

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY



ZBIERKA ÚLOH Z FINANČNEJ MATEMATIKY

BAKALÁRSKA PRÁCA

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY

ZBIERKA ÚLOH Z FINANČNEJ MATEMATIKY

BAKALÁRSKA PRÁCA

Študijný program: Ekonomická a finančná matematika
Študijný odbor: 1114 Aplikovaná matematika
Školiace pracovisko: Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky
Vedúci práce: Mgr. Zuzana Zíková



Univerzita Komenského v Bratislave
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

ZADANIE ZÁVEREČNEJ PRÁCE

Meno a priezvisko študenta: Mária Žižáková
Študijný program: ekonomická a finančná matematika (Jednoodborové štúdium, bakalársky I. st., denná forma)
Študijný odbor: 9.1.9. aplikovaná matematika
Typ záverečnej práce: bakalárska
Jazyk záverečnej práce: slovenský

Názov: Zbierka úloh z finančnej matematiky

Cieľ: Zozbierať, vymyslieť a zaujímavým spôsobom spracovať úlohy zo základov finančnej matematiky a v praxi ich otestovať.

Vedúci: Mgr. Zuzana Zíková

Dátum zadania: 16.10.2011

Dátum schválenia: 27.10.2011

doc. RNDr. Margaréta Halická, CSc.
garant študijného programu

.....
študent

.....
vedúci

PodĎakovanie Touto cestou sa chcem poĎakovať svojej vedúcej bakalárskej práce Mgr. Zuzane Zíkovej, za ochotu, pomoc a podnetné pripomienky, ktoré mi pomohli pri písaní tejto práce. Ďakujem tiež PaedDr. Ivete Kohanovej, PhD. a učiteľom z Gymnázia P. O. Hviezdoslava v Kežmarku za pomoc a poskytnutie času pri testovaní príkladov. Môjmu priateľovi Petrovi Melíšekovi za pomoc pri preklade abstraktu do anglického jazyka. Ďakujem aj svojej rodine a priateľom za ich trpezlivosť a podporu.

Abstrakt

ŽIŽÁKOVÁ, Mária: Zbierka úloh z finančnej matematiky [Bakalárska práca], Univerzita Komenského v Bratislave, Fakulta matematiky, fyziky a informatiky, Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky; školiteľ: Mgr. Zuzana Zíková, Bratislava, 2012, 63 s.

Bakalárska práca je odozvou na zvyšujúcu sa potrebu mladých ľudí oboznámiť sa so základnými pojmami súvisiacimi s financiami. Naším cieľom je vytvoriť zaujímavé študijné materiály pre študentov a metodickú pomôcku pre učiteľov stredných škôl. Týmto spôsobom by sme chceli zefektívniť výučbu finančnej matematiky a prispieť tak k zvýšeniu finančnej gramotnosti obyvateľov Slovenska. Hlavným výsledkom práce je zbierka úloh z finančnej matematiky pre študentov stredných škôl. Jej tvorbe predchádzalo testovanie úrovne vedomostí z finančnej matematiky na dvoch gymnáziách. Výsledky testovania nám pomohli pri výbere príkladov do zbierky úloh a môžu byť užitočné aj pre vyučujúcich matematiky. Zbierka úloh je rozdelená do dvoch celkov. Prvá časť obsahuje príklady, ktorých počítanie je mechanickejšie avšak niekedy výpočtovo náročnejšie. Napríklad úlohy na výpočet úrokovej miery alebo veľkosti splátok pôžičky. Do druhej časti zbierky úloh sme zaradili príklady s cieľom oboznámiť žiakov s novými finančnými pojmami, naučiť ich pracovať s textom a vedieť ho aplikovať v praktických úlohách. Túto časť sme zaradili do zbierky úloh, pretože sme presvedčení, že jednou z úloh matematiky je vedieť porozumieť neznámym pojmom, rozvíjať myslenie žiakov a ich kreativitu pri riešení zadaných úloh.

Kľúčové slová: finančná matematika, testovanie, zbierka úloh, úrokovanie, rizikovosť, výnosnosť

Abstract

ŽIŽÁKOVÁ, Mária: Financial mathematics, Exercise Book [Bachelor Thesis], Comenius University in Bratislava, Faculty of Mathematics, Physics and Informatics, Department of Applied Mathematics and Statistics; Supervisor: Mgr. Zuzana Zíková, Bratislava, 2011, 63 p.

This bachelor thesis is a response to the growing need for young people to become familiar with basic concepts related to finance. Our objective is to create interesting learning materials for students and guideline for high school teachers. In this way we would like to improve the teaching of financial mathematics and contribute to increasing the financial literacy of the Slovak population. The main product of the thesis is the Financial Math Exercise Book addressed to high school students. Its creation was preceded by testing the level of knowledge of financial mathematics at two high schools. The results of our tests helped us in the process of selection of the exercises for the Exercise Book and may also be useful for teachers of mathematics. The Exercise Book is divided into two parts. The first part contains exercises, where calculations are more straight forward but sometimes computationally demanding. For example, tasks to calculate the interest rate or the amount of the loan payments. In the second part, we have included exercises which purpose is to familiarize students with the new financial terms, to teach them how to work with text and to be able to apply it in practical tasks. This section was included in the Exercise Book, because we believe that one of the roles of mathematics is to foster the ability to understand unfamiliar concepts, to develop students' thinking and creativity in solving assignments.

Keywords: Financial Mathematics, testing, the Exercise Book, interest rates, Risk Rate, yield

Obsah

Zoznam obrázkov	9
Zoznam tabuliek	9
Úvod	10
1 Úvod do problematiky a metodika práce	12
2 Testovanie na stredných školách	14
2.1 Úvod do testovania	14
2.2 Prvý test - Úroky, pôžičky, sporenie a splácanie	14
2.3 Druhý test - Kam investovať?	15
3 Vyhodnotenie testovania	18
3.1 Vyhodnotenie prvého testu	18
3.2 Vyhodnotenie druhého testu	21
3.3 Najdôležitejšie postrehy z testovania	24
4 Zbierka úloh z finančnej matematiky	25
4.1 Prvá časť: Úroky, pôžičky, sporenie a splácanie.	25
4.1.1 Percentá a iné základné pojmy	25
4.1.2 Jednoduché úrokovanie a úrokovanie na dobu kratšiu ako rok . .	26
4.1.3 Zložené úrokovanie	29
4.1.4 Pravidelné vklady a výbery	30
4.1.5 Splácanie dlhov: pôžičky a hypotéky	32
4.1.6 Výsledky	33
4.2 Druhá časť: Kam investovať?	38
4.2.1 Výnosnosť aktíva	38
4.2.2 Rizikovosť aktíva	39
4.2.3 Diverzifikácia portfólia	41
4.2.4 Iné príklady spojené s výberom portfólia	41
4.2.5 Výsledky	43
5 Používanie zbierky úloh a materiálov z prílohy	47
5.1 Opis prvej časti zbierky úloh	47
5.2 Opis druhej časti zbierky úloh	48
5.3 Opis internetovej stránky	49

OBSAH	8
Záver	50
Zoznam použitej literatúry	51
Príloha A - Schopnosti absolventa strednej školy	52
Príloha B - Test prvý	53
Príloha C - Test druhý	56
Príloha D - Výsledky testov	60
Prílohy E, F, G, H - Prílohy na CD	63

Zoznam obrázkov

1	Prvé riešenie piateho príkladu z prvého testu - časť (c).	19
2	Druhé riešenie piateho príkladu z prvého testu - časť (c).	19
3	Celkové percentuálne vyhodnotenie úspešnosti prvého testu.	20
4	Percentuálna početnosť chýb v prvom teste.	20
5	Obrázok k príkladu 1 z časti 4.1.1 zo zbierky úloh.	25
6	Obrázok k príkladu 11 z časti 4.2.2 zo zbierky úloh.	40
7	Obrázok k príkladu 20 z časti 4.2.4 zo zbierky úloh.	43
8	Obrázok k šiestemu príkladu z druhého testu.	58
9	Prvé riešenie piateho príkladu z prvého testu- časť (c).	60
10	Druhé riešenie piateho príkladu z prvého testu- časť (c).	60
11	Riešenie piateho príkladu z prvého testu - časť (d).	61

Zoznam tabuliek

1	Splátkový kalendár k príkladu 46 z časti 4.1.5 zo zbierky úloh.	33
2	Tabuľka výsledkov k príkladu 46 z časti 4.1.5 zo zbierky úloh.	36
3	Zoznam akcií k príkladu 14 z časti 4.2.3 zo zbierky úloh.	41
4	Zoznam portfólií k príkladu 17 z časti 4.2.3 zo zbierky úloh.	42
5	Tabuľka k príkladu 18 z časti 4.2.4 zo zbierky úloh.	42
6	Tabuľka k príkladu 19 z časti 4.2.4 zo zbierky úloh.	42
7	Tabuľka k príkladu 20 z časti 4.2.4 zo zbierky úloh.	43
8	Tabuľka výsledkov k príkladu 20 z časti 4.2.4 zo zbierky úloh.	45
9	Tabuľka k piatemu príkladu z druhého testu.	58
10	Tabuľka k piatemu príkladu z druhého testu.	58
11	Tabuľka k šiestemu príkladu z druhého testu.	59
12	Tabuľka výsledkov k šiestemu príkladu z druhého testu.	62

Úvod

V posledných rokoch sa mnoho ľudí a inštitúcií zaoberá otázkou, ako zlepšiť nedostatočnú finančnú gramotnosť väčšiny obyvateľov Slovenska. Podnetom k rozmyšľaniu nad touto problematikou je predovšetkým vzrastajúca potreba každého z nás vedieť sa zorientovať v základných finančných pojmoch. Veď kto z nás (predovšetkým mladých ľudí) si nemusí zobrať hypotéku, aby mal kde bývať? V každodennom živote sa teda stretávame s produktmi, ktoré sú ponúkané reklamami a snažia sa nielen ovplyvniť, no neraz aj oklamať spotrebiteľa. Touto problematikou sa nezaoberajú len jednotlivci, ale aj rôzne spoločnosti. Napríklad v roku 2007 robila Slovenská banková asociácia prieskum finančnej gramotnosti [8]. Iným príkladom je práve otvorená výstava s názvom O troch centoch, ktorú organizuje Nadácia Slovenskej sporiteľne pre stredné školy.

Kurzy, výstavy a súťaže sú zamerané na rôzne cieľové skupiny, či už vekom, alebo úrovňou vzdelania. Cieľom týchto podujatí je zvýšiť úroveň vzdelania ľudí práve v tejto oblasti, keďže nie je dostatočná. Dôvodov, prečo je to tak, môže byť viac. Napríklad nedostatočné metodické materiály pre učiteľov základných a stredných škôl, ktorí často nevedia, ako podať základy finančnej matematiky študentom jednoducho a motivujúco alebo nedostatočné vedomosti z matematiky u žiakov a bežných ľudí, ktoré často odrádzajú od zamýšľania sa nad témami súvisiacimi s financiami.

Táto bakalárska práca je odozvou na potreby učiteľov a žiakov stredných škôl. Jej obsahom je zbierka úloh z finančnej matematiky a ďalšie materiály, ktoré majú komplexnejšie pomôcť pri výučbe finančnej matematiky. Pri ich tvorbe sme vychádzali z už existujúcich učebníc matematiky a zo súčasného stavu vedomostí študentov gymnázií, ktorý sme osobne testovali na gymnáziách. Ďalej sme ich doplnili o úlohy, ktoré poskytnú všeobecný rozhľad v oblasti financií. Finančná matematika je celok, ktorý nie je v učebných plánoch stredných škôl povinný. Preto naším cieľom bolo vytvoriť zbierku úloh a pomocné materiály tak, aby sa na hodine dali prejsť rýchlejšie, a žiaci mali priestor a materiály aj na domáce štúdium. Chceme tiež dosiahnuť, aby študenti dokázali čítať text, zameraný na finančnú problematiku, s porozumením. Bakalárska práca zahŕňa aj úlohy na precvičenie pre študentov, ktoré obsahujú vysvetlivky a riešené príklady v programe Microsoft Excel a prezentácie k jednotlivým celkom v programe Microsoft PowerPoint.

Prvá kapitola poukazuje na dôležitosť zvyšovania finančnej gramotnosti bežných ľudí v dnešnom svete. Ďalej je v nej spomenutá literatúra, v ktorej sa autori zaoberajú touto problematikou a z ktorej sme čerpali inšpiráciu pri tvorbe bakalárskej práce. V druhej kapitole uvádzame, koľko žiakov sa zapojilo do testovania, ako a kde pre-

biehalo. V tejto časti tiež predstavujeme testovacie úlohy a popisujeme motiváciu pre výber práve takých príkladov. Tretia kapitola opisuje výsledky testovaní. Inšpiráciu, ako testovať a spracovať výsledky sme čerpali z knihy Dvacet pět kapitol z didaktiky matematiky [2]. Nachádzajú sa tu spracované výsledky žiakov, ukážky ich riešení, vyhodnotenia jednotlivých úloh a zručností, v ktorých by sa mali zlepšiť. Štvrtá kapitola práce je spracovaná ako zbierka úloh z finančnej matematiky pre stredné školy. Obsahuje príklady z rôznych oblastí finančnej matematiky. Zbierka úloh je rozdelená na dve väčšie časti. Prvá je skôr výpočtová a sú v nej spracované hlavne príklady, zaoberajúce sa úrokováním, pôžičkami a sporením. Druhá časť je naopak viac intuitívna, motivujúca, zameraná na úlohy, ktoré by mali žiakom objasniť základné pojmy, s ktorými sa stretávame v bankách a médiách, ako napríklad aktívum, rizikovosť, výnosnosť, tvorba portfólia, diverzifikácia portfólia a sú v nej spracované aj niektoré témy, spomínané v Národnom štandarde finančnej gramotnosti [6]. Túto časť sme vložili do zbierky úloh na základe presvedčenia, že jednou z úloh matematiky je tiež porozumieť novému odbornému textu, pochopiť pojmy a následne ich vedieť v praxi použiť. Piata kapitola predstavuje pomôcku pre potenciálnych používateľov zbierky úloh. Táto pomôcka obsahuje návod, ako pracovať so zbierkou úloh zo štvrtej kapitoly a tiež popisuje ďalšie materiály, ako napr. zbierku úloh pre študentov v programe Microsoft Excel a ostatné materiály z prílohy.

1 Úvod do problematiky a metodika práce

Už niekoľko rokov ľudia stále intenzívnejšie pociťujú potrebu dôkladnejšieho vzdelávania vo finančnej oblasti. Ako sme už spomínali v úvode, na túto potrebu spoločnosť reaguje. V súčasnej dobe prebiehajú napríklad školenia pre zamestnancov firiem, výstavy, kurzy pre mladých ľudí a iné. Zrejme z dôvodu, že tieto akcie sú stále viac atraktívne, hlavne pre mladých ľudí. Preto sa začal touto problematikou zaoberať viac do hĺbky aj štát. V roku 2008 vydalo Ministerstvo školstva SR s Ministerstvom financií SR Národný štandard finančnej gramotnosti [6]. "Národný štandard finančnej gramotnosti vymedzuje šírku poznatkov, zručností a skúseností v oblasti finančného vzdelávania a manažmentu osobných financií." Zdroj: [6]. Ďalej opisuje zručnosti, ktoré by mal študent počas strednej školy nadobudnúť. V tejto časti bakalárskej práce spomenieme niektoré z nich, ktorými sme sa pri tvorbe zbierky inšpirovali a snažili sme sa tieto myšlienky čo najviac zakomponovať do úloh. Sú to:

1. nájsť, vyhodnotiť a použiť finančné informácie,
2. stanoviť si finančné ciele a naplánovať si ich dosiahnutie,
3. rozvinúť potenciál získania vlastného príjmu a schopnosť sporiť,
4. efektívne používať finančné služby,
5. plniť svoje finančné záväzky,
6. porozumieť základným pojmom v oblasti finančníctva a sveta peňazí,
7. orientovať sa v oblasti finančných inštitúcií (NBS, komerčné banky, poisťovne a ostatné finančné inštitúcie)."

Prevzaté z [6].

Zoznam všetkých schopností, ktoré by mali absolventi stredných škôl ovládať je uvedený v Prílohe A. Myslíme si, že je dôležité, aby sa učitelia matematiky, ekonómie a podobných predmetov zoznámili so spomínanými zručnosťami. Tiež považujeme zaradenie finančnej matematiky do učebných osnov za prínos, pretože napomáha k budovaniu vzťahu medzi matematikou a realitou, učí študentov využívať matematické poznatky v každodennom živote a lepšie chápať ekonomické súvislosti. Keďže je finančná matematika v učebných osnovách stredných škôl nová, existuje len málo učebníc a zbierok úloh zameraných na túto oblasť matematiky. Jednou zo slovenských učebníc, v ktorých je zahrnutá aj finančná matematika je učebnica pre 2. ročník stredných škôl [4]. Pri tvorbe prvej časti zbierky úloh sme sa inšpirovali [4], učebnicou pre základné

školy [9], diplomovou prácou zameranou na finančnú matematiku [10] a viacerými zahraničnými učebnicami [1], [3] a [7] sme sa inšpirovali pri tvorbe prvej časti zbierky úloh. V druhej časti zbierky úloh sme vychádzali predovšetkým z toho, aké zručnosti by mali absolventi stredných škôl ovládať (Príloha A) a knihou určenou hlavne pre študentov vysokých škôl so zameraním na finančnú matematiku [5] .

2 Testovanie na stredných školách

Jedným z podkladov pre vznik zbierky úloh pre žiakov stredných škôl bolo testovanie úrovne vedomostí z finančnej matematiky na dvoch gymnáziách. V tejto kapitole uvádzame, na akých školách sme realizovali testovanie pomocou testovacích úloh, koľko žiakov sa zapojilo a tiež podmienky riešenia testov. Ďalej opisujeme motiváciu pre výber testovacích príkladov.

2.1 Úvod do testovania

Do testovania žiakov z príkladov z finančnej matematiky sa zapojili dve gymnáziá. Gymnázium P. O. Hviezdoslava v Kežmarku a Gymnázium Grösslingová v Bratislave. Na obidvoch školách sa testovalo v triedach druhého, tretieho a štvrtého ročníka, ktoré nie sú zamerané na matematiku. Žiaci riešili dva testy. Prvý test riešilo 51 druhákov a 56 tretiačov a štvrtákov. Druhý test riešilo 42 druhákov a 49 tretiačov a štvrtákov. Obidva testy sú uvádzané v prílohe bakalárskej práce (Príloha B a Príloha C), rovnako aj ich výsledky (Príloha D).

Učitelia tried, v ktorých sme príklady testovali boli oboznámení s nasledujúcimi pravidlami testovania:

- na jeden test je vyhradený čas 45 minút,
- nie sú povolené žiadne "vzorcovníky", iba pomôcka ktorá je súčasťou testu,
- žiakom sa odporúča mať kalkulačku, hlavne pri riešení prvého testu.

Ďalej sme poprosili učiteľov o triedenie vypracovaných testov na riešenia druhákov a riešenia tretiačov a štvrtákov. Predpokladali sme, že druháci finančnú matematiku ešte nepreberali naopak tretiaci a štvrtáci áno. Po konzultácií s učiteľmi sme zistili, že ani tretiaci a štvrtáci finančnú matematiku ešte nepreberali. Napriek tomu sme toto delenie ponechali z presvedčenia o lepších matematických zručnostiach tretiačov a štvrtákov.

2.2 Prvý test - Úroky, pôžičky, sporenie a splácanie

Prvý test (Príloha B) je zameraný na učivo pre druhý ročník stredných škôl a pri vymýšľaní testovacích príkladov sme sa inšpirovali učebnicou pre 2. ročník stredných škôl [2] a učebnicou pre 9. ročník základných škôl [6]. Na začiatku testu je pomôcka, ktorá obsahuje základné vzorce na výpočet jednoduchého a zloženého úrokovania a vzorec na výpočet súčtu geometrickej postupnosti. Súčasťou pomôcky sú tiež krátke vysvetlenia

k pojmom jednoduché, zložené a spojité úrokovanie, súčasná hodnota peňazí a budúca hodnota peňazí. Myslíme si, že v bežnom živote nie je až také dôležité vedieť všetky matematické vzorce naspamäť, ale hlavne im porozumieť a vedieť ich správne použiť, preto sme žiakom poskytli túto pomôcku.

Prvé dva príklady sú najjednoduchšie, zamerané na jednoduché úrokovanie s vkladom na jeden rok. Tieto príklady boli určené na pripomenutie učiva, ktoré by mal ovládať absolvent základnej školy.

V druhých dvoch príkladoch mali žiaci za úlohu vypočítať výšku úrokov za dobu kratšiu ako je úrokové obdobie a súčasnú hodnotu investície na dva mesiace.

V piatej úlohe sa už vyskytuje zložené úrokovanie, vo forme porovnávania dvoch bánk, WUBA banky a MUF banky. Vo WUBA banke sa úrokuje jeden krát ročne zloženým úrokováním a v MUF banke sa úrokuje desať krát ročne zloženým úrokováním. Ďalšou úlohou žiakov bolo grafické porovnanie správania vložených peňazí v závislosti od času. Mali tiež nakresliť ako by sa asi správali naše peniaze, keby sme ich vložili do banky, v ktorej sa úrokuje spojitým úrokováním. Cieľom tejto úlohy bolo poukázať na výhody toho, keď banka úrokuje viac krát ročne alebo dokonca spojitou.

Šiesty príklad poukazuje na veľmi dôležitú vec, že peniaze dnes sú hodnotnejšie ako peniaze zajtra. Žiaci porovnávali príjem peňazí hneď, "na ruku", so ziskom z úrokov, ktoré dostanú po jednom roku. V oboch príkladoch sa hovorí o vklade na jeden rok.

Siedma úloha je príkladom na sporenie s viacerými vkladmi a ôsma úloha je príkladom, v ktorom mali žiaci rátať podmienky pôžičky. Tieto dva príklady sú zrejme pre študentov stredných škôl matematicky náročnejšie, pretože väčšina z nich na matematike geometrické rady nepreberala. Napriek tomu sme tieto príklady vložili do prvého testu s tým, že sa dajú zrátať aj iným spôsobom ako cez súčet geometrického radu a s nádejou, že niektorí žiaci budú schopní intuitívne použiť vzorec z pomôcky.

Prvý test je teda rozdelený na ľahšie a ťažšie príklady. Ľahšie majú byť povzbudením pre žiakov, ktorí sa na matematiku až tak neorientujú. Ťažšie príklady zas ako motivácia pre šikovnejších žiakov v tejto oblasti.

2.3 Druhý test - Kam investovať?

Druhá séria testovacích úloh (Príloha C) je zameraná na základné pojmy spojené s výberom investícií. Pre bežného človeka je v dnešnej dobe dôležité zoznámiť sa s pojmami ako aktívum, portfólio, rizikovosť a očakávaná výnosnosť aktíva, investor atď., pretože sa s nimi v živote veľa krát stretne. Test obsahuje pomôcky v podobe vysvetlenia základných pojmov, ktoré sa vyskytujú v teste. Okrem vysvetlenia pojmov pomôcka obsahuje aj krátke príklady, ktoré ilustrujú danú problematiku. Napríklad:

1. Ilustračný príklad k vysvetleniu individuálnych preferencií investora.

Investor chce investovať peniaze a môže si vybrať medzi nasledujúcimi dvoma aktívami:

- (a) akcia počítačovej firmy ktorá má očakávanú výnosnosť 15% a rizikovosť 10%,
- (b) štátny dlhopis ktorý má očakávanú výnosnosť 5% a rizikovosť 1%.

Otázkou je, ktorá z týchto dvoch možností je lepšia. Odpoveď na otázku neexistuje. Záleží iba na voľbe investora. Investor, ktorý má rád riziko, si zrejme vyberie akciu aj za cenu väčšej rizikovosti a naopak investor, ktorý nemá rád riziko, si vyberie štátny dlhopis, ktorý je menej rizikový aj za cenu menšieho výnosu.

2. Ilustračný príklad k vysvetleniu diverzifikácie rizika.

- (a) Keď ľudia prestanú kupovať autá, neznamená to, že prestanú kupovať rožky.
- (b) Keď ľudia prestanú kupovať počítače, zmenší sa aj potreba počítačových doplnkov -> prestanú sa kupovať počítačové doplnky.

Pri druhom teste sme teda od žiakov chceli, aby si pozorne prečítali pomôcku, zadanie príkladov a následne vypočítali príklad alebo odpovedali na otázku. Na rozdiel od prvého testu, na niektoré otázky neexistuje práve jedna správna odpoveď.

Prvé dva príklady sú inšpirované [3] a hovoria o type investora. Žiaci si mali určiť sumu, ktorú sú ochotní zaplatiť za stierateľný kupón, s ktorým s pravdepodobnosťou $1/3$ vyhrajú 150 eur a s pravdepodobnosťou $2/3$ nedostanú nič. Následne v druhom príklade mali určiť, či sú rizikovo averzní, neutrálni alebo riziko obľubujúci investori.

Tretí a štvrtý príklad sú zamerané na vlastnosti aktíva: rizikovosť a očakávanú výnosnosť aktíva. V obidvoch príkladoch mali žiaci vyrátať očakávanú výnosnosť investície. V štvrtom príklade mali navyše rozhodnúť, ktorá z dvoch investícií je podľa nich viac riziková.

O diverzifikácii portfólia sa hovorí v druhej pomôcke a piatom príklade. V tomto príklade sú popísané akcie piatich rôznych firiem a portfóliá, ktoré sú zložené z rôznych kombinácií akcií týchto firiem. Úlohou žiakov bolo zoradiť portfóliá podľa princípu diverzifikácie portfólia, opísaného v pomôcke, od najmenej po najviac rizikové.

Posledný - šiesty príklad sa odvíja od obrázka, na ktorom je znázornená efektívna hranica a rôzne portfóliá s rôznou rizikovosťou a očakávanou výnosnosťou. Hlavnými dôvodmi, prečo sme tento príklad zaradili do zbierky, boli:

- uvedomenie si faktu, že portfólia s veľmi malou rizikovosťou a veľkou očakávanou výnosnosťou sa nedajú zostrojiť,

- otestovať, čo znamenajú preferencie investora v praxi,
- zoznámiť sa s pojmom efektívna hranica,
- vedieť odôvodniť, prečo by si niektoré portfóliá nevybral.

Druhý test teda nie je postavený iba na matematických vedomostiach. Cieľom tejto sady testovacích úloh bolo zistiť, nakoľko žiaci stredných škôl dokážu čítať text, zameraný na finančnú oblasť, s porozumením. Ďalej sme chceli zistiť, či informácie, ktoré sú v texte spomenuté, vedia pochopiť a správne použiť.

3 Vyhodnotenie testovania

V tretej kapitole vyhodnocujeme riešenia obidvoch testov žiakov gymnázií. Porovnávame úspešnosť druhákov s úspešnosťou tretiakov a štvrtákov. Poukazujeme tiež na najčastejšie chyby v žiackych riešeniach. Na konci kapitoly sa nachádza zhrnutie najdôležitejších postrehov z testovania na gymnáziách.

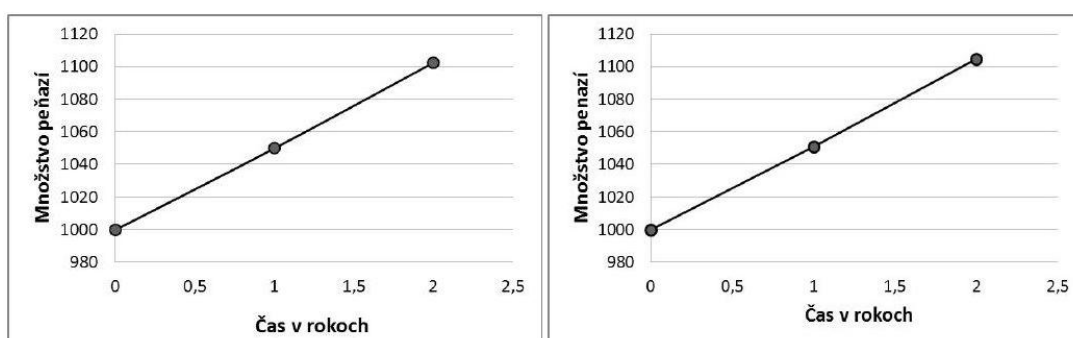
3.1 Vyhodnotenie prvého testu

Aj keď sme pri vymýšľaní testovacích príkladov predpokladali, že prvé dva príklady budú mať veľkú úspešnosť, našlo sa veľa takých študentov, ktorí sa úspešne neprepracovali ani cez tieto príklady. K častým chybám patrila nesprávna premena na percentá, numerické chyby napríklad: $755 + 5 = 780$. Nebrali do úvahy ročnej úrokovej miery, ale brali ich ako mesačné, nepozorné prečítanie zadania a iné. Teda zo 107 študentov prvý príklad časť (a) správne vyriešilo 93 žiakov, nesprávne 9 a neriešilo ju 5 študentov. Prvý príklad časť (b) malo 33 žiakov dobre, 40 zle a 34 žiakov príklad nevypočítalo. Druhý príklad malo 90 žiakov dobre, 17 zle a riešili ho všetci žiaci. Úspešnosť žiakov v tejto časti testu bola teda 67,3 percentná.

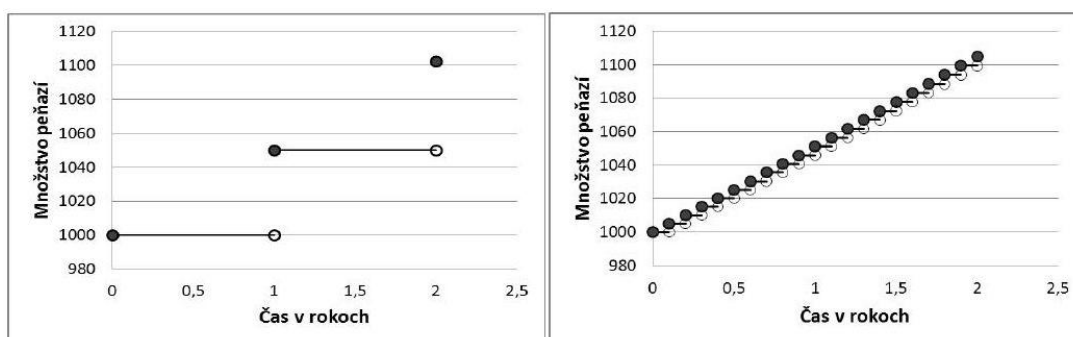
Ďalšia časť bola o niečo zložitejšia, čo sa iba málo odrazilo na úspešnosti žiakov v druhých dvoch príkladoch. Úspešnosť žiakov klesla iba o menej ako 3 % v porovnaní s prvými dvoma príkladmi. V treťom príklade hovoríme o vklade na dva mesiace a otázka je, aká musí byť súčasná hodnota investície, ak poznáme budúcu hodnotu investície a ročnú úrokovú mieru. Súčasnú hodnotu investície vypočítalo 49 žiakov správne, 11 žiakov napísalo, že keď máme zadanú ročnú úrokovú mieru, tak sa v našom prípade súčasná hodnota investície sa rovná budúcej hodnote investície. Zle vypočítaný príklad malo 34 žiakov. Najčastejšie chyby robili študenti v premene na percentá, v chybnom dosadzovaní do vzorca a v nepozornom prečítaní zadania. Ostatní žiaci príklad nezačali riešiť. Štvrtý príklad hovorí o pôžičke na šesť mesiacov. Táto úloha nebola pre žiakov náročná. Niektorí ju riešili pomocou vzorca, kde za t dosadili 0,5. Iný vypočítali, o koľko percent je vyššia budúca hodnota investície ako súčasná a percentá, čo im vyšli vynásobili dvomi, aby dostali ročnú úrokovú mieru. Príklad malo dobre 79 žiakov, 21 ho malo zle ale vyskytovali sa chyby najmä numerické a 7 žiakov príklad nepočítalo.

V piatom príklade v častiach (a) a (b) mali žiaci vypočítať budúcu hodnotu investície po roku a po dvoch rokoch pri rôznych podmienkach dvoch bánk. Časť (a) malo dobre 77 žiakov, 16 malo v riešení chybu a 14 žiakov príklad nezačalo riešiť. Časť (b) malo dobre 64 študentov, 19 žiakov riešilo príklad chybne a 24 žiakov nezačalo príklad riešiť. Najčastejšie sa vyskytujúce chyby boli nesprávny prevod na percentá, chybné dosade-

nie do vzorca, rôzne numerické chyby, použitie jednoduchého úrokovania a nesprávne čítanie zadania. V časti (c) mali nakresliť, ako sa bude správať náš vklad v závislosti od času. Riešenia boli rôzne. Najčastejšie sa v riešeníach študentov vyskytoval Obr. 1, ktorý predstavuje neustále vyplácanie úrokov a tým stále zvyšovanie peňazí na účte. Nakreslilo ho 41 študentov. Obr. 2, ktorý predstavuje vyplácanie úrokov vždy na konci úrokového obdobia, nakreslilo 7 študentov. Iné obrázky nakreslilo 20 študentov a 39 obrázky nekreslilo.



Obr. 1: Prvé riešenie piateho príkladu z prvého testu - časť (c), vľavo WUBA banka a vpravo MUF banka.



Obr. 2: Druhé riešenie piateho príkladu z prvého testu - časť (c), vľavo WUBA banka a vpravo MUF banka.

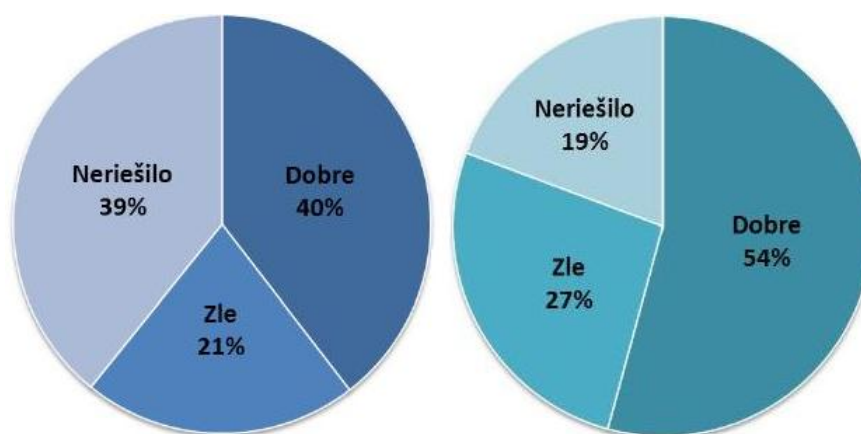
Časť (d) v ktorej bolo treba nakresliť, ako sa asi vyvíjajú peniaze pri spojitom úročení, riešilo iba 24 žiakov. Iba 7 z nich malo nakreslený obrázok správne, ďalší žiaci ho mali nakreslený ako lineárnu priamku alebo inak. Ostatní túto časť vynechali.

Šiesty príklad je zameraný na porovnanie hodnoty peňazí dnes s hodnotou peňazí o rok. V príklade mali žiaci porovnať, ktorá z dvoch bánk ponúka výhodnejšie podmienky. Iba 7 študentov si však uvedomilo, že peniaze dnes sú hodnotnejšie ako peniaze za rok. Tu sú odôvodnenia dvoch z nich, prečo je lepšie investovať najprv do druhej banky.

- "Ponuka prvej banky mi zarobí na prvý pohľad viac. Pri ponuke druhej banky získam peniaze hneď a tieto peniaze môžem uložiť do prvej banky. Po roku teda budem mať 758,71 čo je viac ako keby som hneď investovala do prvej banky. Teda celkovo sa viac oplatí investovať najprv do druhej banky."
- "Banka číslo 1 mi dá o 18,65 eura viac ako banka číslo 2, ale budem ich mať až o rok. Podľa mňa je teda lepšia možnosť číslo 2, lebo ich budem mať k dispozícii hneď a môžem ich zhodnotiť inde, napríklad aj v prvej banke, čo mi vynesie viac peňazí."

Výšku zisku v prvej banke vypočítalo správne 36 žiakov, ale považovali prvú možnosť za výhodnejšiu, 20 žiakov nevypočítalo správne ani úroky, ktoré dostaneme pri ponuke prvej banky po roku a 44 žiakov príklad nezačalo riešiť.

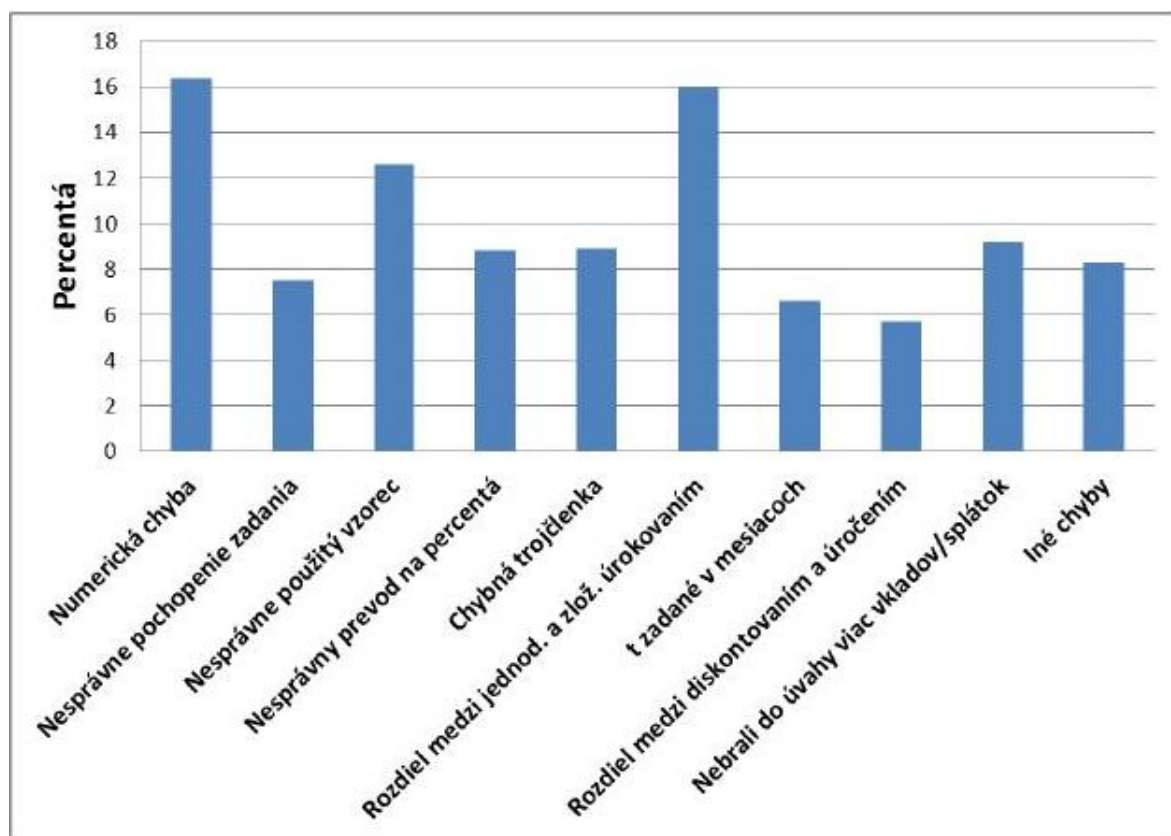
Výsledky testovania ukázali, že siedmy a ôsmy príklad boli ťažké pre študentov stredných škôl, kvôli ich nedostatočným vedomostiam. Išlo o neprebrané učivo "radý a postupnosti". Iba jeden študent správne riešil siedmy príklad časť (a). Ostatní študenti buď úlohy vôbec neriešili, alebo ich mali zle. Chyby, vyskytujúce sa pri riešení týchto úloh, boli najčastejšie tie, že nebrali do úvahy, že vklady alebo splátky nedávame iba na začiatku alebo na konci, ale aj v období medzitým.



Obr. 3: Celkové percentuálne vyhodnotenie úspešnosti prvého testu, vľavo druhákov, vpravo tretíakov a štvrtákov.

Celková úspešnosť žiakov bola teda 47,3 %. Pri počítaní úspešnosti sme však nebrali do úvahy príklady, ktoré žiadny žiak nemal správne, t.j. siedmy príklad časť (b) a ôsmy príklad. Pri vyhodnocovaní testovacích úloh sme brali do úvahy aj fakt, či sú žiaci študentmi druhého ročníka strednej školy alebo 3. a 4. ročníka strednej školy. Na Obr. 3 môžeme vidieť na ľavej strane percentuálne vyhodnotenie druhákov a na pravej strane vyhodnotenie tretíakov a štvrtákov. Najväčší percentuálny rozdiel je medzi

tým, koľko príkladov nedoriešili druháci a koľko tretiaci a štvrtáci. Úspešnosť druhákov bola 39,8 % a úspešnosť tretiačov a štvrtákov bola 54,2 %. Rozdiel v úspešnosti týchto dvoch kategórií žiakov je teda 14,4 %. Z týchto čísel môžeme vidieť, že lepší matematický základ môže viesť k lepším výsledkom z finančnej matematiky.



Obr. 4: Percentuálna početnosť chýb v prvom teste.

Chyby, ktoré sa vyskytovali v riešeníach žiakov, boli rôzne. Rozdelili sme ich do desiatich kategórií napríklad: chybná trojčlenka, nesprávne pochopenie zadania, nesprávny prevod na percentá. Percentuálna početnosť chýb, vzniknutých v prvom teste je ilustrovaná na Obr. 4. Na tomto obrázku nie sú znázornené chyby, ktoré vznikli pri kreslení obrázkov v piatom príklade. Uvedomujeme si, že takéto rozdelenie chýb do kategórií je veľmi subjektívne. Časté chyby ale môžu dobre poukázať na to, ktoré oblasti matematiky je potrebné so žiakmi viac precvičovať. Tiež nám môžu pomôcť pri zostavovaní zbierky úloh.

3.2 Vyhodnotenie druhého testu

Prvý a druhý príklad druhého testu spolu úzko súviseli. Nadpolovičná väčšina z 91 žiakov napísala, že sú ochotní za kupón zaplatiť menej ako 50 eur a zaradili sa do skupiny

riziko averzných. Najčastejšie boli ochotní za kupón zaplatiť okolo dvoch eur čo poukazuje na vysokú riziko averznosť študentov. Našli sa aj takí, ktorí napísali, že pri každej cene kupónu, ktorá bude nižšia ako 50 eur, sa im oplatí kupón kúpiť, lebo v priemere budú stále v zisku. Na druhej strane 40 žiakov buď napísalo nízku sumu, ktorú sú ochotní zaplatiť za kupón a napriek tomu sa zaradili do skupiny rizikovo neutrálnych alebo riziko obľubujúcich, alebo naopak napísali vyššiu sumu a zaradili sa do skupiny rizikovo averzných. Čiže pravdepodobne ani po vysvetlení pojmov riziko averzný, riziko neutrálny a riziko obľubujúci, ich správne nepochopili, alebo si neprečítali vysvetlenie.

Tretí príklad bol zameraný na očakávanú výnosnosť investície. Pri vyhodnocovaní tohto príkladu bol najzaujímavejší fakt, že časť (a), kde bolo treba vypočítať priemernú sumu, ktorú dostaneme na konci roka zvládlo 40 študentov a časť (b), kde mali vypočítať očakávanú výnosnosť, vypočítalo už len 31 študentov správne. Tento fakt môže hovoriť o tom, že študenti ťažšie chápali pojem očakávaná výnosnosť. Ostatní študenti tento príklad mali zle alebo ho neriešili. Najčastejšie chyby boli, že nebrali do úvahy pravdepodobnosť výnosov, zle si prečítali alebo pochopili zadanie (napríklad namiesto straty brali do úvahy zisk a pod.) alebo brali do úvahy iba najväčší možný zisk.

Úlohou v štvrtom príklade bolo, podobne ako v treťom príklade, vypočítať očakávanú výnosnosť dvoch investícií. Navyše mali rozhodnúť, ktorá z investícií je viac riziková a slovne opísať prečo. Prvú časť príkladu zvládlo iba 18 študentov, 22 ju malo zle a 51 ju nezačalo riešiť. Z týchto čísel usudzujeme, že žiaci majú obavu z riešenia príkladov, ktoré sú pre nich nové, aj napriek tomu, že by ich mohli zvládnuť. Druhá časť bola zaujímavejšia, hlavne pre slovné odôvodnenia žiakov, prečo by mala byť nimi vybraná investícia menej alebo viac riziková:

- "Podľa mňa je investícia B viac riziková, pretože v A mám šancu na stratu $1/3$ a v B až $1/2$."
- "Pre mňa by viac riziková bola investícia B, pretože v investícii A mám možnosť hodiť štyri čísla, kde budem ziskový ale pri minci a šanci 50:50 by som nemusel mať šťastie. Teda pri B s menšou pravdepodobnosťou budem ziskový."
- "Rizikovejšia investícia je tá s mincou, lebo mám jednu možnosť zisku a jednu straty, pri kocke mám 4 možnosti zisku a dve straty pri rovnakej výnosnosti."
- "Rizikovejšia je investícia B, lebo môžem pri prehre klesnúť o viac percent ako pri A."

Až 64 žiakov vybralo investíciu B ako viac rizikovú a ostatní príklad neriešili.

Piatu úlohu časť (a) a (b) riešilo 65 žiakov správne. Veľa z nich napísalo aj dobré odôvodnenia, prečo sú portfóliá F a I menej rizikové. Pri časti (c) žiaci zoradzovali portfóliá rôzne. Najčastejšie sa vyskytovalo zoradenie I, J, F, G, H (25 krát). Ďalej I, F, J, G, H (19 krát), H, G, F, J, I (10 krát) a iné. Iba dvaja žiaci príklad neriešili.

Šiesty príklad obsahuje 8 častí. Časti (a), (b), (c) a (f) sú otázkami, ktoré majú pomôcť žiakom pri odpovedi na ďalšie časti príkladu. V časti (d), (e) a (g) vymýšľali žiaci vlastné riešenia, pretože k týmto častiam príkladu neexistuje jeden správny výsledok a chceli sme poznať ich pohľad na danú problematiku. Ku každej z týchto troch častí sme vybrali niekoľko zaujímavých žiackych odpovedí.

(d) Portfólio E sa nedá zostrojiť. Prečo asi?

- "Má veľmi malú rizikovosť, čo je takmer nereálne pri takej výnosnosti."
- "Portfólio s vyššou výnosnosťou ako je efektívna hranica sa nedá zostrojiť."

(e) Na základe b), c) a d) vysvetli prečo sa plná krivka volá efektívnou hranicou.

- "Za ňou sa už neoplatí investovať, pred ňou sa neoplatí ponúknuť."
- "Krivka určuje možnosti, pri ktorých môžeme s najväčšou istotou predvídať situácie."
- "Pretože naznačuje efektívnu (maximálnu) výnosnosť pri danom riziku."
- "Portfóliá na nej majú optimálny pomer rizikovosti a výnosnosti. Menšie riziko v reálnom svete nie je možné."
- "Hranica, kde je dobrý výnos za prijateľné riziko."

(g) Ktoré z portfólií A a C je lepšie? Ako táto otázka súvisí s úlohou č. 1.?

- "Nedá sa určiť, závisí to od preferencií investora. Obe sú na efektívnej hranici."
- "Pre ľudí, ktorí viac riskujú, je výhodnejšie C, pre opatrnejších A."
- "S prvou otázkou súvisí tak, že neexistuje správna odpoveď, ale záleží na subjektívnom úsudku podľa osobnosti človeka."

V časti príkladu (h) zoradilo portfóliá veľa žiakov "správne". Pod "správne" myslíme to, že skoro všetci žiaci zoradili portfóliá tak, že boli kompatibilné s odpoveďou v otázke dva, o type investora. Príklad neriešilo iba 5 študentov.

Celkovú úspešnosť žiakov, ktorí riešili druhý test, nevieme presne vyčíslieť vzhľadom na to, že niektoré príklady majú viac správnych riešení, alebo dokonca všetky riešenia správne. Zaujímavý je pre nás fakt, že úlohy riešilo v priemere až 86,7 % študentov.

3.3 Najdôležitejšie postrehy z testovania

Pri testovaní na gymnáziách a vyhodnocovaní riešení žiakov sme si všimli niekoľko zaujímavostí, ktoré nám môžu pomôcť pri tvorení zbierky úloh z finančnej matematiky. V nasledujúcej časti uvádzame ich stručný prehľad.

1. Žiaci pri riešení prvého testu robili chyby, ktorých percentuálnu početnosť môžeme vidieť na Obr. 3 z časti 3.1. Pri tvorbe zbierky úloh sa chceme zamerať aj na odstránenie týchto chýb.
2. Existuje veľký percentuálny rozdiel medzi tým, koľko príkladov riešili žiaci v prvom teste a koľko v druhom teste. V prvom teste bolo riešených 71,2 % príkladov a v druhom teste 86,7 %. Spomenuté percentá nám hovoria o tom, že druhý test bol pre žiakov stredných škôl zaujímavejší alebo ľahší. Je zaujímavé, že napriek tomu, že išlo o nové učivo, druhý test riešilo viac žiakov. Pri tvorbe druhého testu sme predpokladali, že ho bude riešiť menší počet žiakov zo strachu z nového učiva.
3. Pri testovaní sa tiež ukázalo, že druháci mali nižšiu percentuálnu úspešnosť ako tretiaci a štvrtáci. Pri tvorbe testov sme nepredpokladali veľký rozdiel v úspešnosti týchto dvoch skupín žiakov.
4. Až 21,7 % príkladov žiaci nezačali riešiť. Niektorí z dôvodu nedostatočných vedomostí, iní pre nedostatok času.
5. Žiaci sú schopní pochopiť základné finančné pojmy z krátkej pomôcky a vysvetľujúceho príkladu. Sú ochotní si sami naštudovať neznáme - nové pojmy a využiť ich pri danom probléme.

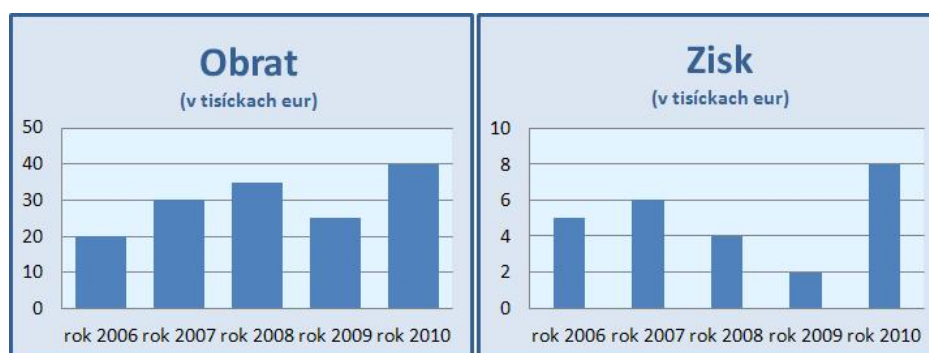
4 Zbierka úloh z finančnej matematiky

Hlavnou časťou bakalárskej práce je zbierka úloh z finančnej matematiky pre stredné školy. Je rozdelená na dve väčšie časti: 1. "Úroky, pôžičky, sporenie a splácanie", 2. "Kam investovať?". Obidve časti obsahujú iba príklady na precvičenie učiva z danej oblasti finančnej matematiky.

4.1 Prvá časť: Úroky, pôžičky, sporenie a splácanie.

4.1.1 Percentá a iné základné pojmy

1. Na Obr. 5 môžeme vidieť celkový obrat spoločnosti Šerpa v tisíckach eur a časť z obratu - zisk spoločnosti Šerpa.



Obr. 5: Obrázok k príkladu 1 z časti 4.1.1 zo zbierky úloh - obrat a zisk spoločnosti Šerpa.

- (a) Aký je priemerný zisk firmy Šerpa od roku 2006 do roku 2010 vrátane?
 - (b) Pre všetky roky od roku 2007 vypočítajte alebo z obrázku vyčítajte percentuálny nárast zisku oproti minulému roku. V ktorom z rokov 2007 – 2010 bol zaznamenaný najväčší percentuálny nárast zisku oproti minulému roku?
 - (c) Vypočítajte, akú časť obratu tvorí zisk (v percentách), pre rok 2006 a 2008. V ktorom z týchto dvoch rokov je zisk väčšou časťou obratu?
 - (d) Spoločnosť Šerpa považuje za „dobrý rok“ taký rok, kde zisk tvorí aspoň 20 % z obratu. Ktoré roky od 2006 do 2010 sú pre spoločnosť Šerpa „dobrými rokmi“?
2. Na knihu vo výpredaji je zľava 15 %. Pôvodná cena knihy je 45 eur. Aká je nová cena knihy vo výpredaji?
 3. Nový počítač stojí 550 eur. DPH tvorí 20 % z ceny tovaru. Koľko eur z ceny počítača tvorí DPH?

4. Predpokladajme, že ročná miera inflácie je 4 %. (Ak niečo na začiatku roka stojí 100 eur, na začiatku nasledujúceho roka to bude stáť 104 eur.) Cena tovaru na začiatku roka je 52 eur. Aká bude cena toho istého tovaru na začiatku ďalšieho roka?
5. Amortizácia (znehodnotenie) auta predstavuje pokles ceny auta o 25 % za rok. Cena ročného ojazdeného auta je 18 000 eur. Koľko stálo nové auto?
6. Banka ponúka pôžičku 250 eur za podmienky, že po roku vrátiš 260 eur. Koľko percent je zisk banky z tejto pôžičky?
7. Odberateľ, ktorý prebral objednaný tovar v hodnote 1 500 eur, nezaplatil faktúru do požadovaného termínu 9.10.2011. Podľa dohody sa suma, ktorú má zaplatiť každým ďalším začatým dňom navýši o 0,5 % (z pôvodnej sumy). Akú sumu musel odberateľ zaplatiť 15.10.2011?
8. Odberateľ, ktorý prebral objednaný tovar v hodnote 1 500 eur, nezaplatil faktúru do požadovaného termínu 9.10.2011. Podľa dohody sa suma, ktorú má zaplatiť každým ďalším začatým dňom navýši o 0,5 % (z pôvodnej sumy) po dobu 8.11.2011 a neskôr (od 9.11.2011) o 5 % (z pôvodnej sumy). Akú sumu musel odberateľ zaplatiť 15.11.2011?
9. Ak by ste boli veriteľom, ktorá z nasledujúcich úrokových mier by bola pre vás najvýhodnejšia?
 - (a) 4 %
 - (b) 9 %
 - (c) 2,5 %
10. Ktorá z možností (a), (b) a (c), uvedených v príklade 9, by bola pre vás najvýhodnejšia, ak by ste boli dlžníkom?
11. Banka ti požičia 350 eur a o rok jej máš vrátiť 375 eur. Aký je pri týchto podmienkach úrok (v eurách), ročná úroková miera (v percentách) a úroková sadzba?
12. Ročná úroková miera banky je 5 %. Vklad do banky bol 500 eur. Vypočítajte úrok v eurách a úrokovú sadzbu.

4.1.2 Jednoduché úrokovanie a úrokovanie na dobu kratšiu ako rok

13. Rodičia ti na Vianoce zriadili vkladnú knižku s ročnou úrokovou mierou 2 %. Po roku si si z nej vybral všetky peniaze - presne 107,1 eur. Koľko peňazí ti rodičia dali na narodeniny pred rokom?
14. Babka ti poslala 500 eur. Chceš ich ušetriť a preto si chceš zriadiť účet, na ktorý si peniaze na určitú dobu odložíš. V banke ti poskytnú nasledujúce možnosti:
- (a) Účet pre študentov, ktorého zriadenie je bez poplatkov a ročná úroková miera je 0,2 %.
 - (b) Sporiaci účet, ktorého zriadenie stojí 10 eur, ale ročná úroková miera je 1,5 %.

Ktorá možnosť je pre teba výhodnejšia, ak si chceš uložiť peniaze na jeden rok?

15. Predstav si, že máš našetrených 785 eur. Máš dve možnosti čo s nimi môžeš urobiť:
- (a) Vložiť ich do banky s ročnou úrokovou mierou 0,7 %.
 - (b) Odložiť si ich k rodičom, ktorí ti na konci roka pridajú k pôvodnej sume 6 eur.
- I. Ktorá možnosť je pre teba výhodnejšia?
- II. Do akej sumy, ktorú chceš odložiť, je pre teba lepšia ponuka č. 2, pri akej sume si indiferentný (je ti jedno, či vložíš peniaze do banky alebo ich dáš rodičom), kedy sa stáva lepšou ponuka č. 1?
- III. Pri akej úrokovej miere banky, by ti bolo jedno či peniaze odložíš k rodičom alebo ich vložíš do banky?
16. Chceš si ako študent založiť študentský účet a vložiť naň 858 eur. Máš na výber z dvoch ponúk dvoch rôznych bánk:
- (a) Wuba banka ti ponúka štartovacie konto, ktoré je bez poplatkov za vedenie účtu a po roku budeš mať 858,0858 eur.
 - (b) Tralala banka ti ponúka účet pre mladých do 26 rokov, tiež bez poplatkov a po roku budeš mať na účte 858,858 eur.

Aká je úroková miera na vybraných účtoch vo Wuba banke a Tralala banke?

17. Chceš si kúpiť nový, lepší počítač a musíš si na neho ušetriť presne 800 eur. Koľko musíš teraz vložiť do banky pri ročnej úrokovej miere 5 % aby si v čase dodania počítača (o 2 mesiace) mal k dispozícii danú čiastku?
18. Kamarát ti požičal 100 eur s tým, že mu za 8 mesiacov vrátiš 107 eur. Aká je ročná úroková miera pri takýchto podmienkach?
19. Na začiatku roka si si zriadil účet a vložil si si naňho 1 000 eur, ročná úroková miera je 0,5 %. Koľko peňazí budeš mať na účte o 3 mesiace?
20. Investor chce mať o 26 týždňov 10 000 eur pri ročnej úrokovej miere 10,58 %. Koľko musí teraz vložiť na účet?
21. Investor chce vložiť na účet 9 563 eur. Aká by musela byť ročná úroková miera aby po 26 týždňoch mal na účte 10 000 eur?
22. Na koľko dní vložil kamarát peniaze, presne 2 150 eur, do banky, ak ročná úroková miera bola 6 % a na konci dostal 2 192,41 eur?
23. Zaujímáš sa o kúpu cenného papiera na 13 týždňov. Ak by si kúpil cenný papier za 9 776 eur a jeho hodnota po 13-tich týždňoch by bola 10 000, aká by bola ročná úroková miera?
24. Aký veľký bude úrok na konci roka 2011 ak ročná úroková miera je 4 % a pohyb peňazí na tvojom účte vyzeral nasledovne:
 - Dňa 8. 8. 2011 – založenie účtu a vklad 1 000 eur.
 - Dňa 10. 10. 2011 – vklad 50 eur.
 - Dňa 27. 12. 2011 – vklad 200 eur.
25. Kúpiš si nové auto a rozhodneš sa predať staré svojmu priateľovi. Dohodnete sa, že cenu auta – 3 500 eur ti zaplatí o 270 dní spolu s úrokom, kde ročná úroková miera je 10 %. O tri mesiace neskôr (o 90 dní) zistíš, že potrebuješ peniaze. Zoberieš si teda pôžičku od banky vo výške 3 550 eur, za podmienky, že všetko, čo dostaneš o 180 dní od kamaráta za auto, dáš hneď ako splátku dlhu banke.
 - (a) Koľko eur je ti zaviazaný vrátiť kamarát o 270 dní od kúpy auta?
 - (b) Aká veľká je ročná úroková miera banky, ktorá požičia peniaze tebe?

26. Predávaš dom a poslednú časť platby za dom - 10 000 eur ti klient vyplatí až o 90 dní spolu s úrokom, kde ročná úroková miera je 12 %. O 60 dní však zistíš, že ti chýbajú peniaze na zaplatenie nového domu. Požičiaš si teda od banky 10 170 eur na 30 dní s tým, že všetko, čo ti splatí klient, vrátiš rovno banke.
- (a) Koľko eur je ti zaviazaný vrátiť kamarát o 90 dní?
- (b) Aká veľká je ročná úroková miera banky, ktorá požičia peniaze tebe?

4.1.3 Zložené úrokovanie

27. V deň tvojho narodenia ti rodičia vložili do banky na sporiaci účet 10 000 eur s ročnou úrokovou mierou 2 %. V banke, kde peniaze vložili, sa úrokuje vždy na začiatku mesiaca (teda 12 krát ročne). Aká bude hodnota tohto vkladu v deň tvojich osemnástich narodenín?
28. Koľko eur by si musel vložiť do banky, ktorá úrokuje dvakrát ročne ročnou úrokovou mierou 8 %, aby si na úrokoch zarobil 1 000 eur za
- (a) tri roky?
- (b) šesť rokov?
29. Babka ti poslala 500 eur. Chceš ich ušetriť a preto si chceš zriadiť účet, na ktorý si peniaze na určitú dobu odložíš. Banky ti poskytnú nasledujúce možnosti:
- (a) WUBa banka ti ponúka účet, ktorého ročná úroková miera je 5 % (pričom úrokujú jeden krát ročne – zloženým úrokováním).
- (b) T.A. banka ti ponúka účet, ktorého ročná úroková miera je 5 % (pričom úrokujú dva krát ročne – zloženým úrokováním).
- (c) MUF banka ti ponúka účet, ktorého ročná úroková miera je 5 % (pričom úrokujú desať krát ročne – zloženým úrokováním).
- I. Vypočítaj, akú hodnotu budú mať peniaze od babky po roku, ak ich vložíš do banky WUBa, T.A. a MUF.
- II. Vypočítaj, akú hodnotu budú mať peniaze od babky po dvoch rokoch, ak ich vložíš do banky WUBa, T.A. a MUF.
- III. Aká by musela byť ročná úroková miera vo WUBa banke, aby jej ponuka bola rovnako výhodná ako ponuka MUF banky?

- IV. Znázorni graficky, ako sa budú meniť s časom tvoje úspory, ak vložíš peniaze do WUBa banky a ak vložíš peniaze do MUF banky. (Predpokladaj, že úroky banky pripisujú vždy na konci úrokového obdobia, teda vo WUBa banke na konci roka a v MUF banke na konci desiatín roka.)
- V. Znázorni graficky, ako sa budú meniť s časom tvoje úspory, ak vložíš peniaze do WUBa banky a ak vložíš peniaze do MUF banky (Predpokladaj, že úroky banky pripisujú stále.)
30. Ktorá investícia je lepšia a prečo: uložiť peniaze do banky, kde úrokujú raz ročne a ročná úroková miera je 9 % alebo do banky, kde úrokujú mesačne a ročná úroková miera je 8,7 %?
31. Ktorá investícia je lepšia a prečo: uložiť peniaze do banky, kde úrokujú raz ročne a ročná úroková miera je 5 % alebo do banky, kde úrokujú štvrtťorčne a ročná úroková miera je 4,9 %?
32. Koľko rokov by trvalo, kým by si mal z 5 000 eur 7 000 eur pri vklade na sporiaci účet v banke, kde ročná úroková miera je 8 % a úrokuje sa štvrtťorčne? (Ak počet rokov nie je presné číslo, berieme do úvahy prvý rok, keď hodnota investície presiahne 7 000 eur.)
33. O koľko rokov sa tvoja investícia zdvojnásobí, ak je ročná úroková miera 14 % a úrokuje sa mesačne? (Ak počet rokov nie je presné číslo, berieme do úvahy prvý rok, keď je hodnota investície väčšia ako dvojnásobok.)
34. Novomanželia majú našetrených 100 000 eur. Dom, ktorý sa im páči, stojí 120 000 eur. O koľko rokov si budú môcť kúpiť dom, ak ročná úroková miera je 9 % a úrokuje sa denne?
35. Brat si chce kúpiť nový počítač a preto si šetrí peniaze. Koľko musí vložiť do banky s ročnou úrokovou mierou 2 % a denným úrokovaním, aby si po polroku mohol kúpiť počítač, ktorý stojí 800 eur?
36. Máš 30 000 eur a chceš ich na rok uložiť do banky. Prvá banka ti ponúka pripisovanie úrokov každý mesiac s ročnou úrokovou mierou 2,5 % - pri ľubovoľne vysokom vklade na jeden rok. Druhá banka ti ponúkla, že pri výške terminovaného vkladu 30 000 eur na jeden rok ti nebude pripisovať úroky, ale už teraz, v čase vloženia peňazí na účet, ti dá 740 eur „na ruku“. Ktorá banka ti ponúka výhodnejšie podmienky? (Opíš aj slovne prečo.)

4.1.4 Pravidelné vklady a výbery

37. Pomocou vzorca na výpočet súčtu geometrickej postupnosti vypočítajte súčet geometrickej postupnosti: $1000 + 1000 \cdot (1,02) + 1000 \cdot (1,02)^2 + \dots + 1000 \cdot (1,02)^9$.
38. Každoročne na Nový rok dostaneš od rodičov vreckové – 600 eur na nasledujúci rok. Ty však vieš, že za rok minieš len 300 eur, preto zvyšných 300 eur vkladáš na začiatku roka do banky, ktorá úrokuje raz ročne a jej ročná úroková miera je 3 %.
- (a) Koľko peňazí budeš mať v banke po pripísaní úrokov na konci prvého roka?
 - (b) Koľko peňazí budeš mať v banke po pripísaní úrokov na konci druhého roka?
 - (c) Koľko peňazí budeš mať v banke po pripísaní úrokov na konci tretieho roka?
 - (d) Koľko peňazí budeš mať v banke po pripísaní úrokov na konci desiateho roka? Príklad vypočítajte aj s použitím vzorca na výpočet geometrickej postupnosti.
 - (e) Čomu sa v našom prípade rovná n a čo v našom príklade predstavuje? Čomu sa rovná q ? Čo musíme vyňať pred zátvorku, aby sme mohli použiť spomínaný vzorec?
39. Na začiatku každého mesiaca vkladáš na účet 100 eur. Banka, v ktorej máš založený účet, úrokuje mesačne ročnou úrokovou mierou 12 %.
- (a) Vypočítaj, aké množstvo peňazí budeš mať na účte po roku.
 - (b) Za koľko mesiacov množstvo ušetrených peňazí na tvojom účte presiahne prvý krát 1 050 eur?
40. Pravidelne na začiatku roka vkladáš 1 000 eur na stavebné sporenie. Štát podporuje mladých ľudí pri sporení na bývanie a preto každému, kto vloží na sporiaci účet viac ako 999 eur pripíše hneď pri vklade 50 eur na ten istý účet ako štátnu prémieu. Banka, v ktorej máš zriadený sporiaci účet, má navyše výhodnú ročnú úrokovú mieru 2 % a úrokuje jeden krát ročne. Akú sumu peňazí budeš mať na sporiacom účte na konci siedmeho roka?
41. Banka má dva typy účtov, kde výška úrokovej miery závisí od množstva peňazí na účte. „Bežný účet“, kde ročná úroková miera je 6 % a je prístupný pre všetkých bez ohľadu na výšku vkladu. „Extra účet“, ktorý získaš automaticky, keď máš v banke odložených viac ako 13 000 eur, kde ročná úroková miera je 8 %.

V oboch prípadoch sa úrokuje raz ročne a úroky sa pripisujú na konci úrokového obdobia. Každoročne si odkladáš 4 000 eur do banky. Vypočítajte celkové množstvo ušetrených peňazí za 8 rokov.

42. Za 5 rokov si chceš kúpiť nové auto za 15 000 eur. Koľko si musíš každoročne (na začiatku roku) odložiť (vždy rovnakú sumu), aby si si ho na konci 5. roku mohol dovoliť pri ročnej úrokovej miere $r=1\%$?
- (a) Príklad vyrátajte bez použitia vzorca na výpočet geometrickej postupnosti.
 - (b) Príklad vypočítajte s použitím vzorca na výpočet súčtu geometrickej postupnosti.
 - (c) Ako by sa zmenila výška vkladov, keby sa zvýšila ročná úroková miera na $r=2\%$?
 - (d) Ako by sa zmenila výška vkladov, keby sa znížila ročná úroková miera na $r=0,5\%$?
43. Po dvojmesačnej brigáde v zahraničí si si zriadil účet s ročnou úrokovou mierou 2% a ročným úrokováním, a vložil na neho 2 500 eur. O rok neskôr, po pripísaní úrokov, si si z účtu vybral 200 eur a tak isto ďalších deväť rokov.
- (a) Akú sumu budeš mať na svojom účte po 1. výbere z účtu?
 - (b) Akú sumu budeš mať na svojom účte po 2. výbere z účtu?
 - (c) Akú sumu budeš mať na svojom účte po 10. výbere z účtu?
44. Pri zápise na vysokú školu ti starý rodičia zriadili účet, na ktorý ti dali 2 000 eur ako príspevok na štúdium. Každý ďalší rok štúdia, po pripísaní úrokov za predchádzajúci rok, si z účtu vybral 500 eur a to presne štyri krát. Banka, v ktorej máš účet zriadený úrokuje raz ročne, ročnou úrokovou mierou 3% . Aká suma ti ostane na účte po štvrtom výbere?
45. Aký najmenší musí byť tvoj vklad do banky, ktorá úrokuje jeden krát ročne a ročná úroková miera je 1% , keď každý rok, po dobu 5 rokov, chceš na konci roka vybrať z banky 100 eur?

4.1.5 Splácanie dlhov: pôžičky a hypotéky

46. Doplňte chýbajúce údaje v splátkovom kalendári (Tabuľka 1) a tým overte, či sa dá splatiť dlh 2 000 eur troma mesačnými splátkami vo výške 680,04 eur, ak ročná úroková miera je 12% .

Tabuľka 1: Splátkový kalendár k príkladu 46 z časti 4.1.5 zo zbierky úloh.

	časťka, ktorú dlžíme
dlh	2 000 eur
po pripočítaní úrokov za 1. mesiac	
po odpočítaní 1. splátky	
po pripočítaní úrokov za 2. mesiac	
po odpočítaní 2. splátky	
po pripočítaní úrokov za 3. mesiac	
po odpočítaní 3. splátky	0 eur

47. Určte výšku ročných splátok, potrebných na splatenie pôžičky 10 000 eur, ak je splácaná 10 rokov a ročná úroková miera je 12 %.
48. Pôžička 70 000 eur sa má splácať 25 rokov rovnako veľkými mesačnými splátkami. Ročná úroková miera banky je na celú dobu splácania dlhu dohodnutá na 9 %.
- Určte veľkosť mesačných splátok, potrebných na splatenie pôžičky.
 - Vypočítajte, ako by sa zmenila mesačná splátka v prípade, ak by sa dĺžka splácania predĺžila na 30 rokov.
 - Vypočítajte, ako by sa zmenila mesačná splátka v prípade, ak by sa dĺžka splácania znížila na 20 rokov.
 - Vo všetkých troch prípadoch vypočítajte, koľko peňazí zaplatíme banke ako úrok.
49. Od kamaráta si požičiaš 1 000 eur. Dohodnete sa, že mu ich vrátiš dvomi splátkami po 600 eur (prvá splátka po polroku, druhá po roku). Na akej ročnej úrokovej miere ste sa teda dohodli?
50. Banka ponúka pôžičku na rok s ročnou úrokovou mierou 25 % a mesačným splácaním. Ty vieš splácať mesačne 250 eur. Akú najväčšiu pôžičku si môžeš zobrať pri takýchto podmienkach? Akú pôžičku by si si mohol zobrať:
- ak by sa ročná úroková miera zmenšila na 20 %?
 - ak by si vedel mesačnú splátku zvýšiť na 350 eur?

4.1.6 Výsledky

- (a) 5 tisíc eur

- (b) rok 2007 - zvýšenie o 20 %, rok 2008 - zníženie o 33,33 %, rok 2009 - zníženie o 50 %, rok 2010 - zvýšenie o 300 %
 - (c) rok 2006 - 25 %, rok 2008 - 11,43 %
 - (d) pre spoločnosť boli dobrými rokmi roky 2006, 2007 a 2010
- 2. 38,25 eur
 - 3. 110 eur
 - 4. 54,08 eur
 - 5. 24 000 eur
 - 6. 4 %
 - 7. 1 545 eur
 - 8. 2 250 eur
 - 9. (b)
 - 10. (c)
 - 11. úrok - 25 eur, ročná úroková miera - 7,14 %, úroková sadzba - 0,0714
 - 12. úrok - 25 eur, úroková sadzba - 0,05
 - 13. 105 eur
 - 14. možnosť (a)
 - 15. I. možnosť (b)
 - II. ak $PV = 857,14$ tak mi je to jedno, či zvolím prvú alebo druhú možnosť,
ak je $PV < 857,14$ tak sa mi viac oplatí odložiť peniaze k rodičom,
ak je $PV > 857,14$ tak sa mi viac oplatí vložiť peniaze do banky
 - III. 0,764 %
 - 16. úroková miera vo Wuba banke je 0,01 %, v Tralala banke 0,1 %
 - 17. 793,39 eur
 - 18. 10,5 %
 - 19. 1 001,25 eur

20. 9 498,89 eur
21. 9,16 %
22. 120 dní (po zaokrúhlení na celé čísla)
23. 9,19 %
24. 1 266,57 eur
25. (a) 3 758,9 eur
(b) 11,93 %
26. (a) 10 295,89 eur
(b) 15,06 %
27. 14 329 eur
28. (a) 3 769,05 eur
(b) 1 663,8 eur
29. I. WUBa - 525 eur, T.A. - 525,31 eur, MUF - 525,57 eur
II. WUBa - 551,25 eur, T.A. - 551,91 eur, MUF - 552,45 eur
III. 5,11 %
IV. riešenie príkladu v súbore MS Excel (Príloha F)
V. riešenie príkladu v súbore MS Excel (Príloha F)
30. druhá investícia je lepšia
31. prvá investícia je lepšia
32. päť rokov
33. o päť rokov
34. o tri roky
35. 792,04 eur
36. druhá banka ponúka lepšie podmienky
37. 10 949,72

38. (a) 309 eur
 (b) 627,27 eur
 (c) 955,09 eur
 (d) 3 542,34 eur
 (e) $n=10$ predstavuje počet rokov sporenia, $q = 1,03$, musíme vyňať $(300 \cdot 1,03)$
39. (a) 1 280,93 eur
 (b) po desiatich mesiacoch
40. 7 962,12 eur
41. 45 177,38 eur
42. (a) 2 911,48 eur
 (b) 2 911,48 eur
 (c) výška ročného vkladu by sa znížila o 85,62 eur
 (d) výška ročného vkladu by sa zvýšila o 43,89 eur
43. (a) 2 350 eur
 (b) 2 197,97 eur
 (c) 857,54 eur
44. 159,2 eur
45. 485,34 eur

Tabuľka 2: Tabuľka výsledkov k príkladu 46 z časti 4.1.5 zo zbierky úloh.

	čiastka, ktorú dlžíme
dlh	2 000 eur
po pripočítaní úrokov za 1. mesiac	2 020 eur
po odpočítaní 1. splátky	1 339,96 eur
po pripočítaní úrokov za 2. mesiac	1 353,36 eur
po odpočítaní 2. splátky	673,32 eur
po pripočítaní úrokov za 3. mesiac	680,05
po odpočítaní 3. splátky	0,01 (chyba vzniknutá zaokrúhľovaním)

46. Tabuľka 2

47. 1 769,84 eur

48. (a) 587,44 eur

(b) 563,24 eur

(c) 629,81 eur

(d) 106 232 eur, 132 766,4 eur, 81 154,4 eur

49. 26,13 %

50. 2 630,36 eur

(a) 2 698,78 eur

(b) 3 682,5 eur

4.2 Druhá časť: Kam investovať?

4.2.1 Výnosnosť aktíva

1. Chceš investovať 1 000 eur na jeden rok. Máš na výber dve možnosti:
 - (a) Vložiť do banky s úrokovou mierou 1 % a úrokováním raz ročne.
 - (b) Kúpiť firemnú akciu, s ktorou získaš na konci roka 200 eur s pravdepodobnosťou $1/2$ alebo stratíš 100 eur s pravdepodobnosťou $1/2$.
 - I. Aký bude tvoj zisk pri prvej možnosti? (Zisk uveď v eurách aj percentách z vkladu.)
 - II. Aký bude tvoj očakávaný (priemerný) zisk pri druhej možnosti? (Zisk uveď v eurách aj percentách z vkladu.)
2. Chceš investovať 5 000 eur na jeden rok. Máš na výber dve možnosti:
 - (a) Vložiť do banky s úrokom 3 % a úrokováním raz ročne.
 - (b) Vložiť do banky s úrokom 2,9 % a mesačným úrokováním.
 - (c) Kúpiť firemnú akciu, s ktorou získaš na konci roka 500 eur s pravdepodobnosťou $1/2$ alebo stratíš 200 eur s pravdepodobnosťou $1/2$.
 - I. Aký bude tvoj zisk pri prvej možnosti? (Zisk uveď v eurách aj percentách z vkladu.)
 - II. Aký bude tvoj zisk pri druhej možnosti? (Zisk uveď v eurách aj percentách z vkladu.)
 - III. Aký bude tvoj očakávaný (priemerný) zisk pri tretej možnosti? (Zisk uveď v eurách aj percentách z vkladu.)
3. Chceš investovať 2 000 eur na jeden rok. Ponúknem ti možnosť investovať do aktíva, z ktorého budeš mať po jednom roku s pravdepodobnosťou $1/3$ stratu 600 eur, s pravdepodobnosťou $1/3$ zisk 400 eur a s pravdepodobnosťou $1/3$ zisk 800 eur.
 - (a) Koľko peňazí (v priemere) očakávaš, že budeš mať o rok, keď budeš investovať do tohto aktíva?
 - (b) Aký bude očakávaný výnos aktíva (tvoj zisk v pomere k vlozenej sume) po jednom roku? (Výsledok uveď v percentách.)
4. Máš na výber dve investície:

A: Hádzanie kockou:

- keď padne 1 alebo 6 získaš 30 % z investície navyše,
- keď padne 2 alebo 5 získaš 10 % z investície navyše,
- keď padne 3 alebo 4 stratíš 25 % z investície.

B: Hádzanie mincou :

- keď padne rub získaš 50 % z investície navyše,
- keď padne líce stratíš 30 % z investície.

Aký je očakávaný (priemerný) výnos z investícií A a B v percentách? Ktorá z investícií je výhodnejšia v tom, že má vyšší očakávaný výnos?

5. Máš na výber dve investície:

C: Hádzanie kockou:

- keď padne 1 získaš 40 % z investície navyše,
- keď padne 2 získaš 30 % z investície navyše,
- keď padne 3 získaš 20 % z investície navyše.
- keď padne 4 získaš 10 % z investície navyše,
- keď padne 5 nezískaš ani nestratíš nič,
- keď padne 6 stratíš 25 % z investície.

D: Hádzanie mincou :

- keď padne rub získaš 35 % z investície navyše,
- keď padne líce stratíš 10 % z investície.

Aký je očakávaný (priemerný) výnos z investícií C a D v percentách? Ktorá z investícií je výhodnejšia v tom, že má vyšší očakávaný výnos?

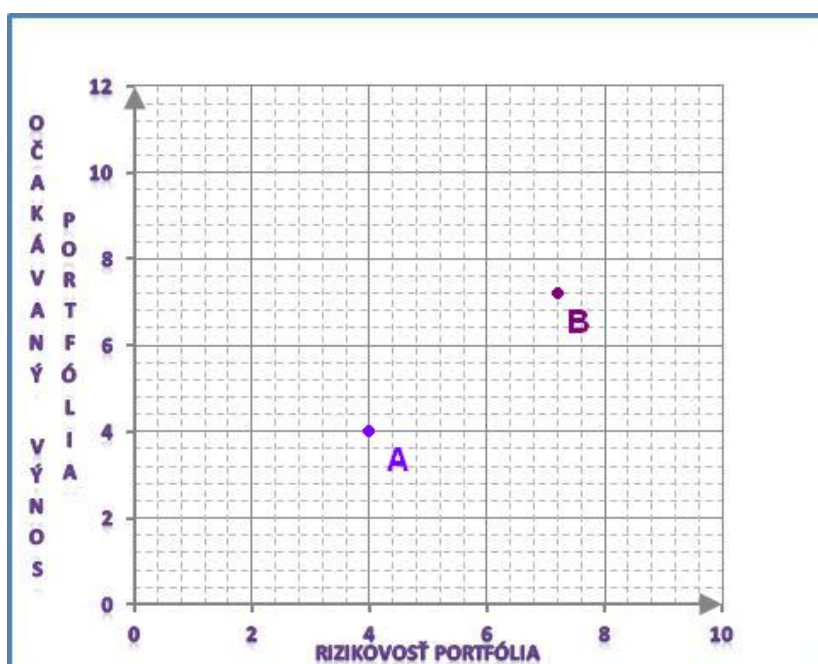
4.2.2 Rizikovosť aktíva

6. V stávkovej kancelárii ti ponúkajú stierateľný kupón. S pravdepodobnosťou $1/2$ vyhráš 100 eur a s pravdepodobnosťou $1/2$ nevyhráš nič.

(a) Koľko si ochotný zaplatiť za stierateľný kupón?

(b) Aký typ investora si? Rizikovo averzný, neutrálny alebo riziko obľubujúci?

7. V stávkovej kancelárii ti ponúkajú stierateľný kupón. S pravdepodobnosťou $1/3$ vyhráš 100 eur, s pravdepodobnosťou $1/3$ vyhráš 50 eur a s pravdepodobnosťou $1/3$ nevyhráš nič.
- (a) Aký typ investora je človek, ktorý je ochotný zaplatiť za kupón 49 eur?
- (b) Aký typ investora je človek, ktorý je ochotný zaplatiť za kupón 50 eur?
- (c) Aký typ investora je človek, ktorý je ochotný zaplatiť za kupón 80 eur?
8. Berme do úvahy investície (a), (b) a (c) z príkladu 2. Na základe výsledkov príkladu 2 urči, ktorú z investícií si zrejme vyberie rizikovo averzný investor a ktorú riziko obľubujúci investor? Prečo?
9. Berme do úvahy investície A a B z príkladu 4. Ktorá z dvoch investícií je zrejme menej riziková? Opíš slovne prečo.
10. Berme do úvahy investície C a D z príkladu 5. Ktorá z dvoch investícií je zrejme menej riziková? Opíš slovne prečo.
11. Na Obr.6 vidíme dve portfólia A a B.



Obr. 6: Obrázok k príkladu 11 z časti 4.2.2 zo zbierky úloh.

- (a) Ktorá z investícií A a B bude zrejme lepšia pre rizikovo averzného investora?
- (b) Ktorá z investícií A a B bude zrejme lepšia pre riziko obľubujúceho investora?

12. Máš na výber dve investície:

- (a) Investíciu, pri ktorej s pravdepodobnosťou $1/2$ získaš 20 % z vkladu a s pravdepodobnosťou $1/2$ stratíš 10 % z vkladu.
- (b) Investíciu, pri ktorej s pravdepodobnosťou $1/2$ získaš 40 % z vkladu a s pravdepodobnosťou $1/2$ stratíš 20 % z vkladu.

I. Ktorá investícia bude zrejme lepšia pre rizikovo averzného investora?

II. Ktorá investícia bude zrejme lepšia pre riziko obľubujúceho investora?

13. Na finančnom trhu existujú rôzne druhy aktív. Napríklad: štátny dlhopis, akcia firmy.

- (a) Ktoré z dvoch aktív bude zrejme menej rizikové a ktoré viac?
- (b) Ktoré z dvoch aktív bude zrejme lepšie pre riziko obľubujúceho investora?

4.2.3 Diverzifikácia portfólia

14. V Tabuľke 3 vidíme zoznam piatich rovnako rizikových akcií. Podľa princípu diverzifikácie portfólia urči, z ktorých dvoch akcií by si portfólio netvoril. Nájdi dve takéto dvojice a opíš slovne prečo.

Tabuľka 3: Zoznam akcií k príkladu 14 z časti 4.2.3 zo zbierky úloh.

A	akcia firmy zameranej na výrobu automobilových komponentov
B	akcia firmy zameranej na výrobu dverí
C	akcia firmy zameranej na maliarske práce
D	akcia firmy zameranej na výmenu dverí
E	akcia firmy zameranej na výrobu automobilov

15. Ktoré tri akcie z akcií A - E (z Tabuľky 3), by si si vybral do portfólia tak, aby bolo čo najmenej rizikové podľa princípu diverzifikácie portfólia?

16. V príklade 12 je viac správnych riešení. Koľko ich je?

17. Z akcií A - E (z Tabuľky 3) sme vytvorili portfóliá F - J uvedené v Tabuľke 4.

- (a) Ktoré z portfólií F a H bude zrejme menej rizikové podľa princípu diverzifikácie portfólia?

- (b) Ktoré z portfólií I a J bude zrejme menej rizikové podľa princípu diverzifikácie portfólia?
- (c) Zoraď portfóliá F - J od najmenej po najviac rizikové podľa princípu diverzifikácie portfólia.

Tabuľka 4: Zoznam portfólií k príkladu 17 z časti 4.2.3 zo zbierky úloh.

Portfólio F	je zložené z akcií A a D
Portfólio G	je zložené z akcií A a E
Portfólio H	je zložené iba z akcií A
Portfólio I	je zložené z akcií A, C, D
Portfólio J	je zložené z akcií A, B, E

4.2.4 Iné príklady spojené s výberom portfólia

18. V Tabuľke 5 sú uvedené rizikovosť a výnosnosť portfólií P1 - P4. Ktoré portfólio je najlepšie bez ohľadu na postoj investora k riziku?

Tabuľka 5: Tabuľka k príkladu 18 z časti 4.2.4 zo zbierky úloh.

Portfólio:	rizikovosť	výnosnosť
P1	2,5	3,6
P2	2,5	4,4
P3	3,4	4,3
P4	1,5	4,5

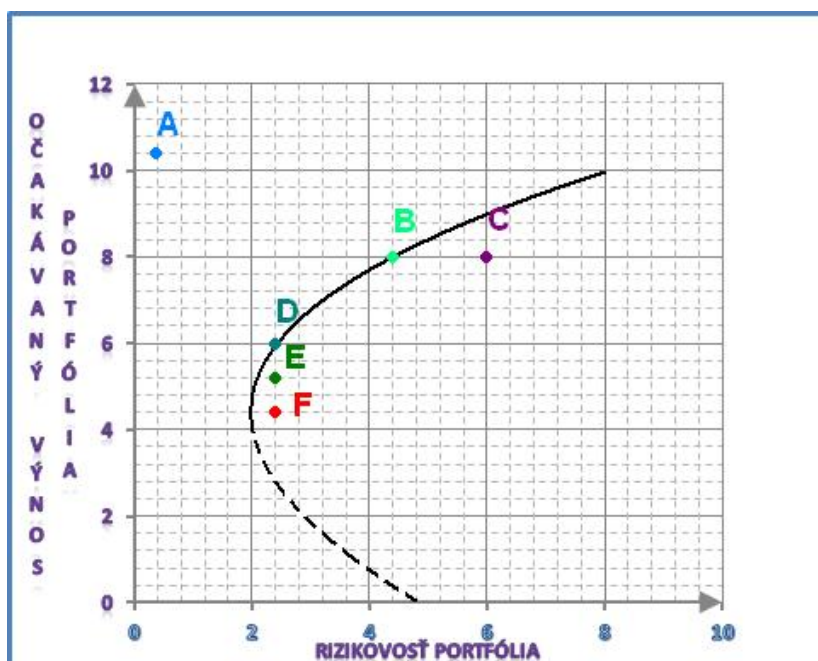
Tabuľka 6: Tabuľka k príkladu 19 z časti 4.2.4 zo zbierky úloh.

Portfólio:	rizikovosť	výnosnosť
A	3,6	5,6
B	5,6	5,6
C	9,2	8,8
D	10,4	8,8
E	3,5	5,7
F	3,6	3,6
G	10,4	2,8

19. V Tabuľke 6 sú uvedené rizikovosť a výnosnosť portfólií A - G.

- Ktoré z portfólií A - G by ste jednoznačne vylúčili pri rozhodovaní sa medzi portfóliami? (Bez ohľadu na postoj k riziku.) Prečo?
- Ktoré z portfólií, ktoré si nevyhlúčil bude lepšie pre rizikovo averzného investora?
- Ktoré z portfólií, ktoré si nevyhlúčil bude lepšie pre riziko obľubujúceho investora?

20. Na Obr. 7 sú znázornené, v podobe bodov A - F, rôzne portfólia a plná krivka tzv. efektívna hranica.



Obr. 7: Obrázok k príkladu 20 z časti 4.2.4 zo zbierky úloh.

- Doplňte Tabuľku 7 (z Obr. 7).
- Čo majú spoločné portfóliá B a C?
- Čo majú spoločné portfóliá D, E a F?
- Portfólio A sa nedá zostrojiť. Prečo asi?
- Na základe b), c) a d) vysvetli, prečo sa plná krivka volá efektívnou hranicou.
- Opíš, prečo by si si nevybral portfóliá C a F?
- Ktoré z portfólií B a D je lepšie?

- (h) Predpokladajme, že všetky z uvedených portfólií A - F sa dajú zostrojiť. Zoraď portfóliá od pre teba najlepšie po pre teba najhoršie.

Tabuľka 7: Tabuľka k príkladu 20 z časti 4.2.4 zo zbierky úloh.

Portfólio:	rizikovosť	výnosnosť
A		
B		
C		
D		
E		
F		

4.2.5 Výsledky

- 10 eur, 1 % z vkladu
 - 50 eur, 5 % z vkladu
- 150 eur, 3 % z vkladu
 - 146,94 eur, 2,94 % z vkladu
 - 150 eur, 3 % z vkladu
- 2 200 eur
 - 10 %
- 5 %, 10 %, výhodnejšia je investícia B
- 12,5 %, 12,5 %, investície C a D sú rovnako výhodné vzhľadom k ich výnosnosti
- odpoveď je subjektívna (0 - 100 eur)
 - 0 - 49,99 eur - rizikovo averzný, 50 eur - rizikovo neutrálny, 50,01 - 100 eur - riziko obľubujúci
- rizikovo averzný
 - rizikovo neutrálny
 - riziko obľubujúci

8. (a) je lepšia pre rizikovo averzného investora, (c) pre riziko obľubujúceho investora (pri možnosti (a) má investor istotu, že získa na konci roka 150 eur, pri (c) môže investor byť na konci roka aj stratový - investícia je riskantnejšia)
9. investícia A je zrejme menej riziková, lebo:
 1. 25 % strata, ktorá môže nastať pri A je menšia ako 30 %, ktorá môže nastať pri B
 2. pri A strácaš s pravdepodobnosťou $1/3$, pri B strácaš s pravdepodobnosťou $1/2$
10. nevieme určiť, lebo:
 1. 25 % strata, ktorá môže nastať pri C je väčšia ako 10 %, ktorá môže nastať pri D
 2. pri C strácaš s pravdepodobnosťou iba $1/6$, pri B strácaš s pravdepodobnosťou $1/2$
11. (a) investícia A
(b) investícia B
12. I. investícia (a)
II. investícia (b)
13. (a) štátny dlhopis - menej rizikový, firemná akcia - viac riziková
(b) firemná akcia
14. A a E, B a D pretože sú to akcie firiem, ktoré sú zamerané na podobné odvetvie (Teda ak sa prestanú kupovať autá prestanú sa kupovať aj automobilové doplnky. Podobne s dverami.)
15. napríklad A, B a C
16. 4 správne riešenia
17. (a) F
(b) I
(c) I, J, F, G, H
18. P4

19. (a) B (rovnaká výnosnosť ako A, ale vyššia rizikovosť), D (rovnaká výnosnosť ako C, ale vyššia rizikovosť), F (rovnaká rizikovosť ako A, ale nižšia výnosnosť), G (rovnaká rizikovosť ako D, ale nižšia výnosnosť), A (nižšiu výnosnosť a vyššiu rizikovosť ako E)
- (b) E
- (c) C
20. (a) Tabuľka 8

Tabuľka 8: Tabuľka výsledkov k príkladu 20 z časti 4.2.4 zo zbierky úloh.

Portfólio:	rizikovosť	výnosnosť
A	0,4	10,4
B	4,4	8,0
C	6,0	8,0
D	2,4	6,0
E	2,4	5,2
F	2,4	4,4

- (b) rovnakú výnosnosť portfólia
- (c) rovnakú rizikovosť portfólia
- (d) nikto by neponúkol takú vysokú výnosnosť pri takej nízkej rizikivosti
- (e) ležia na nej najlepšie možné portfóliá
- (f) C - lebo má vyššiu rizikovosť ako B, ale rovnakú výnosnosť, F - lebo má rovnakú rizikovosť, ale nižšiu výnosnosť
- (g) závisí od postoju investora k riziku (B - zrejme lepšie pre riziko obľubujúceho investora, D - zrejme lepšie pre rizikovo averzného investora)
- (h) závisí od postoju investora k riziku (A najlepšie, B a D najlepšie možné, C, E a F neefektívne portfóliá)

5 Používanie zbierky úloh a materiálov z prílohy

V nasledujúcej kapitole popisujeme, aké príklady zbierka úloh obsahuje, ako treba zbierku úloh používať a ako narábať s materiálmi v MS Exceli (Príloha F) a MS PowerPointe (Príloha E a Príloha G). Uvádzame tiež, akou literatúrou sme sa inšpirovali pri tvorbe príkladov, ktoré sú súčasťou zbierky úloh.

5.1 Opis prvej časti zbierky úloh

Prvá časť zbierky úloh 4.1 obsahuje 50 príkladov z finančnej matematiky počnúc veľmi jednoduchými príkladmi na výpočet percent, cez príklady na výpočet súčasnej alebo budúcej hodnoty peňazí až po príklady na výpočet výšky splátok dlhu.

Absolventi základnej školy by mali ovládať základy finančnej matematiky ako percentá, jednoduché úrokovanie a úrokovanie na dobu kratšiu ako rok. Z testovania na stredných školách ale vyplynulo (výsledky sú uvedené v časti 3.1), že žiaci majú problémy aj s týmto učivom základnej školy. Okolo 9 % chýb v teste bolo spôsobených nesprávnou premenou na percentá a úspešnosť žiakov v prvých štyroch príkladoch prvého testu bola okolo 65 %. V častiach 4.1.1 a 4.1.2 zbierky úloh preto uvádzame príklady na precvičenie a pripomenutie učiva zo základnej školy. Inšpiráciu pri tvorení týchto príkladov sme čerpali z učebnice pre 9. ročník základných škôl [9] a z [3]. Táto časť tiež obsahuje príklady na precvičenie pojmov veriteľ, dlžník a úrok (v jednotkách meny), ročná úroková miera (v percentách) a úroková sadzba (ako desatinné číslo). Pri týchto príkladoch sme sa inšpirovali [10].

Časť 4.1.3 obsahuje príklady na precvičenie zloženého úrokovania. Príklady sú cieľene vytvorené tak, aby upozornili žiakov na výhody častejšieho úrokovania. Niektoré príklady zvýrazňujú fakt, že peniaze dnes sú lepšie ako peniaze neskôr. V učebniciach [1], [3] a [4] je spracovaných veľa príkladov zameraných na zložené úrokovanie. Na základe týchto učebníc sme tvorili príklady do našej zbierky úloh.

V príkladoch, ktoré sú zamerané na pravidelné vklady a výbery alebo pravidelné splácanie dlhov, je podstatné vedieť vypočítať súčet konečnej geometrickej postupnosti. Preto časť 4.1.4 začína práve príkladmi na výpočet súčtu konečnej geometrickej postupnosti a uvedenie si čo je q (kvocient) a n . Ďalej obsahuje príklady na výpočet výšky pravidelných vkladov/výberov a výpočet budúcej hodnoty peňazí pri pravidelných vkladoch/výberoch. Príklady v ďalšej časti zbierky úloh 4.1.5 sú podobné pravidelným vkladom, s tým rozdielom, že okrem dlhu, ktorý splácame musíme splácať navyše úroky z dlhu. Touto problematikou sa zaoberajú učebnice [3] a [4].

Výsledky všetkých príkladov z častí 4.1.1 - 4.1.5 sú spracované v časti 4.1.6.

Pomocnými materiálmi k tejto časti zbierky úloh 4.1 sú prezentácia v MS Power-Pointe (Príloha E) a zbierka úloh v MS Exceli (Príloha F).

Obsahom prezentácie je krátke zhrnutie teórie z finančnej matematiky, ukážky príkladov a riešené príklady k danej problematike. Prezentácia síce obsahuje aj teóriu z finančnej matematiky, ale nemala by študentom nahrádzať učebnicu z finančnej matematiky. Je skôr pomôckou pre žiakov, ktorí ju môžu, po pochopení učiva, využiť na rýchle pripomenutie si vzorca alebo systému počítania príkladu. Tiež môže slúžiť ako pomôcka pre učiteľov, ktorí nemajú k dispozícii učebnicu a metodické materiály z tejto časti matematiky. Riešené príklady, ktoré sú súčasťou prezentácie, sú podobné príkladom v zbierke úloh. Po pochopení týchto ukážkových príkladov v prezentácii, by mali byť žiaci schopní vypočítať väčšinu príkladov zo zbierky úloh.

Zbierka úloh v MS Exceli slúži na zoznámenie žiaka s počítaním jednoduchého úrokovania, zloženého úrokovania a súčtu geometrickej postupnosti v tomto programe. Cieľom tohto materiálu je, aby si žiaci osvojili prácu v MS Exceli, naučili sa orientovať v jeho základných funkciách a využívať ich vo svoj prospech. Tento materiál je určený pre žiakov na domáce počítanie a skontrolovanie vypočítaných príkladov alebo na 1 - 2 hodiny v škole v počítačovej miestnosti. Pri tvorbe tohto materiálu sme sa inšpirovali [10].

5.2 Opis druhej časti zbierky úloh

Druhá časť zbierky úloh obsahuje 20 príkladov z finančnej matematiky. Tieto príklady sú rozdelené do štyroch celkov: výnosnosť aktíva, rizikovosť aktíva, diverzifikácia portfólia a iné príklady spojené s výberom portfólia. Každý celok obsahuje približne 5 príkladov, ktoré nie sú náročné po výpočtovej stránke. Sú zamerané hlavne na zoznámenie žiakov so základnými pojmami z oblasti finančnej matematiky, ktoré nie sú spracované v iných učebniciach pre stredné školy. Príklady do tejto časti zbierky úloh sme vyberali na základe výsledkov testovaní na stredných školách uvedených v 3.2. Pri tvorbe úloh sme tiež využili naše pozorovania uvedené v 3.3 a inšpirovali sme sa [5].

Žiaci by mali byť schopní po preriešení príkladov z tejto časti zbierky úloh :

- pochopiť pojmy: výnosnosť aktíva, priemerná výnosnosť aktíva, rizikovosť aktíva, postoj investora k riziku, rizikovo averzný investor, rizikovo neutrálny investor, riziko obľubujúci investor, diverzifikácia portfólia, efektívna hranica, portfólio,
- určiť, ktoré investičné možnosti sú nevýhodnejšie od iných,
- zvážiť svoj postoj k riziku a podľa neho sa správne rozhodnúť pri výbere investície.

Výsledky všetkých príkladov z častí 4.2.1 - 4.2.4 sú spracované v časti 4.2.5.

Pomocným materiálom k tejto časti zbierky úloh 4.2 je prezentácia v MS Power-Pointe (Príloha G). V prezentácii sú uvedené vysvetlenia nových pojmov, ktoré sú ilustrované krátkymi príkladmi.

5.3 Opis internetovej stránky

Pre uľahčenie prístupu k vytvorenej bakalárskej práci a jej prílohám sme vytvorili internetovú stránku: <http://sites.google.com/site/matematikafinancna/>. Táto stránka je určená najmä pre žiakov a učiteľov gymnázií, ktorí materiály z internetovej stránky môžu použiť ako metodický materiál. Na internetovej stránke najprv oboznamujeme používateľa s účelom stránky, obsahom stránky a uvádzame, komu je stránka určená. Pre ľahšie manipulovanie so zbierkou úloh so štvrtej kapitoly ju s vlastným obsahom uvádzame v Prílohe H. V takejto forme je dostupná aj na našej internetovej stránke. Pri možnosti stiahnutia zbierky úloh je krátky popis, ako zbierka úloh vznikala a čo je jej obsahom. Ďalej obsahuje krátky popis niektorých ďalších elektronických príloh bakalárskej práce (Príloh E, F, G) a možnosť ich stiahnutia.

Záver

Hlavným cieľom bakalárskej práce bolo vytvoriť netradičnú zbierku úloh z finančnej matematiky a pomocné materiály k zbierke úloh. Cieľom bolo vytvoriť také materiály, ktoré by reagovali na potreby žiakov a učiteľov stredných škôl. Preto sme sa v prvej časti bakalárskej práce zaoberali testovaním úrovne vedomostí žiakov z finančnej matematiky. Vďaka ochote učiteľov sme mohli vybrané príklady testovať na viac ako sto žiakoch na dvoch gymnáziách. Riešenia žiakov sme opravili a spracovali sme postrehy (uvedené v 3.3), ktoré sa nám zdali podstatné pre výber príkladov do zbierky úloh. Výsledky testovaní, uvedené v tretej kapitole, môžu byť hodnotné nielen pre tvorcov zbierky úloh, ale aj pre vyučujúcich. Na ich základe môžu lepšie spoznať nedostatky žiakov a ľahšie im predísť. V zbierke úloh (v štvrtej kapitole) sme sa teda zamerali hlavne na oblasti, ktoré študentom robili pri riešení testov najväčšie problémy a tiež na oblasti, ktoré študentov zaujali a boli pre nich motivujúce a ľahké. Rozdelili sme ju na dve väčšie časti. Prvá časť je viac výpočtová a žiaci sa v nej stretnú so širokou škálou príkladov od príkladov na výpočet percent až po príklady na výpočet výšky splátok. Obsahom druhej časti zbierky úloh sú príklady, ktoré sú menej náročné na výpočet a ponúkajú riešiteľovi zoznámenie so základnými pojmi, s ktorými sa môže stretnúť v bankách alebo médiách, ako napríklad aktívum a rizikovosť. V piatej kapitole sme popísali zásady používania zbierky a pomocných materiálov. Pre lepšie využitie výsledkov testovania na školách, zbierky úloh a prezentácií, ktoré sú súčasťou bakalárskej práce, sme vytvorili internetovú stránku, na ktorej je zbierka úloh aj s niektorými prílohami voľne dostupná.

Výsledky bakalárskej práce sú určené predovšetkým pre učiteľov a žiakov stredných škôl, ale aj pre rôzne voľnočasové krúžky, ktoré majú záujem napredovať v tejto oblasti, alebo rozširovať finančné povedomie ďalej.

Uvedomujeme si, že existujú ďalšie možnosti, ako urobiť zbierku úloh pre študentov stredných škôl atraktívnejšou. Chceli by sme ju v budúcnosti rozšíriť o príklady, ktoré nebudú zamerané iba na počítanie príkladov za stolom pred počítačom. Napríklad o úlohy, pri ktorých sa žiaci budú musieť hýbať v prírode vo forme "pokladovky", alebo budú investovať imaginárne peniaze do aktív a sledovať svoju úspešnosť.

Dúfame, že úroveň finančnej gramotnosti na Slovensku sa bude stále zvyšovať. Budeme radi ak aj naša bakalárska práca uľahčí učiteľom efektívne a zaujímavo priblížiť žiakom finančnú matematiku. Mladí ľudia tak budú schopnejší lepšie sa orientovať a zodpovednejšie správať vo svete financií.

Zoznam použitej literatúry

- [1] Barnett, R. A., Ziegler, M. R.: *Essentials of college mathematics*, Collier Macmillan Publishers, London, 1989
- [2] Hejný, M., Novotná, J., Stehlíková, N.: *Dvacet pět kapitol z didaktiky matematiky*, Univerzita Karlova v Praze - Pedagogická fakulta, Praha, 2004
- [3] Jacques, I.: *Mathematics for economics and business*, Pearson Education Limited, Essex, 2003
- [4] Kubáček, Z. a kol.: *Matematika pre 2. ročník gymnázií - 1. časť*, Orbis Pictus International, Bratislava, 2011
- [5] Melicherčík, I., Olšarová L., Úradníček, V.: *Kapitoly z finančnej matematiky*, Epos, Bratislava, 2005
- [6] Ministerstvo školstva SR, Ministerstvo financií SR: *Národný štandard finančnej gramotnosti verzia 1.0*, Bratislava, 2008, dostupné na internete (4. 5. 2012): <http://www.mpc-edu.sk/aktuality/financna-gramotnost>
- [7] Poskitt, K.: *Perfektní páreček*, Egmont ČR, Praha, 2008
- [8] Slovenská banková asociácia: *Finančná gramotnosť nie je na dostatočnej úrovni*, 2007, dostupné na internete (4. 5. 2012): <http://www.sbaonline.sk/sk/presscentrum/aktuality/financna-gramotnost-nie-je-na-dostatocnej-urovni.html>
- [9] Šedivý, O. a kol.: *Matematika pre 9. ročník základných škôl - 1. časť*, SPN-Mladé letá, Bratislava, 2008
- [10] Štasselová, A.: *Finančná matematika v MS exceli pre stredné školy*, diplomová práca, Bratislava, 2010

Príloha A - Schopnosti absolventa strednej školy

Absolvent strednej školy by mal byť, podľa Národného štandardu finančnej gramotnosti [6], schopný:

- "1. nájsť, vyhodnotiť a použiť finančné informácie,
2. poznať základné pravidlá riadenia vlastných financií,
3. naučiť sa rozoznávať riziká v riadení vlastných financií,
4. stanoviť si finančné ciele a naplánovať si ich dosiahnutie,
5. rozvinúť potenciál získania vlastného príjmu a schopnosť šoriť,
6. efektívne používať finančné služby,
7. plniť svoje finančné záväzky,
8. zveľaďovať a chrániť svoj majetok,
9. porozumieť a orientovať sa v zabezpečovaní základných ľudských a ekonomických potrieb jednotlivca a rodiny,
10. vedieť a byť schopný hodnotiť úspešnosť vlastnej sebarealizácie,
11. inšpirovať sa príkladmi úspešných osobností,
12. poznať príklady úspešných jednotlivcov v svojej plánovanej profesijnej ceste,
13. poznať podmienky, vylučujúce neúspešnosť jednotlivca a rodiny,
14. porozumieť základným pojmom v oblasti finančníctva a sveta peňazí,
15. orientovať sa v oblasti finančných inštitúcií (NBS, komerčné banky, poisťovne a ostatné finančné inštitúcie),
16. orientovať sa v problematike ochrany práv spotrebiteľa a byť schopný tieto práva uplatňovať."

Príloha B - Test prvý

Pomôcka:

Úrokovanie:

1. *Jednoduché* - úročí sa vždy len pôvodná suma podľa vzorca:

$$FV = PV(1 + t \cdot \frac{r}{100}) \quad (1)$$

t = počet rokov úročenia

2. *Zložené* - úročí sa vždy pôvodná suma a úroky za predošlé obdobia podľa vzorca:

$$FV = PV(1 + \frac{r}{100m})^{mt} \quad (2)$$

m = počet úročení za rok, t = počet rokov úročenia

3. *Spojité* - úročí sa vždy pôvodná suma a úroky za predošlé obdobia v každom možnom momente

PV (Present Value)- je množstvo peňazí, ktoré máme teraz, FV (Future Value) - je množstvo peňazí, ktoré budeme mať po určitej dobe pri ročnej úrokovej miere r

Vzorec na výpočet súčtu geometrickej postupnosti:

$$1 + q + q^2 + q^3 + \dots + q^{n-2} + q^{n-1} = \frac{q^n - 1}{q - 1} \quad (3)$$

Príklady z finančnej matematiky - jednoduché a zložené úrokovanie

Výsledky vo všetkých príkladoch zaokrúhľuj na dve desatinné miesta.

1. Predstav si, že máš našetrených 755 eur. Máš dve možnosti:

- I. Vložiť ich do banky s ročným úrokom 0,6 % (a ročným úrokováním).
 - II. Odložiť si ich k rodičom, ktorí ti na konci roku pridajú k pôvodnej sume 5 eur.
- (a) Ktorá možnosť je pre teba výhodnejšia, ak chceš peniaze odložiť na jeden rok?

- (b) Do akej sumy je pre teba lepšia ponuka č. 2, pri akej sume si indiferentný (je ti jedno, či vložíš peniaze do banky alebo ich dáš rodičom), kedy sa stáva lepšou ponuka č. 1?
2. Rodičia ti na narodeniny zriadili vkladnú knižku s ročnou úrokovou mierou 2 %. Po roku si si z nej vybral všetky peniaze - presne 104,04. Koľko peňazí ti rodičia dali na narodeniny pred rokom?
3. Chceš si kúpiť nový, lepší počítač a teda si musíš na neho ušetriť presne 1 000 eur. Koľko musíš teraz vložiť do banky pri ročnej úrokovej miere 5 %, aby si v čase dodania počítača (o 2 mesiace) mal k dispozícii danú čiastku?
4. Kamarát ti požičal 100 eur s tým, že mu za 6 mesiacov vrátiš 105 eur. Aká je ročná úroková miera pri takýchto podmienkach?
5. Babka ti poslala 1 000 eur. Chceš ich ušetriť a preto si chceš zriadiť účet na ktorý si peniaze na určitú dobu odložíš. Preto zájdeš do bánk, ktoré Ti poskytnú nasledujúce možnosti:
- I. Vo WUBA banke ti ponúkajú účet, ktorého ročná úroková miera je 5 % (pričom úrokujú jeden krát ročne - zloženým úrokovaním).
- II. V MUF banke ti ponúkajú účet, ktorého ročná úroková miera je 5 % (pričom úrokujú desať krát ročne - zloženým úrokovaním).
- (a) Vypočítaj, aká bude suma pri prvej a druhej možnosti po roku.
- (b) Vypočítaj, aká bude suma pri prvej a druhej možnosti po dvoch rokoch.
- (c) Znázorni graficky (závislosť peňazí od času) prvú aj druhú možnosť.
- (d) Predstav si, že by si mal tretiu možnosť, a to takú banku, v ktorej by ti ponúkli tzv. spojitý úrok. Nakresli, ako by vyzeral graf spojitého úrokovania. Prečo sa podľa teba nazýva spojitým úrokovaním?
6. Máš 30 000 eur a chceš ich na rok uložiť do banky. Banka 1 ti ponúka pripisovanie úrokov každý mesiac s ročnou úrokovou mierou 2,5 % - pri ľubovoľne vysokom vklade na jeden rok. Banka 2 ti ponúkla, že pri výške terminovaného vkladu 30 000 na jeden rok ti nebude pripisovať úroky, ale už teraz, v čase vloženia peňazí na účet, ti dá 740 eur "na ruku". Ktorá banka ti ponúka výhodnejšie podmienky? (opíš aj slovne prečo)

7. Za 5 rokov si chceš kúpiť nové auto za 15 000 eur. Koľko si musíš každoročne (vždy na začiatku roka) odložiť, aby si si ho na konci 5. roku mohol dovoliť, pri ročnej úrokovej miere 1 %?
- (a) Príklad vypočítaj bez použitia vzorca na výpočet geometrickej postupnosti.
 - (b) Príklad vypočítaj s použitím vzorca na výpočet geometrickej postupnosti.
8. Od kamaráta si si požičal 1 000 eur. Túto požičanú sumu máš splatiť dvoma polročnými splátkami po 600 eur. Aká je ročná úroková miera pri takýchto podmienkach?

Príloha C - Test druhý

Pomôcka 1.:

Aktívum je tzv. investičný nástroj (rôzne akcie firiem, dlhopisy a pod.), ktorý možno predávať, kupovať, požičiavať. (Investor si môže vybrať, do akých akcií bude investovať, tj. ktoré akcie kúpi. Na druhej strane, ktoré akcie už pre neho nie sú výhodné, tie predá.) Každé aktívum má nejakú **rizikovosť** (riziko, že peniaze, investované do určitého aktíva, nevynesú želaný zisk) a **očakávanú výnosnosť** (peňažný výnos, ktorý očakávame keď investujeme peniaze do konkrétneho aktíva). Každý investor chce zmenšovať riziko a zväčšovať výnosnosť. S nízkym rizikom je však spojený aj nižší očakávaný výnos a naopak, s vyšším očakávaným výnosom je spojené aj vyššie riziko. Preto výber aktív do **portfólia** (súbor aktív do ktorých investor investuje) je závislý od individuálnych preferencií investora. Investor vyberá podľa toho, či chce radšej istý a menší zisk alebo chce radšej menej istý väčší zisk.

Ilustračný príklad:

Investor chce investovať peniaze a môže si vybrať medzi nasledujúcimi dvoma aktívami:

1. Akcia počítačovej firmy, ktorá má očakávanú výnosnosť 15% a rizikovosť 10%.
2. Štátny dlhopis, ktorý má očakávanú výnosnosť 5% a rizikovosť 1%.

Otázka je, ktorá z týchto dvoch možností je lepšia? Odpoveď na otázku neexistuje. Záleží iba na voľbe investora. Investor, ktorý má rád riziko, si zrejme vyberie akciu počítačovej firmy aj za cenu väčšej rizikovosti a naopak investor, ktorý nemá rád riziko, si vyberie štátny dlhopis, ktorý je menej rizikový, aj za cenu menšieho výnosu.

Príklady z finančnej matematiky - základy tvorby portfólia 1

1. V stávkovej kancelárii ti ponúkajú stierateľný kupón. S pravdepodobnosťou $1/3$ vyhráš 150 eur a s pravdepodobnosťou $2/3$ nevyhráš nič. Najviac koľko si ochotný zaplatiť stávkovej kancelárii za tento kupón?
(pozor: správna odpoveď k tejto otázke neexistuje, záleží len na tvojej voľbe (tvojich preferenciách))
2. Podľa tvojej odpovede v prvej otázke určí, aký typ investora si:
(a) Rizikovo averzný (nemáš rád riziko).

- (b) Rizikovo neutrálny (nevadí ti priemerné riziko).
- (c) Riziko obľubujúci (rád riskuješ aj za cenu možnej "veľkej" straty).
3. Chceš investovať 1 000 eur na jeden rok. Ponúknem ti investovať do aktíva, z ktorého budeš mať po jednom roku s pravdepodobnosťou $1/3$ stratu 300 eur, s pravdepodobnosťou $1/3$ zisk 200 eur a s pravdepodobnosťou $1/3$ zisk 400 eur.
- (a) Koľko peňazí (v priemere) budeš mať o rok, keď budeš investovať do tohto aktíva?
- (b) Aký bude očakávaný výnos aktíva (tvoj zisk v pomere k vlozenej sume) po jednom roku? (výsledok uveď v percentách)
4. Máš na výber dve investície:
- A: Hádzanie kockou:
- keď padne 1 alebo 6, získaš 40 % z investície navyše,
 - keď padne 2 alebo 5, získaš 10 % z investície navyše,
 - keď padne 3 alebo 4, stratíš 20 % z investície.
- B: Hádzanie mincou :
- keď padne rub, získaš 55 % z investície navyše,
 - keď padne líce, stratíš 35 % z investície.

Vypočítaj očakávanú výnosnosť investície A a B. Ktorá investícia bude podľa teba viac riziková? Opíš slovne prečo.

Pomôcka 2.:

*Keď investor investuje do rôznych rizikových aktív, jednou z dôležitých stratégií, ako môže znižovať možné straty, je **diverzifikácia portfólia**. Pod pojmom diverzifikácia sa rozumie rozloženie (rozptýlenie) rizika výberom širokého portfólia investícií. Pri výbere aktív do svojho portfólia sa vyberajú také, ktoré spolu čo najmenej súvisia. Následne sa očakáva, že pokles dopytu po jednom výrobku by nemal spôsobovať pokles dopytu po druhom .*

Ilustračný príklad:

- (a) Keď ľudia prestanú kupovať autá, neznamená to, že prestanú kupovať rožky.
- (b) Keď ľudia prestanú kupovať počítače, zmenší sa aj potreba počítačových doplnkov -> prestanú sa kupovať počítačové doplnky.

Príklady z finančnej matematiky - základy tvorby portfólia 2

5. Máme portfóliá F - J (v Tabuľke 10), zložené z akcií A - E (v Tabuľke 9), ktoré sú rovnako rizikové. Podľa princípu diverzifikácie rizika odpoveď na otázky:
- (a) Ktoré z portfólií F a H bude menej rizikové?
 - (b) Ktoré z portfólií I a J bude menej rizikové?
 - (c) Zoraď portfóliá F - J od najmenej po najviac rizikové.

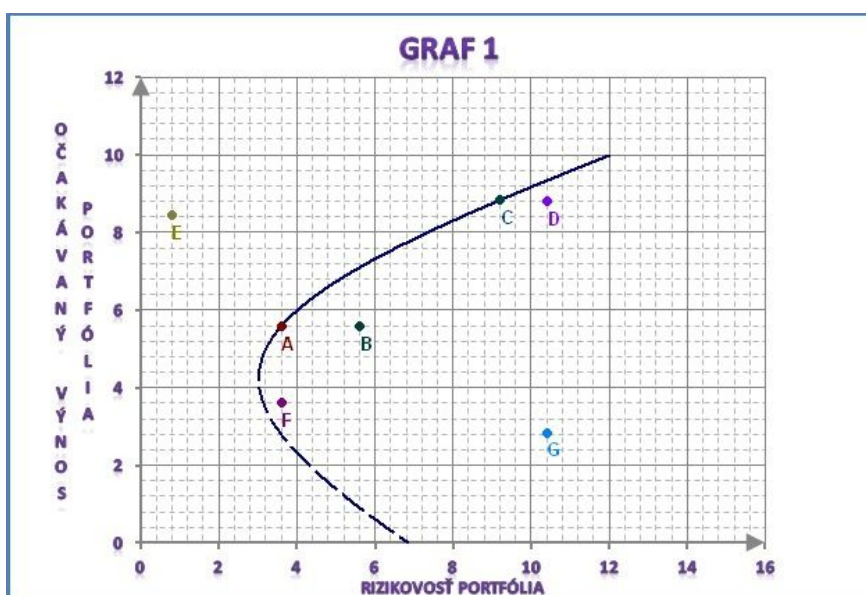
Tabuľka 9: Tabuľka k piatemu príkladu z druhého testu.

A	akcia firmy zameranej na výrobu počítačových komponentov
B	akcia firmy zameranej na výrobu počítačov
C	akcia firmy zameranej na ťažbu soli
D	akcia firmy zameranej na výmenu okien
E	akcia firmy zameranej na výrobu okien

Tabuľka 10: Tabuľka k piatemu príkladu z druhého testu.

Portfólio F	je zložené z akcií A a E
Portfólio G	je zložené z akcií D a E
Portfólio H	je zložené iba z akcií A
Portfólio I	je zložené z akcií A, C a E
Portfólio J	je zložené z akcií A, B a C

6. Na Obr. 8 sú znázornené, v podobe bodov A - F, rôzne portfóliá a plná krivka, tzv. efektívna hranica.
- (a) Pomocou Obr. 8 doplňte Tabuľku 11.
 - (b) Čo majú spoločné portfóliá A a B? Čo majú spoločné portfóliá C a D?
 - (c) Čo majú spoločné portfóliá A a F? Čo majú spoločné portfóliá D a G?
 - (d) Portfólio E sa nedá zostrojiť. Prečo asi?
 - (e) Na základe b), c) a d) vysvetli prečo sa plná krivka volá efektívnou hranicou.
 - (f) Opíš prečo by si si nevybral portfóliá F a G?
 - (g) Ktoré z portfólií A a C je lepšie? Ako táto otázka súvisí s úlohou č. 1.?



Obr. 8: Obrázok k šiestemu príkladu z druhého testu.

Tabuľka 11: Tabuľka k šiestemu príkladu z druhého testu.

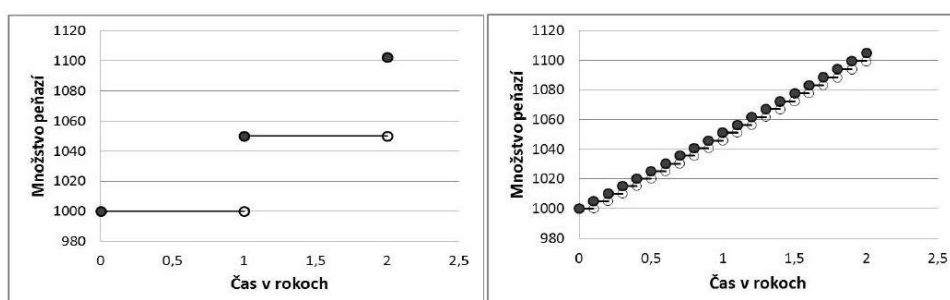
Portfólio:	rizikováosť	výnosnosť
A		
B		
C		
D		
E		
F		
G		

- (h) Predpokladajme, že všetky z uvedených portfólií A - G sa dajú zostrojiť. Zoraď portfóliá od pre teba najlepšie po pre teba najhoršie. Pomôž si odpoveďami v otázke 6 (a).

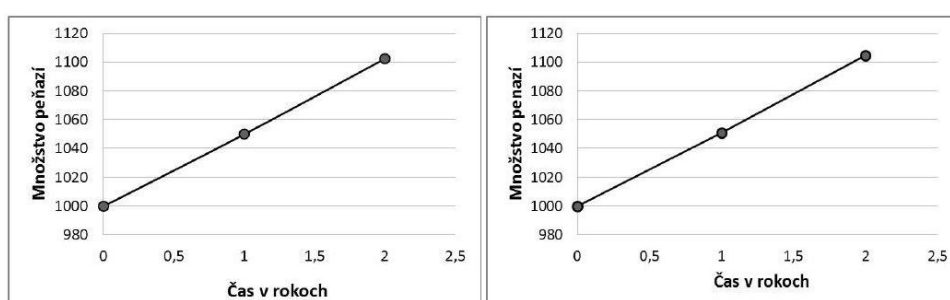
Príloha D - Výsledky testov

Riešenie prvého testu

- Druhá možnosť je pre mňa lepšia.
 - Ak $PV = 833,33$ tak mi je to jedno, či zvolím prvú alebo druhú možnosť.
Ak je $PV < 833,33$ tak sa mi viac oplatí odložiť peniaze k rodičom. Ak je $PV > 833,33$ tak sa mi viac oplatí vložiť peniaze do banky.
- Rodičia mi dali 102 eur.
- Do banky musím vložiť 991,74 eur. (Predpokladáme, že banka vypláca úroky priebežne a nie až na konci roka. Keby to tak nebolo museli by sme vložiť 1 000 eur.)
- Ročná úroková miera je 10 %.



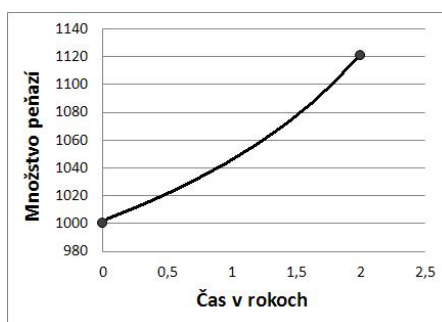
Obr. 9: Prvé riešenie 5. príkladu z prvého testu- časť (c), vľavo WUBA banka a vpravo MUF banka.



Obr. 10: Druhé riešenie 5. príkladu z prvého testu - časť (c), vľavo WUBA banka a vpravo MUF banka.

- Vo WUBA banke by mi po roku dali 1 050 eur. V MUF banke by mi po roku dali 1 051,14 eur.

- (b) Vo WUBA banke by mi po dvoch rokoch dali 1 051,14 eur. V MUF banke by mi po dvoch rokoch dali 1 104,9 eur.
- (c) Ak predpokladáme, že banka vypláca úroky priebežne, aj keď úrokuje iba raz ročne, tak správny obrázok je Obr. 9. Ak predpokladáme, že banka vypláca úroky vždy až na konci úrokového obdobia tak správny obrázok je Obr. 10.
- (d) Obr.11.



Obr. 11: Riešenie piateho príkladu z prvého testu - časť (d).

6. Výhodnejšie podmienky mi ponúkla druhá banka. Zdôvodnenie: ak vložím peniaze do prvej banky, zarobím na úrokoch 758,65 eura, ak však vložím do druhej banky, budem mať hneď k dispozícii 740 eur, ktoré môžem ľubovoľne použiť, napríklad investovať do prvej banky. Teda na konci prvého roku budem mať 758,71 čo je viac, ako v prvej banke.
7. Musíš si odkladať 2 911,48 eur.
8. Úroková miera je 26,13 %.

Riešenie druhého testu

1. Subjektívna odpoveď (0 - 150 eur).
2. Odpoveď závisí od odpovede v prvom príklade. Možnosť (a) je správnou odpoveďou, ak v príklade 1 bola zadaná hodnota od 0 eur do 49,99 eura, možnosť (b) je správnou odpoveďou, ak v príklade 1 bola zadaná hodnota 50 eur, možnosť (c) je správnou odpoveďou, ak v príklade 1 bola zadaná hodnota od 50,01 eur po 150 eur.
3. (a) Budem mať 1 100 eur.
(b) Očakávaný výnos aktíva po jednom roku je 10 %.

4. Očakávaná výnosnosť investície A a B je rovná 10 %. Rizikovejšia je druhá investícia (korektne sa dá rizikovosť obidvoch investícií vypočítať pomocou vzorca na výpočet štandardnej odchýlky cez strednú hodnotu štandardných odchýlok jednotlivých výnosov od priemerného výnosu, umocnených na druhú). Od študentov stredných škôl sa očakáva iba slovné intuitívne zdôvodnenie.
5. (a) Portfólio F je menej rizikové.
 (b) Portfólio I je menej rizikové.
 (c) Najmenej rizikové je portfólio I potom J, F, G a najviac rizikové je portfólio H.
6. (a) Tabuľka 12.

Tabuľka 12: Tabuľka výsledkov k šiestemu príkladu z druhého testu.

Portfólio:	rizikovosť	výnosnosť
A	3,6	5,6
B	5,6	5,6
C	9,2	8,8
D	10,4	8,8
E	0,8	8,4
F	3,6	3,6
G	10,4	2,8

- (b) Majú spoločnú rovnakú očakávanú výnosnosť.
- (c) Majú spoločnú rovnakú rizikovosť.
- (d) Má veľmi nízku rizikovosť a veľmi vysokú očakávanú výnosnosť.
- (e) Každé portfólio, ktoré leží na efektívnej hranici, má buď vyšší výnos pre danú úroveň rizika, alebo nižšie riziko pre danú úroveň výnosu, než nejaké portfólio, ktoré leží pod efektívnou hranicou.
- (f) Portfólio A má lepší výnos pri tej istej rizikivosti ako F. Portfólio D má lepší výnos pri tej istej rizikivosti ako G.
- (g) Záleží od preferencií a averzie voči riziku. S úlohou č. jedna súvisí tak, že neexistuje ani pri tejto úlohe správna odpoveď, záleží od toho, čo chceme viac, či väčšiu istotu alebo väčší výnos.
- (h) Správna odpoveď neexistuje. Záleží od preferencií a averzie voči riziku.

Prílohy E, F, G, H - Prílohy na CD

- Príloha E - Prezentácia v MS Powerpointe k prvej časti zbierky úloh.
- Príloha F - Zbierka úloh v MS Exceli k prvej časti zbierky úloh.
- Príloha G - Prezentácia v MS Powerpointe k druhej časti zbierky úloh.
- Príloha H - Zbierka úloh zo štvrtej kapitoly.