. 10: Sůčet prvých 100 členov Fourierovho radu  $\sin t + \frac{\sin 2t}{2} + \frac{\sin 3t}{3} + \frac{\sin 4t}{4} + \dots$

**Príklad 4:** Ukážte, že platí: Ak je  $f \in C^0_\pi$  hölderovsky spojitá s Hölderovým koeficientom  $\alpha \in (0, 1]$ , tak  $|c_n(f)| \leq K/|n|^\alpha$ . Pomôcka: Podľa 1.3 c)

$c_n(f - f_a) = 2c_n(f)$  pre  $a = \pi/n$ .

**Riešenie:**

$$\begin{aligned} c_n(f - f_a) &= c_n(f) - c_n(f_a) = c_n(f) - \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t+a)e^{-int} dt = \\ &= |subst. \quad a+t=s, \quad dt=ds| = c_n(f) - \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi+a}^{\pi+a} f(s)e^{-in(s-a)} ds = \\ &= c_n(f) - \frac{1}{2\pi} e^{ina} \int_{-\pi+a}^{\pi+a} f(s)e^{-ins} ds = c_n(f) - e^{ina} c_n(f) \end{aligned}$$

Ak  $a = \pi/n$  tak  $c_n(f - f_a) = c_n(f) - e^{i\pi} c_n(f) = 2c_n(f)$

$$\text{Teraz } c_n(f) = \frac{c_n(f-f_a)}{2} \stackrel{def}{=} \frac{1}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f(t) - f(t+a))e^{-int} dt$$

$$\begin{aligned} \text{a teda } |c_n(f)| &= \left| \frac{1}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f(t) - f(t+a))e^{-int} dt \right| \leq \frac{1}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |(f(t) - f(t+a))e^{-int}| dt = \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |(f(t) - f(t+a))| dt \leq \frac{1}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} K|t - (t-a)|^\alpha dt = \frac{1}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} K|a|^\alpha dt = \frac{1}{4\pi} K|a|^\alpha 2\pi = \\ &= \frac{1}{4\pi} K \left| \frac{\pi}{n} \right|^\alpha 2\pi = \frac{K_1}{|n|^\alpha} \end{aligned}$$

Dokázali sme, že  $|c_n(f)| \leq \frac{K_1}{|n|^\alpha}$ .

**Príklad 5:** Zrátajte Fourierove rady párneho a nepárneho rozšírenia funkcií

$f(t) = (t - c)^+$  a  $h(t) = f^2(t)$ ,  $0 < t < \pi$ . Pri tom je  $0 < c < \pi$  a  $u^+ = \max\{u, 0\}$ .

Určite konvergenčné správanie a sumy radov.

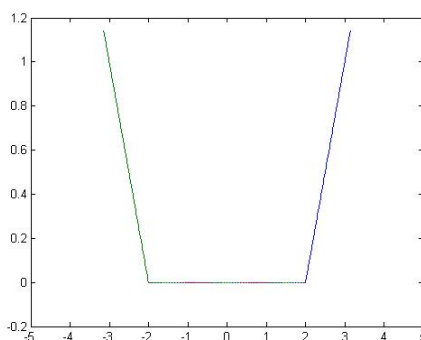
**Riešenie:**

Ako prvý zrátame rad pre párne rozšírenie funkcie  $f(t)$ . Funkcia je párna, čiže rad bude kosínusový.

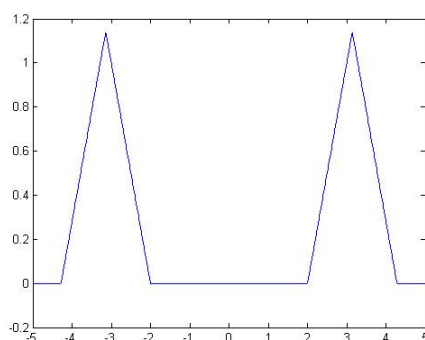
$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt = \text{párna funkcia} = \frac{2}{\pi} \int_c^{\pi} (t - c) dt = \frac{2}{\pi} \left[ \frac{t^2}{2} - ct \right]_c^{\pi} = \\ &= \frac{2}{\pi} \left( \frac{\pi^2}{2} - c\pi - \frac{c^2}{2} + c^2 \right) = \frac{1}{\pi} (\pi - c)^2 \\ a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos nt dt = \text{párna funkcia} = \frac{2}{\pi} \int_c^{\pi} (t - c) \cos nt dt = \frac{2}{\pi} \int_c^{\pi} t \cos nt dt - \\ &- \frac{2}{\pi} \int_c^{\pi} c \cos nt dt = \frac{2}{\pi} \left[ t \frac{\sin nt}{n} \right]_c^{\pi} - \frac{2}{\pi} \int_c^{\pi} \frac{\sin nt}{n} dt - \frac{2c}{\pi} \left[ \frac{\sin nt}{n} \right]_c^{\pi} = \frac{2}{\pi} \frac{\pi \sin n\pi}{n} - \frac{2}{\pi} \frac{c \sin nc}{n} + \frac{2}{\pi} \left[ \frac{\cos nt}{n^2} \right]_c^{\pi} - \\ &- \frac{2c}{\pi} \frac{\sin n\pi}{n} + \frac{2c}{\pi} \frac{\sin nc}{n} = 0 - \frac{2}{\pi} \frac{c \sin nc}{n} + \frac{2}{\pi} \left[ \frac{\cos nt}{n^2} \right]_c^{\pi} - 0 + \frac{2c}{\pi} \frac{\sin nc}{n} = \frac{2}{\pi} \frac{\cos n\pi}{n^2} - \frac{2}{\pi} \frac{\cos nc}{n^2} = \\ &= \frac{2}{\pi} \left( \frac{(-1)^n}{n^2} - \frac{\cos nc}{n^2} \right) \end{aligned}$$

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nt = \frac{1}{2\pi} (\pi - c)^2 + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{(-1)^n}{n^2} - \frac{\cos nc}{n^2} \right) \cos nt$$

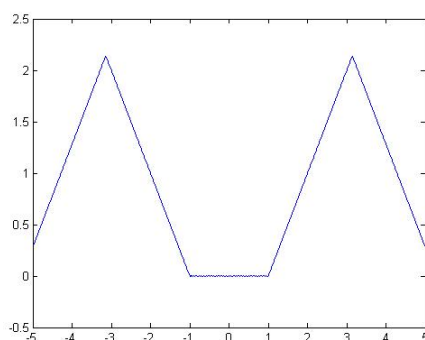
Ako môžeme vidieť na obrázkoch nižšie, Fourierov rad konverguje k funkcii  $f(t)$ .



Obr. 11: Párne rozšírenie funkcie  $(t - c)^+$  pre  $c = 2$



Obr. 12: Súčet prvých 100 členov Fourierovho radu párneho rozšírenia funkcie  $(t - c)^+$  pre  $c = 2$



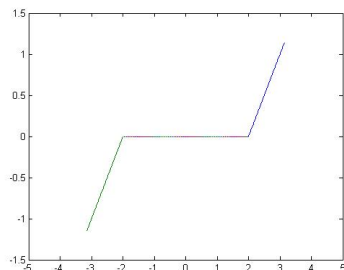
Obr. 13: Súčet prvých 100 členov Fourierovho radu párneho rozšírenia funkcie  $(t - c)^+$  pre  $c = 1$

Pokračujeme nepárnym rozšírením. Funkcia je nepárna, takže rad bude sínusový.

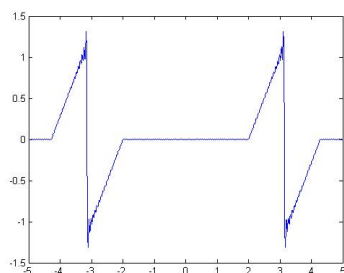
$$\begin{aligned}
 b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin ntdt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{-c} (t+c) \sin ntdt + \frac{1}{\pi} \int_c^{\pi} (t-c) \sin ntdt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{-c} t \sin ntdt + \\
 &+ \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{-c} c \sin ntdt + \frac{1}{\pi} \int_c^{\pi} t \sin ntdt - \frac{1}{\pi} \int_c^{\pi} c \sin ntdt = \frac{1}{\pi} [-t \frac{\cos nt}{n}]_{-\pi}^{-c} - \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{-c} -\frac{\cos nt}{n} dt + \\
 &+ \frac{c}{\pi} [-\frac{\cos nt}{n}]_{-\pi}^{-c} + \frac{1}{\pi} [-t \frac{\cos nt}{n}]_c^{\pi} - \frac{1}{\pi} \int_c^{\pi} -\frac{\cos nt}{n} dt - \frac{c}{\pi} [-\frac{\cos nt}{n}]_c^{\pi} = \frac{1}{\pi} (c \frac{\cos n(-c)}{n} - \pi \frac{\cos n(-\pi)}{n} + \\
 &+ [\frac{\sin nt}{n^2}]_{-\pi}^{-c} - c \frac{\cos n(-c)}{n} + c \frac{\cos n(-\pi)}{n} - \pi \frac{\cos n\pi}{n} + c \frac{\cos nc}{n} + [\frac{\sin nt}{n^2}]_c^{\pi} + c \frac{\cos n\pi}{n} - c \frac{\cos nc}{n}) = \\
 &= \frac{1}{\pi} (c \frac{\cos nc}{n} - \pi \frac{\cos n\pi}{n} + \frac{\sin n(-c)}{n^2} - \frac{\sin n(-\pi)}{n^2} - c \frac{\cos nc}{n} + c \frac{\cos n\pi}{n} - \pi \frac{\cos n\pi}{n} + c \frac{\cos nc}{n} + \frac{\sin n\pi}{n^2} - \\
 &- \frac{\sin nc}{n^2} + c \frac{\cos n\pi}{n} - c \frac{\cos nc}{n}) = \frac{1}{\pi} (-\pi \frac{\cos n\pi}{n} - \frac{\sin nc}{n^2} + \frac{\sin n\pi}{n} + c \frac{\cos n\pi}{n} - \pi \frac{\cos n\pi}{n} + \frac{\sin n\pi}{n^2} - \\
 &- \frac{\sin nc}{n^2} + c \frac{\cos n\pi}{n}) = \frac{1}{\pi} ((-2\pi + 2c) \frac{\cos n\pi}{n} + 2 \frac{\sin n\pi}{n^2} - 2 \frac{\sin nc}{n^2}) = \frac{1}{\pi} (-2\pi + 2c) \frac{(-1)^n}{n} - \\
 &- \frac{2 \sin nc}{\pi n^2} = \frac{2}{\pi} ((c - \pi) \frac{(-1)^n}{n} - \frac{\sin nc}{n^2})
 \end{aligned}$$

$$f(t) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left( (c - \pi) \frac{(-1)^n}{n} - \frac{\sin nc}{n^2} \right) \sin nt$$

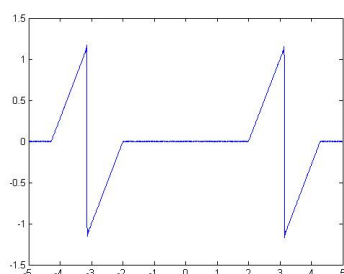
Na obrázkoch nižšie je vidno, že rad konverguje k funkcii  $f(t)$ .



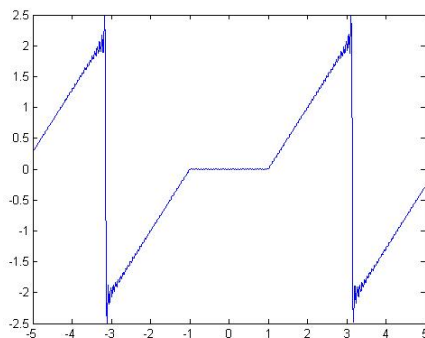
Obr. 14: Nepárne rozšírenie funkcie  $(t - c)^+$  pre  $c = 2$



Obr. 15: Súčet prvých 100 členov Fourierovho radu nepárneho rozšírenia funkcie  $(t - c)^+$  pre  $c = 2$



Obr. 16: Súčet prvých 1000 členov Fourierovho radu nepárneho rozšírenia funkcie  $(t - c)^+$  pre  $c = 2$



Obr. 17: Súčet prvých 100 členov Fourierovho radu nepárneho rozšírenia funkcie  $(t-c)^+$  pre  $c = 1$

Ako ďalší zrátame rad pre nepárne rozšírenie  $h(t)$ .

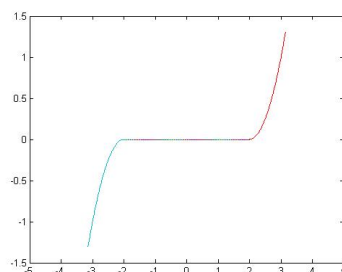
Funkcia je nepárna a teda rad bude sínusový.

$$\begin{aligned}
 b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} h(t) \sin ntdt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{-c} -(t+c)^2 \sin ntdt + \frac{1}{\pi} \int_c^{\pi} (t-c)^2 \sin ntdt = \\
 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{-c} (-t^2 - 2tc - c^2) \sin ntdt + \frac{1}{\pi} \int_c^{\pi} (t^2 - 2tc + c^2) \sin ntdt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{-c} -t^2 \sin ntdt + \\
 &+ \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{-c} -2tc \sin ntdt + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{-c} -c^2 \sin ntdt + \frac{1}{\pi} \int_c^{\pi} t^2 \sin ntdt + \frac{1}{\pi} \int_c^{\pi} -2tc \sin ntdt + \\
 &+ \frac{1}{\pi} \int_c^{\pi} c^2 \sin ntdt = \frac{1}{\pi} \left( [t^2 \frac{\cos nt}{n}]_{-\pi}^{-c} - \int_{-\pi}^{-c} 2t \frac{\cos nt}{n} dt + [2tc \frac{\cos nt}{n}]_{-\pi}^{-c} - \int_{-\pi}^{-c} 2c \frac{\cos nt}{n} dt + \right. \\
 &+ [c^2 \frac{\cos nt}{n}]_{-\pi}^{-c} + [-t^2 \frac{\cos nt}{n}]_c^{\pi} - \int_c^{\pi} -2t \frac{\cos nt}{n} dt + [2tc \frac{\cos nt}{n}]_c^{\pi} - \int_c^{\pi} 2c \frac{\cos nt}{n} dt + [-c^2 \frac{\cos nt}{n}]_c^{\pi} \Big) = \\
 &= \frac{1}{\pi} \left( (-c)^2 \frac{\cos n(-c)}{n} - (-\pi)^2 \frac{\cos n(-\pi)}{n} - [2t \frac{\sin nt}{n^2}]_{-\pi}^{-c} + \int_{-\pi}^{-c} 2 \frac{\sin nt}{n^2} dt + 2(-c)c \frac{\cos n(-c)}{n} - \right. \\
 &- 2(-\pi)c \frac{\cos n(-\pi)}{n} - 2c [\frac{\sin nt}{n^2}]_{-\pi}^{-c} + c^2 \frac{\cos n(-c)}{n} - c^2 \frac{\cos n(-\pi)}{n} + c^2 \frac{\cos nc}{n} - \pi^2 \frac{\cos n\pi}{n} + \int_c^{\pi} 2t \frac{\cos nt}{n} dt + \\
 &+ 2\pi c \frac{\cos n\pi}{n} - 2c^2 \frac{\cos nc}{n} - 2c [\frac{\sin nt}{n^2}]_c^{\pi} + c^2 \frac{\cos nc}{n} - c^2 \frac{\cos n\pi}{n} \Big) = \frac{1}{\pi} \left( c^2 \frac{\cos nc}{n} - \pi^2 \frac{\cos n\pi}{n} + \right. \\
 &+ 2c \frac{\sin n(-c)}{n^2} - 2\pi \frac{\sin n(-\pi)}{n^2} + [-2 \frac{\cos nt}{n^3}]_{-\pi}^{-c} - 2c^2 \frac{\cos nc}{n} + 2\pi c \frac{\cos n\pi}{n} - 2c \frac{\sin n(-c)}{n^2} + 2c \frac{\sin n(-\pi)}{n^2} + \\
 &+ c^2 \frac{\cos nc}{n} - c^2 \frac{\cos n\pi}{n} - \pi^2 \frac{\cos n\pi}{n} + c^2 \frac{\cos nc}{n} + [2t \frac{\sin nt}{n^2}]_c^{\pi} - \int_c^{\pi} 2 \frac{\sin nt}{n^2} dt + 2\pi c \frac{\cos n\pi}{n} - \\
 &- 2c^2 \frac{\cos nc}{n} - 2c \frac{\sin n\pi}{n^2} + 2c \frac{\sin nc}{n^2} - c^2 \frac{\cos n\pi}{n} + c^2 \frac{\cos nc}{n} \Big) = \frac{1}{\pi} \left( -\pi^2 \frac{\cos n\pi}{n} - 2 \frac{\cos n(-c)}{n^3} + \right. \\
 &+ 2 \frac{\cos n(-\pi)}{n^3} + 2\pi c \frac{\cos n\pi}{n} - c^2 \frac{\cos n\pi}{n} + 2\pi \frac{\sin n\pi}{n^2} - 2c \frac{\sin nc}{n^2} - 2[-\frac{\cos nt}{n^3}]_c^{\pi} + 2\pi c \frac{\cos n\pi}{n} + 2c \frac{\sin nc}{n^2} - \\
 &- c^2 \frac{\cos n\pi}{n} - \pi^2 \frac{\cos n\pi}{n} \Big) = \frac{1}{\pi} \left( -\pi^2 \frac{(-1)^n}{n} - 2 \frac{\cos nc}{n^3} + 2 \frac{(-1)^n}{n^3} + 2\pi c \frac{(-1)^n}{n} - c^2 \frac{(-1)^n}{n} - 2c \frac{\sin nc}{n^2} + \right. \\
 &+ 2 \frac{\cos n\pi}{n^3} - 2 \frac{\cos nc}{n^3} + 2\pi c \frac{(-1)^n}{n} + 2c \frac{\sin nc}{n^2} - c^2 \frac{\cos n\pi}{n} - \pi^2 \frac{(-1)^n}{n} \Big) = \\
 &= \frac{1}{\pi} \left( (-1)^n \left( \frac{-\pi^2}{n} + \frac{2}{n^3} + \frac{2\pi c}{n} - \frac{c^2}{n} + \frac{2}{n^3} + \frac{2\pi c}{n} - \frac{c^2}{n} - \frac{\pi^2}{n} \right) - 4 \frac{\cos nc}{n^3} \right) =
 \end{aligned}$$

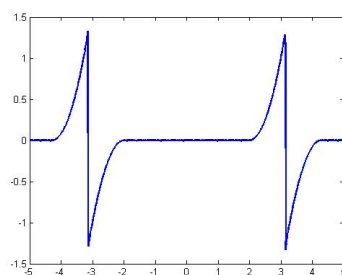
$$= \frac{1}{\pi}((-1)^n \left( \frac{-2\pi^2}{n} - \frac{4}{n^3} + \frac{4\pi c}{n} - \frac{2c^2}{n} \right) - 4 \frac{\cos nc}{n^3})$$

$$h(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\pi}((-1)^n \left( \frac{-2\pi^2}{n} - \frac{4}{n^3} + \frac{4\pi c}{n} - \frac{2c^2}{n} \right) - 4 \frac{\cos nc}{n^3}) \sin nt$$

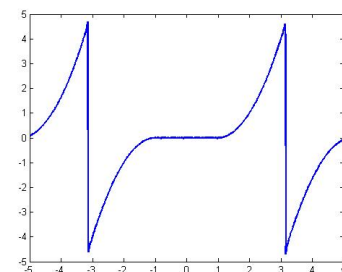
Na obrázkoch môžeme vidieť, že rad konverguje k funkcii  $h(t)$ .



Obr. 18: Nepárne rozšírenie funkcie  $h(t)$  pre  $c = 2$



Obr. 19: Súčet prvých 1000 členov Fourierovho radu nepárneho rozšírenia funkcie  $h(t)$  pre  $c = 2$

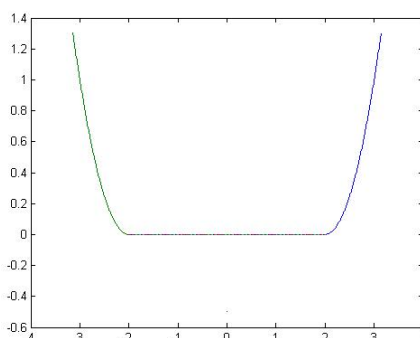


Obr. 20: Súčet prvých 1000 členov Fourierovho radu nepárneho rozšírenia funkcie  $h(t)$  pre  $c = 1$

V úlohe bude nasledovať riešenie pre párne rozšírenie funkcie  $h(t)$ .

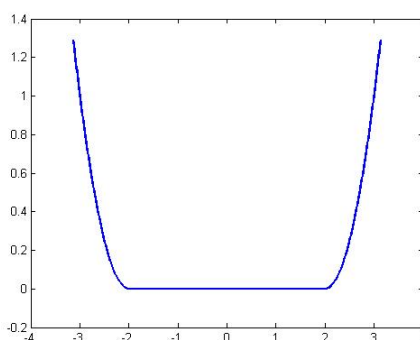
Funkcia je párna a teda rad bude kosínusový.

$$\begin{aligned}
 a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} h(t) dt = \frac{2}{\pi} \int_c^{\pi} (t-c)^2 dt = \frac{2}{\pi} \int_c^{\pi} t^2 - 2tc + c^2 dt = \frac{2}{\pi} \left[ \frac{t^3}{3} - t^2c + c^2t \right]_c^{\pi} = \\
 &= \frac{2}{\pi} \left( \frac{\pi^3}{3} - \pi^2c + c^2\pi - \frac{c^3}{3} + c^3 - c^3 \right) = \frac{2}{3\pi} (\pi^3 - 3\pi^2c + 3c^2\pi - c^3) = \frac{2}{3\pi} (\pi - c)^3 \\
 a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} h(t) \cos nt dt = \frac{2}{\pi} \int_c^{\pi} (t-c)^2 \cos nt dt = \frac{2}{\pi} \int_c^{\pi} t^2 \cos nt dt - \frac{4c}{\pi} \int_c^{\pi} t \cos nt dt + \\
 &+ \frac{2c^2}{\pi} \int_c^{\pi} \cos nt dt = \frac{2}{\pi} \left[ t^2 \frac{\sin nt}{n} \right]_c^{\pi} - \frac{2}{\pi} \int_c^{\pi} 2t \frac{\sin nt}{n} dt - \frac{4c}{\pi} \left[ t \frac{\sin nt}{n} \right]_c^{\pi} + \frac{4c}{\pi} \int_c^{\pi} \frac{\sin nt}{n} dt + \frac{2c^2}{\pi} \left[ \frac{\sin nt}{n} \right]_c^{\pi} = \\
 &= \frac{2}{\pi} \pi^2 \frac{\sin n\pi}{n} - \frac{2}{\pi} c^2 \frac{\sin nc}{n} - \frac{4}{\pi} \left[ t \frac{\cos nt}{n^2} \right]_c^{\pi} + \frac{4}{\pi} \int_c^{\pi} \frac{\cos nt}{n^2} dt - \frac{4c}{\pi} \left[ \pi \frac{\sin n\pi}{n} - c \frac{\sin nc}{n} \right] + \frac{4c}{\pi} \left[ -\frac{\cos nt}{n^2} \right]_c^{\pi} + \\
 &+ \frac{2c^2}{\pi} \left( \frac{\sin n\pi}{n} - \frac{\sin nc}{n} \right) = \frac{-2}{\pi} c^2 \frac{\sin nc}{n} + \frac{4}{\pi} \left( \pi \frac{\cos n\pi}{n^2} - c \frac{\cos nc}{n^2} \right) + \frac{4}{\pi} \left[ -\frac{\sin nt}{n^3} \right]_c^{\pi} + \frac{4c^2}{\pi} \frac{\sin nc}{n} + \\
 &+ \frac{4c}{\pi} \left( -\frac{\cos n\pi}{n^2} + \frac{\cos nc}{n^2} \right) - \frac{2c^2}{\pi} \frac{\sin nc}{n} = \frac{4}{\pi} \left( \pi \frac{\cos n\pi}{n^2} - \frac{c \cos nc}{n^2} - \left[ \frac{\sin n\pi}{n^3} - \frac{\sin nc}{n^3} \right] \right) = \\
 &= \frac{4}{\pi n^2} \left( (\pi - c)(-1)^n + \frac{\sin nc}{n} \right) \\
 h(t) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nt = \frac{1}{3\pi} (\pi - c)^3 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{\pi n^2} \left( (\pi - c)(-1)^n + \frac{\sin nc}{n} \right) \cos nt
 \end{aligned}$$

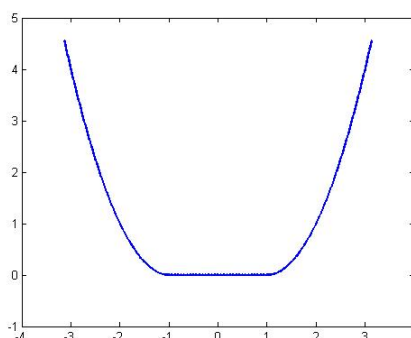


Obr. 21: Párne rozšírenie funkcie  $h(t)$  pre  $c = 2$





Obr. 22: Súčet prvých 100 členov Fourierovho radu párneho rozšírenia funkcie  $h(t)$  pre  $c = 2$



Obr. 23: Súčet prvých 100 členov Fourierovho radu párneho rozšírenia funkcie  $h(t)$  pre  $c = 1$

Na obrázkoch je možno vidieť, že rad konverguje k funkcii  $h(t)$ .

**Príklad 6:** Pomocou postupnosti  $(c_n)_{n=0}^{\infty} \in l^2$  je tvorený potenčný rad  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ . Ukážte: Fourierov rad  $g_r(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n r^n e^{int}$  je pre  $0 < r \leq 1$  v  $L^2_{\pi}$  konvergentný a platí  $\|g_r - g_1\|_2 \rightarrow 0$  pre  $r \rightarrow 1-$ .

**Riešenie:** Máme predpoklad  $\sum |c_n|^2 < \infty$ .

V tomto príklade využijeme a dokážeme tvrdenie z knihy [9]:

**Tvrdenie:**  $\sum c_n r^n e^{int} \in L_2(-\pi, \pi)$  pre  $|r| < 1$ .

**Dôkaz:** Treba ukázať, že  $\sum |c_n r^n|^2 < \infty$ . Vieme, že  $\sum |c_n r^n|^2 \leq \sum |c_n|^2 < \infty$ .

A teda  $\sum c_n r^n e^{int} \in L_2(-\pi, \pi)$ . Čím sme dokázali pomocné tvrdenie.  $\square$

Pokračujme v příklade. Teraz  $\sum c_n r^n e^{int} - \sum c_n e^{int} = g_r(t) - g_1(t)$ .

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} |g_r(t) - g_1(t)|^2 dt &\leq \int_{-\pi}^{\pi} \sum |c_n(r^n - 1)e^{int}|^2 dt = \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \sum |c_n|^2 (r^n - 1)^2 |e^{int}|^2 dt = 2\pi \sum |c_n|^2 (r^n - 1)^2 \end{aligned}$$

Teraz chceme ukázat, že  $\lim_{r \rightarrow 1^-} \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 (r^n - 1)^2 = 0$ .

Označme  $f_n(r) = |c_n|^2 (r^n - 1)^2$ . Ukážeme, že  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(r) \Rightarrow$  na  $\langle 0, 1 \rangle$ . Pretože je to postupnosť spojitých funkcií,  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(r) = f(r)$  je spojitá funkcia a teda

$$\lim_{r \rightarrow 1^-} \sum f_n(r) = f(1) = 0.$$

$|f_n(r)| = |c_n|^2 |r^n - 1|^2 \leq 4|c_n|^2$ , čiže  $\sum |f_n(r)| \leq 4 \sum |c_n|^2$ , teda  $\sum f_n(r)$  konverguje rovnomerne podľa Weierstrassovho kritéria.

Teda naozaj  $\|g_r(t) - g_1(t)\|_{L_2} \rightarrow 0$  a  $g_r(t) \rightarrow g_1(t)$  v  $L_2(-\pi, \pi)$ .

## Záver

V našej práci sme sa zaoberali témou Fourierových radov. Cieľom práce bolo pochopiť teóriu Fourierových radov a pomocou nej vyriešiť sled úloh, ktoré sa týkali zmienenej témy. Teoretické poznatky sme získali a objasnili v prvej a druhej kapitole. V definícii 1.1 sme si zdefinovali pojmy, ktoré sme neskôr využili v práci. V definícii 1.2 sme zdefinovali členy Fourierovho radu a aj samotný Fourierov rad utvorený funkciou  $f$ . Vo vete 1.3 sme uviedli a dokázali vzťahy platiace pre členy Fourierovho radu, ktoré sme neskôr využili pri dôkazoch ďalších viet alebo pri riešení príkladov. V nasledujúcich vetách prvej kapitoly sme vyslovili a dokázali tvrdenia o konvergencii Fourierovho radu. V prvej časti druhej kapitoly sme vyslovili definíciu Hilbertovho priestoru a ortonormálnych postupností v tomto priestore. V nasledujúcich vetách sme sa zamerali na konvergenciu Fourierových radov v tomto priestore. Tiež sme sa zaoberali zobrazeniami v priestore s konečným skalárnym súčinom a zobrazeniami v Hilbertovom priestore. Ukázali sme si, že Banachov priestor je tiež Hilbertovým priestorom. Taktiež sme ukázali, čo znamená konvergencia v tomto priestore a zaviedli sme ortonormálne postupnosti v tomto priestore. Tieto postupnosti sme napokon využili pri zostrojení Fourierových radov a vo vetách sme dokázali konvergenciu ich súčtu. V tretej kapitole sme chceli nami nadobudnuté vedomosti uplatniť pri riešení vybraných úloh z knihy [10]. Tieto úlohy boli zamerané na tému konverencie Fourierových radov. Príklady sme úspešne vyriešili a v riešeniach sme poskytli čitateľom náhľad na riešenie podobných problémov. Pre autora bola táto práca veľmi prospešná. Nadobudol pomocou nej hlbšie vedomosti v teórii Fourierových radov a tieto vedomosti následne implementoval do riešenia vybraných príkladov k danej téme. Táto práca je vhodná pre čitateľov, ktorí si chcú prehĺbiť poznatky z témy Fourierových radov alebo opisu periodických funkcií. Budúci význam Fourierových radov nachádzame v matematike alebo fyzike, napríklad pri opise trigonometrických systémov, zvuku, či signálu.

## Zoznam použitej literatúry

- [1] Adam, P.: *Úvod do metód spracovania zvuku v súčasnom multimediálnom prostredí*, *Diplomová práca*, FMFI UK, Bratislava, 2006, dostupné na internete (7.12.2011)  
<http://zvuk.atrip.sk/dipl.pdf>
- [2] Biolek, D., a kol.: *Elektronické obvody I*, Fakulta vojenských technológií Univerzita Obrany, Brno, 2006, dostupné na internete (7.12.2011)  
<http://user.unob.cz/biolek/vyukaVA/skripta/EO.pdf>
- [3] Foster, O.: *Analysis 3*, Vieweg, Mníchov, 1999
- [4] Hanuš, P.: *Základní vlastnosti Fourierových řad*, *bakalárska práca*, Fakulta informatiky Masarykova Univerzita, Brno, 2008, dostupné na internete (7.12.2011)  
[http://is.muni.cz/th/139893/fi\\_b/Bakalarka.pdf](http://is.muni.cz/th/139893/fi_b/Bakalarka.pdf)
- [5] Kollár, M., Kossaczká, Ľ., Ševčovič, D.: *Diferenciálny a integrálny počet funkcií viac premenných v príkladoch*, Knížničné a edičné centrum FMFI UK, Bratislava, 2010
- [6] Kubáček, Z., Valášek, J.: *Cvičenia z matematickej analýzy II*, Univerzita Komenského v Bratislave, Bratislava, 2003
- [7] Neubrunn, T., Smítal, J.: *Vybrané kapitoly z analýzy: Funkcionálna analýza a teória funkcií*, Univerzita Komenského v Bratislave, Bratislava, 1985
- [8] Ševčovič, D.: *Prednášky z matematickej analýzy*, FMFI UK, Bratislava, 2011
- [9] Tolstov, G.: *Fourierreihen*, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1955
- [10] Walter, W.: *Analysis 2*, Springer-Verlag, Berlin, 2002
- [11] Zimmermann, J.: *Spektrálna skladba segmentov rečového signálu*, Jazyk a kultúra, číslo 2/2010, dostupné na internete (7.12.2011)  
[http://www.ff.unipo.sk/jak/2\\_2010/zimmermann.pdf](http://www.ff.unipo.sk/jak/2_2010/zimmermann.pdf)

## Príloha

V tejto prílohe uvádzame zdrojové kódy z programu Matlab, pomocou ktorých sme vykresľovali obrázky.

Kód na vykreslenie Fourierovho radu funkcie  $t^2$ :

```
x = -10 : 0.01 : 10;
y = (pi^2)/3;
for n = 1 : 10000
y = y + 4 * (((-1)^n)/(n^2)) * cos(n * x);
end
plot(x, y);
```

Kód na vykreslenie Fourierovho radu funkcie  $\cos(\alpha t)$ :

```
alfa = -0.5;
x = -10 : 0.01 : 10;
y = sin(alfa * pi)/(pi * alfa);
for n = 1 : 10000
y = y + (2 * alfa * ((-1)^n) * sin(alfa * pi)/(pi * (alfa^2 - n^2))) * cos(n * x);
end
plot(x, y);
hold all
x = -pi : 0.01 : pi;
y = cos(alfa * x);
plot(x, y, '--', 'LineWidth', 2);
```

Kód na vykreslenie Fourierovho radu pre príklad 3:

```
x = -10 : 0.01 : 10;
y = 0;
for n = 1 : 100
y = y + sin(n * x)/n;
end
plot(x, y);
```

Kód na vykreslenie Fourierovho radu funkcie  $t$ :

```
x = -5 : 0.01 : 5;
y = 0;
for n = 1 : 100
y = y + (2 * ((-1)^(n + 1))/n) * sin(n * x);
end
plot(x, y);
hold all
x = -pi : 0.01 : pi;
y = x;
plot(x, y, '--', 'LineWidth', 2);
```

Kód na vykreslenie Fourierovho radu funkcie  $t^2$ :

```
x = -10 : 0.01 : 10;
y = (pi^2)/3;
for n = 1 : 10000
y = y + 4 * (((-1)^n)/(n^2)) * cos(n * x);
end
plot(x, y);
hold all
x = -pi : 0.01 : pi;
y = x.^2;
plot(x, y, '--', 'LineWidth', 2);
```

Kód na vykreslenie Fourierovho radu funkcie  $\text{sgn}(t)$ :

```
x = -5 : 0.01 : 5;
y = 0;
for n = 1 : 50
y = y + (4/(pi * (2 * n - 1))) * sin((2 * n - 1) * x);
end
plot(x, y);
hold all
```

```
x = 0 : 0.01 : pi;  
y = 1;  
plot(x, y, '--', 'LineWidth', 4);  
hold all  
x = -pi : 0.01 : 0;  
y = -1;  
plot(x, y, '--', 'LineWidth', 4);
```

Kód na vykreslenie párneho rozšírenia funkcie  $(t - c)^+$  v príklade 5:  $c = 2$ ;

```
x = c : 0.01 : pi;  
y = x - c;  
plot(x, y);  
hold all  
x = -pi : 0.01 : -c;  
y = -x - c;  
plot(x, y);  
hold all  
x = 0;  
y = -0.2;  
plot(x, y);  
hold all  
x = -c : 0.01 : c;  
y = 0;  
plot(x, y);  
hold all  
x = -5;  
y = -0.2;  
plot(x, y);  
hold all  
x = 5;  
y = -0.2;  
plot(x, y);
```

Kód na vykreslenie Fourierovho radu párneho rozšírenia funkcie  $(t - c)^+$  v príklade 5:  $c = 1$ ;

```

x = -5 : 0.01 : 5;
y = ((pi - c)^2)/(2 * pi);
for n = 1 : 100
y = y + ((2/pi) * ((-1)^n - cos(n * c))/(n^2)) * cos(n * x);
end
plot(x, y);

```

Kód na vykreslenie nepárneho rozšírenia funkcie  $(t - c)^+$  v príklade 5:  $c = 2$ ;

```

x = c : 0.01 : pi;
y = x - c;
plot(x, y);
hold all
x = -pi : 0.01 : -c;
y = x + c;
plot(x, y);
hold all
x = -c : 0.01 : c;
y = 0;
plot(x, y);
hold all
x = -5;
y = -0.2;
plot(x, y);
hold all
x = 5;
y = -0.2;
plot(x, y);

```

Kód na vykreslenie Fourierovho radu nepárneho rozšírenia funkcie  $(t - c)^+$  v príklade 5:  $c = 1$ ;



```
x = -5 : 0.01 : 5;
y = 0;
for n = 1 : 100
y = y + ((2/pi) * (((-1)^(n)) * ((c - pi)/n) - sin(n * c)/(n^2))) * sin(n * x);
end
plot(x, y);
```

Kód na vykreslenie nepárneho rozšírenia funkcie  $h(t)$  v príklade 5:  $c = 2$ ;

```
x = -c : 0.01 : c;
y = 0;
plot(x, y);
hold all
x = c : 0.01 : pi;
y = (x - c).^2;
plot(x, y);
hold all
x = -pi : 0.01 : -c;
y = -(x + c).^2;
plot(x, y);
hold all
x = -5;
y = -0.2;
plot(x, y);
hold all
x = 5;
y = -0.2;
plot(x, y);
```

Kód na vykreslenie Fourierovho radu nepárneho rozšírenia funkcie  $h(t)$  v príklade

```
5: c = 1;
x = -5 : 0.01 : 5;
y = 0;
for n = 1 : 1000
```

```

y = y + ((1/pi) * (((-1)^n) * ((-2 * (pi^2)/n) + 4/(n^3) + 4 * pi * c/n - 2 * (c^2)/n) -
(4/(n^3)) * cos(n * c))) * sin(n * x);
end
plot(x, y, 'LineWidth', 2);

```

Kód na vykreslenie párneho rozšírenia funkcie  $h(t)$  v príklade 5:  $c = 2$ ;

```

x = c : 0.01 : pi;
y = (x - c).^2;
plot(x, y);
hold all
x = -pi : 0.01 : -c;
y = (x + c).^2;
plot(x, y);
hold all
x = -c : 0.01 : c;
y = 0;
plot(x, y);
hold all
x = 0;
y = -0.5;
plot(x, y);

```

Kód na vykreslenie Fourierovho radu párneho rozšírenia funkcie  $h(t)$  v príklade 5:

```

c = 1;
x = -pi : 0.01 : pi;
y = ((pi - c)^3)/(3 * pi);
for n = 1 : 100
y = y + ((4/(pi * (n^2))) * (((-1)^n) * (pi - c) + sin(n * c)/n)) * cos(n * x);
end
plot(x, y, 'LineWidth', 2);

```