UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY

PARAMETRICKÉ KVADRATICKÉ PROGRAMOVANIE A JEHO VYUŽITIE PRI ANALÝZE SKLADBY OPTIMÁLNEHO PORTFÓLIA

BAKALÁRSKA PRÁCA

2013 **Karol ĎURIŠ**

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY

PARAMETRICKÉ KVADRATICKÉ PROGRAMOVANIE A JEHO VYUŽITIE PRI ANALÝZE SKLADBY OPTIMÁLNEHO PORTFÓLIA

BAKALÁRSKA PRÁCA

Študijný program:	Ekonomická a finančná matematika
Študijný odbor:	1114 Aplikovaná matematika
Školiace pracovisko:	Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky
Vedúci práce:	prof. RNDr. Daniel Ševčovič, CSc.

Bratislava 2013

Karol ĎURIŠ

80308353

Univerzita Komenského v Bratislave
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

ZADANIE ZÁVEREČNEJ PRÁCE

Meno a priezvisko študenta: Karol Ďuriš
Študijný program: ekonomická a finančná matematika (Jednoodborové štúdium, bakalársky I. st., denná forma)
Študijný odbor: 9.1.9. aplikovaná matematika
Typ záverečnej práce: bakalárska
Jazyk záverečnej práce: slovenský

Názov: Parametrické kvadratické programovanie a jeho využitie pri analýze skladby optimálneho portfólia

Cieľ: Vypracovať prehľad metód riešenia úloh parametrického kvadratického programovanie. Na konkrétnych príkladoch košíkov akcií skúmať závislosť a citlivosť optimálneho vektora portfólia na parametroch úlohy.

Vedúci: prof. RNDr. Daniel Ševčovič, CSc.
Katedra: FMFI.KAMŠ - Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky
Vedúci katedry: prof. RNDr. Daniel Ševčovič, CSc.

Dátum zadania: 10.10.2012

Dátum schválenia: 03.11.2012 doc. RNDr. Margaréta Halická, CSc.
garant študijného programu

....
študent vedúci práce

Poďakovanie Touto cestou sa chcem poďakovať svojmu vedúcemu bakalárskej práce prof. RNDr. Danielovi Ševčovičovi, CSc. za trpezlivosť, odborné rady a pripomienky pri tvorbe práce.

Veľká vďaka patrí aj mojim rodičom, bratovi a priateľom za ich podporu.

V najväčšej miere ďakujem za silu a múdrosť pri písaní Bohu, s ktorého pomocou som mohol túto prácu dokončiť.

Abstrakt

ĎURIŠ, Karol: Parametrické kvadratické programovanie a jeho využitie pri analýze skladby optimálneho portfólia [Bakalárska práca], Univerzita Komenského v Bratislave, Fakulta matematiky, fyziky a informatiky, Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky; školiteľ: prof. RNDr. Daniel Ševčovič, CSc., Bratislava, 2013, 56 s.

Táto bakalárska práca sa zaoberá problémom optimálneho investovania. Pri optimalizácii využíva úlohy parametrického kvadratického programovania. Odvodíme explicitný tvar funkcie pre optimalizáciu portfólia pri investovaní. Cieľom práce je pozorovať vlastnosti riešenia optimalizácie portfólia a aplikovať ich na príkladoch košíkov akcií. Definujeme triedu úloh nelineárnej optimalizácie, z ktorej za určitých predpokladov môžeme odvodiť triedu úloh parametrického kvadratického programovania. Z tejto triedy odvodíme úlohu pre optimalizáciu portfólia a podľa článku [8, str. 6-11] spracujeme prípad pre dve aktíva. Neskôr odvodíme explicitný tvar pre prípad úlohy s 3×3 kovariančnou maticou a pre všeobecný $n\times n$ prípad. Prinesieme analýzu správania sa optimalizovanej funkcie portfólia a zistíme jej vlastnosti. Porovnáme výsledky prístupu pomocou úloh parametrického kvadratického programovania s Markowitzovou metódou.

Kľúčové slová: Parametrické kvadratické programovanie, Optimalizácia portfólia, Explicitný vzorec, Výnos, Volatilita

Abstract

ĎURIŠ, Karol: Parametric quadratic programming and its application in the analysis of optimal portfolio composition [Bachelor Thesis], Comenius University in Bratislava, Faculty of Mathematics, Physics and Informatics, Department of Applied Mathematics and Statistics; Supervisor: prof. RNDr. Daniel Ševčovič, CSc., Bratislava, 2013, 56 p.

This bachelor thesis deals with a problem of optimal investment. Optimization is achieved by the use of the tasks of parametric quadratic programming. An explicit form of a function for portfolio optimization for investments is derived. The aim of this thesis is to analyze characteristics of portfolio optimization solution and apply them to examples of baskets of shares. A class of nonlinear optimization is defined. From this class a class of parametric quadratic programming tasks can be derived under certain assumptions. From the class of parametric quadratic programming tasks the task of portfolio optimization is derived and in accordance with the article [8, p. 6-11] a case of the task with two assets is elaborated. Later, an explicit form is derived for a case with 3×3 covariance matrix and for a general $n \times n$ case. An analysis of the characteristics of the optimized portfolio functions is introduced and its properties are determined. Results of the different approaches are compared: an approach using parametric quadratic programming tasks and the Markowitz method.

Keywords: Parametric quadratic programming, Portfolio optimalization, Explicit formula, Yield, Volatility

Obsah

Úvod

Ľudia s prebytočnými financiami a úsporami často vyhľadávajú možnosti na uloženie peňazí. Môžu ich nechať uschované doma, alebo vložiť do finančných inštitúcií poskytujúcich sporenia, stavebné sporenia, či termínované vklady, ktoré vyplácajú každoročne vopred dohodnutý úrok. Iné formy investovania predstavujú podielové fondy. Sú výnosnejšie ako bankové vkladové produkty, ale väčšinou bývajú aj rizikovejšie.

Medzi najrizikovejšie investície patria akcie. Je to aktívum, ktoré umožňuje akcionárovi podieľať sa na zisku firmy, to znamená, že má podiel zisku pri vyplácaní dividend a určuje podiel vlastníctva akcionára na akciovej spoločnosti. Akcionári však často kupujú akcie kvôli tomu, že s nimi môžu obchodovať na burzovom trhu. Nakupujú ich a predávajú s cieľom maximalizovať svoj zisk. Pri investícii do samotnej jednej akcie nastáva veľké riziko straty vloženej čiastky. Preto investori na burzovom trhu často diverzifikujú svoje portfólio, čo je vlastne súhrn všetkých akcií, pre ktoré sa rozhodne daný investor. Rozložením svojich prostriedkov na viaceré akcie sa zmenšuje riziko vysokej straty vložených financií.

Problém však nastáva pri nastavení podielov v portfóliu. Z jedného hľadiska by mohla byť riešením problému naivná diverzifikácia. Podľa [6, str. 70] portfólio nazývame naivne diverzifikované, ak váha každého aktíva v portfóliu ma rovnakú hodnotu. Inak povedané, je to také portfólio, v ktorom rozdelíme finančné prostriedky medzi vybrané aktíva rovnomerne. Z matematického hľadiska by však naivne diverzifikované portfólio nebolo optimálne.

Za optimálne považujeme také portfólio, ktorého výnos je čo najväčší, zatiaľ čo jeho volatilita, alebo inak povedané riziko pri investovaní do portfólia, je čo najmenšie. Problém nastáva pri minimalizácii volatility, kedy sa zároveň zmenšuje aj výnosnosť. Naopak pri zvyšovaní výnosnosti sa zvyšuje aj volatilita. Riešením tohto problému môže byť fixácia jedného z optimalizovanej dvojice pri minimalizovaní druhého člena. Iný prístup je optimalizácia lineárnej kombinácie obidvoch parametrov s koeficientami opačných znamienok.

Cieľom našej práce je optimalizovať portfólio pomocou úloh parametrického kvadratického programovania. Výsledky overíme a porovnáme s inými metódami. Práca je zložená zo štyroch kapitol.

Prvá kapitola sa venuje predstaveniu úloh nelineárnej optimalizácie a možnými aplikáciami v praxi. V druhej a tretej kapitole sú odvodené explicitné tvary minimalizačných úloh pre rôzne dimenzie portfólia. Na záver uvedieme aj reálne príklady, na ktoré aplikujeme naše výsledky. Na základe zvolených podmienok odvodíme vlastnosti druhých derivácií odvodených funkcií. V poslednej kapitole sa venujeme porovnávaniu nášho riešenia úlohy s riešním pomocou Markowitzovho prístupu.

1 Optimalizačné úlohy nelineárneho programovania

V nasledujúcej kapitole sa budeme zaoberať definíciou úloh parametrického nelineárneho a kvadratického programovania. Na úvod si predstavíme úlohy nelineárneho programovania a úlohy parametrickej optimalizácie. Neskôr si špecifikujeme problém kvadratického programovania a parametrického kvadratického programovania v kontexte s úlohou, ktorú budeme riešiť pri optimalizácii portfólia.

1.1 Nelineárna optimalizácia a jeho parametrizácia

Optimalizácia je časť matematiky, ktorá sa zaoberá hľadaním extrémov funkcie za istých podmienok. Všetky vektory, ktoré spĺňajú tieto podmienky, patria množine, ktorá sa nazýva množina prípustných riešení. Funkciu, ktorej extrém sa snažíme nájsť, nazývame účelová funkcia. Optimalizácia sa podľa typu účelovej funkcie alebo podľa typu množiny prípustných riešení delí na viacero druhov, napr.:

- Lineárne programovanie
- Nelineárne programovanie
- Kvadratické programovanie
- Celočíselné programovanie
- Parametrické programovanie
- Geometrické programovanie

Úloha nelineárneho programovania je matematicky definovaná:

$$\min \{f(x) | x \in \mathbb{M}\}, \tag{1.1.1}$$

pričom množina prípustných riešení $\mathbb{M}$ je definovaná pomocou ohraničení ako:

$$\mathbb{M} = \left\{ \begin{smallmatrix} g_i(x,y)\leq 0; & i=1,2,\ldots,k; & x\in\mathbb{R}^n \\ h_j(x,y)=0; & j=1,2,\ldots,l; & y\geq 0_m \end{smallmatrix} \right\}. \tag{1.1.2}$$

Spojením (1.1.1) a (1.1.2) dostávame úlohu, ktorá je opísaná v [5]:

Definícia 1.1. Úlohou nelineárneho programovania budeme volať úlohu v tvare:

$$\min \left\{ f(x,y) \Big| \begin{smallmatrix} g_i(x,y)\leq 0; & i=1,2,\ldots,k; & x\in\mathbb{R}^n \\ h_j(x,y)=0; & j=1,2,\ldots,l; & y\geq 0_m \end{smallmatrix} \right\}. \tag{1.1.3}$$

Úlohy parametrického nelineárneho progrovania sú úlohami nelineárneho programovania s parametrom v účelovej funkcii. Podľa knihy [1, str. 11] definujeme:

Definícia 1.2. Úlohu:

$$\min \left\{ f(x,\lambda) | x \in \mathbb{M}(\lambda) \right\}, \tag{1.1.4}$$

kde množina $\mathbb{M}(\lambda) \in X$ a funkcia f: $X \times \Lambda \to \mathbb{R} \bigcup \{-\infty, \infty\}$ budeme nazývať úlohou parametrického programovania.

1.2 Kvadratické programovanie

Kvadratické programovanie je časťou nelineárneho programovania, kde v ohraničeniach vystupujú iba lineárne funkcie a účelová funkcia má tvar kvadratickej funkcie. Od lineárneho programovania sa líši iba v spomínanej účelovej funkcii. Podľa [4, str. 57]:

Definícia 1.3. Majme $n \times n$ symetrickú maticu H a vektor g s n zložkami. Potom úlohu:

$$\min_{x\in\mathbb{R}^n} \left\{ g^T x + \frac{1}{2} x^T H x | Ax \geq b \right\}, \tag{1.2.1}$$

kde A je $m \times n$ matica a vektor b má m zložiek, budeme nazývať úlohou kvadratického programovania.

Ak matica H je pozitívne semidefinitná, to znamená $x^T Hx \geq 0, \forall x$, potom úloha 1.3 bude úlohou konvexného programovania.

V našej práci sa budeme stretávať s úlohami parametrického kvadratického programovania. Toto odvetvie matematiky je súčasťou parametrického nelineárneho programovania, kde účelovou funkciou je kvadratická funkcia s parametrom. Vychádzajúc z [3, str. v]:

Definícia 1.4. Úlohou parametrického kvadratického programovania budeme nazývať:

$$\sup_{\theta \in \Theta(\gamma)} \left\{ \mu^T \theta - \frac{\gamma}{2} \theta^T \Sigma \theta \right\}, \tag{1.2.2}$$

kde $\Theta(\gamma)$ je množina prípustných riešení, vektor μ má n zložiek a Σ je $n \times n$ matica.

Táto úloha je ekvivalentná úlohe nájdenia infima s opačným znamienkom v účelovej funkcii:

$$\inf_{\theta \in \Theta(\gamma)} \left\{ \frac{\gamma}{2} \theta^T \Sigma \theta - \mu^T \theta \right\}. \tag{1.2.3}$$

1.3 Využitie optimalizácie

Optimalizácia je aplikovateľná v rôznych sférach vo svete ako je doprava, hospodárstvo, veda, či ekonómia.

V dopravnej oblasti existuje dopravná úloha podľa [7, str. 85], ktorá optimalizuje prepravné náklady dopravcov od dodávateľov k odberateľom. V tomto prípade je cieľom minimalizovať ich náklady. Jedným ohraničením v tejto úlohe sa zabezpečí, že súčet odobratých množstiev prepravcami od dodávateľa bude rovný množstvu, ktoré je schopný poskytnúť. Naopak, druhé ohraničenie zaistí, aby súčet dodávaných množstiev prepravcami odberateľovi bol rovný množstvu, ktoré odberateľ požaduje. Navyše, všetky množstvá, či už odobrané od dodávateľa, alebo dodané odberateľovi musia byť nezáporné.

Firmy využívajú optimalizáciu pri maximalizovaní vlastného zisku [7, str. 9]. Účelová funkcia v tomto prípade bude maximalizovať súčet ziskov z jednotlivých vyrobených produktov. Úloha sa rieši za podmienok, aby spotrebované faktory pri výrobe každého produktu nepresiahli celkový zdroj faktoru vo firme. Vyrobené množstvo produktu je podobne ako v predošlej úlohe ohraničené. Musí byť nezáporné.

Oblasť mikroekonómie takisto využíva vo veľkej miere úlohy nelineárneho programovania. Kniha [2, str. 20] opisuje úlohu spotrebiteľa ako ekonomického subjektu ako úlohu nelineárneho programovania. V účelovej funkcii s premennou, ktorá charakterizuje kôš statkov, sa nachádza užitočnosť spotrebiteľa. Ohraničením v tejto úlohe nelineárneho programovania sú náklady na statky, ktoré nemôžu prekročiť veľkosť príjmu daného spotrebiteľa.

2 Optimalizácia portfólia riešením úloh parametrického kvadratického programovania

Cieľom druhej kapitoly je popísať úlohu optimalizácie portfólia s využitím metód riešenia parametrického kvadratického programovania. Podľa článku [8, str. 11] vyjadríme explicitný tvar funkcie $\alpha(\phi)$ pre dvojrozmerný prípad optimalizácie portfólia. Podobne odvodíme explicitný vzorec pre úlohu s tromi aktívami v portfóliu. Ukážeme, že časťou explicitného tvaru funkcie je aj explicitné vyjadrenie tvaru funkcie s kovariančnou maticou s rozmermi 2×2, pričom typ riešenia problému bude závisieť od zadaných vstupných hodnôt. V poslednej časti aplikujeme vyjadrenú funkciu v explicitnom tvare na reálnych dátach. Investor sa pri určovaní optimálnej stratégie na burzovom trhu rozhoduje medzi viacerými aktívami. Môže si vybrať iba dve či tri aktíva, ale často si môže zvoliť ľubovoľne veľký počet aktív. Preto je potrebné sa pozrieť aj na príklad, kedy do portfólia vstupuje viacero aktív.

2.1 Úloha parametrického kvadratického programovania pre optimalizáciu portfólia

Tento odsek je spracovaný podľa článku [8, ods. 4]. Majme portfólio, ktoré pozostáva z n aktív, pričom označme μ ako vektor výnosov a kovariančnú maticu Σ. Predpokladáme, že $\mu \geq 0$ a $\Sigma = \Sigma^T$ je symetrická, kladne definitná matica. Úloha parametrického kvadratického programovania pre parameter $\phi > 0$, ktorá optimalizuje toto portfólio je daná nasledovne:

$$\alpha(\phi) = \inf_{\theta \in S^n} \left\{ \frac{\phi}{2} \theta^T \Sigma \theta - \mu^T \theta \right\}, \tag{2.1.1}$$

kde množina prípustných riešení S^n je kompaktná množina popísaná:

$$S^n = \left\{ \theta | \sum_{i=1}^{n} \theta_i = 1, \theta_i \geq 0, \forall i = 1, 2, \dots n \right\}. \tag{2.1.2}$$

Vektor váh θ sa skladá z n zložiek θ_i:

$$\theta = \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \\ \vdots \\ \theta_n \end{pmatrix} \tag{2.1.3}$$

a charakterizuje celkový podiel aktíva v portfóliu. Parameter ϕ v úlohe (2.1.1) nám indikuje váhu rizikovosti portfólia. Podľa [8, Veta 4.1.] funkcia $\alpha(\phi)$ je $C^{1,1}$ spojitá v premennej ϕ a funkcia optimálnych váh $\widehat{\theta}(\phi)$ je Lipschitzovsky spojitá vo ϕ. Z [5, str. 159]:

Veta 2.1. a) (Weierstrass, 1815-1897)
Nech f(x) je definovaná na $M \subset \mathbb{R}^n$. Ak M je kompaktná a f je spojitá na M, tak f nadobúda na M svoje minimum a maximum.

Dôsledkom vety 2.1 nadobúda úloha 2.1.1 na S^n svoje extrémy a teda sa dá prepísať do tvaru:

$$\alpha(\phi) = \min_{\theta \in S^n} \left\{ \frac{\phi}{2} \theta^T \Sigma \theta - \mu^T \theta \right\}, \tag{2.1.4}$$

Prvý člen optimalizačnej úlohy je matematickým vyjadrením volatility portfólia. Obsahuje parameter, ktorý udáva koeficient averzie k riziku investora predelený dvoma. Výraz obsahuje menovateľ z technických dôvodov. Pri výpočte prvej parciálnej derivácie sa nám vykráti. Druhý člen značí výnosnosť portfólia. Obsahuje znamienko mínus, takže v konečnom dôsledku riešenie úlohy (2.1.4) minimalizuje násobok volatility a opačnú hodnotu výnosu portfólia súčasne.

2.2 Explicitné vyjadrenie vzorcov pri dvoch aktívach

Funkcia (2.1.4) z predchádzajúcej časti je v tvare implicitného vyjadrenia. V tomto odseku, spracovanom podľa [8, str. 6-11], je naším cieľom vyjadrenie problému (2.1.4) pomocou explicitného tvaru. Ukážeme, že vzorec pre funkciu

$\alpha(\phi)$ sa dá vyjadriť pomocou rozvetvenej podmienky a teda v konečnom dôsledku bude mať druhá derivácia pre nedegenerovanú úlohu aspoň jeden bod nespojitosti.

Bez podmienok na premenné $\mu_1, \mu_2, \sigma_1, \sigma_2, \rho$ bude riešenie úlohy (2.1.4) pre 2×2 rozmernú úlohu:

$$\theta(\phi) = \left(\widehat{\theta}(\phi), 1 - \widehat{\theta}(\phi)\right)^T . \tag{2.2.1}$$

Premenná $\widehat{\theta}(\phi)$:

$$\widehat{\theta}(\phi) = \max\left\{0, \min\left\{\frac{\omega}{\phi} + \frac{\delta}{\gamma}, 1\right\}\right\}, \tag{2.2.2}$$

kde:

$$\begin{aligned} \gamma &= (\sigma_1)^2 + (\sigma_2)^2 - 2\sigma_1\sigma_2\rho, \\ \delta &= (\sigma_2)^2 - \sigma_1\sigma_2\rho, \\ \omega &= \frac{\mu_1 - \mu_2}{\gamma}. \end{aligned} \tag{2.2.3}$$

Keď položíme nasledujúce podmienky:

$$\begin{aligned} &\mu_1 \geq \mu_2 \geq 0, \\ &\sigma_1^2 \geq \sigma_1\sigma_2\rho, \\ &\sigma_2^2 \geq \sigma_1\sigma_2\rho, \end{aligned} \tag{2.2.4}$$

tak sa riešenie (2.2.2) úlohy (2.1.4) dá zjednodušiť. Riešenie (2.2.2) pozostáva z nájdenia maxima medzi nulovým členom a druhým členom, ktorý minimalizuje 2 výrazy. Keďže druhý z týchto výrazov je jednotkový skalár, nemôže byť celkové riešenie väčšie ako 1 a menšie ako 0 z dôvodu nájdenia maxima medzi nulou a minimovým výrazom. Inak by sme mohli toto riešenie opísať ako nevyhnutnú nezápornosť váhy $\widehat{\theta}(\phi)$ pri optimalizovaní portfólia. Z podmienok (2.2.4) vyplýva nezápornosť premenných $\gamma \geq 0$, $\delta \geq 0$. Preto druhý člen v minime riešenia (2.2.2) je nezáporný a teda riešenie je zhodné s riešením v článku [8, str. 11]:

$$\widehat{\theta}(\phi) = \min\left\{\frac{\omega}{\phi} + \frac{\delta}{\gamma}, 1\right\}. \tag{2.2.5}$$

Dosadením do účelovej funkcie dostávame vzorec pre 2×2 kovariančnú maticu:

$$\alpha(\phi) = \begin{cases} -\mu_2 - \omega\delta - \frac{\omega^2\gamma}{2\delta} + \frac{\phi}{2}(1-\rho^2)(\sigma_1\sigma_2)^2, & ak\ \frac{1}{\phi} < (1 - \frac{\delta}{\gamma}), \\ \frac{(\sigma_1)^2}{2}\phi - \mu_1, & ak\ \frac{1}{\phi} \geq (1 - \frac{\delta}{\gamma}). \end{cases}$$

Poznámka 2.1. Ak by sme vynechali druhú podmienku z (2.2.4), tak pri istých podmienkach na varianciu σ_1^2 a kovarianciu $\sigma_1\sigma_2\rho$ bude premenná γ dostatočne blízka nule a zároveň záporná. V tomto prípade nastáva pri optimalizácii portfólia zápornosť riešenia (2.2.5), ktoré nie je v súlade s podmienkami na nezápornosť váh jednotlivých aktív.

Poznámka 2.2. Rovnako ako v predchádzajúcom prípade, ak by nebola splnená tretia podmienka z (2.2.4) a premenná δ je dostatočne záporná, potom je riešenie (2.2.5) $\widehat{\theta}(\phi)$ záporné.

2.3 Odvodenie explicitného vzorca pri troch aktívach

Našou úlohou je taktiež odvodiť explicitný vzorec pre riešenie funkcie (2.1.4) s kovariančnou maticou s rozmermi 3×3. Kvôli zjednodušenosti si usporiadame jednolivé výnosy od najväčšieho po najmenší. Matematicky:

$$\mu_1 \geq \mu_2 \geq \mu_3. \tag{2.3.1}$$

Výnos portfólia s tromi aktívami:

$$\mu(\theta) = \sum_{i=1}^{3} \theta_i\mu_i, \tag{2.3.2}$$

je inými slovami lineárna kombinácia výnosov jednotlivých aktív s disperziou:

$$\sigma(\theta)^2 = \sum_{i=1}^{3} \theta_i^2\sigma_i^2 + \sum_{\substack{i=1 \\ i\neq j}}^{3}\sum_{j=1}^{3} \theta_i\theta_j\sigma_i\sigma_j\rho_{ij}. \tag{2.3.3}$$

Z toho vyplýva, že úloha (2.1.4) má pre 3D problém tvar:

$$\alpha(\phi) = \min_{\theta\in S^3} \left\{ \frac{\phi}{2}\left(\sum_{i=1}^{3} \theta_i^2\sigma_i^2 + \sum_{\substack{i=1 \\ i\neq j}}^{3}\sum_{j=1}^{3} \theta_i\theta_j\sigma_i\sigma_j\rho_{ij} \right) - \sum_{i=1}^{3}\theta_i\mu_i \right\}, \tag{2.3.4}$$

v ktorom vektor váh $\theta = (\theta_1, \theta_2, \theta_3)^T$. Z množiny prípustných riešení S^3 vyjadríme $\theta_3 = 1 - \theta_1 - \theta_2$. Ak zafixujeme dané ϕ, tak pre danú úlohu (2.3.4) existuje podľa [5] Lagrangeova funkcia, ktorá je definovaná:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(\theta, \lambda) = &\frac{\phi}{2} a\, \theta_1^2 + \frac{\phi}{2} b\, \theta_2^2 + \phi c\, \theta_1 \theta_2 + (\phi d - \mu_1 + \mu_3)\theta_1 + (\phi e - \mu_2 + \mu_3)\theta_2 \\ &+ \frac{\phi}{2}\sigma_3^2 - \mu_3 + \lambda(\theta_1 + \theta_2 - 1), \\ &\theta_1 \geq 0, \theta_2 \geq 0, \lambda \geq 0,\end{aligned} \tag{2.3.5}$$

kde výrazy a, b, c, d, e sú popísané ako:

$$\begin{aligned} a &= \sigma_1^2 + \sigma_3^2 - 2\sigma_1\sigma_3\rho_{13}, \\ b &= \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\sigma_2\sigma_3\rho_{23}, \\ c &= \sigma_3^2 + \sigma_1\sigma_2\rho_{12} - \sigma_1\sigma_3\rho_{13} - \sigma_2\sigma_3\rho_{23}, \\ d &= \sigma_1\sigma_3\rho_{13} - \sigma_3^2, \\ e &= \sigma_2\sigma_3\rho_{23} - \sigma_3^2. \end{aligned} \tag{2.3.6}$$

Predpoklad úloh vznikajúcich pri probléme optimálneho investovania je, že všetky variancie jednotlivých aktív nie sú menšie ako ich kovariancie s ostantnými aktívami. Matematicky vyjadrené:

$$\forall i = 1, \ldots 3,\ \forall j = 1, \ldots 3, i \neq j:\ \ \sigma_i^2 > \sigma_i \sigma_j \rho_{i,j}. \tag{2.3.7}$$

Teda pre pomocné koeficienty (2.3.6) platí:

$$a > 0,\ b > 0,\ d < 0,\ e < 0. \tag{2.3.8}$$

Definícia 2.1. Kladne definitnú maticu A veľkosti $n \times n$, kde $n \geq 3$, budeme nazývať kvázidiagonálne dominantnou, ak pre jej diagonálne prvky platí $\forall i, j, k = 1, 2, \ldots n$:

$$\boldsymbol{\Sigma_{ii} + \Sigma_{jk} \geq \Sigma_{ij} + \Sigma_{ik}}. \tag{2.3.9}$$

Na maticu Σ položíme predpoklad kvázidiagonálnej dominancie, potom pre premenné σ, ρ:

$$\begin{aligned}
\sigma_1^2 + \sigma_2\sigma_3\rho_{23} &\geq \sigma_1\sigma_3\rho_{13} + \sigma_1\sigma_2\rho_{12}, \\
\sigma_2^2 + \sigma_1\sigma_3\rho_{13} &\geq \sigma_1\sigma_2\rho_{12} + \sigma_2\sigma_3\rho_{23}, \\
\sigma_3^2 + \sigma_1\sigma_2\rho_{12} &\geq \sigma_2\sigma_3\rho_{23} + \sigma_1\sigma_3\rho_{13}.
\end{aligned} \tag{2.3.10}$$

Inými slovami povedané, súčet variancie daného aktíva s kovarianciou iných dvoch aktív nie je menší ako súčet kovariancií tohto aktíva s ostatnými dvoma. V maticovej forme nemôže byť súčet diagonálneho a nediagonálneho člena, ktorý sa nenachádza v riadku a ani stĺpci diagonálneho člena menší ako súčet člena, ktorý má spoločný riadok s diagonálnym a stĺpec s nediagonálnym členom, s členom v riadku nediagonálneho a stĺpci diagonálneho člena. Medzi pomocnými koeficientami (2.3.6) platia kvôli tejto podmienke vzťahy:

$$\begin{aligned}
a - c &= \sigma_1^2 - \sigma_1\sigma_3\rho_{13} - \sigma_1\sigma_2\rho_{12} + \sigma_2\sigma_3\rho_{23}, \\
b - c &= \sigma_2^2 - \sigma_2\sigma_3\rho_{23} - \sigma_1\sigma_2\rho_{12} + \sigma_1\sigma_3\rho_{13}, \\
c &= \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_3\rho_{13} - \sigma_2\sigma_3\rho_{23} + \sigma_1\sigma_2\rho_{12}.
\end{aligned} \tag{2.3.11}$$

Odtiaľ podľa podmienok nerovností (2.3.10) vyplýva:

$$\begin{aligned}
a &\geq c, \\
b &\geq c, \\
c &\geq 0.
\end{aligned} \tag{2.3.12}$$

2.3.1 Riešenie pre rádovo rovnaké výnosy

Kvôli tomu, aby bola váha druhého aktíva nezáporná, rozlišujeme dve riešenia. Najprv sa zaoberáme prípadom s podmienkou:

$$c(\mu_1 - \mu_3) \leq a(\mu_2 - \mu_3). \tag{2.3.13}$$

Úlohu (2.3.4) budeme riešiť pomocou Kuhn-Tuckerových podmienok. Podľa [5] majú Kuhn-Tuckerove podmienky pre úlohu (2.3.4) tvar:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta_i} &\geq 0, & \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} &\leq 0, \\
\theta_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta_i} &= 0, & \lambda \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} &= 0, \\
\theta_i &\geq 0, & \lambda &\geq 0,
\end{aligned} \tag{2.3.14}
$$

kde $i = 1, 2$.

Keď prepíšeme podmienky (2.3.14) do rovníc, dostávame:

$$\phi a\,\theta_1 + \phi c\,\theta_2 + (\phi d - \mu_1 + \mu_3) + \lambda \geq 0, \tag{2.3.15}$$

$$\theta_1[\phi a\,\theta_1 + \phi c\,\theta_2 + (\phi d - \mu_1 + \mu_3) + \lambda] = 0, \tag{2.3.16}$$

$$\theta_1 \geq 0, \tag{2.3.17}$$

$$\phi b\,\theta_2 + \phi c\,\theta_1 + (\phi e - \mu_2 + \mu_3) + \lambda \geq 0, \tag{2.3.18}$$

$$\theta_2[\phi b\,\theta_2 + \phi c\,\theta_1 + (\phi e - \mu_2 + \mu_3) + \lambda] = 0, \tag{2.3.19}$$

$$\theta_2 \geq 0, \tag{2.3.20}$$

$$\theta_1 + \theta_2 - 1 \leq 0, \tag{2.3.21}$$

$$\lambda(\theta_1 + \theta_2 - 1) = 0, \tag{2.3.22}$$

$$\lambda \geq 0. \tag{2.3.23}$$

Z rovnice (2.3.22) vyplýva, že:

$$\lambda = 0 \quad \vee \quad \theta_1 + \theta_2 - 1 = 0. \tag{2.3.24}$$

Z prípadu, že 1. rovnosť nie je splnená, plynie $\theta_1 + \theta_2 - 1 = 0$ a preto $\theta_3 = 0$. Vtedy sa prípad 3×3 kovariančnej matice redukuje na predchádzajúci 2×2 prípad. Nás teda bude zaujímať možnosť, kedy $\theta_1 + \theta_2 - 1 \neq 0$ a teda vtedy musí platiť práve 1. rovnosť: $\lambda = 0$. Vtedy nastáva splnenie rovností (2.3.21), (2.3.22), (2.3.23). Z rovníc (2.3.16) a (2.3.19) vyplývajú 3 možnosti na dvojicu neznámych θ_1, θ_2. Prvá dvojica:

$$\begin{aligned} \theta_1 &= \frac{\omega_1}{\phi} + \frac{\delta_1}{\gamma}, \\ \theta_2 &= \frac{\omega_2}{\phi} + \frac{\delta_2}{\gamma}, \end{aligned} \tag{2.3.25}$$

vzniká z vetvy, v ktorej obe neznáme sú nezáporné. Výrazy ω, δ, γ:

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \frac{c\,(\mu_2-\mu_3) - b\,(\mu_1-\mu_3)}{c^2-ab}, \\ \omega_2 &= \frac{c\,(\mu_1-\mu_3) - a\,(\mu_2-\mu_3)}{c^2-ab}, \\ \delta_1 &= bd - ce, \\ \delta_2 &= ae - cd, \\ \gamma &= c^2 - ab. \end{aligned} \tag{2.3.26}$$

Na dokázanie nezápornosti ukážeme nezápornosť parametrov ω_1, ω_2 a nekladnosť parametrov $\delta_1, \delta_2, \gamma$. Z (2.3.12) vyplýva nekladnosť γ. Z (2.3.12), (2.3.13) a usporiadanosti výnosov (2.3.1) vyplýva nezápornosť parametrov ω_1, ω_2. Pre δ_1, δ_2 platí:

$$\begin{aligned} \delta_1 = bd - ce =& \sigma_1\sigma_2\rho_{12}(\sigma_3^2 - \sigma_2\sigma_3\rho_{23}) - \sigma_2^2(\sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_3\rho_{13}) \\ & -\sigma_2\sigma_3\rho_{23}(\sigma_1\sigma_3\rho_{13} - \sigma_2\sigma_3\rho_{23}) \le 0, \\ \delta_2 = ae - cd =& \sigma_1\sigma_2\rho_{12}(\sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_3\rho_{13}) - \sigma_1^2(\sigma_3^2 - \sigma_2\sigma_3\rho_{23}) \\ & -\sigma_1\sigma_3\rho_{13}(\sigma_2\sigma_3\rho_{23} - \sigma_1\sigma_3\rho_{13}) \le 0. \end{aligned} \tag{2.3.27}$$

Druhá dvojica, odvodená pre $\theta_1 = 0$ v rovnici (2.3.16):

$$\begin{aligned} \theta_1 &= 0, \\ \theta_2 &= \frac{e}{b} + \frac{\mu_3-\mu_2}{\phi b}. \end{aligned} \tag{2.3.28}$$

Podľa (2.3.8) je váha druhého aktíva $\theta_2 < 0$ a to kvôli tomu, že vo výraze je prvý čitateľ záporný, druhý je nekladný a oba menovatele naopak kladné. Tretia dvojica je odvodená vo vetve, kedy v rovnici (2.3.19) položíme θ_2 rovné nule:

$$\begin{aligned} \theta_1 &= \frac{d}{a} + \frac{\mu_3-\mu_1}{\phi a}, \\ \theta_2 &= 0. \end{aligned} \tag{2.3.29}$$

Takisto podľa (2.3.8) je váha prvého aktíva $\theta_1 < 0$ z toho istého dôvodu ako v predchádzajúcom prípade. Preto jediné možné riešenie vetvy, kde $\lambda = 0$, je dvojica nenulových θ_1, θ_2.

Doteraz sme odvádzali riešenie pre explicitný tvar za predpokladu, že všetky aktíva zo zadania problému budú vystupovať v optimálnom portfóliu s kladnými váhami. Pre určité parametre ϕ to však nebude možné. Ohraničenia pre úlohu (2.3.4) sú podľa (2.1.2):

$$\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 = 1, \tag{2.3.30}$$

$$\theta_1 \geq 0, \tag{2.3.31}$$

$$\theta_2 \geq 0, \tag{2.3.32}$$

$$\theta_3 \geq 0. \tag{2.3.33}$$

Spojením rovnosti (2.3.30) s podmienkou nezápornosti na tretiu premennú (2.3.33):

$$\theta_1 + \theta_2 \leq 1. \tag{2.3.34}$$

Podmienka na existenciu riešenia dvojice (2.3.25) je teda:

$$\frac{\omega_1 + \omega_2}{\phi} + \frac{\delta_1 + \delta_2}{\gamma} \leq 1. \tag{2.3.35}$$

Po úprave dostávame:

$$\frac{1}{\phi} \leq \frac{1}{\omega_1 + \omega_2}\left(1 - \frac{\delta_1 + \delta_2}{\gamma}\right). \tag{2.3.36}$$

Ak váhy prvých dvoch aktív v súčte vyjdú väčšie ako jedna, tak v rovnici (2.3.22) zvolíme druhú možnosť, teda $\theta_1+\theta_2-1 = 0,\ \theta_3 = 0$. V tomto prípade môžme vyjadriť premennú θ_2 ako závislú od premennej θ_1:

$$\theta_2 = 1 - \theta_1. \tag{2.3.37}$$

Úloha (2.3.4) sa zjednoduší na úlohu o dvoch premenných s dvojrozmernou množinou prípustných riešení:

$$\alpha(\phi) = \min_{\theta \in S^2} \left\{ \frac{\phi}{2}(\theta_1^2\sigma_1^2 + \theta_2^2\sigma_2^2 + 2\theta_1\theta_2\sigma_1\sigma_2\rho_{12}) - (\theta_1\mu_1 + \theta_2\mu_2) \right\}. \tag{2.3.38}$$

Spojením substitúcie (2.3.37) s podmienkou nezápornosti (2.3.32) na premennú θ_2 dostávame ohraničenie $\theta_1 - 1 \leq 0$. Úloha (2.3.4) dostane pre zúženú úlohu tvar:

$$\alpha(\theta) = \min_{0\leq\theta\leq 1} \{\frac{\phi}{2}(a+b-2c)\theta^2 + [\phi(c-b+d-e)+\mu_2-\mu_1]\theta + \frac{\phi}{2}b + \phi e - \mu_2 + \frac{\phi}{2}\sigma_3^2\}, \tag{2.3.39}$$

kde kvôli zjednodušenému značeniu sme použili namiesto označenia θ_1 symbol bez dolného indexu. Táto úloha bez ohraničujúcich podmienok na neznámu θ má z podmienok prvého rádu riešenie:

$$\theta = \frac{b-c+e-d}{a+b-2c} + \frac{\mu_1-\mu_2}{\phi(a+b-2c)}. \tag{2.3.40}$$

Po dosadení pomocných premenných (2.3.6) do riešenia rovnice (2.3.40) dostávame riešenie (2.2.2) úlohy s 2×2 kovariančnou maticou z predošlého odseku:

$$\theta = \frac{\sigma_2^2 - \sigma_1\sigma_2\rho_{12}}{\sigma_1^2+\sigma_2^2-2\sigma_1\sigma_2\rho_{12}} + \frac{\mu_1-\mu_2}{\phi(\sigma_1^2+\sigma_2^2-2\sigma_1\sigma_2\rho_{12})}, \tag{2.3.41}$$

kde oba čitatele aj menovatele sú kladné kvôli usporiadaniu výnosov (2.3.1) a podmienke na kovariancie (2.3.7). Celkové riešenie úlohy (2.3.4) pre podmienku (2.3.13) je:

$$\widehat{\theta}(\phi) = \begin{cases} \begin{pmatrix} \frac{\omega_1}{\phi} + \frac{\delta_1}{\gamma} \\ \frac{\omega_2}{\phi} + \frac{\delta_2}{\gamma} \\ 1 - \frac{\omega_1+\omega_2}{\phi} - \frac{\delta_1+\delta_2}{\gamma} \end{pmatrix}, & ak\ \frac{1}{\phi} \leq \frac{1}{\omega_1+\omega_2}\left(1 - \frac{\delta_1+\delta_2}{\gamma}\right), \\ \begin{pmatrix} \frac{b-c+e-d}{a+b-2c} + \frac{\mu_1-\mu_2}{\phi(a+b-2c)} \\ \frac{a-c+d-e}{a+b-2c} + \frac{\mu_2-\mu_1}{\phi(a+b-2c)} \\ 0 \end{pmatrix}, & ak\ \frac{1}{\omega_1+\omega_2}\left(1 - \frac{\delta_1+\delta_2}{\gamma}\right) < \frac{1}{\phi} \leq \frac{a-c+d-e}{\mu_1-\mu_2}, \\ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, & ak\ \frac{a-c+d-e}{\mu_1-\mu_2} < \frac{1}{\phi}. \end{cases}$$

Jeho funkcia $\alpha(\phi)$ má potom explicitné vyjadrenie v tvare:

$$\alpha(\phi) = \begin{cases} \Xi, & ak\ \frac{1}{\phi} \leq \frac{1}{\omega_1+\omega_2}\left(1 - \frac{\delta_1+\delta_2}{\gamma}\right), \\ \Psi, & ak\ \frac{1}{\omega_1+\omega_2}\left(1 - \frac{\delta_1+\delta_2}{\gamma}\right) < \frac{1}{\phi} \leq \frac{a-c+d-e}{\mu_1-\mu_2}, \\ \Phi, & ak\ \frac{a-c+d-e}{\mu_1-\mu_2} < \frac{1}{\phi}, \end{cases}$$

kde jednotlivé časti definovanej funkcie sú:

$$\begin{aligned}
\Xi &= \frac{\phi}{2}a\left(\frac{\omega_1}{\phi}+\frac{\delta_1}{\gamma}\right)^2+\frac{\phi}{2}b\left(\frac{\omega_2}{\phi}+\frac{\delta_2}{\gamma}\right)^2+\phi c\left(\frac{\omega_1}{\phi}+\frac{\delta_1}{\gamma}\right)\left(\frac{\omega_2}{\phi}+\frac{\delta_2}{\gamma}\right)\\
&+(\phi d-\mu_1+\mu_3)\left(\frac{\omega_1}{\phi}+\frac{\delta_1}{\gamma}\right)+(\phi e-\mu_2+\mu_3)\left(\frac{\omega_2}{\phi}+\frac{\delta_2}{\gamma}\right)+\frac{\phi}{2}\sigma_3^2-\mu_3,\\
\Psi &= \frac{\phi}{2}(a+b-2c)\left(\frac{b-c+e-d}{a+b-2c}+\frac{\mu_1-\mu_2}{\phi(a+b-2c)}\right)^2\\
&+[\phi(c-b+d-e)+\mu_2-\mu_1]\left(\frac{b-c+e-d}{a+b-2c}+\frac{\mu_1-\mu_2}{\phi(a+b-2c)}\right)\\
&+\frac{\phi}{2}b+\phi e-\mu_2+\frac{\phi}{2}\sigma_3^2,\\
\Phi &= \frac{\phi}{2}\sigma_1^2-\mu_1.
\end{aligned}$$

2.3.2 Riešenie pre rádovo nerovnaké výnosy

V prípade, kedy je veľký rozdiel medzi výnosom prvého aktíva a ostatných ostatných dvoch aktív, je riešenie úlohy (2.3.4) odlišné od predchádzajúcej možnosti. V tejto podsekcii odvodíme explicitný tvar pre podmienku:

$$c(\mu_1-\mu_3) > a(\mu_2-\mu_3). \tag{2.3.42}$$

Úlohu riešime podobne ako pre prípad rádovo podobných výnosov pomocou Kuhn-Tuckerových podmienok, pričom riešenie váh aktív je vyjadrené nasledovne:

$$\begin{aligned}
\theta_1 &= \frac{\omega_1}{\phi}+\frac{\delta_1}{\gamma},\\
\theta_2 &= \frac{\omega_2}{\phi}+\frac{\delta_2}{\gamma},
\end{aligned} \tag{2.3.43}$$

kde výrazy ω, δ, γ sú označené v (2.3.26). Začiatočná podmienka (2.3.42) spôsobuje, že výraz $\omega_2 < 0$. Preto pre isté hodnoty parametra ϕ sa stáva váha druhého aktíva θ_2 zápornou. Riešenie, v ktorom zasahujú do optimálneho portfólia všetky tri aktíva s nenulovou váhou, platí pre podmienku:

$$\frac{1}{\phi} < -\frac{\delta_2}{\gamma\omega_2}. \tag{2.3.44}$$

Pre iné hodnoty sa v optimálnom portfóliu váha druhého aktíva stáva nulovou. Ak vyjadríme hodnotu $\theta_3 = 1 - \theta_1$, potom minimalizačná funkcia sa teda redukuje na tvar, v ktorom sa vyskytuje jediná premenná θ_1:

$$\alpha(\phi) = \min_{0\leq\theta\leq 1}\{\frac{\phi}{2}a\,\theta_1^2 + \phi d\,\theta_1 - \theta_1(\mu_1-\mu_3) - \mu_3\}. \tag{2.3.45}$$

Riešenie minimalizačnej funkcie je:

$$\begin{aligned}\theta_1 =& \frac{\mu_1-\mu_3}{\phi a} - \frac{d}{a}\\ =& \frac{\sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_3\rho_{13}}{\sigma_1^2+\sigma_3^2-2\sigma_1\sigma 3\rho_{13}} + \frac{\mu_1-\mu_3}{\phi(\sigma_1^2+\sigma_3^2-2\sigma_1\sigma 3\rho_{13})},\end{aligned} \tag{2.3.46}$$

ak váha $\theta_1 \leq 1$. Celkové riešenie úlohy (2.3.4) pre podmienku (2.3.42) je:

$$\widehat{\theta}(\phi) = \begin{cases} \begin{pmatrix} \frac{\omega_1}{\phi} + \frac{\delta_1}{\gamma} \\ \frac{\omega_2}{\phi} + \frac{\delta_2}{\gamma} \\ 1 - \frac{\omega_1+\omega_2}{\phi} - \frac{\delta_1+\delta_2}{\gamma} \end{pmatrix}, & ak\ \frac{1}{\phi} \leq -\frac{\delta_2}{\gamma\omega_2}, \\ \begin{pmatrix} \frac{\mu_1-\mu_3}{\phi a} - \frac{d}{a} \\ 0 \\ \frac{\mu_3-\mu_1}{\phi a} + \frac{a+d}{a} \end{pmatrix}, & ak\ -\frac{\delta_2}{\gamma\omega_2} < \frac{1}{\phi} \leq \frac{a}{\mu_1-\mu_3}\left(1+\frac{d}{a}\right), \\ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, & ak\ \frac{a}{\mu_1-\mu_3}(1+\frac{d}{a}) < \frac{1}{\phi}. \end{cases}$$

Jeho funkcia $\alpha(\phi)$ má potom explicitné vyjadrenie v tvare:

$$\alpha(\phi) = \begin{cases} \Xi, & ak\ \frac{1}{\phi} \leq -\frac{\delta_2}{\gamma\omega_2}, \\ \Psi, & ak\ -\frac{\delta_2}{\gamma\omega_2} < \frac{1}{\phi} \leq \frac{a}{\mu_1-\mu_3}\left(1+\frac{d}{a}\right), \\ \Phi, & ak\ \frac{a}{\mu_1-\mu_3}\left(1+\frac{d}{a}\right) < \frac{1}{\phi}, \end{cases}$$

kde jednotlivé časti definovanej funkcie sú:

$$\begin{aligned}
\Xi &= \frac{\phi}{2} a \left(\frac{\omega_1}{\phi} + \frac{\delta_1}{\gamma} \right)^2 + \frac{\phi}{2} b \left(\frac{\omega_2}{\phi} + \frac{\delta_2}{\gamma} \right)^2 + \phi c \left(\frac{\omega_1}{\phi} + \frac{\delta_1}{\gamma} \right) \left(\frac{\omega_2}{\phi} + \frac{\delta_2}{\gamma} \right) \\
&+ (\phi d - \mu_1 + \mu_3) \left(\frac{\omega_1}{\phi} + \frac{\delta_1}{\gamma} \right) + (\phi e - \mu_2 + \mu_3) \left(\frac{\omega_2}{\phi} + \frac{\delta_2}{\gamma} \right) + \frac{\phi}{2} \sigma_3^2 - \mu_3, \\
\Psi &= \frac{\phi}{2} a \left(\frac{\mu_1 - \mu_3}{\phi a} - \frac{d}{a} \right)^2 + (\phi d + \mu_3 - \mu_1) \left(\frac{\mu_1 - \mu_3}{\phi a} - \frac{d}{a} \right) + \frac{\phi}{2} \sigma_3^2 - \mu_3, \\
\Phi &= \frac{\phi}{2} \sigma_1^2 - \mu_1.
\end{aligned}$$

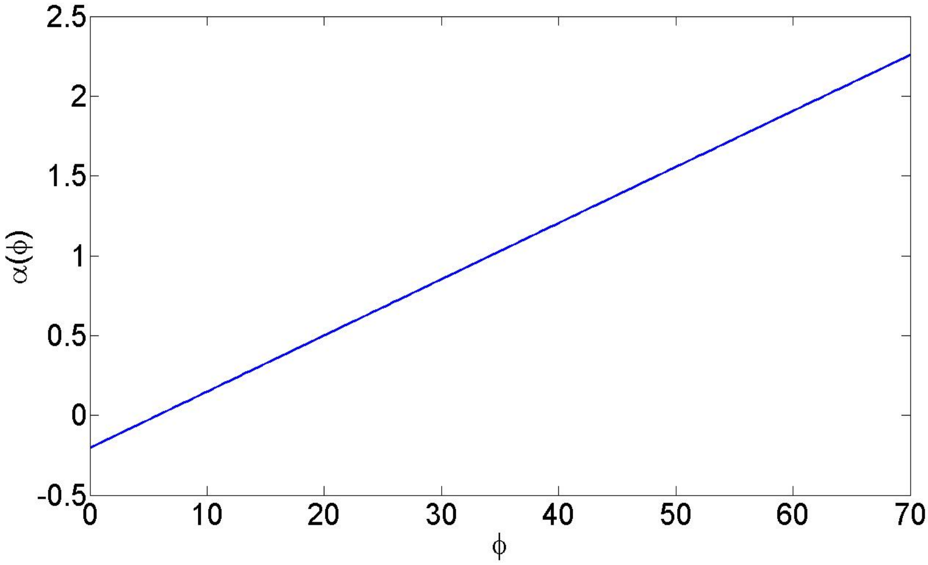
2.4 Príklad aplikovania explicitného vzorca

V nasledujúcom odstavci si ukážeme riešenie optimalizácie portfólia na konkrétnom príklade. Aplikujeme reálne dáta, ktoré sme získali z internetového zdroja: finance.yahoo.com k dátumu August 2010- April 2012. Kovariačná matica a vektor výnosov:

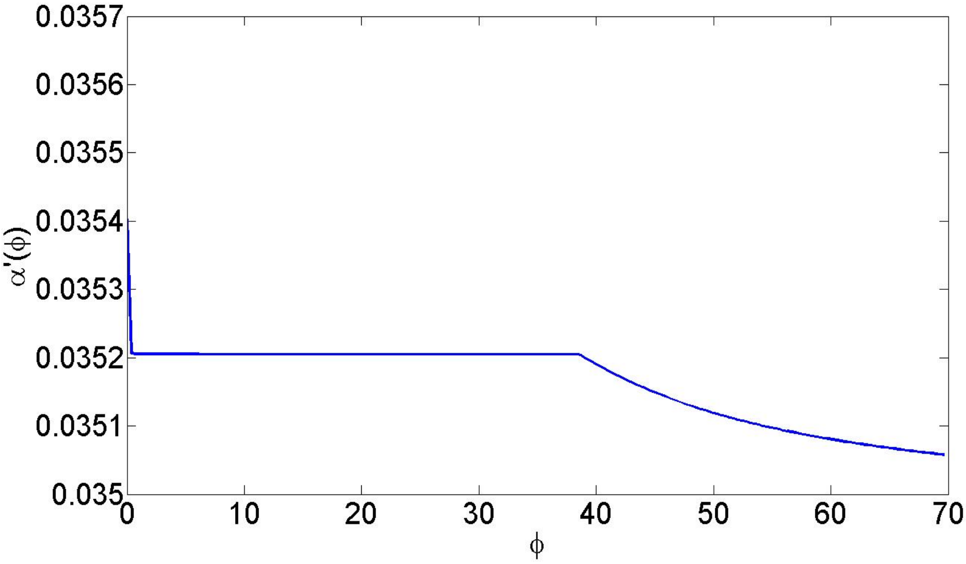
Aktívum	Adidas	BASF	Allianz	Výnos
Adidas	0.0782	0.0561	0.0555	0.2056
BASF	0.0561	0.0967	0.0842	0.2054
Allianz	0.0555	0.0842	0.1280	0.0198

Tabuľka 1: Príklad pre aktíva firiem Adidas, Allianz a BASF

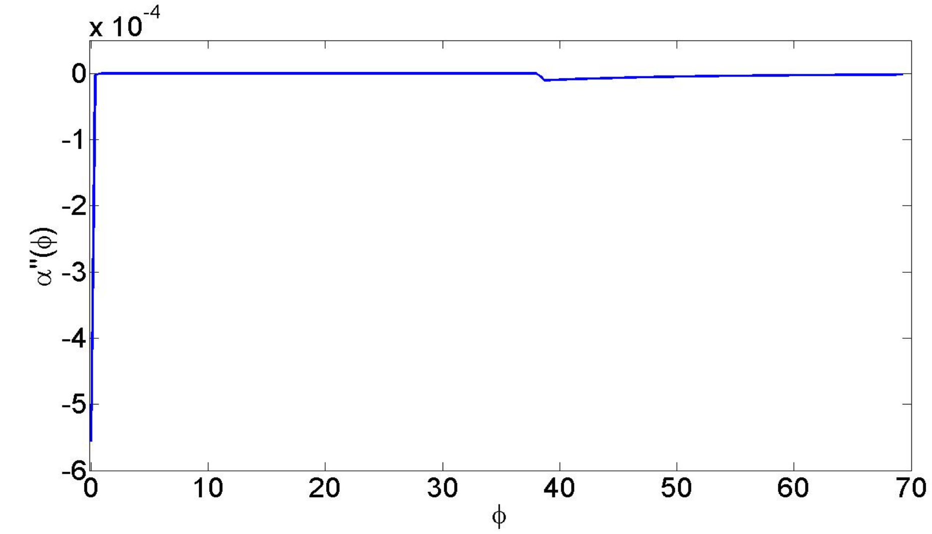
Za aktíva v našom portfóliu sme vybrali prvé tri aktíva z nemeckého indexu DAX 30 a zoradili sme ich podľa výšky ročného výnosu. Po zadaní funkcie do programovacieho jazyku MATLAB nám vykreslilo graf pre funkciu $\alpha(\phi)$, jej prvú a druhú deriváciu.



Obr. 1: Funkcia $\alpha(\phi)$

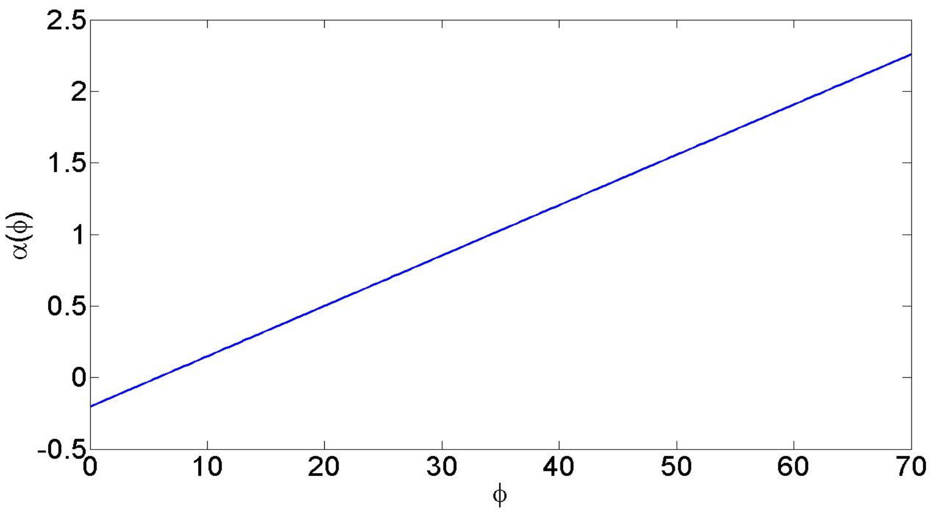


Obr. 2: Prvá derivácia funkcie $\alpha(\phi)$

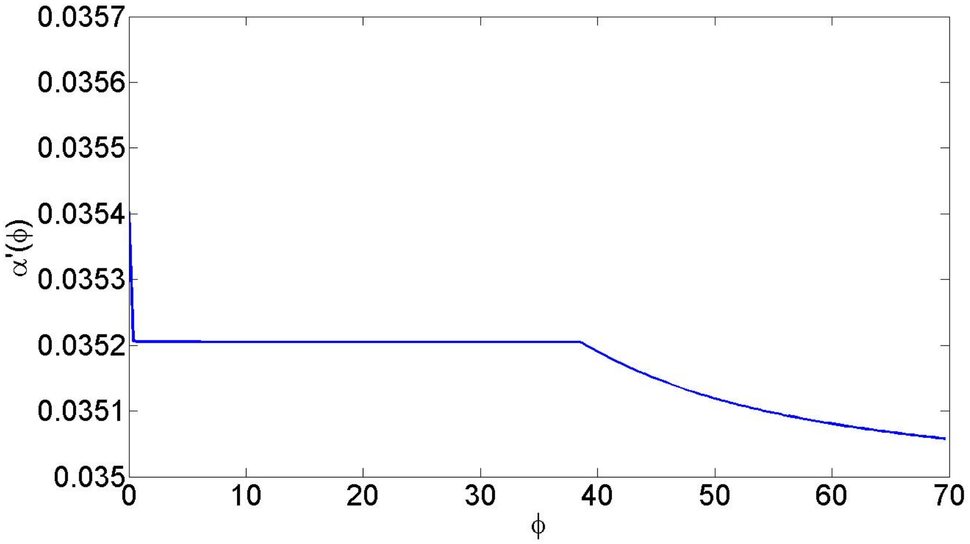


Obr. 3: Druhá derivácia funkcie $\alpha(\phi)$

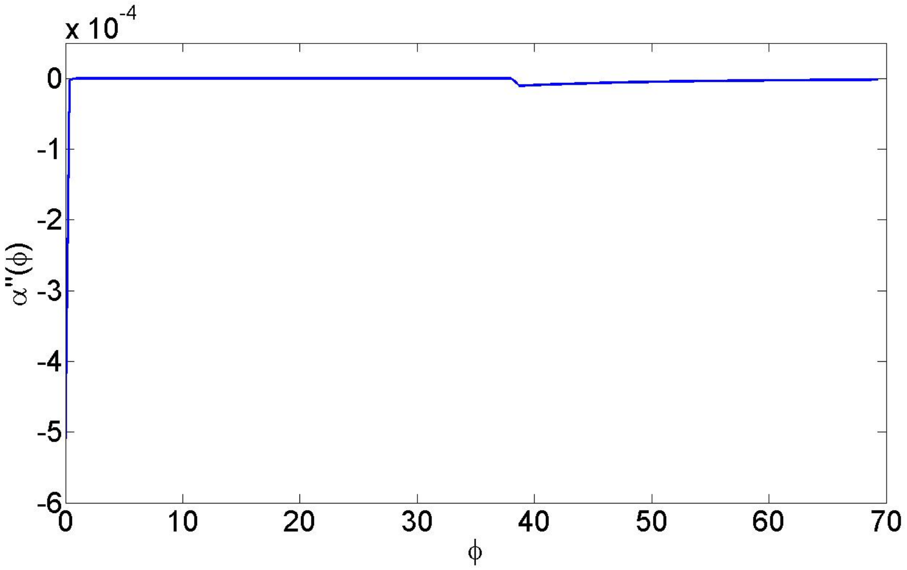
Na overenie si pravdivých výsledkov riešenia funkcie $\alpha(\phi)$ použijeme implementovanú funkciu v MATLAB-e *quadprog*:



Obr. 4: Funkcia $\alpha(\phi)$ naprogramovaná pomocou funkcie *quadprog*



Obr. 5: Prvá derivácia funkcie $\alpha(\phi)$ naprogramovaná pomocou funkcie *quadprog*



Obr. 6: Druhá derivácia funkcie $\alpha(\phi)$ naprogramovaná pomocou funkcie *quadprog*

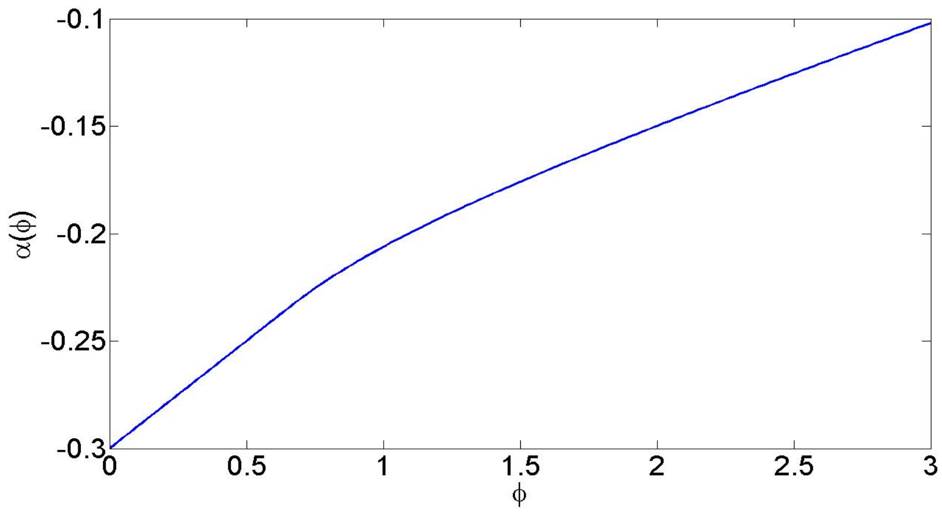
Pre dostatočne veľký rozptyl pre parameter ϕ nám graf druhej derivácie (3) ukazuje, že druhá derivácia funkcie $\alpha(\phi)$ má dva body nespojitosti. Pri riešení úlohy maximalizácie portfólia sme pozorovali, že body nespojitosti sa nadobúdajú v bodoch, v ktorých sa váha aspoň jedného aktíva stáva nenulovým. V našom konkrétnom prípade parametre ϕ, ktoré zodpovedajú bodom nespojitosti sú nasledovné body: $\widehat{\phi_1} \approx 0.00905$ a $\widehat{\phi_2} \approx 38.72$.

Pri analyzovaní typu funkcie z obrázka (1) sa zdá, že funkcia $\alpha(\phi)$ má lineárny charakter. Podľa odvodeného explicitného tvaru však mala byť na určitých intervaloch lineárnou kombináciou lineárnej a lineárne lomenej funkcie. V skutočnosti sa funkcia mení z lineárnej na lineárnu lomenú funkciu. Vyplýva to z obrázka (2), v ktorom sa derivácia funkcie mení pre hodnotu $\phi \approx 40$ na nekonštantnú.

Na nasledujúcom príklade ukážeme konkávnosť funkcie $\alpha(\phi)$:

Aktívum	1. aktívum	2. aktívum	3. aktívum	Výnos
1. aktívum	0.20	0.05	0.05	0.3056
2. aktívum	0.05	0.10	0.08	0.2054
3. aktívum	0.05	0.08	0.12	0.0198

Tabuľka 2: Odvodený príklad z predchádzajúceho portfólia s aktívami Adidas, Allianz a BASF



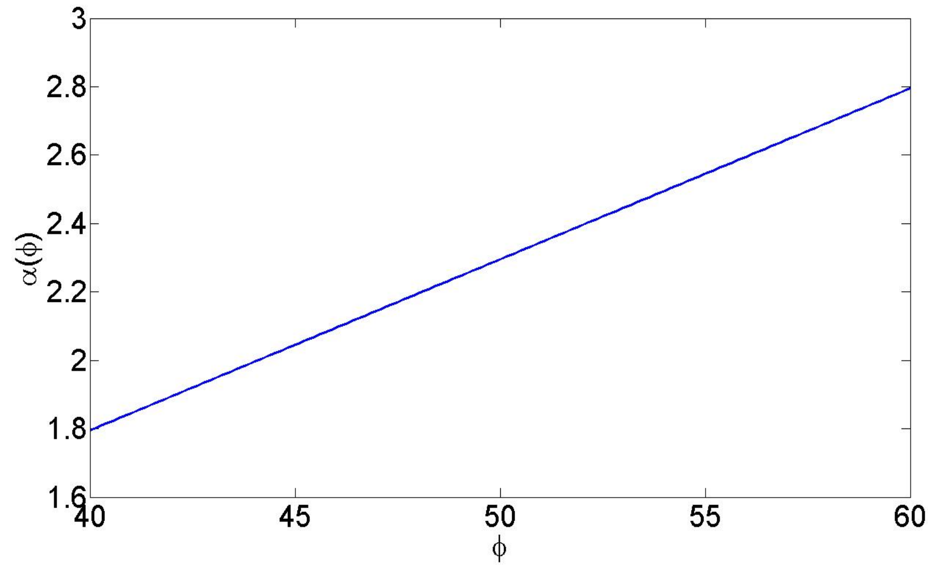
Obr. 7: Funkcia $\alpha(\phi)$

Ukážeme si príklad, v ktorom ak nebudú splnené podmienky (2.3.7), tak nami vyjadrený explicitný tvar sa nebude zhodovať s predprogramovanou funkciou *quadprog*. Nech sú dané 3 aktíva s výnosmi a kovariančnou maticou:

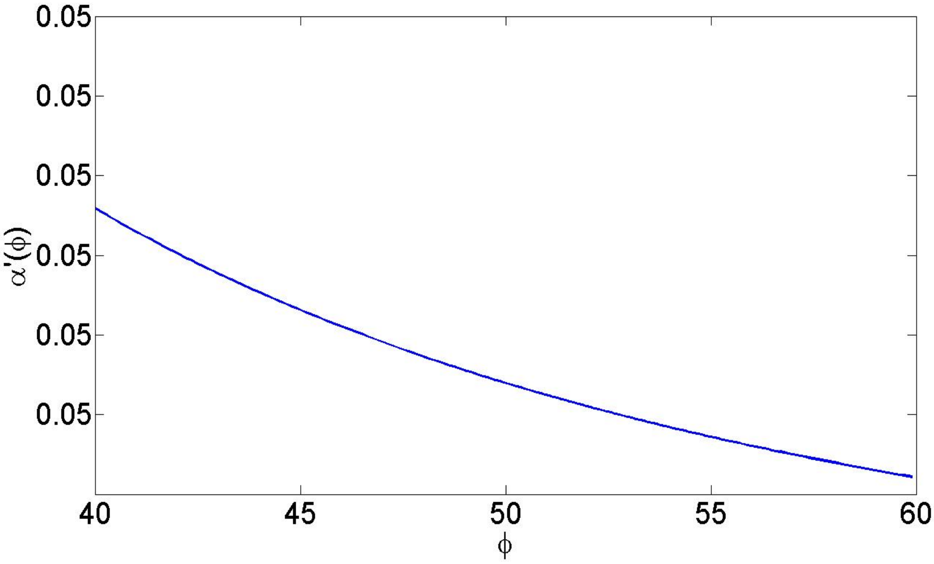
Aktívum	1. aktívum	2. aktívum	3. aktívum	Výnos
1. aktívum	2000.01	0	0	3
2. aktívum	0	20	1	0.2054
3. aktívum	0	1	0.1	0.20539

Tabuľka 3: Vymyslený príklad, v ktorom je porušená podmienka (2.3.7)

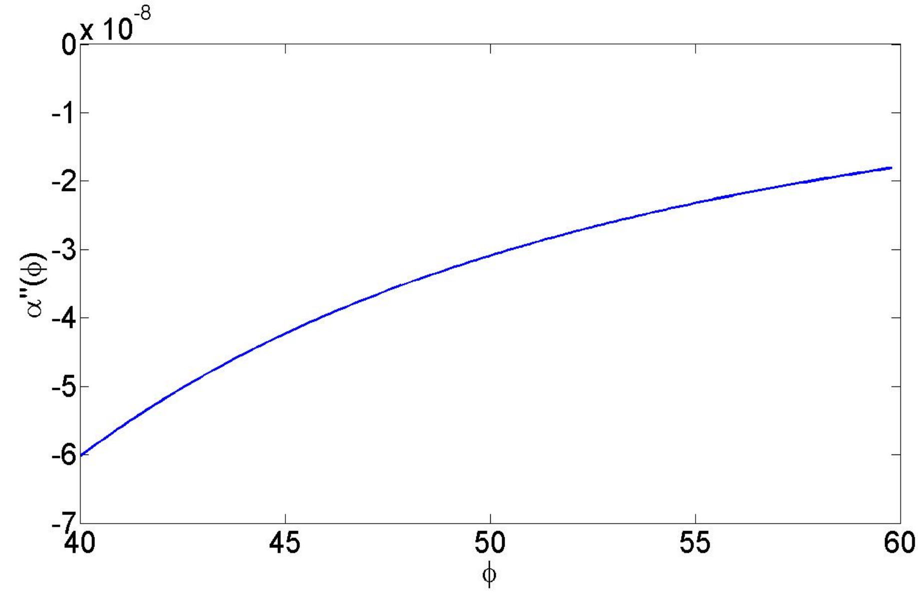
Potom optimalizácia funkcie zadanej v MATLAB-e pomocou príkazu *quadprog* má tvar:



Obr. 8: Optimalizácia pomocou funkcie *quadprog*

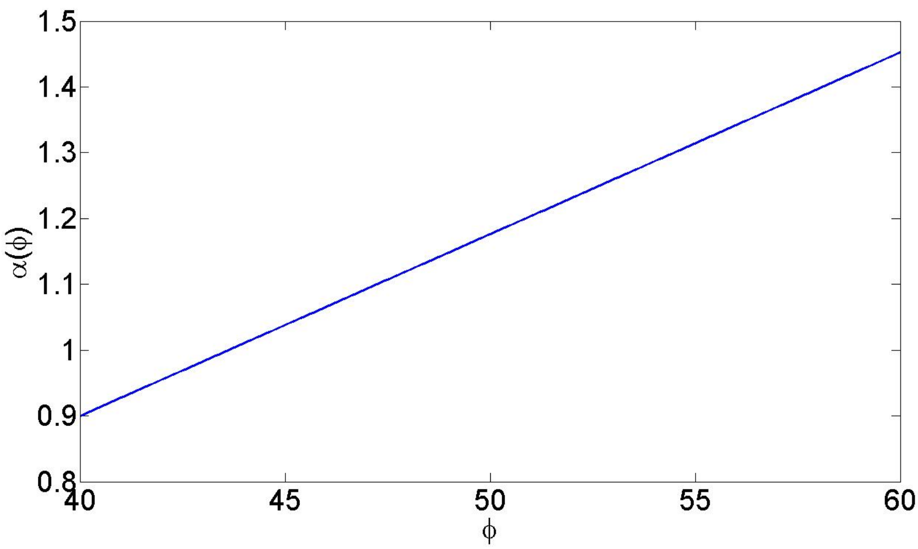


Obr. 9: Prvá derivácia pomocou funkcie *quadprog*

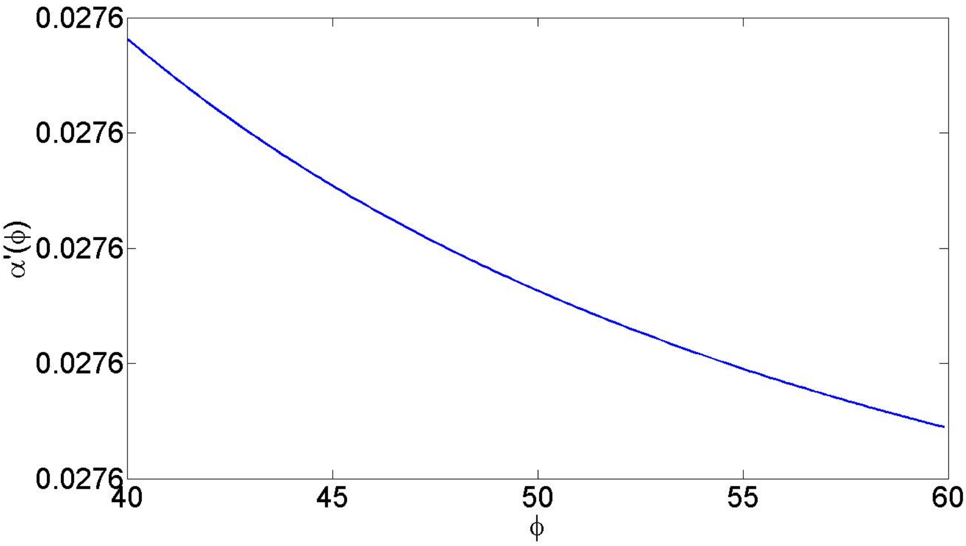


Obr. 10: Druhá derivácia pomocou funkcie *quadprog*

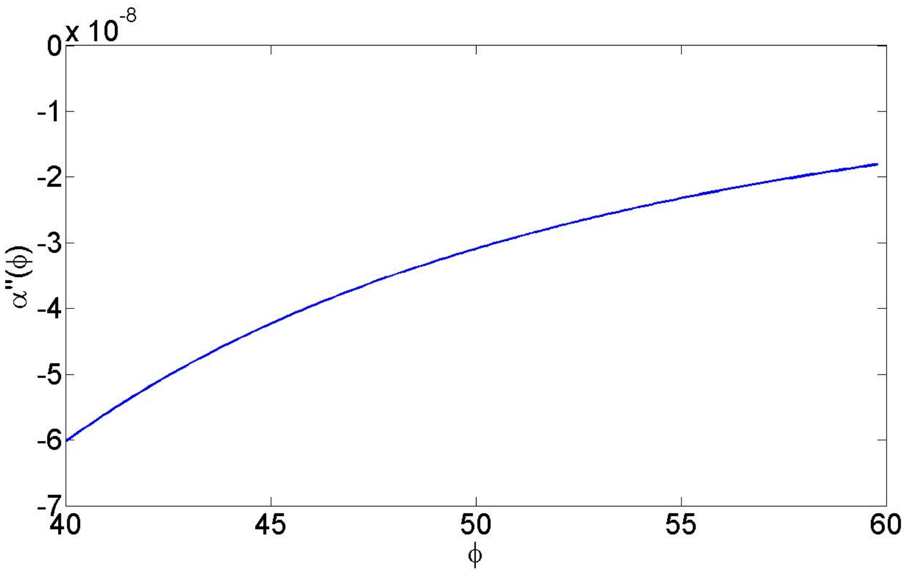
Porovnaním s odvodenou optimalizačnou funkciou:



Obr. 11: Odvodená funkcia v explicitnom tvare



Obr. 12: Prvá derivácia funkcie vypočítanej v explicitnom tvare



Obr. 13: Druhá derivácia funkcie vypočítanej v explicitnom tvare

zistíme, že funkcia $\alpha(\phi)$ a aj jej prvá derivácia je pri dosadení do explicitného vzorca odlišná od počítaní tej istej fukcie cez implementovanú metódu *quadprog*. Porovnaním hodnôt sa presvedčíme, že explicitný vzorec nám podľa predpokladu vypočíta niektoré zložky premennej θ záporné. Pre $\phi = 40$ je riešenie úlohy (2.3.4) pomocou funkcie *quadprog*: $\widehat{\theta}_Q(40) = \begin{pmatrix} 0.00008 \\ 0 \\ 0.99992 \end{pmatrix}$, zatiaľ čo riešenie pomocou explicitného tvaru nám dá výsledok: $\widehat{\theta}_E(40) = \begin{pmatrix} 0.00006 \\ -0.0497 \\ 1.0497 \end{pmatrix}$. Taktiež, keď parameter ϕ položíme rovný *0.3015*, potom nadobúda riešenie vyjadrené pomocou explicitného tvaru opäť záporné hodnoty: $\widehat{\theta}_E(0.3015) = \begin{pmatrix} 0.005 \\ -0.049 \\ 1.045 \end{pmatrix}$, zatiaľ čo riešenie pomocou funkcie *quadprog* je vyjadrené: $\widehat{\theta}_Q(0.3015) = \begin{pmatrix} 0.0047 \\ 0 \\ 0.9953 \end{pmatrix}$. Záporné váhy θ_i súvisia s poznámkou (2.2), kedy nie je splnená tretia podmienka z (2.2.4) pre dvojrozmerný prípad. V našom prípade sa pozeráme na podmienku (2.3.7). Vyplýva to z toho, že kovariancia tretieho s druhým aktívom je väčšia ako variancia tretieho aktíva. Premenná δ_2 z (2.3.26) je po vyjadrení v premenných σ, ρ:

$$\delta_2 = ae - cd = \sigma_1^2\sigma_2\sigma_3(\rho_{23} - \rho_{12}\rho_{13}) + \sigma_1\sigma_2\sigma_3^2(\rho_{12} - \rho_{13}\rho_{23}) + \sigma_1^2\sigma_3^2(\rho_{13}^2 - 1). \tag{2.4.1}$$

Z toho vyplýva pre predchádzajúci príklad, v ktorom $\rho_{12}, \rho_{13} = 0$:

$$\delta_2 = \sigma_1^2(\sigma_2\sigma_3\rho_{23} - \sigma_3^2) \geq 0. \tag{2.4.2}$$

Nerovnosť vyplýva zo zadania príkladu. Z (2.3.12):

$$\gamma = c^2 - ab \leq 0. \tag{2.4.3}$$

Potom pre dostatočne veľké ϕ je riešenie pre druhú váhu δ_2 záporné, kvôli zápornosti druhého zlomku, ktorý je v absolútnej hodnote väčší ako zlomok $\frac{\omega_1}{\phi}$. V našom prípade je to už pre hodnotu $\phi = 0.3015$.

3 Optimalizácia portfólia pre všeobecný prípad

Pri investovaní na burzovom trhu sa investori neobmedzujú na dve či tri aktíva. Často sa v ich portfóliu nachádza mnohonásobné zastúpenie akcií a iných finančných derivátov. Mnohočlenné portfólio je výhodné kvôli tomu, že v rôznych obdobiach majú niektoré akcie vyššiu výnosnosť ako iné. V inom období môže ich výnosnosť klesnúť, zatiaľ čo hodnota ostatných môže vzrásť. V tejto kapitole sa preto budeme venovať úlohe parametrického kvadratického programovania s neurčitým počtom n premenných, pričom kvôli zložitosti problému budeme predpokladať nezápornosť vypočítaných váh.

3.1 Explicitný vzorec pre $n \times n$ prípad

Pre zjednodušenie problému usporiadame jednotlivé výnosy podľa veľkosti:

$$\mu_1 \geq \mu_2 \geq \mu_3 \geq \ldots \geq \mu_{n-1} \geq \mu_n. \tag{3.1.1}$$

Potom úlohu (2.1.1) pre všeobecný prípad $n \times n$ charakterizujeme:

$$\alpha(\phi) = \min_{\theta \in S^n} \left\{ \frac{\phi}{2} (\sum_{i=1}^{n} \theta_i^2 \sigma_i^2 + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} \sum_{j=1}^{n} \theta_i \theta_j \sigma_i \sigma_j \rho_{ij}) - \sum_{i=1}^{n} \theta_i \mu_i \right\}, \tag{3.1.2}$$

kde množinu prípustných riešení charakterizujeme nasledovne:

$$S^n = \left\{ \theta | \sum_{i=1}^{n} \theta_i = 1, \theta \geq 0 \right\}. \tag{3.1.3}$$

Odtiaľ môžeme odvodiť podmienku na poslednú premennú $\theta_n = 1 - \sum_{i=1}^{n-1} \theta_i$. Úlohu (3.1.2) teda môžeme prepísať do tvaru:

$$\begin{aligned} \alpha(\phi) = \min_{\theta \in W^{n-1}} \{ \frac{\phi}{2} (\sum_{i=1}^{n-1} \theta_i^2 \sigma_i^2 + (1 - \sum_{i=1}^{n-1} \theta_j)^2 \sigma_n^2 + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n-1} \sum_{j=1}^{n-1} \theta_i \theta_j \sigma_i \sigma_j \rho_{i,j} + \\ 2 \sum_{i=1}^{n-1} \theta_i (1 - \sum_{j=1}^{n-1} \theta_j) \sigma_i \sigma_n \rho_{i,n}) - \sum_{i=1}^{n-1} \theta_i \mu_i - (1 - \sum_{i=1}^{n-1} \theta_i) \mu_n \}, \end{aligned} \tag{3.1.4}$$

kde množinu prípustných riešení definujeme nasledovne:

$$W^{n-1} = \left\{ \theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_{n-1} | \sum_{i=1}^{n-1} \theta_i \leq 1, \forall i = 1, 2, \ldots n-1 : \theta_i \geq 0 \right\}. \tag{3.1.5}$$

Po úprave sa úloha (3.1.4) dá napísať ako:

$$\alpha(\phi) = \min_{\theta \in W^n} \{ \frac{\phi}{2} \sum_{i=1}^{n-1} a_i \theta_i^2 + \phi \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n-1} c_{i,j} \theta_i \theta_j + \sum_{i=1}^{n-1} \theta_i (\phi d_i - \mu_i + \mu_n) + \frac{\phi}{2} \sigma_n^2 - \mu_n \}, \tag{3.1.6}$$

kde pomocné premenné $a_i, c_{i,j}, d_i$ sú vyjadrené ako:

$$\begin{aligned} a_i &= \sigma_i^2 + \sigma_n^2 - 2\sigma_i \sigma_n \rho_{i,n}, \\ c_{i,j} &= \sigma_n^2 + \sigma_i \sigma_j \rho_{i,j} - \sigma_i \sigma_n \rho_{i,n} - \sigma_n \sigma_j \rho_{j,n}, \\ d_i &= \sigma_i \sigma_n \rho_{i,n} - \sigma_n^2. \end{aligned} \tag{3.1.7}$$

Ak položíme rovnakú podmienku ako v prípade s 3×3 kovariančnou maticou:

$$\forall i = 1, \ldots n-1, \ \forall j = 1, \ldots n-1, i \neq j : \ \ \sigma_i^2 > \sigma_i \sigma_j \rho_{i,j}, \tag{3.1.8}$$

potom pre pomocné premenné platí:

$$\begin{aligned} a_i &\geq 0, \\ d_i &\leq 0. \end{aligned} \tag{3.1.9}$$

Nutnou podmienkou kladnej definitnosti matice zo systému lineárnych rovníc uvedenom nižšie je kvázidiagonálnosť dominantnosť matice Σ:

$$\forall i, j, k = 1, 2 \ldots n : \quad \sigma_i^2 - \sigma_i \sigma_j \rho_{i,j} \geq \sigma_k \sigma_i \rho_{k,i} - \sigma_k \sigma_j \rho_{k,j}. \tag{3.1.10}$$

Podmienka kladnej definitnosti matice a kladné riešenie váh jednotlivých aktív je uvedené na konci odseku. Pre pevné ϕ existuje pre úlohu (3.1.2) podľa [5] Lagrangeova funkcia:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\theta, \lambda) = & \frac{\phi}{2} \sum_{i=1}^{n-1} a_i \theta_i^2 + \phi \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n-1} c_{i,j} \theta_i \theta_j + \sum_{i=1}^{n-1} \theta_i (\phi d_i - \mu_i + \mu_n) \\ & + \frac{\phi}{2} \sigma_n^2 - \mu_n + \lambda (\sum_{i=1}^{n-1} \theta_i - 1) \mid \lambda \geq 0, \forall i = 1, 2, \ldots n-1 : \theta_i \geq 0. \end{aligned} \tag{3.1.11}$$

Podľa Kuhn-Tuckerových podmienok (2.3.14):

$$\forall i = 1, 2, \dots n-1 : \tag{3.1.12}$$

$$\phi\, a_i\, \theta_i + \phi \sum_{j=1; i \neq j}^{n-1} c_{i,j}\, \theta_j + (\phi d_i - \mu_i + \mu_n) + \lambda \geq 0, \tag{3.1.13}$$

$$\theta_i [\phi\, a_i\, \theta_i + \phi \sum_{j=1; i \neq j}^{n-1} c_{i,j}\, \theta_j + (\phi d_i - \mu_i + \mu_n) + \lambda] = 0, \tag{3.1.14}$$

$$\theta_i \geq 0, \tag{3.1.15}$$

$$\sum_{i=1}^{n-1} \theta_i - 1 \leq 0, \tag{3.1.16}$$

$$\lambda (\sum_{i=1}^{n-1} \theta_i - 1) = 0, \tag{3.1.17}$$

$$\lambda \geq 0. \tag{3.1.18}$$

Ak by rovnica (3.1.17) bola splnená pre druhý činitel, teda $\sum_{i=1}^{n-1} \theta_i - 1 = 0$, potom by sa n-rozmerná úloha redukovala na *(n-1)*-rozmerný prípad. Keďže sa v našej časti venujeme prvému prípadu, tak bude v tejto rovnici splnená podmienka pre prvý činiteľ. Preto bude platiť $\lambda = 0$. Pre $n-1$ rovníc (3.1.14) platí:

$$\theta_i = 0 \quad \vee \quad \phi\, a_i\, \theta_i + \phi \sum_{j=1; i \neq j}^{n-1} c_{i,j}\, \theta_j + (\phi d_i - \mu_i + \mu_n) + \lambda = 0. \tag{3.1.19}$$

V nasledujucej notácii budeme používať dolný index ako označenie pre jednotlivé aktívum, prípadne dvojicu aktív a horný index ako pomocný index pre substitúciu. Pre umocňovanie jednolivých parametrov budeme používať horný index za zátvorkou. Ak položíme druhú rovnicu rovnú 0 pre všetky i z predchádzajúcej disjunkcie, potom riešime sústavu $n-1$ lineárnych rovníc o $n-1$ neznámych:

$$\begin{pmatrix} \phi\, a_1^1 & \phi\, c_{1,2}^1 & \phi c_{1,3}^1 & \dots & \phi c_{1,n-1}^1 \\ \phi\, c_{1,2}^1 & \phi\, a_2^1 & \phi\, c_{2,3}^1 & & \phi\, c_{2,n-1}^1 \\ \phi\, c_{1,3}^1 & \phi\, c_{2,3}^1 & \phi\, a_3^1 & & \phi\, c_{3,n-1}^1 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ \phi\, c_{1,n-1}^1 & \phi\, c_{2,n-1}^1 & \phi\, c_{3,n-1}^1 & \dots & \phi\, a_{n-1}^1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \\ \vdots \\ \theta_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1^1 - \phi d_1^1 \\ f_2^1 - \phi d_2^1 \\ f_3^1 - \phi d_3^1 \\ \vdots \\ f_{n-1}^1 - \phi d_{n-1}^1 \end{pmatrix},$$

kde horný index 1 určuje začiatočný stav, pri upravovaní matice na diagonálny tvar a pomocná premenná $\forall i = 1, 2, \dots n-1$:

$$f_i^1 = \mu_i - \mu_n \geq 0. \tag{3.1.20}$$

Matica zo sústavy rovníc bude symetrická kvôli označeniu nediagonálnych prvkov z (3.1.7):

$$c_{i,j}^1 = c_{j,i}^1. \tag{3.1.21}$$

Kvôli usporiadaniu výnosov sú jednotlivé premenné f_i zoradené nasledovne:

$$f_1^1 \geq f_2^1 \geq \dots \geq f_{n-1}^1 \geq 0. \tag{3.1.22}$$

Pre premenné $a_i^1, c_{i,j}^1$ platí:

$$a_i^1 \geq c_{i,j}^1 \tag{3.1.23}$$

z podmienky (3.1.10):

$$\begin{gathered} \sigma_i^2 - \sigma_i\sigma_j\rho_{i,j} \geq \sigma_i\sigma_n\rho_{j,n} - \sigma_j\sigma_n\rho_{j,n}, \\ a_i^1 = \sigma_i^2 + \sigma_n^2 - 2\sigma_i\sigma_n\rho_{i,n} \geq \sigma_n^2 + \sigma_i\sigma_j\rho_{i,j} - \sigma_i\sigma_n\rho_{i,n} - \sigma_j\sigma_n\rho_{j,n} = c_{i,j}^1. \end{gathered} \tag{3.1.24}$$

Odpočítame od i-teho riadku $\frac{c_{1,i}^1}{a_1^1}$−násobok prvého riadku $\forall i = 2, 3, \dots n-1$.

$$\begin{pmatrix} \phi\, a_1^1 & \phi\, c_{1,2}^1 & \phi\, c_{1,3}^1 & \dots & \phi\, c_{1,n-1}^1 \\ 0 & \phi\, a_2^2 & \phi\, c_{2,3}^2 & & \phi\, c_{2,n-1}^2 \\ 0 & \phi\, c_{2,3}^2 & \phi\, a_3^2 & & \phi\, c_{3,n-1}^2 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & \phi\, c_{2,n-1}^2 & \phi\, c_{3,n-1}^2 & \dots & \phi\, a_{n-1}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \\ \vdots \\ \theta_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1^1 - \phi\, d_1^1 \\ f_2^2 - \phi\, d_2^2 \\ f_3^2 - \phi\, d_3^2 \\ \vdots \\ f_{n-1}^2 - \phi\, d_{n-1}^2 \end{pmatrix},$$

kde definujeme pre i-ty riadok a j-ty stĺpec:

$$
\begin{aligned}
&\forall i = 2, 3, \dots n-1, \forall j = i+1, i+2, \dots n-1 : \\
&\qquad a_i^2 = a_i^1 - \frac{(c_{1,i}^1)^2}{a_1^1}, \\
&\qquad c_{i,j}^2 = c_{i,j}^1 - \frac{c_{1,i}^1 c_{1,j}^1}{a_1^1}, \\
&\qquad f_i^2 = f_i^1 - \frac{f_1^1 c_{1,i}^1}{a_1^1}, \\
&\qquad d_i^2 = d_i^1 - \frac{d_1^1 c_{1,i}^1}{a_1^1}.
\end{aligned}
\tag{3.1.25}
$$

Odpočítaním od i-teho riadku $\frac{c_{2,i}^2}{a_2^2}$-násobok druhého riadku dostávame vynulovaný stĺpec pod druhým diagonálnym členom $\forall i = 3, 4, \dots n-1$:

$$
\begin{pmatrix}
\phi\, a_1^1 & \phi\, c_{1,2}^1 & \phi\, c_{1,3}^1 & \dots & \phi\, c_{1,n-1}^1 \\
0 & \phi\, a_2^2 & \phi\, c_{2,3}^2 & & \phi\, c_{2,n-1}^2 \\
0 & 0 & \phi\, a_3^3 & & \phi\, c_{3,n-1}^3 \\
\vdots & & & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & \phi\, c_{3,n-1}^3 & \dots & \phi\, a_{n-1}^3
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
\theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \\ \vdots \\ \theta_{n-1}
\end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix}
f_1^1 - \phi\, d_1^1 \\ f_2^2 - \phi\, d_2^2 \\ f_3^3 - \phi\, d_3^3 \\ \vdots \\ f_{n-1}^3 - \phi\, d_{n-1}^3
\end{pmatrix},
$$

pričom neznáme a, c, f, d sú definované ako:

$$
\begin{aligned}
&\forall i = 3, 4, \dots n-1, \forall j = i+1, i+2, \dots n-1 : \\
&\qquad a_i^3 = a_i^2 - \frac{(c_{2,i}^2)^2}{a_2^2}, \\
&\qquad c_{i,j}^3 = c_{i,j}^2 - \frac{c_{2,i}^2 c_{2,j}^2}{a_2^2}, \\
&\qquad f_i^3 = f_i^2 - \frac{f_2^2 c_{2,i}^2}{a_2^2}, \\
&\qquad d_i^3 = d_i^2 - \frac{d_2^2 c_{2,i}^2}{a_2^2}.
\end{aligned}
\tag{3.1.26}
$$

Po $n-2$ takýchto iteráciach, kedy v každej odpočítame daný násobok riadku od všetkých riadkov pod daným riadkom, dostaneme hornú trojuholníkovú maticu:

$$
\begin{pmatrix}
\phi\, a_1^1 & \phi\, c_{1,2}^1 & \phi\, c_{1,3}^1 & \phi\, c_{1,4}^1 & \dots & \phi\, c_{1,n-1}^1 \\
0 & \phi\, a_2^2 & \phi\, c_{2,3}^2 & \phi\, c_{2,4}^2 & & \phi\, c_{2,n-1}^2 \\
0 & 0 & \phi\, a_3^3 & \phi\, c_{3,4}^3 & & \phi\, c_{3,n-1}^3 \\
0 & 0 & 0 & \phi\, a_4^4 & & \phi\, c_{4,n-1}^4 \\
\vdots & & & & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \phi\, a_{n-1}^{n-1}
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
\theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \\ \theta_4 \\ \vdots \\ \theta_{n-1}
\end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix}
f_1^1 - \phi\, d_1^1 \\ f_2^2 - \phi\, d_2^2 \\ f_3^3 - \phi\, d_3^3 \\ f_4^4 - \phi\, d_4^4 \\ \vdots \\ f_{n-1}^{n-1} - \phi\, d_{n-1}^{n-1}
\end{pmatrix},
$$

kde všeobecne:

$$
\begin{aligned}
&\forall i = 2, 3, \dots n-1,\ \forall k = 1{,}2, \dots i-1,\ \forall j = i+1, i+2 \dots n-2: \\
&\qquad a_i^{k+1} = a_i^k - \frac{(c_{k,i}^k)^2}{a_k^k}, \\
&\qquad c_{i,j}^{k+1} = c_{i,j}^k - \frac{c_{k,j}^k c_{k,i}^k}{a_k^k}, \\
&\qquad f_i^{k+1} = f_i^k - \frac{f_k^k c_{k,i}^k}{a_k^k}, \\
&\qquad d_i^{k+1} = d_i^k - \frac{d_k^k c_{k,i}^k}{a_k^k}.
\end{aligned}
\tag{3.1.27}
$$

Následne upravíme hornú trojuholníkovú maticu na diagonálnu. V prvom kroku odpočítame $\frac{c_{i,n-1}^i}{a_{n-1}^{n-1}}$-násobok *n-1*-ho riadku od i-teho riadku pre $i = 1, 2, \dots n-2$:

$$
\begin{pmatrix}
\phi\, a_1^1 & \phi\, c_{1,2}^1 & \phi\, c_{1,3}^1 & \dots & \phi\, c_{1,n-2}^1 & 0 \\
0 & \phi\, a_2^2 & \phi\, c_{2,3}^2 & & \phi\, c_{2,n-2}^2 & 0 \\
0 & 0 & \phi\, a_3^3 & & \phi\, c_{3,n-2}^3 & 0 \\
\vdots & & & \ddots & & \vdots \\
0 & 0 & 0 & & \phi\, a_{n-2}^{n-2} & 0 \\
0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \phi\, a_{n-1}^{n-1}
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
\theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \\ \vdots \\ \theta_{n-2} \\ \theta_{n-1}
\end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix}
f_1^2 - \phi\, d_1^2 \\ f_2^3 - \phi\, d_2^3 \\ f_3^4 - \phi\, d_3^4 \\ \vdots \\ f_{n-2}^{n-1} - \phi\, d_{n-2}^{n-1} \\ f_{n-1}^{n-1} - \phi\, d_{n-1}^{n-1}
\end{pmatrix}.
$$

Premenné f, d sú definované ako:

$$
\begin{aligned}
&\forall i = 1, 2, 3, \dots n-2: \\
&\qquad f_i^{i+1} = f_i^i - \frac{f_{n-1}^{n-1} c_{i,n-1}^i}{a_{n-1}^{n-1}}, \\
&\qquad d_i^{i+1} = d_i^i - \frac{d_{n-1}^{n-1} c_{i,n-1}^i}{a_{n-1}^{n-1}}.
\end{aligned}
\tag{3.1.28}
$$

V druhej iterácii sa odpočíta od i-teho riadku $\frac{c^i_{i,n-2}}{a^{n-2}_{n-2}}$-násobok n-2-ho riadku pre $i = 1, 2, 3, \dots n-3$:

$$\begin{pmatrix} \phi\, a^1_1 & \phi\, c^1_{1,2} & \dots & \phi\, c^1_{1,n-3} & 0 & 0 \\ 0 & \phi\, a^2_2 & & \phi\, c^2_{2,n-3} & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & & & \vdots \\ 0 & 0 & & \phi\, a^{n-3}_{n-3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & & 0 & \phi\, a^{n-2}_{n-2} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \phi\, a^{n-1}_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \vdots \\ \theta_{n-3} \\ \theta_{n-2} \\ \theta_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f^3_1 - \phi\, d^3_1 \\ f^4_2 - \phi\, d^4_2 \\ \vdots \\ f^{n-1}_{n-3} - \phi\, d^{n-1}_{n-3} \\ f^{n-1}_{n-2} - \phi\, d^{n-1}_{n-2} \\ f^{n-1}_{n-1} - \phi\, d^{n-1}_{n-1} \end{pmatrix},$$

kde:

$$\begin{aligned} &\forall i = 1, 2, 3, \dots n-3 : \\ &\qquad f^{i+2}_i = f^{i+1}_i - \frac{f^{n-1}_{n-2} c^i_{i,n-2}}{a^{n-2}_{n-2}}, \\ &\qquad d^{i+2}_i = d^{i+1}_i - \frac{d^{n-1}_{n-2} c^i_{i,n-2}}{a^{n-2}_{n-2}}. \end{aligned} \tag{3.1.29}$$

Po $n-2$ iteráciach dostávame diagonálnu maticu:

$$\begin{pmatrix} \phi\, a^1_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \phi\, a^2_2 & 0 & & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \phi\, a^3_3 & & 0 & 0 \\ \vdots & & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & & \phi\, a^{n-2}_{n-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \phi\, a^{n-1}_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \\ \vdots \\ \theta_{n-2} \\ \theta_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f^{n-1}_1 - \phi\, d^{n-1}_1 \\ f^{n-1}_2 - \phi\, d^{n-1}_2 \\ f^{n-1}_3 - \phi\, d^{n-1}_3 \\ \vdots \\ f^{n-1}_{n-2} - \phi\, d^{n-1}_{n-2} \\ f^{n-1}_{n-1} - \phi\, d^{n-1}_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Všeobecne sú premenné f, d definované:

$$\begin{aligned} &\forall i = 1, 2, 3, \dots n-2, \forall k = 1, 2, 3, \dots n-i-1 : \\ &\qquad f^{i+k}_i = f^{i+k-1}_i - \frac{f^{n-1}_{n-k} c^i_{i,n-k}}{a^{n-k}_{n-k}}, \\ &\qquad d^{i+k}_i = d^{i+k-1}_i - \frac{d^{n-1}_{n-k} c^i_{i,n-k}}{a^{n-k}_{n-k}}. \end{aligned} \tag{3.1.30}$$

Aby sme zabezpečili nezápornosť vektora váh, potrebujeme kladnosť diagonálnych zložiek a nezápornosť vektora na pravej strane systému. Položíme teda podmienku na parametre f, d:

$$\begin{aligned} f_j^1 &\geq \sum_{i=1}^{j-1} \frac{f_i^i c_{i,j}^i}{a_i^i} + \sum_{i=j+1}^{n-1} \frac{f_i^{n-1} c_{j,i}^j}{a_i^i}, \\ d_j^1 &\leq \sum_{i=1}^{j-1} \frac{d_i^i c_{i,j}^i}{a_i^i} + \sum_{i=j+1}^{n-1} \frac{d_i^{n-1} c_{j,i}^j}{a_i^i}. \end{aligned} \tag{3.1.31}$$

Matica systému lineárnych rovníc riešeného vyššie je kladne definitná, ak sú pivoty odvodené pri diagonalizácií kladné:

$$a_j^1 \geq \sum_{i=1}^{j-1} \frac{(c_{i,j}^i)^2}{a_i^i}. \tag{3.1.32}$$

Ak by niektorá z podmienok nebola splnená, to znamená, že váha aspoň jedného z aktív bola záporná, potom by sa úloha (3.1.2) zjednodušila na problém optimalizácie bez daného aktíva. Položením predchádzajúcich podmienok zo systému lineárnych rovníc odvodenom vyššie vyplýva všeobecné riešenie pre $n \times n$ prípad optimalizácie portfólia:

$$\theta_i = \frac{f_i^{n-1}}{\phi a_i^i} - \frac{d_i^{n-1}}{a_i^i}. \tag{3.1.33}$$

V prípade, že by súčet váh $n-1$ aktív bol väčší ako jedna, teda:

$$\sum_{i=1}^{n-1} \theta_i > 1, \tag{3.1.34}$$

potom by sa dimenzia úlohy zredukovala na prípad, v ktorom je hodnota váhy posledného aktíva nulová.

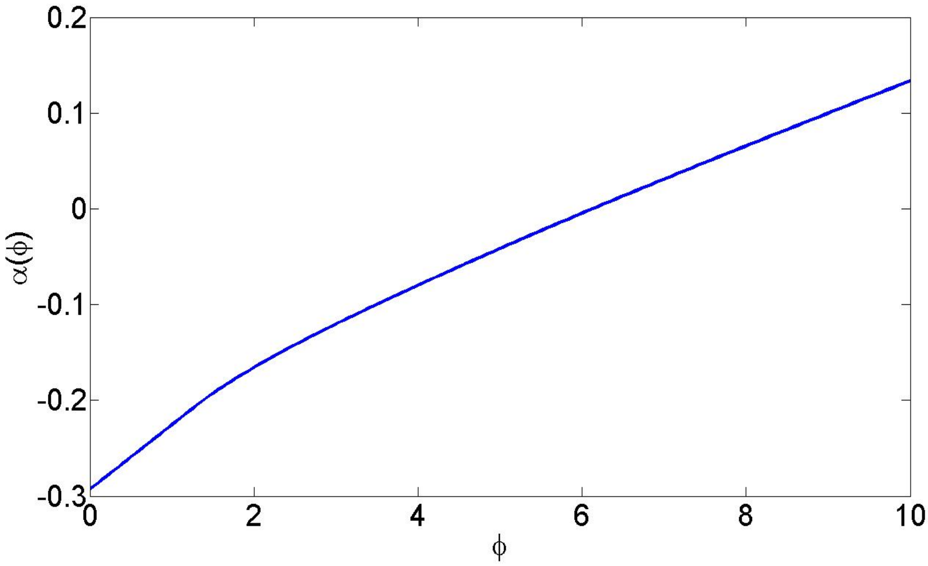
3.2 Výpočet funkcie $\alpha(\phi)$ pre konkrétny viacrozmerný príklad

Podobne ako v predchádzajúcej kapitole, pravdivosť odvodeného explicitného vzorca si overíme pomocou aplikácie na konkrétny príklad. Do úvahy zoberieme okrem pôvodných troch aktív ešte aj dve aktíva navyše od firiem Bayer a BMW. Tabuľka kovariančnej matice a vektora výnosov je potom:

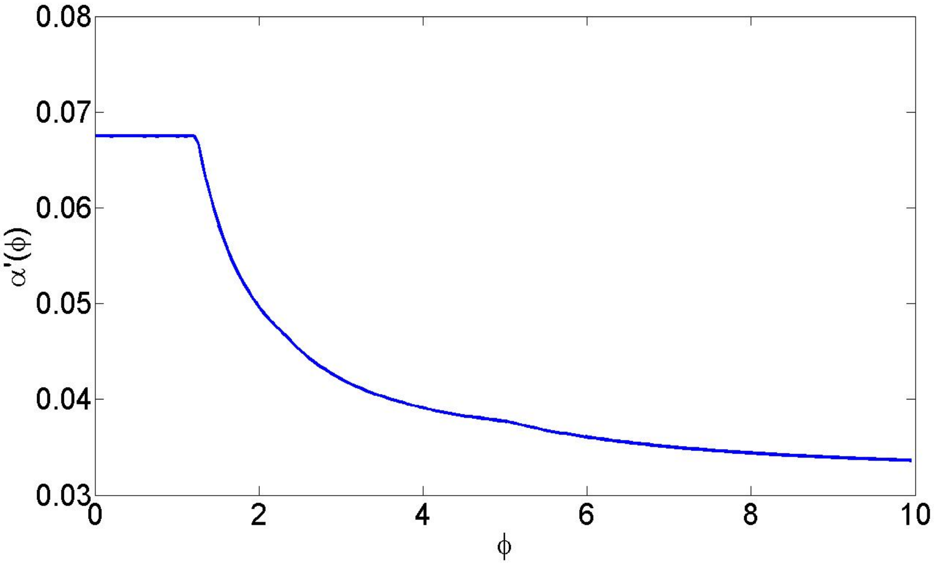
Aktívum	BMW	Adidas	BASF	Bayer	Allianz	Výnos
BMW	0.1350	0.0660	0.0799	0.0636	0.0771	0.2930
Adidas	0.0660	0.0782	0.0561	0.0483	0.0555	0.2056
BASF	0.0799	0.0561	0.0967	0.0652	0.0842	0.2054
Bayer	0.0636	0.0483	0.0652	0.0872	0.0719	0.1311
Allianz	0.0771	0.0555	0.0842	0.0719	0.1280	0.0198

Tabuľka 4: Príklad pre aktíva firiem Adidas, Allianz, BASF, Bayer a BMW, zdroj: finance.yahoo.com, August 2010 - April 2012

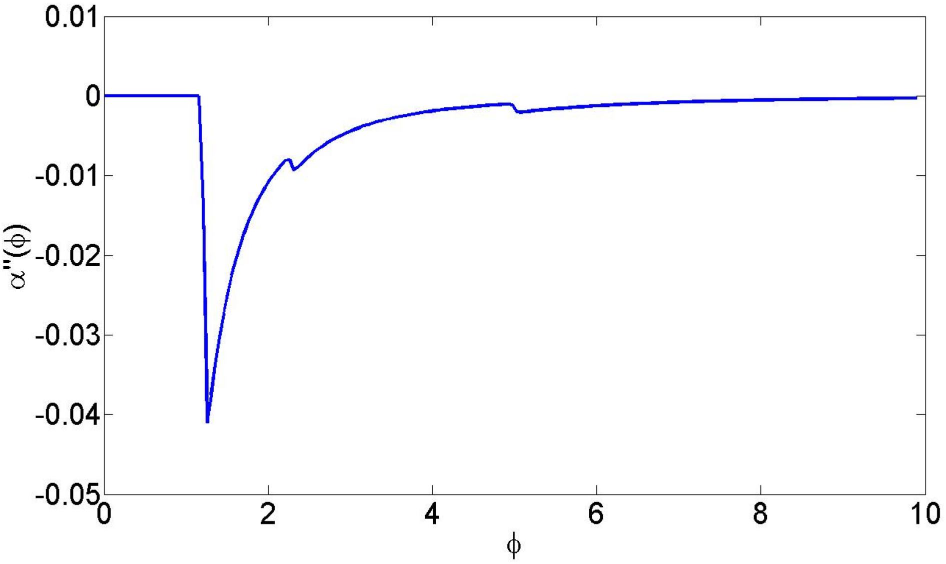
Vybrané aktíva opäť pochádzajú z nemeckého indexu DAX 30, v ktorom sa nachádzajú na prvých piatich miestach. Aby náš príklad súhlasil so zadaním problému (3.1.2), aktíva z indexu sú usporiadané od najvyššieho výnosu po najmenší. Vidíme, že zadaný problém zodpovedá podmienkam (3.1.8) a (3.1.10). Funkcia vypočítaná v explicitnom tvare má tvar:



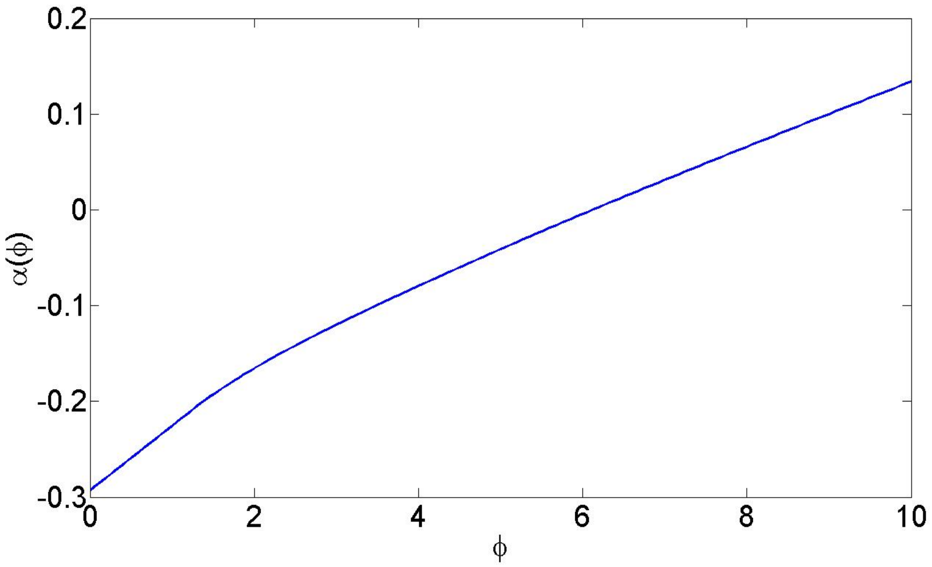
Obr. 14: Funkcia $\alpha(\phi)$ pre prvých 5 aktív indexu DAX 30



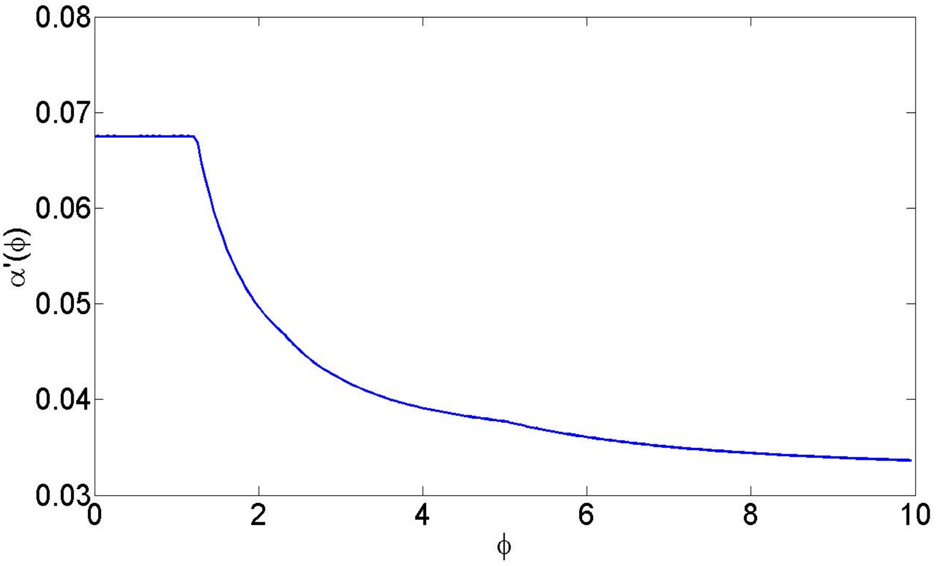
Obr. 15: Prvá derivácia funkcie $\alpha(\phi)$ pre prvých 5 aktív indexu DAX 30



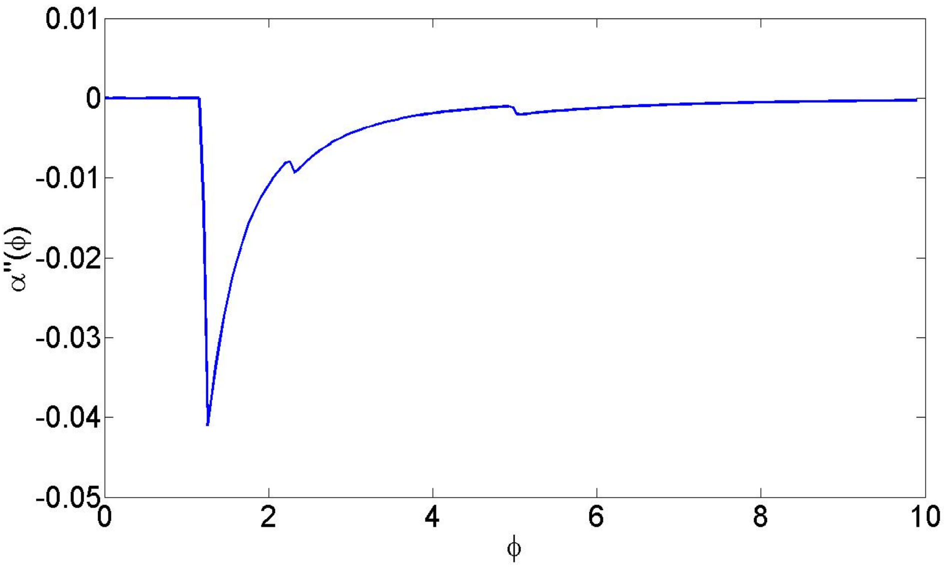
Obr. 16: Druhá derivácia funkcie $\alpha(\phi)$ pre prvých 5 aktív indexu DAX 30



Obr. 17: Porovnanie funkcie $\alpha(\phi)$ s výpočtom pomocou predprogramovanej funkcie *quadprog*

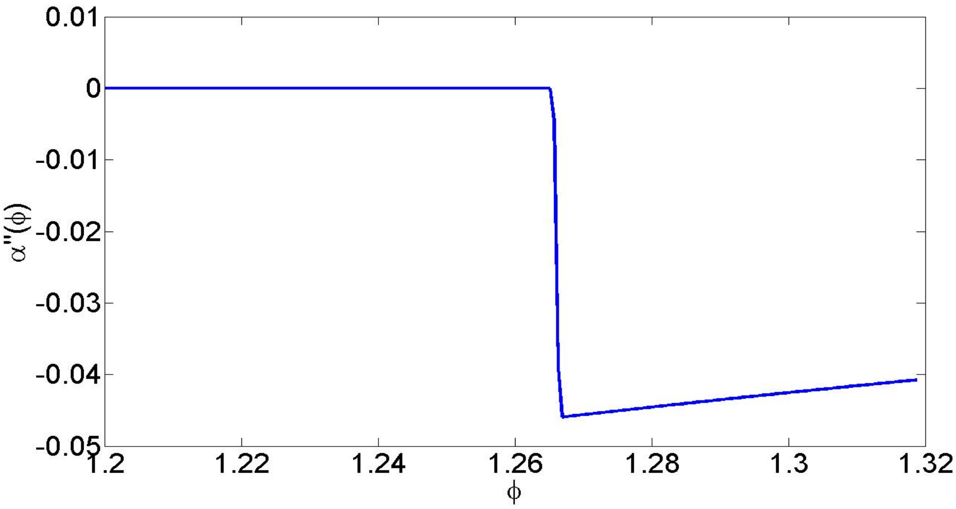


Obr. 18: Prvá derivácia pomocou predprogramovanej funkcie *quadprog*

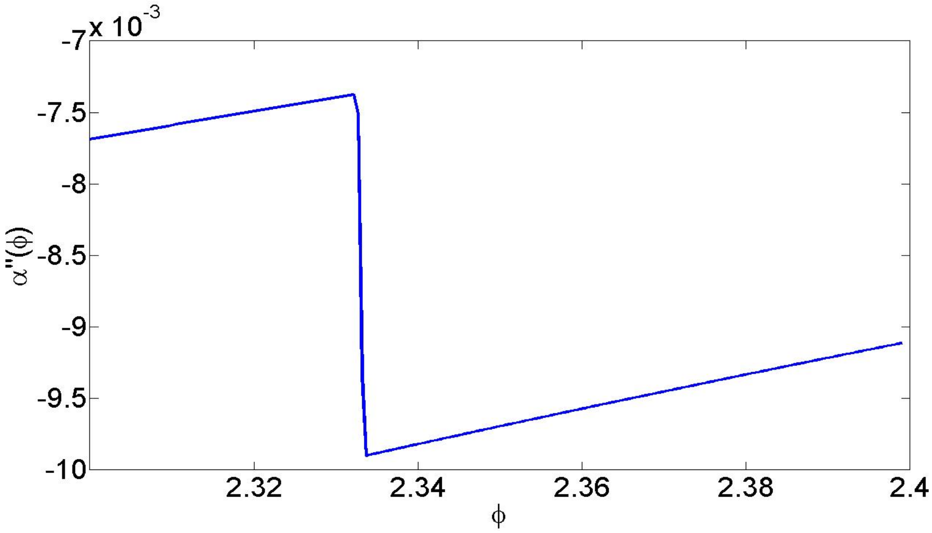


Obr. 19: Druhá derivácia pomocou predprogramovanej funkcie *quadprog*

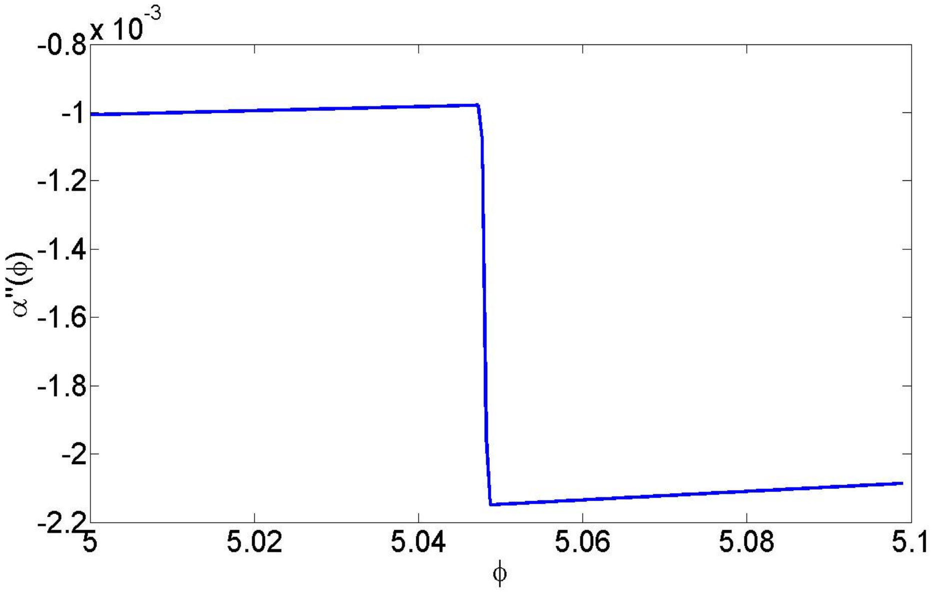
Z obrázkov 16, 19 vidíme, že druhá derivácia funkcie má tri body nespojitosti. Nadobúda ich v bodoch $\phi_1 \approx 1.27$, $\phi_1 \approx 2.33$ a $\phi_1 \approx 5.05$.



Obr. 20: Bod nespojitosti druhej derivácie pre $\phi_1 \approx 1.27$



Obr. 21: Bod nespojitosti druhej derivácie $\phi_1 \approx 2.33$



Obr. 22: Bod nespojitosti druhej derivácie $\phi_1 \approx 5.05$

S týmto pozorovaním súvisí aj veta o počte bodov nespojitosti druhej derivácie funkcie $\alpha(\phi)$:

Veta 3.1. Nech platia podmienky (3.1.8), (3.1.10), (3.1.31) a (3.1.32). Potom druhá derivácia funkcie $\alpha(\phi)$ má po minimalizácii úlohy (2.1.4) najviac $n-1$ bodov nespojitosti.

Dôkaz. Dôkaz vyplýva z odvodenia explicitného vzorca uvedeného vyššie. $\square$

4 Iné metódy riešenia úlohy optimalizácie portfólia

Vo všeobecnosti sú známe aj iné spôsoby riešenia úloh optimalizácie portfólia. Táto kapitola sa venuje popísaniu Markowitzovej úlohy a jej súvisu s úlohou parametrického kvadratického programovania.

4.1 Markowitzov výber portfólia

Tento odsek je spracovaný podľa [6, kap. 2]. Problematika výberu optimálneho portfólia je založená na každom jednotlivcovi individuálne. Súvisí to s rizikom, s akým je ochotný investovať do portfólia. Kniha [6] opisuje Markowitzovu teóriu portfólia ako minimalizovanie rizika, ktoré vystupuje ako volatilita a maximalizovanie výnosnosti portfólia. V praxi sa však pri znižovaní volatility znižuje aj výnos portfólia a naopak pri zvyšovaní výnosu sa zvyšuje volatilita. Preto sa optimalizácia portfólia dosahuje dvomi spôsobmi. Jeden z nich je fixácia volatility a maximalizovanie výnosu. Tento spôsob je výpočtovo náročný, pretože pri odvodzovaní váh vzniká iracionálna funkcia. Preto sa využíva fixácia výnosu na hladine, ktorú si určí investor, pri minimalizácii volatility. Matematicky vyjadrené:

$$\begin{aligned} \min \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} \theta_i \theta_j \sigma_{ij} \\ \sum_{i=1}^{n} \theta_i \overline{r}_i = \overline{r}_p \\ \sum_{i=1}^{n} \theta_i = 1. \end{aligned} \tag{4.1.1}$$

Čím vyšší si zvolíme výnos, tým vyššia bude volatilita a teda aj riziko. Investori, vyberajúci si takýto výnos, sa nazývajú riziko vyhľadávajúci. Naopak investori, ktorí zvolia menší výnos a tým je menšia aj volatilita, sa volajú riziko averzní.

Markowitzova úloha (4.1.1) uvažuje s váhami $\theta \in \mathbb{R}^n$ pre jednotlivú akciu a teda aj so zápornými riešeniami. V tomto prípade sa hovorí, že dané aktívum je na krátkej pozícii, respektíve ide o shortovanie aktíva. Aby sa úloha (4.1.1) zhodovala s našou úlohou parametrického kvadratického programovania, je potrebné pridať ohraničenie: $\theta_i \geq 0, \forall i$.

4.2 Súvis medzi Markowitzovým riešením úlohy a úlohy parametrického kvadratického programovania

Označme si množinu prípustných riešení obidvoch úloh ako:

$$\mathbb{S}^n = \left\{ \theta | \sum_{i=1}^{n} \theta_i = 1, \theta \geq 0_n \right\}.$$

Ďalej označme úlohu parametrického kvadratického programovania:

$$\min_{\theta \in \mathbb{S}^n} \quad \phi f(\theta) - g(\theta). \tag{4.2.1}$$

V našom prípade funkcia f je zadaná ako volatilita a funkciu g určuje výnos nášho portfólia. Parameter ϕ popisuje averziu k riziku. Túto úlohu parametrického kvadratického programovania môžeme chápať aj ako kombináciu volatility a výnosu, ktorá sa líši od lineárnej kombinácie tým, že pri funkcii výnosu je koeficient 1. Čím je parameter ϕ väčší, tým väčšia váha sa kladie na funkciu volatility pri minimalizácii funkcie. Preto metóda rieši úlohu s väčším ohľadom na minimalizáciu volatility. V opačnom prípade pri nízkych hodnotách parametra ϕ úloha kladie väčší dôraz na maximalizáciu výnosu oproti nižšiemu významu predchádzajúcej minimalizácie volatility. V tomto prípade je koeficient averzie k riziku nižší.

Na rozdiel od predchádzajúcej úlohy, Markowitzova úloha so zafixovanými výnosmi má nasledovný tvar:

$$\begin{aligned} &\min_{\theta \in \mathbb{S}^n} f(\theta) \\ &g(\theta) = c. \end{aligned} \tag{4.2.2}$$

Konštanta c z (4.2.2) symbolizuje zafixovaný výnos z Markowitzovej úlohy (4.1.1). Podľa [5] má Lagrangeova funkcia úlohy (4.2.2) tvar:

$$L(\theta, \lambda) = f(\theta) - \lambda(g(\theta) - c). \tag{4.2.3}$$

Z [9] je nutná podmienka pre nájdenie minima (4.2.1):

$$\phi \nabla f(\theta) - \nabla g(\theta) = 0, \tag{4.2.4}$$

po úprave:

$$\nabla f(\theta) - \frac{1}{\phi} \nabla g(\theta) = 0. \tag{4.2.5}$$

Pre (4.2.3):

$$\begin{aligned} \nabla_\theta L(\theta, \lambda) &= \nabla f(\theta) - \lambda \nabla g(\theta) = 0, \\ \nabla_\lambda L(\theta, \lambda) &= g(\theta) - c = 0. \end{aligned} \tag{4.2.6}$$

Z rovníc (4.2.6) vyplýva, že Langrageov multiplikátor je závislý v premennej c:

$$\lambda = \lambda(c). \tag{4.2.7}$$

Pre aplikáciu parametrického kvadratického programovania do optimalizovania portfólia je funkcia f zadaná ako volatilita portfólia:

$$f(\theta) = \frac{1}{2} \theta^T \Sigma \theta. \tag{4.2.8}$$

A funkcia g je zadaná ako výnos portfólia:

$$g(\theta) = \mu^T \theta. \tag{4.2.9}$$

Po dosadení našej situácie do (4.2.8) a (4.2.9) do derivácie Lagrangeovej funkcie (4.2.6):

$$\begin{aligned} \theta^T \Sigma - \lambda \mu^T &= 0, \\ \mu^T \theta &= c. \end{aligned} \tag{4.2.10}$$

Odkiaľ sa dá odvodiť:

$$\begin{aligned} \Sigma \theta &= \lambda \mu, \\ \theta &= \lambda \Sigma^{-1} \mu. \end{aligned} \tag{4.2.11}$$

Preto:

$$\begin{aligned} c &= \mu^T\theta = \lambda\mu^T\Sigma^{-1}\mu, \\ \frac{1}{\lambda} &= \frac{\mu^T\Sigma^{-1}\mu}{c}. \end{aligned} \tag{4.2.12}$$

Po porovnaní rovníc (4.2.5) a (4.2.6) pre koeficient udávajúci váhu volatility vyplýva:

$$\phi \approx \frac{1}{\lambda(c)} \equiv \frac{\mu^T\Sigma^{-1}\mu}{c}. \tag{4.2.13}$$

Vidíme, že Markowitzova teória portfólia a úloha parametrického kvadratického programovania spolu úzko súvisia. Kvôli vektorovým rovniciam (4.2.5) a (4.2.6) nie je parameter ϕ presne rovný prevrátenej hodnote Lagrangeovho multiplikátora λ v Markowitzovom modeli, ale je približne rovný danej prevrátenej hodnote. To, že daný bod bude minimum, zabezpečuje kladná definitnosť matice Σ.

Záver

Hlavným cieľom tejto bakalárskej práce bolo spracovať prehľad metód úloh parametrického kvadratického programovania pri optimalizácii portfólia. Daná problematika môže byť prínosom pri invesovaní na finančných trhoch.

Po odvodení explicitného vzorca sme v práci aplikovali výsledky na dáta získané z reálnej praxe. Odvodené algoritmy sme implementovali v programovacom jazyku Matlab, v ktorom sme sledovali citlivosť zmeny riešenia váh pri zmene parametra v zadaní úlohy. Výsledky sme porovnávali s vopred zavedenou funkciou *quadprog*.

Základným predpokladom pri definovaní počiatočnej úlohy na optimalizáciu sú ohraničenia, ktoré nepovolujú krátke pozície jednotlivých aktív. Všimli sme si, že pre rôzne zadania trojrozmernej úlohy v odseku 2.3 na optimalizáciu portfólia má problém rozdielne riešenia. Pri podmienke, kedy sú všetky výnosy pomerne rovnaké, vstupujú do optimálneho portfólia pre isté parametre ϕ dve aktíva s najvyššou výnosnosťou. Ak sú výnosy aktív rozdielne nad prípustnú mieru, potom sa pre isté ϕ hodnota váhy druhého aktíva stáva nulovou. Teda aktívne vstupujú do portfólia aktíva s najväčším a najmenším výnosom.

Pri pozorovaní správania sa funkcie s vopred určenými podmienkami, ktorá je odvodená v časti 3.1, sme zistili, že funkcia $\alpha(\phi)$ má pre rôzne intervaly odlišné funkčné vlastnosti. Pre dostatočne nízke hodnoty parametra ϕ je funkcia lineárna. V nasledujúcich intervaloch, v ktorých sa realizujú dve a viac aktív ako aktívne vstupujúce do portfólia, sa daná funkcia správa ako lineárna kombinácia lineárnej a lineárnej lomenej funkcie. V krajných bodoch jednotlivých intervalov sme pozorovali spojitosť funkcie a jej prvej derivácie.

V konečnom dôsledku o funkcii $\alpha(\phi)$ môžeme povedať, že je to lineárna kombinácia lineárnej a lineárnej lomenej funkcie rozdelená do viacerých intervalov, pričom každý interval sa líši koeficientami v lineárnej kombinácii. Hoci funkcia a aj jej derivácia sú spojité, jej druhá derivácia má pre netriviálny prípad aspoň jeden bod nespojitosti. Počet týchto bodov sa odvíja od zadaného počtu aktív, ale pre nami zadané podmienky môže byť nanajvýš rovný počtu aktív zmenšených o jedna.

Náš predpoklad o parametri ϕ ako o koeficiente udávajúcom určitú rizikovú averziu investora sa potvrdil aj na aplikácii na konkrétnych príkladoch v odsekoch 2.4 a 3.2. Pre nízke hodnoty parametra boli hodnoty váh aktív v portfóliu nulové, až na aktívum s najväčšou výnosnosťou. Pre zväčšujúce sa hodnoty nášho koeficientu sa váhy ostatných aktív postupne menili z nulovej na kladnú hodnotu. Pre veľmi vysoké hodnoty parametra funkcia prihliadala pri optimalizovaní na výnosovú časť iba v malej miere, takže približne riešila úlohu minimalizácie násobku volatility portfólia. Pre tieto hodnoty mali najväčší podiel tie aktíva, ktorých volatilita a vzájomné kovariancie mali nízku hodnotu.

Súvis medzi parametrom ϕ v účelovej funkcii a rizikovou averziou potvrdzuje aj porovnanie v časti 4.2. Parameter sa dá aproximovať ako násobok prevrátenej hodnoty úrovne fixácie výnosnosti portfólia. Čím vyšší výnos povolíme pri zafixovaní výnosu, tým sa volatilita pri minimalizácii v Markowitzovom prístupe zvyšuje. V úlohe parametrického kvadratického programovania to korešponduje s nízkymi hodnotami parametra, čo svedčí o vysokej averzii k riziku.

Ako predmet ďalšieho skúmania by mohlo byť pozorovanie správania sa optimalizovanej účelovej funkcie bez zadaných obmedzení. V tomto prípade by neplatila veta o počte bodov nespojitosti z odseku 3.2 a úloha v explicitnom tvare by mohla mať pre iné intervaly odlišné funkčné predpisy.

Literatúra

[1] Bank, B. a kol.: *Non-Linear Parametric Optimization*, Akademie Verlag, Berlin, 1982

[2] Brunovský, P.: *Mikroekonómia*, elektronické študijné materiály, FMFI UK, Bratislava, 2012, dostupné na internete (16.2.2013): http://pc2.iam.fmph.uniba.sk/skripta/brunovsky2/mikro.pdf

[3] Černý, A.: *Teória kvadratického zaistenia*, habilitačná práca, FMFI UK, Bratislava, 2010

[4] Gould, N.: *An introduction to algorithms for continuous optimization*, Oxford University Computing Laboratory and. Rutherford Appleton Laboratory, 2006, dostupné na internete (16.2.2013): http://www.cs.ox.ac.uk/nick.gould/courses/co/paper.pdf

[5] Hamala, M., Trnovská, M.: *Nelineárne programovanie, teória a alogritmy*, EPOS, Bratislava, 2013

[6] Melicherčík, I., Olšarová, L., Úradníček, V.: *Kapitoly z finančnej matematiky*, EPOS, Bratislava, 2005

[7] Plesník, J.: *Lineárne programovanie*, elektronické študijné materiály, FMFI UK, Bratislava, 2010

[8] Ševčovič, D., Kilianová, S.: *A Method of Solving Hamilton-Jacobi-Bellman Equation for Constrained Optimal Investment Problem via Riccati Transformation*, Working paper

[9] Ševčovič, D.: *Matematická analýza 3*, prednášky, FMFI UK, Bratislava, 2011

Príloha A

Funkcia počítajúca riešenie pomocou explicitného vzorca pre 3x3 prípad

```
function [t1,t2,val]=vypocfcia3(fi)
mi=[0.2056 0.2054 0.0198]';
A=[0.0782 0.0561 0.0555;...
   0.0561 0.0967 0.0842;...
   0.0555 0.0842 0.1280];
% mi=[3 0.2054 0.20539]';
% A=[2000.01 0 0;...          %Príklad, kedy nie je
%     0 20 1;...              %zachovaná podmienka (2.2.4)
%     0 1 0.1];

a=A(1,1)+A(3,3)-2*A(1,3);
b=A(2,2)+A(3,3)-2*A(2,3);
c=A(3,3)-A(2,3)-A(1,3)+A(1,2);
d=A(1,3)-A(3,3);
e=A(2,3)-A(3,3);

delta1=b*d-c*e;
delta2=a*e-c*d;
gama=c^2-a*b;
omega1=(mi(3)*(b-c)+c*mi(2)-b*mi(1))/gama;
omega2=(mi(3)*(a-c)+c*mi(1)-a*mi(2))/gama;

% Riešenie pre rádovo rovnaké výnosy
if(c*(mi(1)-mi(3))<a*(mi(2)-mi(3)))
    test=(omega1+omega2)/fi+(delta1+delta2)/gama;
    if(test<=1)
        t1=omega1/fi+delta1/gama;
```

```
        t2=omega2/fi+delta2/gama;
        t3=1-t1-t2;
        val=fi/2*[t1,t2,t3]*A*[t1;t2;t3]-mi'*[t1;t2;t3];
    else
        test=(b-c+e-d)/(a+b-2*c)+...
            (mi(1)-mi(2))/(fi*(a+b-2*c));
        if(test<=1)
            t1=test;
            t2=1-test;
            val=fi/2*[t1,t2,0]*A*[t1;t2;0]-mi'*[t1;t2;0];
        else
            t1=1;
            t2=0;
            val=fi/2*[t1,0,0]*A*[t1;0;0]-mi'*[t1;0;0];
        end
    end

% Riešenie pre rádovo nerovnaké výnosy
else
    test=omega2/fi+delta2/gama;
    if(test>=0)
        t1=omega1/fi+delta1/gama;
        t2=omega2/fi+delta2/gama;
        t3=1-t1-t2;
        val=fi/2*[t1,t2,t3]*A*[t1;t2;t3]-mi'*[t1;t2;t3];
    else
        test=(mi(1)-mi(3))/(fi*a)-d/a;
        if(test<=1)
            t1=test;
            t2=0;
            t3=1-test;
```

```
            val=fi/2*[t1,0,t3]*A*[t1;0;t3]-mi'*[t1;0;t3];
        else
            t1=1;
            t2=0;
            val=fi/2*[t1,0,0]*A*[t1;0;0]-mi'*[t1;0;0];
        end
    end
end
end
```

Príloha B

Funkcia počítajúca riešenie pomocou explicitného vzorca pre všeobecný $n \times n$ prípad

```
function [teta,val]=vypocfcian(fi)
A=[0.1350 0.0660 0.0799 0.0636 0.0771;...
   0.0660 0.0782 0.0561 0.0483 0.0555;...
   0.0799 0.0561 0.0967 0.0652 0.0842;...
   0.0636 0.0483 0.0652 0.0872 0.0719;...
   0.0771 0.0555 0.0842 0.0719 0.1280];
mi=[0.2930 0.2056 0.2054 0.1311 0.0198]';
A_neuprav=A;
mi_neuprav=mi;
dlzka=length(mi);
dim=length(mi);
a(dlzka-1)=0;
c(dlzka-1,dlzka-1)=0;
d(dlzka-1)=0;

for m=dim:-1:2
    %vytvorenie systému lineárnych rovníc
    for i=1:dlzka-1
        a(i)=A(i,i)+A(dlzka,dlzka)-2*A(i,dlzka);
        for j=i+1:dlzka-1
            c(i,j)=A(dlzka,dlzka)+A(i,j)-A(i,dlzka)-...
            A(j,dlzka);
        end
        d(i)=A(i,dlzka)-A(dlzka,dlzka);
        f(i)=mi(i)-mi(dlzka);
    end
```

```
%úprava matice na horný trojuholnikový tvar
for k=1:dlzka-2
    for i=k+1:dlzka-1
        f(i)=f(i)-f(k)*c(k,i)/a(k);
        d(i)=d(i)-d(k)*c(k,i)/a(k);
        a(i)=a(i)-(c(k,i)^2)/a(k);
        for j=i+1:dlzka-1
            c(i,j)=c(i,j)-c(k,i)*c(k,j)/a(k);
        end
    end
end

%úprava matice na diagonálny tvar
for k=dlzka-2:-1:1
    for i=k:-1:1
        f(i)=f(i)-f(k+1)*c(i,k+1)/a(k+1);
        d(i)=d(i)-d(k+1)*c(i,k+1)/a(k+1);
    end
end
teta(dlzka,1)=0;
%výpočet váh aktív
for i=1:dlzka-1
    teta(i,1)=f(i)/(fi*a(i))-d(i)/a(i);
end

%redukcia systému na dimenziu menšiu
% o posledné aktívum
if(sum(teta)>=1)
    mi(dlzka)=[];
    A(dlzka,:)=[];
    A(:,dlzka)=[];
```

```
        dlzka=dlzka-1;
        if(m==2)
            teta(1,1)=1;
        end
    else
        suma=sum(teta);
        teta(dlzka,1)=1-suma;
        break
    end
end

val=fi/2*teta'*A_neuprav*teta-mi_neuprav'*teta;
end
```