

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY



URČOVANIE TRENDOV V EKONOMICKÝCH ČASOVÝCH
RADOCH

BAKALÁRSKA PRÁCA

2013

Matúš DŽUBÁK

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY

**URČOVANIE TRENDOV V EKONOMICKÝCH ČASOVÝCH
RADOCH**

BAKALÁRSKA PRÁCA

Študijný program: Ekonomická a finančná matematika
Študijný odbor: 4111 Aplikovaná matematika
Školiace pracovisko: Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky
Vedúci práce: doc. RNDr. Ján Pekár, PhD.



Univerzita Komenského v Bratislave
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

ZADANIE ZÁVEREČNEJ PRÁCE

Meno a priezvisko študenta: Matúš Džubák
Študijný program: ekonomická a finančná matematika (Jednoodborové štúdium, bakalársky I. st., denná forma)
Študijný odbor: 9.1.9. aplikovaná matematika
Typ záverečnej práce: bakalárska
Jazyk záverečnej práce: slovenský

Názov: Určovanie trendov v ekonomických časových radoch

Cieľ: Opísať teóriu trendov v časových radoch a aplikovať ju na ekonomické časové rady.

Vedúci: doc. RNDr. Ján Pekár, PhD.

Katedra: FMFI.KAMŠ - Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky

Vedúci katedry: prof. RNDr. Daniel Ševčovič, CSc.

Dátum zadania: 10.10.2012

Dátum schválenia: 03.11.2012

doc. RNDr. Margaréta Halická, CSc.
garant študijného programu

.....
študent

.....
vedúci práce

Pod'akovanie Touto cestou chcem poďakovať svojmu vedúcemu práce doc. RNDr. Jánovi Pekárovi, PhD. za odbornú pomoc pri vypracovaní bakalárskej práce. Ďalej chcem vysloviť vďaku svojim rodičom, rodine a kamarátom za podporu, pomoc a duševnú pohodu pri štúdiu.

Abstrakt

DŽUBÁK, Matúš: Určovanie trendov v ekonomických časových radoch [Bakalárska práca], Univerzita Komenského v Bratislave, Fakulta matematiky, fyziky a informatiky, Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky; školiteľ: doc. RNDr. Ján Pekár, PhD., Bratislava, 2013, 52 s.

Pomocou klasickej dekompozície môžeme rozložiť časový rad na trendovú, sezónnu, cyklickú a náhodnú zložku. V našej práci sa podrobnejšie zaoberáme opísaním trendov v ekonomických časových radoch. Tendencia vývoja radu môže mať tvar funkcie, vtedy používame pre odhad parametrov trendu lineárnu regresiu v prípade lineárnych funkcií alebo odhad parametrov robíme špeciálnou metódou, napríklad metódou čiastkových súčtov. V prípade veľkého kolísania dát najvhodnejším spôsobom vyrovnaní časového radu je metóda kľzavých priemerov alebo exponenciálne vyrovňovanie. Aplikáciou teórie na reálne dáta dostávame pomerne dobré výsledky vystihujúce vývoj časového radu. Analyzovať trend má význam pri rozhodovaní a kvalitatívnych opisoch údajov, na ktoré v minulosti pôsobili rôzne sily a ovplyvnili ich vývoj.

Kľúčové slová: časový rad, trend, lineárna regresia, kľzavé priemery

Abstract

DŽUBÁK, Matúš: Determining trends in economic time series [Bachelor Thesis], Comenius University in Bratislava, Faculty of Mathematics, Physics and Informatics, Department of Applied Mathematics and Statistics; Supervisor: doc. RNDr. Ján Pekár, PhD., Bratislava, 2013, 52 p.

Using the classical decomposition of time series we determinate trend, seasonal element, cycle and random element. In our work we describe in detail the theory of trend component in time series. Trend line may present the function and we use the linear regression to estimate the parameters of function linear in parameters or we use specific methods like sub-total method. In the case of large fluctuation of data the best appropriate estimate of the trend is the moving average method and exponential smoothing. The theory of trends applied in real economical data can get good results which describe the tendency of time series. The trend analysis is important to make decision for managers and to quantitative description of data in time which were influenced by different processes.

Keywords: time series, trend, linear regression, moving average

Obsah

Úvod	11
1 Časové rady	12
1.1 Delenie časových radov	12
1.2 Grafické znázornenie	13
1.3 Základné charakteristiky	14
1.3.1 Popisné charakteristiky	14
1.3.2 Dynamické charakteristiky	15
1.4 Dekompozícia časových radov	16
2 Trendové funkcie	20
2.1 Určenie trendu pomocou lineárnej regresie	20
2.1.1 Konštantný trend	21
2.1.2 Lineárny trend	21
2.1.3 Kvadratický trend	22
2.1.4 Exponenciálny trend	22
2.1.5 S-krivka	23
2.2 Určenie trendu špeciálnymi metódami	25
2.2.1 Modifikovaný exponenciálny trend	25
2.2.2 Logistický trend	26
2.2.3 Gompertzov trend	27
2.3 Výber vhodnej trendovej funkcie	28
2.3.1 Grafická analýza	28
2.3.2 Kvalita odhadu trendu	29
3 Adaptívne metódy	32
3.1 Kľzavé priemery	32
3.2 Exponenciálne vyrovnávanie	33
4 Aplikácia na reálne dáta	34
4.1 Vládne príjmy Slovenskej republiky	34
4.2 Nezamestnanosť vo Francúzsku	36

4.3 Podiel poľnohospodárstva na HDP	39
Záver	41
Príloha A	43
Príloha B	44
Príloha C	45
Príloha D	46
Príloha E	47
Príloha F	48
Príloha G	49
Príloha H	50
Príloha I	51
Príloha J	52

Zoznam obrázkov

1	Okamihové a intervalové znázornenie	14
2	Lineárny trend	15
3	Epizodická zložka (zdroj:[www.minv.sk/dopravnapolicia/statistika]) .	17
4	Dekompozícia časového radu (zdroj:[2])	18
5	Multiplikatívny a aditívny model	19
6	Príklady trendov	23
7	S-krivka	24
8	Modifikovaný exponenciálny trend	25
9	Logistický trend	27
10	Gompertzov trend	27
11	Rozptyl rezíduí	31
12	Vládne príjmy	34
13	Kľzavý priemer $d=3$	35
14	Kľzavý priemer $d=6$	35
15	Kľzavý priemer $d=12$	36
16	Nezamestnanosť mužov vo Francúzsku	36
17	Porovnanie trendov s hladinou nasýtenia	37
18	Graf rezíduí a autokorelačná funkcia	38
19	Podiel poľnohospodárstva na HDP	39
20	Graf rezíduí a autokorelačná funkcia	40

Zoznam tabuliek

1	Charakteristiky kvality odhadu	38
2	Charakteristiky kvality odhadu	40

Úvod

Jednou z možností kvantitatívneho skúmania javu v čase je analýza jeho vývoja. Časový rad je tvorený hodnotami, ktoré boli postupne zaznamenávané alebo pozorované od minulosti do prítomnosti a dávajú dobrý základ k štúdiu ich dynamiky a analyzovaniu príčin, ktoré na tieto javy pôsobili. Najstaršími časovými radmi z historického hľadiska boli pozorovania v meteorológii a astronómii, dnešné aplikácie sa orientujú skôr ekonomickým a finančným smerom.

Dekompozičný prístup k časovým radom je bežne používaný v ekonomickej praxi a predpokladá, že každý časový rad sa dá rozložiť na niekoľko zložiek. Základnú dlhodobú tendenciu vývoja údajov v čase charakterizuje trend, pravidelné opakovania popisuje sezónna a cyklická zložka. Trendová zložka sa z časového radu oddeľuje ako prvá a v praktických úlohách sa najčastejšie stretávame s potrebou jej rozoznania od sezónnych výkyvov. Rad očistený od trendu má väčší význam pri rozhodovaní ako pôvodný z dôvodu lepšieho poznania pravidelných fluktuácií.

Cieľom bakalárskej práce je popísať dlhodobý vývoj ekonomických ukazovateľov, teda oboznámiť sa s rôznymi trendmi v časových radoch, vychádzať budeme hlavne z [1,2]. Medzi príčiny trendového vývoja môže patriť zmena inflácie, dlhodobý rast populácie ale aj iné neekonomické faktory ako otepľovanie planéty, premnoženie škodcov a podobne. Výsledkom práce by mala byť aplikácia teórie trendov na odlišných ekonomických časových radoch a určenie kvality ich odhadu.

Prvá kapitola je venovaná deleniu, základným charakteristikám a dekompozícii časových radov. Druhá kapitola obsahuje popis trendovej zložky, ktorá sa dá vyjadriť matematickou krivkou. Hlavnými metódami jej určenia je klasická regresná analýza pri lineárnych funkciách a metóda čiastkových súčtov pri funkciách, ktoré sa nedajú linearizovať. V tretej kapitole sú popísané neparametrické odhady trendov, ktoré využívame ak dáta majú nejaké extrémne hodnoty alebo kolísanie dát je príliš veľké. Štvrtá kapitola je venovaná aplikácii teórie trendov na reálne dáta, kde sa na odhad trendu využíva matematický softvér.

1 Časové rady

Skúmanie ekonomického javu v čase, ktorého údaje vieme kvantitatívne popísať je veľmi potrebné pre určenie zákonitostí v jeho vývoji, čo je jednou z dôležitých úloh štatistických analýz. Časovým radom rozumieme údaje získané chronologicky od minulosti do prítomnosti usporiadané do postupnosti

$$y_{t_1}, y_{t_2}, \dots, y_{t_T} = \{y\}_{t_1}^{t_T}, \quad (1)$$

kde y_{t_i} predstavuje hodnotu ekonomického javu v čase t_i , $i = 1, 2, \dots, T$ pričom $t_1 < t_2 < \dots < t_T$. Pri rovnakej (ekvidistantnej) dĺžke časových intervalov môžeme (1) jednoducho upraviť na postupnosť

$$y_1, y_2, \dots, y_T = \{y\}_1^T. \quad (2)$$

1.1 Delenie časových radov

Časové rady môžeme deliť ako v [1,3] na základe empirického sledovania alebo charakteristického vývoja.

- Podľa dĺžky pozorovaného obdobia na
 - krátkodobé,
 - dlhodobé.

Krátkodobé hodnoty sú sledované v úsekoch kratších ako jeden rok. Napríklad kvartálové, mesačné, týždenné časové intervaly a pri dlhodobých je časový úsek ročný alebo dlhší.

- Podľa periodicity na
 - periodické,
 - neperiodické.

Periodický časový rad obsahuje zložku, ktorá sa pravidelne opakuje. Ako najlepší príklad môžeme uviesť sezónne výkyvy. Počet predaných lyží v zimnom období je mnohonásobne vyšší ako počas ostatných nesezónnych období. Za periodickú zložku

môžeme považovať aj cyklický vývoj hospodárstva, ktorý v niekoľkoročných intervaloch expanduje, dosahuje vrchol a následne upadá až na dno, kde sa odráža a opäť rastie. Tento jav sa podľa pozorovaní pravidelne opakuje v rozmedzí niekoľkých rokov. Naopak, neperiodický časový rad neobsahuje žiadnu takúto zložku. Jeho priebeh je hladký bez pravidelných výkyvov. V tejto bakalárskej práci budeme uvažovať hlavne na rady, ktoré neobsahujú periodickú zložku.

- Podľa spôsobu zhromažďovania údajov na
 - okamihové časové rady,
 - intervalové časové rady.

Okamihový časový rad na rozdiel od intervalového časového radu je zložený z hodnôt vzťahujúcich sa na určitý časový okamih, nie na časový úsek pozorovania. Ako názornú ukážku si môžeme uviesť firmu s určitou produkciou. Objem jej výroby v jednotlivých mesiacoch tvorí intervalový časový rad, pretože produkcia sa viaže na určitý časový úsek. Túto produkciu v mesačných intervaloch môžeme kumulovať do štvrtročných, ročných úsekov a vytvárať tak rad kumulatívnych hodnôt. S rastúcou dĺžkou časového intervalu rastie aj produkcia. Za okamihový časový rad môžeme považovať počet zamestnancov tejto firmy k poslednému dňu v mesiaci zaznamenávaných počas niekoľkých rokov. Tento rad nemá zmysel kumulovať.

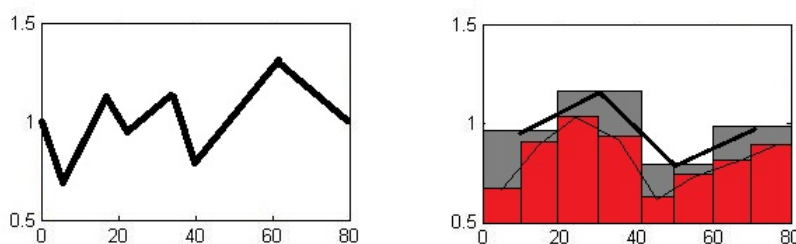
1.2 Grafické znázornenie

Grafy časových radov sú veľmi používané a frekventované kvôli ich prehľadnosti a ľahkej interpretácii. Môžu dopomôcť pri voľbe správneho modelu, pri predbežnej analýze dát ako aj prispieť k presnejším výpočtom.

Jedným zo zobrazení okamihových časových radov je spojnicový graf, ktorý zostrojíme podľa nasledujúceho postupu. Na horizontálnu os zaznačíme časové okamihy t_i , $i = 1, 2, \dots, T$ a na vertikálnej osi prislúchajúce hodnoty y_{t_i} . Body $[t_i; y_{t_i}]$ a susedný $[t_{i+1}; y_{t_{i+1}}]$, $i = 1, 2, \dots, T - 1$ pospájame úsečkami.

Intervalové časové rady často znázorňujeme stĺpcovým diagramom. Na horizontálnu os nanášame dĺžku časového intervalu $(t_{i-1}; t_i)$, $i = 1, 2, \dots, T$, kde t_0 predstavuje počiatok pozorovania a na vertikálnu os zobrazujeme odpovedajúcu hodnotu y_{t_i} . Pri

tomto type časových radov je možné spočítať viaceré susedné intervaly do jedného $(t_n; t_{n+k})$, kde $0 \leq n < n+k \leq T$ a $n, k \in N_0$. Tým rastie aj prislúchajúca hodnota výsledného intervalu na $y_{n+1} + y_{n+2} + \dots + y_{n+k}$. Napríklad rad mesačných hodnôt môžeme kumulovať na rad hodnôt kvartálových, ročných, desaťročných, atď. Na zobrazenie intervalového časového radu sa dá použiť aj spojnicový diagram, kde spájame stredy susedných intervalov.



Obr. 1: Okamihové a intervalové znázornenie

1.3 Základné charakteristiky

1.3.1 Popisné charakteristiky

Zistiť priemerné hodnoty údajov je niekedy veľmi dôležité pri práci s časovými radmi. Pri intervalových časových radoch sa priemerná hodnota počíta pomocou váženého aritmetického priemeru

$$\bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^T y_{t_i} w_{t_i}}{\sum_{i=1}^T w_{t_i}}, \quad (3)$$

kde w_{t_i} predstavuje váhu ukazovateľa y_{t_i} v čase t_i , $i = 1, 2, \dots, T$. Ak sú časové intervaly ekvidistantné s rovnakou váhou, môžeme (3) upraviť na prostý aritmetický priemer

$$\bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^T y_i}{T}. \quad (4)$$

Priemerná hodnota okamihových časových radov sa vypočíta váženým chronologickým priemerom

$$\bar{y} = \frac{\frac{y_{t_1} + y_{t_2}}{2} d_2 + \frac{y_{t_2} + y_{t_3}}{2} d_3 + \dots + \frac{y_{t_{T-1}} + y_{t_T}}{2} d_T}{d_2 + d_3 + \dots + d_T},$$

$$\bar{y} = \frac{1}{2} \frac{\sum_{i=2}^T (y_{t_{i-1}} + y_{t_i}) d_i}{\sum_{i=2}^T d_i}, \quad (5)$$

kde d_i je dĺžka časového intervalu medzi údajmi $y_{t_{i-1}}$ a y_{t_i} , $i = 2, 3, \dots, T$. Opäť ak je vzdialenosť jednotlivých okamihov pozorovania ekvidistantná, vieme (5) upraviť na prostý chronologický priemer

$$\bar{y} = \frac{\frac{y_1+y_2}{2} + \frac{y_2+y_3}{2} + \dots + \frac{y_{T-1}+y_T}{2}}{T-1},$$

$$\bar{y} = \frac{\frac{y_1+y_T}{2} + \sum_{i=2}^T y_i}{T-1}. \quad (6)$$

Ďalej budeme uvažovať iba časové rady, ktoré boli vhodnou úpravou prevedené na typ (2), t.j. hodnoty boli namerané v rovnakých časových odstupoch.

1.3.2 Dynamické charakteristiky

Odhadnúť chovanie časového radu a zostaviť kritéria pre jeho modelovanie môžeme pomocou dynamických charakteristík. V tejto časti budeme vychádzať hlavne z [1, 3].

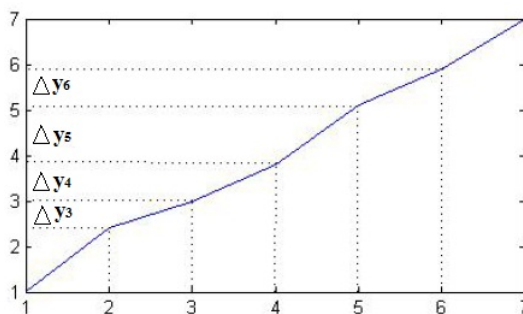
Medzi najzákladnejšie patrí absolútny prírastok

$$\Delta y_t = y_t - y_{t-1}, \quad t = 2, 3, \dots, T, \quad (7)$$

ktorý možno nazvať aj prvou diferenciou a vyjadruje zmenu hodnoty y_t v čase t oproti y_{t-1} v čase $t-1$. Rozdielom prvých diferencií získame druhú diferenciu

$$\Delta^2 y_t = \Delta y_t - \Delta y_{t-1}, \quad t = 3, 4, \dots, T. \quad (8)$$

Diferencovanie má veľký význam pri výbere vhodnej trendovej funkcie, ktorá popisuje dlhodobý charakter časového radu. Na nasledujúcom grafe je znázornený lineárny trend, pre ktorý je charakteristická približne konštantná prvá diferencia $\Delta y_2 \approx \dots \approx \Delta y_T$.



Obr. 2: Lineárny trend

Ďalšou dynamickou charakteristikou je tempo rastu

$$k_t = \frac{y_t}{y_{t-i}}, \quad t = 2, 3, \dots, T, \quad i < t, i \in N. \quad (9)$$

Udáva nám koľkokrát sa zmenila hodnota y_t oproti hodnote y_{t-i} v i -tom predchádzajúcom období. V prípade, ak je koeficient $k_t < 1$, hovoríme o tempe poklesu. Niekedy sa uvádza aj bázické tempo rastu, ktoré predstavuje zmenu hodnoty y_t oproti bázickej hodnote y_0 . Tieto koeficienty tvoria rad bázických indexov rastu $\left\{\frac{y_t}{y_0}\right\}_1^T$.

1.4 Dekompozícia časových radov

Jednou z prvotných metód a postupov analýzy časových radov je dekompozičná metóda. Klasická dekompozičná metóda predpokladá, že časový rad sa dá rozložiť na štyri hlavné zložky:

- trendovú T_t ,
- sezónnu S_t ,
- cyklickú C_t ,
- náhodnú (reziduálnu) ε_t .

Podľa [3] môžeme identifikovať aj podľňujúcu zložku

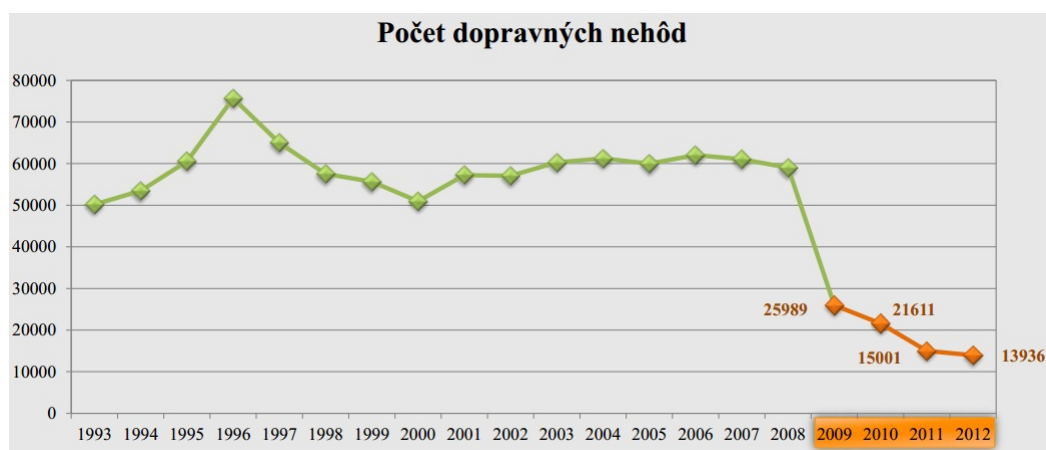
- epizodickú (intervančnú) I_t .

Trendová zložka T_t predstavuje dlhodobé správanie radu, ktoré obyčajne vzniká systematickým dlhoročným pôsobením síl v rovnakom smere. Tendencia vývoja časového radu môže byť rastúca, klesajúca, stagnujúca, atď. Podrobnejšie sa trendovou zložkou budeme zaoberať v nasledujúcich kapitolách.

Sezónna zložka S_t vyjadruje periodické zmeny okolo trendu v pravidelných časových intervaloch kratších alebo rovných jednému roku, napr. týždeň, mesiac, rok. Sezónnosť je spôsobená faktormi ako striedanie ročných období, pravidelné sviatky ako Veľká noc a Vianoce a dokonca sa môže prejaviť aj rôznou dĺžkou mesiacov. Za sezónnosť sa dá považovať aj pokles vydaných jedál počas víkendov vo firemnej jedálni, pravidelný pokles produkcie firmy zapríčinený závodnými dovolenkami, atď.

Cyklická zložka C_t predstavuje rovnomerné kolísanie okolo trendu so striedajúcimi sa štádiami rastu a poklesu. Jej perióda nezodpovedá kalendárnym jednotkám a niekedy je veľmi obtiažne ju odhadnúť pretože môže mať rôznu amplitúdu a dĺžku. Eliminovať fluktuáciu okolo trendu môže byť ťažké aj z dôvodu, keď nevieme určiť príčinu jej vzniku. Špeciálna metóda používaná pre určenie cyklickej zložky je spektrálna analýza.

Epizodická (intervenčná) zložka I_t vyjadruje odklon od dlhodobého trendu zapríčinený náhlou udalosťou, ľudským zásahom alebo inou silou pôsobiacou na dáta. Spomením prírodné katastrofy, štrajky, vládne nariadenia. Niekedy sa epizodická zložka zahŕňa do reziduálnej. Na nasledujúcom grafe si interpretujeme túto zložku. Pri sledovaní trendu počtu nahlásených dopravných nehôd pred a po zavedení zákona č.8/2009, ktorý hovorí aj o znížení maximálnej povolenej rýchlosti v obci zo 60km/h na 50km/h, môžeme sledovať rapidný odklon od tendencie vývoja časového radu po uvedení zákona do platnosti.



Obr. 3: Epizodická zložka

(zdroj:[www.minv.sk/dopravnapolicia/statistika])

Po odstránení trendu, sezónnej, cyklickej a epizodickej zložky z časového radu ostane iba náhodná (reziduálna) zložka ε_t , ktorá je tvorená náhodným kolísaním hodnôt bez rozpoznateľného charakteru. Vzniká v dôsledku náhodných fluktuácií dát a pokrýva tiež chyby merania. Predpokladá sa, že reziduá tvoria biely šum (white noise), teda

platí

$$\mathbf{E}(\varepsilon_t) = 0, \quad (10)$$

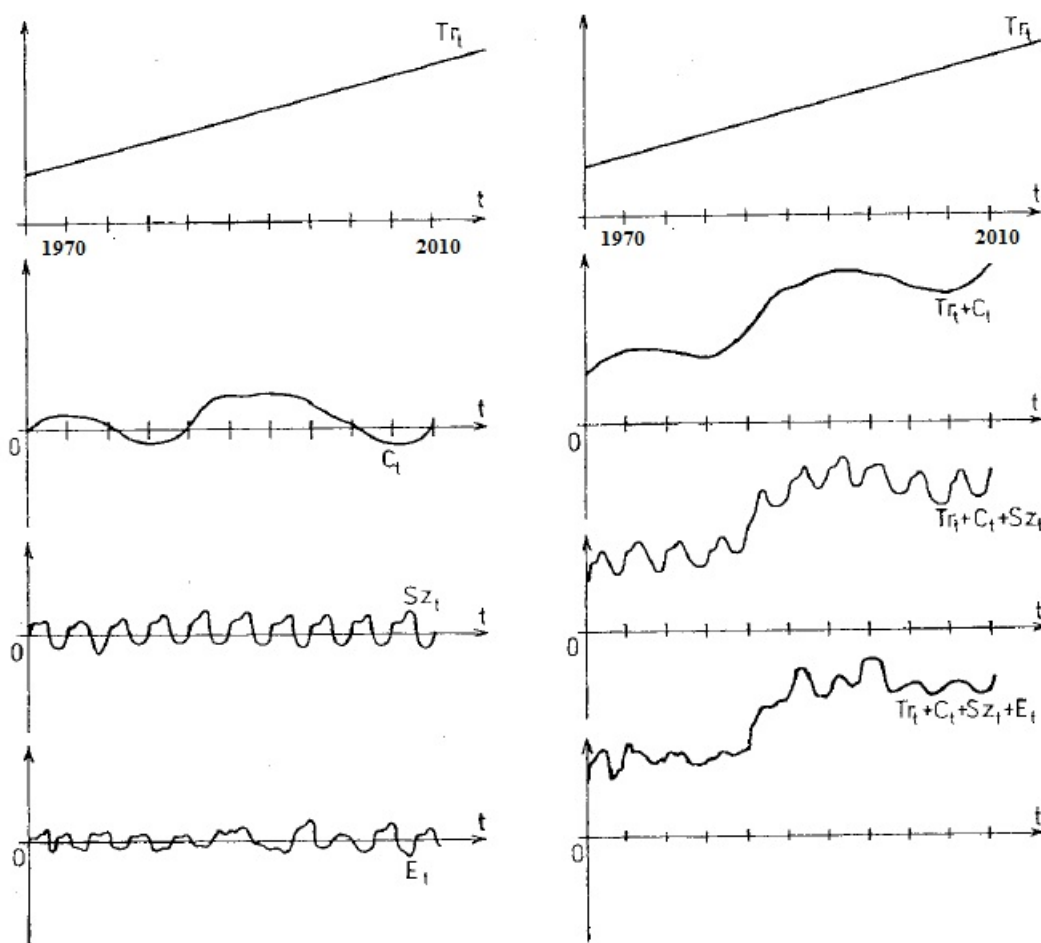
$$\mathbf{D}(\varepsilon_t) = \sigma^2, \quad (11)$$

$$\text{cov}(\varepsilon_t, \varepsilon_\tau) = 0, \quad \forall t \neq \tau \quad (12)$$

$$\varepsilon_t \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2), \quad (13)$$

čo znamená, že náhodná veličina ε_t má nulovú strednú hodnotu s konštantnou disperziou, rezíduá nie sú navzájom korelované a pochádzajú z normálneho rozdelenia.

V jednoduchosti si vďaka klasickej dekompozičnej metóde môžeme predstaviť časový rad ako trend na ktorý sa postupne nabaľuje sezónna, cyklická, epizodická a samozrejme aj reziduálna zložka, ktorá je prítomná v každom časovom rade.



Obr. 4: Dekompozícia časového radu

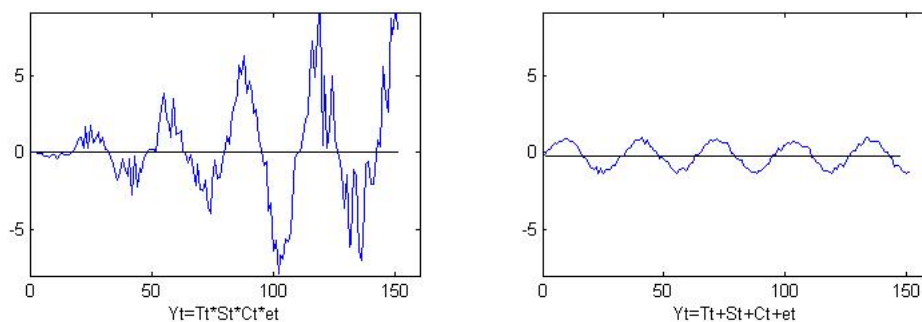
(zdroj:[2])

Dekompozícia môže byť aditívna alebo multiplikatívna v závislosti od variability dát. Pri konštantnej variabilite v čase preferujeme aditívny prístup, kde sa jednotlivé zložky sčítavajú

$$y_t = T_t + S_t + C_t + I_t + \varepsilon_t. \quad (14)$$

Pri rastúcej alebo klesajúcej volatilitate dát uprednostňujeme multiplikatívny model so zložkami, ktoré sa medzi sebou násobia

$$y_t = T_t \cdot S_t \cdot C_t \cdot I_t \cdot \varepsilon_t. \quad (15)$$



Obr. 5: Multiplikatívny a aditívny model

2 Trendové funkcie

Trend v časových radoch môžeme podľa [3] popísať analytickými (parametrickými) alebo adaptívnymi (neparametrickými) metódami. Analytické metódy umožňujú modelovanie trendu jednoduchými matematickými krivkami, ktoré pomerne presne odpovedajú vývoju údajov v čase. Ak má časový rad nejaké extrémne hodnoty v porovnaní so zvyšnými údajmi radu alebo jeho vývoj je nerovnomerný v dôsledku silného vplyvu nesytematickej zložky, používame adaptívne metódy medzi ktoré zaraďujeme predovšetkým metódu kľzavých priemerov a exponenciálne vyrovnávanie. V tejto kapitole čerpáme z [1,3,6].

2.1 Určenie trendu pomocou lineárnej regresie

Jednou z možností vyrovnania časového radu od trendovej zložky analytickým prístupom je klasická regresná analýza. Tento model pre odhad parametrov používa metódu najmenších štvorcov, kde čas vystupuje ako nezávislá premenná. Samozrejme to platí len pre funkcie lineárne v parametroch alebo pre funkcie, ktoré sa dajú adekvátnou transformáciou previesť na takýto typ. Jedná sa o konštantný, lineárny, kvadratický, exponenciálny trend a S-krivku.

Tvrdenie 1: Nech $Y = X\beta + \varepsilon$, kde $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_T \end{pmatrix}$ je vektor pozorovaní, $\beta = \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \vdots \\ \beta_{k-1} \end{pmatrix}$

predstavuje parametre odhadu, náhodný vektor $\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \vdots \\ \varepsilon_T \end{pmatrix}$ a nenáhodná matica $X_{T \times k}$ s hodnotou k obsahuje riadky $x_t = (1, x_{t1}, \dots, x_{tk-1})$. Za platnosti predpokladov (10) - (13) odhad β určíme nasledovne

$$\hat{\beta} = (X^T X)^{-1} X^T Y. \quad (16)$$

Podľa [7] vektor $\hat{\beta}$ pokladáme za najlepší lineárny nevychýlený odhad, tzv. BLUE (best linear unbiased estimator). Žiaden iný lineárny odhad nemá menšiu disperziu.

V nasledujúcej časti budeme predpokladať časové rady tvorené iba trendovou zložkou, ktorá je funkciou času a reziduálnou zložkou prítomnou v každom časovom rade s

vlastnosťami bieleho šumu (10) - (13). Pri aditívnej dekompozícii má časový rad tvar

$$y_t = T_t + \varepsilon_t = f(t) + \varepsilon_t. \quad (17)$$

2.1.1 Konštantný trend

Hodnoty tohto trendu sa v čase t nemenia, preto má konštantný trend tvar

$$T_t = \beta_0 \quad t = 1, 2, \dots, T. \quad (18)$$

Odhadnime parameter β_0 pomocou (16). Nakoľko odhadujeme iba jeden parameter, hodnosť matice X je rovná $k = 1$ a teda je tvorená len jednotkovým vektorom.

$$\hat{\beta} = \left[\begin{array}{c} (1) \\ (1 \ 1 \ \dots \ 1) \end{array} \right]^{-1} \begin{array}{c} (y_1) \\ (y_2) \\ \vdots \\ (y_T) \end{array},$$

$$\hat{\beta} = \hat{\beta}_0 = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T y_t. \quad (19)$$

Odhad trendu v čase t je vlastne priemer časového radu

$$\hat{T}_t = \hat{y}_t = \bar{y}. \quad (20)$$

2.1.2 Lineárny trend

Lineárny trend má tvar funkcie

$$T_t = \beta_0 + \beta_1 t \quad t = 1, 2, \dots, T. \quad (21)$$

Vektor parametrov β opäť odhadneme pomocou (16), kde matica X má hodnosť $k=2$.

$$\hat{\beta} = \begin{pmatrix} \hat{\beta}_0 \\ \hat{\beta}_1 \end{pmatrix} = \left[\begin{array}{c} (1 \ 1) \\ (1 \ 1 \ \dots \ 1) \\ (1 \ 2 \ \dots \ T) \end{array} \right]^{-1} \begin{array}{c} (y_1) \\ (y_2) \\ \vdots \\ (y_T) \end{array},$$

$$\begin{pmatrix} \widehat{\beta}_0 \\ \widehat{\beta}_1 \end{pmatrix} = \frac{1}{T \sum_{t=1}^T t^2 - (\sum_{t=1}^T t)^2} \begin{pmatrix} \sum_{t=1}^T t^2 \sum_{t=1}^T y_t - \sum_{t=1}^T t \sum_{t=1}^T y_t t \\ T \sum_{t=1}^T y_t t - \sum_{t=1}^T t \sum_{t=1}^T y_t \end{pmatrix}. \quad (22)$$

Vhodnou voľbou počiatku tak, aby $\sum_{t=-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} t = 0$ môžeme (22) upraviť na

$$\begin{pmatrix} \widehat{\beta}_0 \\ \widehat{\beta}_1 \end{pmatrix} = \frac{1}{T \sum_{t=-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} t^2} \begin{pmatrix} \sum_{t=-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} t^2 \sum_{t=-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} y_t \\ T \sum_{t=-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} y_t t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{y} \\ \frac{\sum_{t=-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} y_t t}{\sum_{t=-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} t^2} \end{pmatrix}. \quad (23)$$

Odhad lineárneho trendu v čase t je

$$\widehat{T}_t = \widehat{y}_t = \widehat{\beta}_0 + \widehat{\beta}_1 t. \quad (24)$$

2.1.3 Kvadratický trend

Trend tejto funkcie má tvar paraboly

$$T_t = \beta_0 + \beta_1 t + \beta_2 t^2, \quad t = 1, 2, \dots, T. \quad (25)$$

Odhad trojzložkového vektora β určíme podľa (16) ako riešenie nasledujúceho problému, kde matica X má hodnotu $k = 3$.

$$\widehat{\beta} = \begin{pmatrix} \widehat{\beta}_0 \\ \widehat{\beta}_1 \\ \widehat{\beta}_2 \end{pmatrix} = \left[\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & \dots & T \\ 1 & 4 & \dots & T^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & T & T^2 \end{pmatrix} \right]^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & \dots & T \\ 1 & 4 & \dots & T^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_T \end{pmatrix}. \quad (26)$$

Odhad kvadratického trendu v čase t je

$$\widehat{T}_t = \widehat{y}_t = \widehat{\beta}_0 + \widehat{\beta}_1 t + \widehat{\beta}_2 t^2. \quad (27)$$

2.1.4 Exponenciálny trend

Tento trend odpovedá exponenciálnej funkcii v čase t a má tvar

$$T_t = \beta_0 \beta_1^t, \quad t = 1, 2, \dots, T. \quad (28)$$

Za predpokladu $\beta_0, \beta_1 > 0$, môžeme transformovať (28) na lineárnu funkciu logaritmovaním a previesť na tvar

$$\ln T_t = \ln \beta_0 + t \ln \beta_1. \quad (29)$$


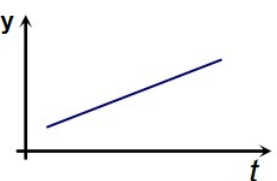
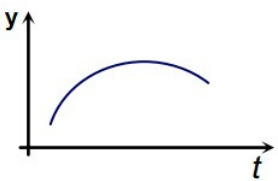
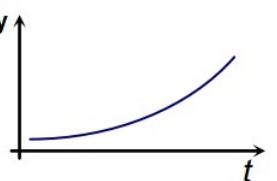
Vektor parametrov β sa odhaduje podobne ako (21), konkrétne sa používa nasledovná formula

$$\begin{pmatrix} \ln \hat{\beta}_0 \\ \ln \hat{\beta}_1 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & T \end{pmatrix} \end{bmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ln y_1 \\ \ln y_2 \\ \vdots \\ \ln y_T \end{pmatrix},$$

$$\hat{\beta} = \begin{pmatrix} \exp(\ln \hat{\beta}_0) \\ \exp(\ln \hat{\beta}_1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{\beta}_0 \\ \hat{\beta}_1 \end{pmatrix}. \quad (30)$$

Odhad exponenciálneho trendu v čase t je

$$\hat{T}_t = \hat{y}_t = \hat{\beta}_0 \hat{\beta}_1^t. \quad (31)$$

Trend	Grafické zobrazenie	Trend	Grafické zobrazenie
konštantný		lineárny	
kvadratický		exponenciálny	

Obr. 6: Príklady trendov

2.1.5 S-krivka

Tvar S-krivky je daný vzťahom

$$T_t = \exp \left(\beta_0 + \beta_1 \frac{1}{t} \right), \quad t = 1, 2, \dots, T. \quad (32)$$

za predpokladu $\beta_0 \in R, \beta_1 < 0$ s inflexným bodom v $t = \frac{-\beta_1}{2}$. Logaritmickou transformáciou prevedieme (32) na tvar hyperboly

$$\ln T_t = \beta_0 + \beta_1 \frac{1}{t} \quad (33)$$

a parametre odhadneme pomocou (16) nasledovne

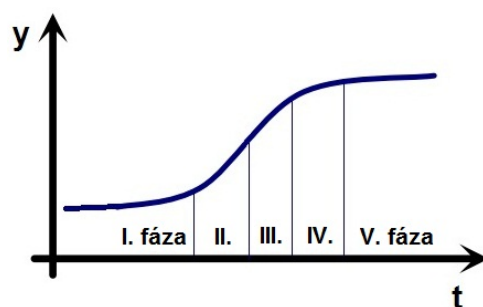
$$\hat{\beta} = \begin{pmatrix} \hat{\beta}_0 \\ \hat{\beta}_1 \end{pmatrix} = \left[\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \frac{1}{2} & \dots & \frac{1}{T} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & \frac{1}{2} \\ \vdots & \vdots \\ 1 & \frac{1}{T} \end{pmatrix} \right]^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \frac{1}{2} & \dots & \frac{1}{T} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ln y_1 \\ \ln y_2 \\ \vdots \\ \ln y_T \end{pmatrix}. \quad (34)$$

Odhad S-krivky v čase t je

$$\hat{T}_t = \hat{y}_t = \exp \left(\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 \frac{1}{t} \right). \quad (35)$$

Ekonomicky môžeme S-krivku podľa [6] interpretovať ako vývoj činiteľa rozdeleného do piatich rozpoznaateľných fáz:

- 1. fáza - vytváranie nových progresívnych síl,
- 2. fáza - tieto sily sa naplno presadzujú a ovplyvňujú ďalší vývoj,
- 3. fáza - objavujú sa opozičné sily tlmiace vývoj progresívnych síl,
- 4. fáza - vývojová tendencia sa spomaľuje v dôsledku postupne prevažujúcich opozičných síl,
- 5. fáza - opozičné sily získali dominantnú prevahu a zoslabili doterajšie sily.



Obr. 7: S-krivka

2.2 Určenie trendu špeciálnymi metódami

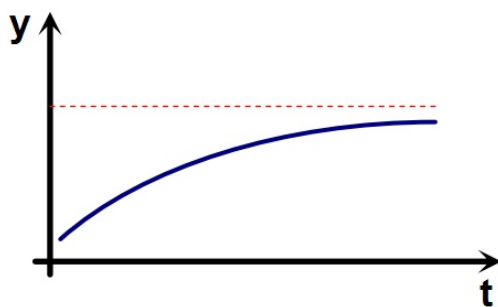
V tejto časti si popíšeme tri základné trendy s ktorými sa môžeme stretnúť v ekonomickej praxi a pri ktorých sa vyžaduje špeciálna metóda odhadu parametrov trendovej funkcie. Tieto funkcie sú nelineárne a nie je možné ich linearizovať žiadnou transformáciou a teda použiť (16). Ide o logistický, Gompertzov a modifikovaný exponenciálny trend.

2.2.1 Modifikovaný exponenciálny trend

Trend tejto funkcie má tvar

$$T_t = \gamma + \beta_0 \beta_1^t, \quad t = 1, 2, \dots, T, \quad (36)$$

kde $\beta_0 < 0$, $0 < \beta_1 < 1$ a $\gamma > 0$. Modifikovaný exponenciálny trend nemá inflexný bod a obsahuje asymptotu γ ku ktorej rad konverguje pre $t \rightarrow \infty$ často nazývanú aj hladina nasýtenia. Je veľmi frekventovaný v marketingu, kde opisuje priebeh javu vychádzajúci z obmedzených zdrojov rastu a postupne sa blíži k určitej hranici, ktorú už neprekročí. V ekonómii sa môže jednať o záujem po produkte alebo službe. Parametre tejto trendovej funkcie odhadujeme špeciálnymi metódami ako metóda vybraných bodov alebo metóda čiastkových súčtov, ktorú si popíšeme podrobnejšie.



Obr. 8: Modifikovaný exponenciálny trend

Metóda čiastkových súčtov

Časový rad s počtom pozorovaní T si rozdelíme na tri rovnako dlhé časové úseky $T = 3m$, $m \in R$. Ak T nie je deliteľné tromi, z radu vypustíme jedno alebo dve pozorovania. Najčastejšie sa vynechávajú dáta, ktoré sú najstaršie a najmenej ovplyvňujú vývoj do budúcnosti alebo sa vyhodia málo hodnoverné údaje, prípadne outliery.

Spočítajme teraz čiastkové súčty pre jednotlivé skupiny pozorovaní

$$\begin{aligned}\sum_1 &= \sum_{t=1}^m (\gamma + \beta_0 \beta_1^t) = m\gamma + \underbrace{\beta_0 \beta_1 \frac{\beta_1^m - 1}{\beta_1 - 1}}_{\text{geom. postupnosť}}, \\ \sum_2 &= \sum_{t=m+1}^{2m} (\gamma + \beta_0 \beta_1^t) = m\gamma + \beta_0 \beta_1^{m+1} \frac{\beta_1^m - 1}{\beta_1 - 1}, \\ \sum_3 &= \sum_{t=2m+1}^T (\gamma + \beta_0 \beta_1^t) = m\gamma + \beta_0 \beta_1^{2m+1} \frac{\beta_1^m - 1}{\beta_1 - 1}.\end{aligned}$$

Postupnými úpravami vyjadríme odhady koeficientov.

$$\sum_2 - \sum_1 = \beta_0 \beta_1 \left(\frac{\beta_1^m - 1}{\beta_1 - 1} \right) (\beta_1^m - 1),$$

$$\sum_3 - \sum_2 = \beta_0 \beta_1^{m+1} \left(\frac{\beta_1^m - 1}{\beta_1 - 1} \right) (\beta_1^m - 1),$$

$$\frac{\sum_3 - \sum_2}{\sum_2 - \sum_1} = \beta_1^m,$$

$$\hat{\beta}_1 = \left(\frac{\sum_3 - \sum_2}{\sum_2 - \sum_1} \right)^{\frac{1}{m}}, \quad (37)$$

$$\hat{\beta}_0 = \frac{\hat{\beta}_1 - 1}{\hat{\beta}_1 (\hat{\beta}_1^m - 1)^2} (\sum_2 - \sum_1), \quad (38)$$

$$\hat{\gamma} = \frac{1}{m} \left[\sum_1 - \hat{\beta}_0 \hat{\beta}_1 \frac{(\hat{\beta}_1^m - 1)}{\hat{\beta}_1 - 1} \right]. \quad (39)$$

Odhad modifikovaného exponenciálneho trendu v čase t za pomoci metódy čiastkových súčtov je

$$\hat{T}_t = \hat{y}_t = \hat{\gamma} + \hat{\beta}_0 \hat{\beta}_1^t. \quad (40)$$

2.2.2 Logistický trend

Častým spôsobom uvádzania tohto trendu je tvar Pearl-Reedovej trendovej funkcie

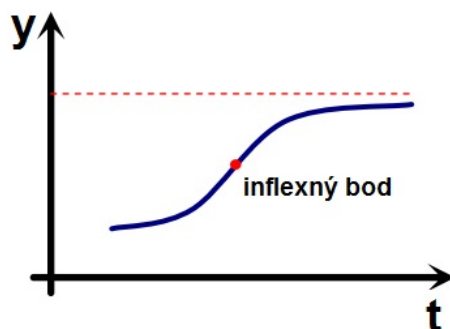
$$T_t = \frac{1}{\gamma + \beta_0 \beta_1^t}, \quad t = 1, 2, \dots, T. \quad (41)$$

Prevrátenou hodnotou (41) získame tvar

$$\frac{1}{T_t} = \gamma + \beta_0 \beta_1^t, \quad (42)$$

čo je tvar modifikovaného exponenciálneho trendu, ktorého parametre už vieme odhadnúť pre $\beta_0 > 0$, $0 < \beta_1 < 1$. Táto funkcia má dolné ohraničenie v 0 a horné v

hladine nasýtenia $\frac{1}{\gamma}$. Je symetrická okolo inflexného bodu $t = \frac{\ln \gamma - \ln \beta_0}{\ln \beta_1}$ a svojim priebehom pripomína tvar písmena S, tzv. S-krivka. S týmto modelom sa môžeme stretnúť pri modelovaní životnosti nového produktu, v modeloch pre dopyt po výrobkoch dlhodobej spotreby alebo pri simulácii predaja niektorých predmetov.



Obr. 9: Logistický trend

2.2.3 Gompertzov trend

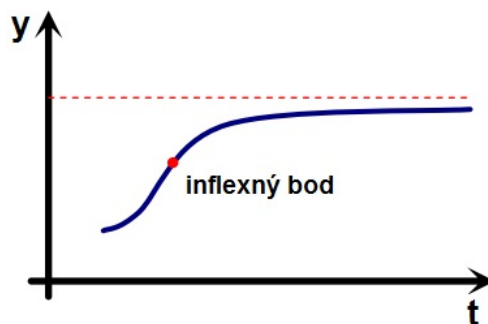
Tento trend má tvar

$$T_t = \gamma \beta_0^{\beta_1^t}, \quad t = 1, 2, \dots, T. \quad (43)$$

Jeho logaritmicou transformáciou dostávame predpis

$$\ln T_t = \ln \gamma + \beta_1^t \ln \beta_0, \quad (44)$$

ktorý odhadujeme rovnako ako modifikovaný exponenciálny trend pre $0 < \beta_0 < 1$, $0 < \beta_1 < 1$. Je ohraničený hladinou nasýtenia $\gamma > 0$ pre $t \rightarrow \infty$, má podobu S-krivky a väčšia časť hodnôt leží za inflexným bodom $t = \frac{-\ln(-\ln \beta_0)}{\ln \beta_1}$.



Obr. 10: Gompertzov trend

2.3 Výber vhodnej trendovej funkcie

Predbežný výber vhodnej trendovej funkcie na začiatku analýzy realizujeme na základe grafu časového radu alebo jeho relatívnych či absolútnych charakteristík. Po adekvátnej voľbe a odhade parametrov trendu je dôležitá kvalita modelu, kde sa za najlepší považuje ten, ktorý má najmenšie rezíduá. Následne vhodnosť modelu overíme rôznymi kritériami, z ktorých si niektoré popíšeme v tejto podkapitole.

2.3.1 Grafická analýza

Prostredníctvom grafu časového radu môžeme subjektívne vybrať trend, ktorý je najvhodnejší. Ďalšou možnosťou je výber trendovej funkcie pomocou radu koeficientov rastu či radu diferencií na základe nasledujúcich známych kritérií. Nasledujúca časť je spracovaná podľa [1,4].

Pre časový rad (2) vyberáme trend:

- konštantný - rad prvých diferencií (7) kolísá okolo nuly,
- lineárny - rad prvých diferencií (7) kolísá okolo nenulovej konštanty,
- kvadratický - graf druhých diferencií (8) má približne konštantný trend,
- exponenciálny - rad koeficientov rastu (9) alebo rad prvých diferencií $(\ln y_{t+1} - \ln y_t)$, $t = 1, 2, \dots, T - 1$ kolísá okolo nenulovej konštanty,
- S-krivka - spojnicový graf pre $\ln y_t$, $t = 1, 2, \dots, T$ má približne hyperbolický priebeh,
- modifikovaný exponenciálny - krivka podielu susedných diferencií $\frac{y_{t+2} - y_{t+1}}{y_{t+1} - y_t}$, $t = 1, 2, \dots, T - 2$ kolísá okolo nenulovej konštanty,
- logistický - graf prvých diferencií (7) pripomína hustotu normálneho rozdelenia a podiely $\frac{\frac{1}{y_{t+1}} - \frac{1}{y_t}}{\frac{y_{t+2}}{y_{t+1}} - \frac{y_{t+1}}{y_t}}$, $t = 1, 2, \dots, T - 2$ sú približne konštantné,
- Gompertzov - rad podielu susedných diferencií $\frac{\ln y_{t+2} - \ln y_{t+1}}{\ln y_{t+1} - \ln y_t}$, $t = 1, 2, \dots, T - 2$ kolísá okolo nenulovej konštanty.

2.3.2 Kvalita odhadu trendu

Presnosť vyrovnania časového radu posudzujeme matematicko-štatistickými kritériami, ktoré sú aplikovateľné nie len pre posúdenie vhodnosti trendu ale aj pre ohodnotenie adekvátnosti periodických zložiek v časovom rade a celkého modelu zloženého zo všetkých komponentov klasickej dekompozície.

Priemerné charakteristiky rezíduí

Trendová funkcia je tým lepšia, čím menšie sú nasledujúce charakteristiky.

Priemerná chyba

$$ME = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T (y_t - \hat{y}_t) = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \varepsilon_t. \quad (45)$$

Priemerná štvorcová chyba

$$MSE = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T (y_t - \hat{y}_t)^2 = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \varepsilon_t^2. \quad (46)$$

Priemerná absolútna chyba

$$MAE = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T |y_t - \hat{y}_t| = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T |\varepsilon_t|. \quad (47)$$

Priemerná percentuálna chyba

$$MPE = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \frac{(y_t - \hat{y}_t)}{y_t} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \frac{\varepsilon_t}{y_t}. \quad (48)$$

Priemerná absolútna percentuálna chyba

$$MAPE = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \frac{|y_t - \hat{y}_t|}{y_t} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \frac{|\varepsilon_t|}{y_t}. \quad (49)$$

Koeficient determinácie

Koeficient determinácie R^2 vyjadruje, akú časť celkovej variability vysvetľuje model a nadobúda hodnoty z intervalu $< 0, 1 >$,

$$R^2 = 1 - \frac{\sum_{t=1}^T (y_t - \hat{y}_t)^2}{\sum_{t=1}^T (y_t - \bar{y})^2}. \quad (50)$$

Vyššia hodnota predstavuje lepšie vystihnutý trend časového radu. S rastúcim počtom parametrov v modeli rastie aj R^2 , čo sa vníma ako nedostatok pretože daná skutočnosť skresľuje úsudok pri porovnávaní kvality odhadu trendov s rôznym počtom parametrov. Tento nedostatok odstraňujeme upravením (50) na tvar modifikovaného koeficientu determinácie

$$R_M^2 = R^2 - (1 - R^2) \frac{k - 1}{T - k}, \quad (51)$$

kde k predstavuje počet parametrov modelu.

Reziduálna autokorelačná funkcia

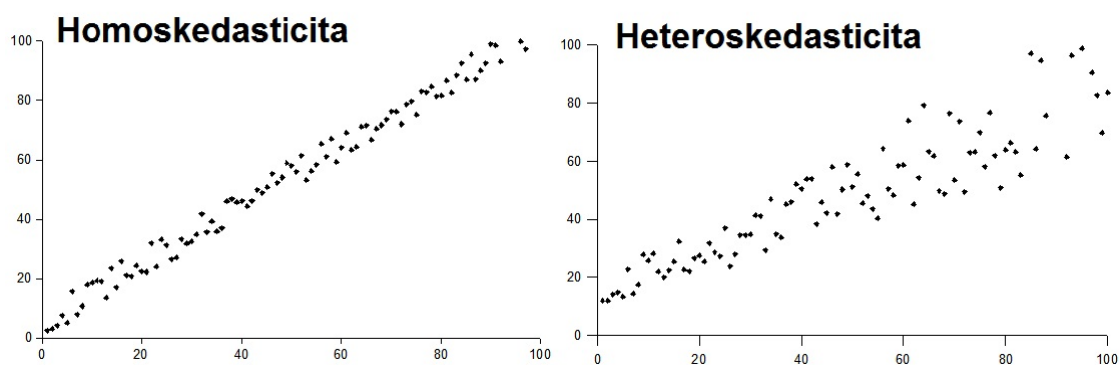
Koeficienty autokorelácie nesystematickej zložky predstavujú vzájomnú závislosť medzi rezíduami posunutými o jedno alebo k pozorovaní. Autokorelačná funkcia je definovaná vzťahom

$$r_k = \frac{\sum_{t=k+1}^T \varepsilon_t \varepsilon_{t-k}}{\sum_{t=k+1}^T \varepsilon_t^2} \quad (52)$$

a nadobúda hodnoty z intervalu $< -1, 1 >$. Pokiaľ žiaden koeficient r_k nepresahuje $\alpha\%$ -ný interval spoľahlivosti, môžeme predpokladať neprítomnosť autokorelácie rezíduí. Najbežnejšie používaný je 95%-ný interval spoľahlivosti čo približne zodpovedá $(\frac{-2}{\sqrt{T}}, \frac{2}{\sqrt{T}})$.

Homoskedasticita a normalita rezíduí

Ďalším dôležitým predpokladom kvalitného modelu časového radu je konštantnosť rozptylu rezíduí (11) nazývaná aj homoskedasticita. Opakom je heteroskedasticita, kde rozptyl nesystematickej zložky rastie alebo klesá s časom. Štatistickými testami, ktorými zisťujeme prítomnosť heteroskedasticity v modeli časového radu sú napríklad Whiteov test alebo Goldfeld-Quandtov test, ktoré sú popísané v [7].



Obr. 11: Rozptyl rezíduí

Normalita reziduálnej zložky (13) je taktiež vyžadovaná a môžeme ju demonštrovať hystogramom, Q-Q plotom alebo rôznymi štatistickými testami ako Jerque-Bera test normality či Shapiro-Wilkov test, ktoré sú taktiež charakterizované v [7].

3 Adaptívne metódy

Adaptívny prístup určenia trendu vychádza z predpokladu, že trend nemusí mať vždy rovnaký charakter a teda nie je možné použiť matematickú krivku s konštantnými parametrami v priebehu celého časového radu. Predpokladá tiež, že časový rad sa v kratších úsekoch dá vyrovnať funkciami s rôznymi parametrami na odlišných intervaloch. Pomocou takéhoto lokálneho odhadovania trendu hovoríme o koncepcii postupného trendu. Medzi najznámejšie adaptívne metódy patrí metóda kľzavých priemerov a exponenciálne vyrovnávanie.

3.1 Kľzavé priemery

Hlavnou ideou metódy kľzavých priemerov je, že časový rad y_t , pre $t = 1, \dots, T$ si rozdelíme na menšie intervaly s počtom pozorovaní $d < T$. Najčastejšie je d nepárne číslo, teda $d = 2m + 1$. Za predpokladu, že časový rad je tvorený len trendom a bielym šumom, t.j. (17), postupný trend celého časového radu y_t určíme nasledovne. Na prvej časti radu s pozorovaniami y_1, \dots, y_d odhadneme lokálny trend vhodným polynómom a pre pozorovanie $t = m + 1$, teda pre prostredný časový okamih, vyčíslime hodnotu trendu $\hat{T}_{m+1} = \hat{y}_{m+1}$. Rovnakým polynómom odhadneme \hat{T}_{m+2} pre pozorovania y_2, \dots, y_{d+1} a týmto kľzavým spôsobom určíme všetky odhady lokálnych trendov.

Jednoduché kľzavé priemery odhadujú lokálny trend polynómom nultého stupňa, teda konštantnou funkciou čo v podstate znamená určenie trendu bežným aritmetickým priemerom. Napríklad jednoduchý kľzavý priemer dĺžky 3 definujeme ako

$$\frac{1}{3}(1, 1, 1)y_t = \frac{1}{3}(y_{t-1} + y_t + y_{t+1}). \quad (53)$$

Všeobecne zapíšeme

$$\frac{1}{2m+1}(1, \dots, 1)y_t = \frac{1}{2m+1}(y_{t-m} + y_{t-m+1} + \dots + y_t + \dots + y_{t+m}). \quad (54)$$

V prípade, že d je párne číslo, teda $d = 2m$, vyrovnaná hodnota neprislúcha žiadnemu z uvažovaných časových okamihov a je potrebné tzv. centrovanie, ktoré sa využíva hlavne v ekonomických časových radoch. Zoberme si dva susedné časové úseky s počtom pozorovaní d a spriemerujme ich. Výsledný odhad zodpovedá konkrétnemu časovému okamihu.

$$\begin{aligned}\hat{y}_t &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2m}(y_{t-m} + \dots + y_{t+m-1}) + \frac{1}{2m}(y_{t-m+1} + \dots + y_{t+m}) \right] \\ &= \frac{1}{4m}(y_{t-m} + 2y_{t-m+1} + \dots + 2y_t + \dots + 2y_{t+m-1} + y_{t+m}).\end{aligned}\quad (55)$$

Odhadnutiu lokálneho trendu polynómom vyššieho stupňa sa podrobnejšie venuje kapitola 6 v [2].

3.2 Exponenciálne vyrovňovanie

Ďalším adaptívnym odhadom trendu je exponenciálne vyrovňovanie. Pri tejto metóde výpočet každej vyrovnanej hodnoty radu je založený na všetkých dostupných minulých pozorovaniach, ktorých váha sa smerom do minulosti exponenciálne znižuje.

Jednoduché exponenciálne vyrovňovanie predpokladá, že trend na krátkych úsekoch radu je konštantný, $\hat{T}_t = \beta_0$. Odhad parametra β_0 v čase t je ovplyvnený minulými pozorovaniami $t-1, t-2, \dots$ a získame ho minimalizáciou výrazu

$$\sum_{j=0}^{T-1} (y_{t-1-j} - \beta_0)^2 \alpha^j, \quad (56)$$

kde $0 < \alpha < 1$ je vyrovňavacia konštantka. Spomínaný odhad β_0 v čase t je

$$\hat{\beta}_0(t) = (1 - \alpha) \sum_{j=0}^{T-1} \alpha^j y_{t-1-j}, \quad (57)$$

čo tiež predstavuje odhad \hat{y}_t v čase t . Rozpísaním (57) môžeme rad hodnôt upraviť na rekurentný vzťah

$$\begin{aligned}\hat{y}_t &= (1 - \alpha)y_t + [(1 - \alpha)\alpha y_{t-1} + (1 - \alpha)\alpha^2 y_{t-2} + \dots + (1 - \alpha)\alpha^{T-1} y_{t-T+1}] \\ &= (1 - \alpha)y_t + [\alpha \hat{y}_{t-1}].\end{aligned}\quad (58)$$

Výhodou exponenciálneho vyrovňovania je to, že si stačí pamätať vyrovnanú hodnotu \hat{y}_{t-1} a už použité staršie pozorovania y_{t-2}, y_{t-3}, \dots nie sú podstatné. Konštantka α určujeme subjektívne. Čím je menšia, tým je väčšia váha priradená najnovším dátam.

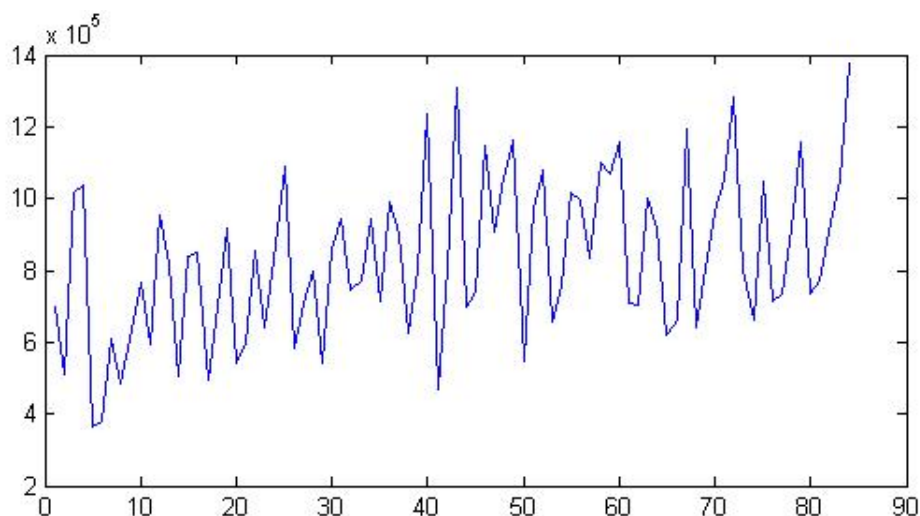
Viac o tejto metóde nájdete v [2], kapitola 7.

4 Aplikácia na reálne dáta

V tejto kapitole si podrobne popíšeme niektoré postupy pri hľadaní trendu na reálnych dátoch z ekonomickej oblasti pomocou matematického softvéru a teórie z predchádzajúcich kapitol. Nakoľko sa pri dekompozícii určuje trend ako prvý, rad očistený od tejto zložky je stále ovplyvnený periodickou a náhodnou zložkou, ktoré už odhadovať nebudeme len spomenieme ich prítomnosť.

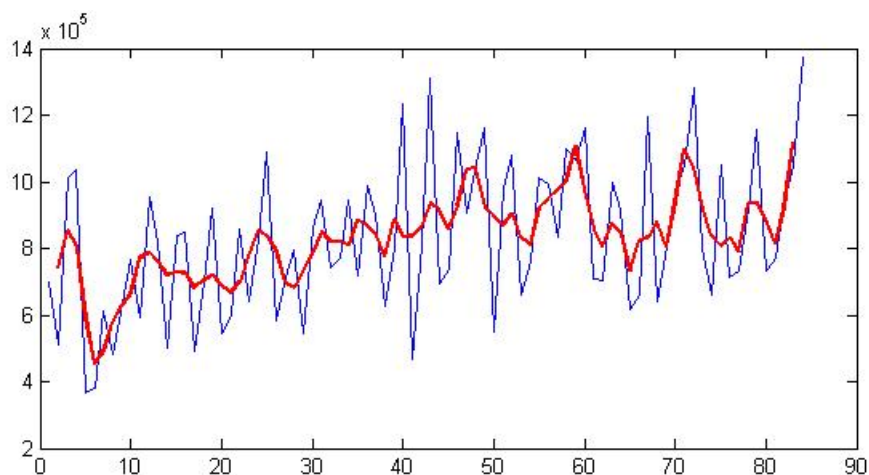
4.1 Vládne príjmy Slovenskej republiky

Odhadnime trend vládnych príjmov SR na mesačných dátoch od januára 2004 do decembra 2010. Pôvodný rad kumulatívnych mesačných hodnôt v jednotlivých rokoch upravíme na rad absolútnych mesačných hodnôt a údaje v slovenských korunách z pred roka 2009 prevedieme na eurá pevným konverzným kurzom. Údaje nájdeme v prílohe A.



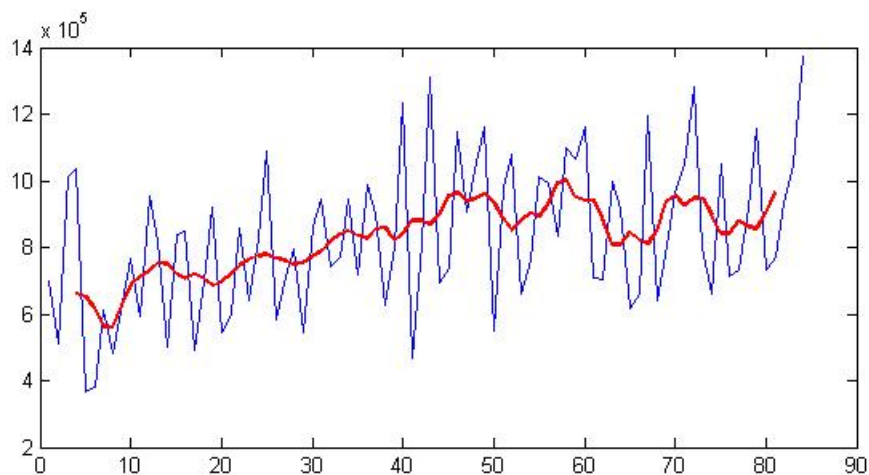
Obr. 12: Vládne príjmy

Vývoj vládnych príjmov je veľmi nerovnomerný v dôsledku čoho je najvhodnejšie odhadnúť trend adaptívnou metódou. V našom prípade použijeme jednoduché a centrovane kĺzavé priemery popísané v (3.1). Pomocou matematického softvéru Matlab a v ňom naprogramovanej funkcii v prílohe J postupne určíme trend. Zvoľme kĺzavú časť $d = 3$, ktorá odpovedá štvrtročnému vyrovnaníu.



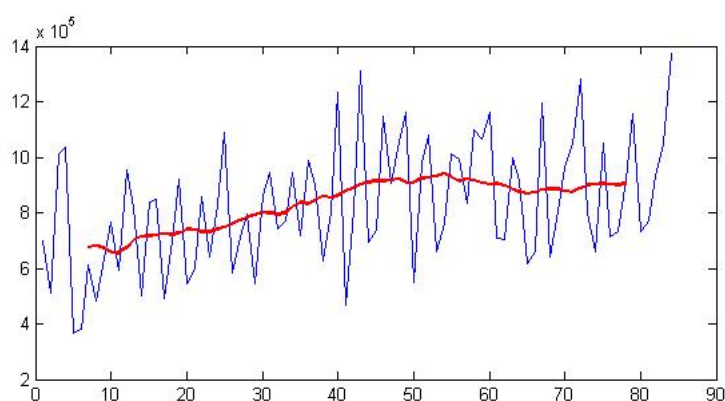
Obr. 13: Kĺzavý priemer $d=3$

Vplyv nesystematickej zložky je príliš veľký a tendencia vývoja nie je jednoznačná. Zvýšením dĺžky kĺzavej časti sa potlačí nežiadúci účinok náhodnej zložky a charakter trendu bude hodnovernejšie popisovať dlhodobú tendenciu vývoja údajov. Zvoľme kĺzavú časť $d = 6$, ktorá zodpovedá polročnému vyrovňavaniu centrovanými kĺzavými priemerami.



Obr. 14: Kĺzavý priemer $d=6$

Náhodná zložka má menší vplyv ako pri predchádzajúcom vyrovnaní a pomaly sa vytráca. Zväčšime dĺžku kĺzavej časti na jeden rok. Volíme $d = 12$.



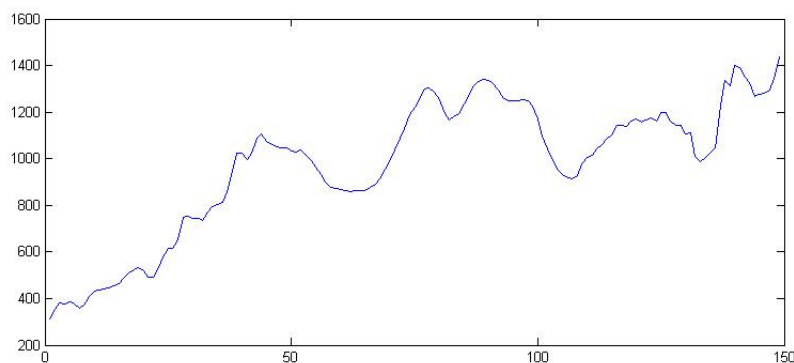
Obr. 15: Kľzavý priemer $d=12$

Účinok nesystematickej zložky je takmer zanedbateľný. Trendová funkcia nie je veľmi kolísavá a hodnoverne popisuje dáta z dlhodobého hľadiska. Pre porovnanie v prílohe B uvádzame aj vyrovnania pre atypické periódy $d = 11$ a $d = 13$ v ktorých je vplyv náhodnej zložky už väčší a teda ich trend je menej dôveryhodný.

Pri detailnejšom rozbere trendu môžeme sledovať lineárny rast od začiatku pozorovania až do prvej polovice 2008. V ďalšom období jeho tendencia mierne klesá a je zapríčinená z najväčšej časti hospodárskou krízou a následným šetrením v každom odvetví. Od začiatku 2010 vládne príjmy začali opäť mierne stúpať.

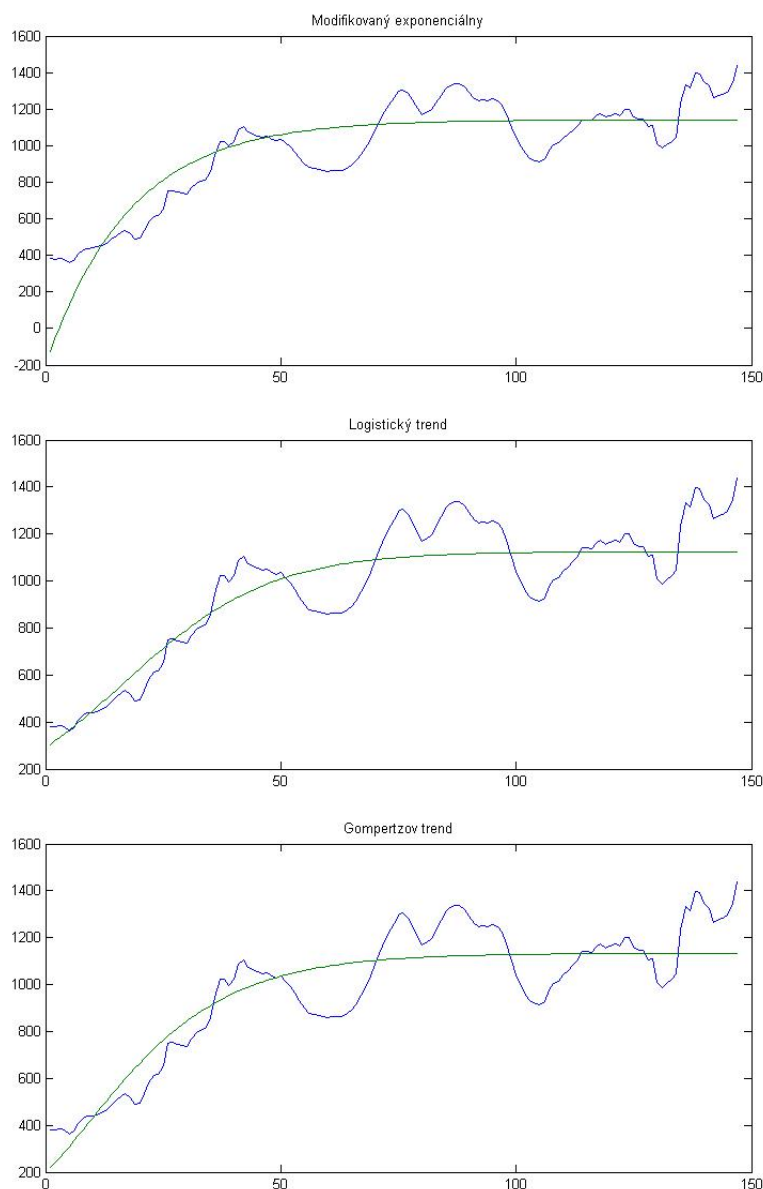
4.2 Nezamestnanosť vo Francúzsku

Nezamestnanosť je jeden z ukazovateľov, ktorý vyjadruje stav ekonomiky v štáte. Ak je nezamestnanosť príliš vysoká, krajine sa veľmi nedarí a naopak, ak je nezamestnanosť nízka, štát ekonomicky prosperuje.



Obr. 16: Nezamestnanosť mužov vo Francúzsku

Na štvrťročných dátach od 1974 do 2011 uvedených v prílohe C odhadneme trend totálnej nezamestnanosti mužov vo Francúzsku. Nezamestnanosť má rastúci charakter, v prvej tretine stúpa rýchlejšie ako v nasledujúcich dvoch a môžeme predpokladať konvergenciu k určitej hranici. Týmto podmienkam vyhovujú tri trendy, modifikovaný exponenciálny, logistický a Gompertzov. Zobrazieme si ich na skutočných dátach, ktorých parametre odhadneme metódou čiastkových súčtov pomocou funkcií z prílohy G, H a I.



Obr. 17: Porovnanie trendov s hladinou nasýtenia

Trendy spoľahlivo vystihujú časový rad, vyberme z nich najlepší pomocou koefi-

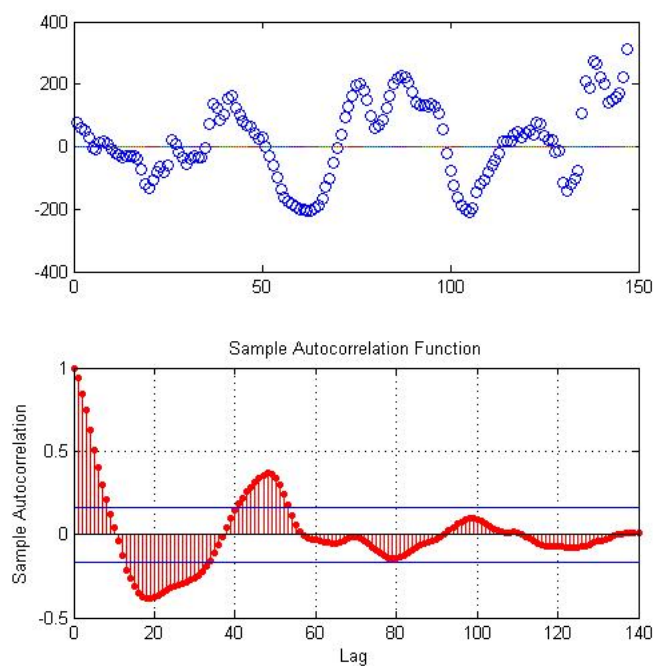
cientu determinácie a (45) - (49).

Tabuľka 1: Charakteristiky kvality odhadu

trend	R^2	ME	MSE	MAE	$MAPE$	MPE
modif. exp.	70,80%	0	$2,28 \cdot 10^4$	123,63	15,65	0,28
logistický	80,21%	17,23	$1,55 \cdot 10^4$	102,07	10,26	0
Gompertzov	79,12%	3,98	$1,63 \cdot 10^4$	107,64	11,73	-1,03

Najvhodnejším modelom trendu sa javí logistická krivka. Má najnižšie charakteristiky MSE, MAE, MAPE, MPE a najvyšší koeficient determinácie 80,21% podľa ktorého usudzujeme, že logistický trend dobre vystihuje charakter časového radu.

Zobrazme si graf rezíduí, teda časový rad očistený od logistického trendu a autokorelačnú funkciu.



Obr. 18: Graf rezíduí a autokorelačná funkcia

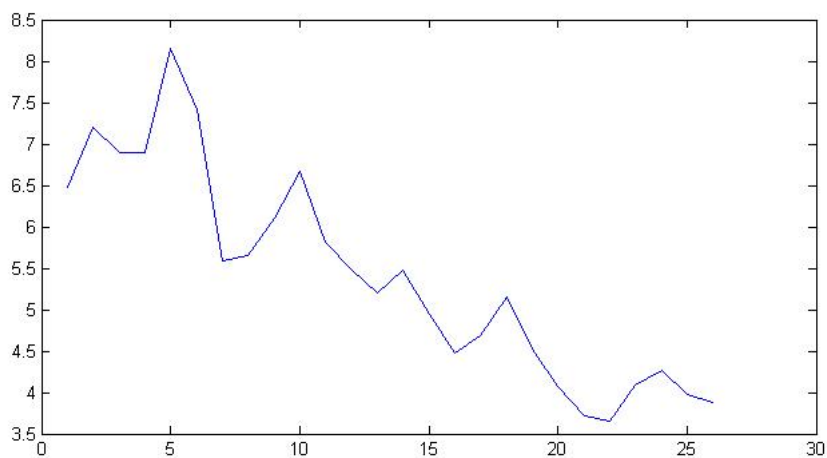
Rezíduá vykazujú určitú periodickú zložku v časovom rade. Na základe výraznej korelácie signalizovanej pomocou autokorelačného grafu môžeme detekovať periódu opakovania na vzdialenosť 48 pozorovaní. Keďže vychádzame z kvartálových údajov, v

našom prípade sa jedná o 12-ročný cyklus. Po odstránení aj tejto zložky z časového radu predpokladáme, že rezíduá budú tvoriť biely šum a teda bola vhodne zvolená trendová funkcia.

Zo zistených údajov môžeme odhadnúť trend nezamestnanosti mužov vo Francúzsku ako predpis logistickej funkcie $T_t = (8,885 \cdot 10^{-4} + 0,0026 \cdot 0,9379^t)^{-1}$ s hladinou nasýtenia $\gamma = 1125,5$ a 12-ročnou cyklickou zložkou, ktorá je zrejme podmienená hospodárskymi cyklami v ekonomike.

4.3 Podiel poľnohospodárstva na HDP

Poľnohospodárstvo patrí medzi najstaršie výrobné odvetvia. Zabezpečuje obživu obyvateľstva a hospodári s pôdou, čo predstavuje jeho dôležitú ekonomickú a spoločenskú podstatu. Trend podielu poľnohospodárstva na národnom HDP si analyzujeme na ročných údajoch od 1985 do 2010, ktoré sa nachádzajú v prílohe D.



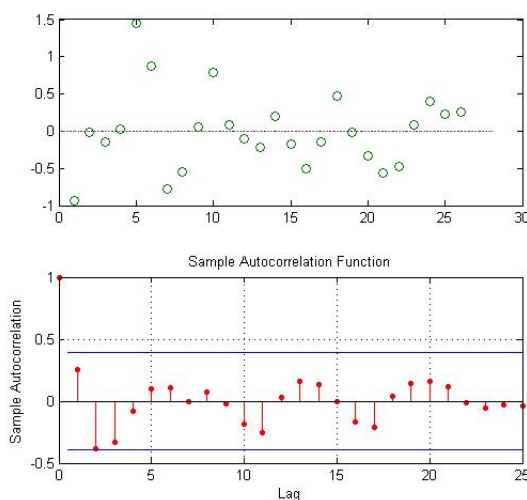
Obr. 19: Podiel poľnohospodárstva na HDP

V súčasnej dobe je poľnohospodárstvo na Slovensku integrované do európskeho spoločenstva, zvyšujú sa nároky na kvalitu a jeho konkurencieschopnosť sa znižuje. Z toho dôvodu je dotované, inak by bolo stratové. Najväčšiu časť na HDP tvorilo poľnohospodárstvo v minulosti a celkový rozvoj má klesajúcu tendenciu. Aplikujme postupne lineárny, kvadratický a exponenciálny trend a na základe charakteristík (45) - (52) odhadnime najlepší z nich.

Tabuľka 2: Charakteristiky kvality odhadu

trend	R^2	ME	MSE	MAE	$MAPE$	MPE
lineárny	82,82%	0	0,2667	0,3928	0,0734	-0,0074
kvadratický	83,02%	0	0,2637	0,3804	0,0701	-0,0076
exponenciálny	82,63%	0,0213	0,2697	0,3757	0,0679	-0,0038

Z uvedených charakteristík vyplýva, že všetky trendy pomerne rovnako dobre vystihujú charakter časového radu, nakoľko sa koeficient determinácie najlepšieho a najhoršieho z nich líši o menej ako 0,5% a u zvyšných je rozdiel taktiež zanedbateľný. Predpokladáme, že to je spôsobené nízkym počtom dát (26) na ktorých aproximované trendy sú temer identické. Očistíme pôvodný časový rad od kvadratického trendu $T_t = 7,5787 - 0,1807t + 0,0011t^2$, ktorý má najväčšie R^2 .

**Obr. 20:** Graf rezíduí a autokorelačná funkcia

Na základe periodickej závislosti autokorelačnej funkcie predpokladáme, že časový rad obsahuje aj sezónnu alebo cyklyckú zložku, ktorá nebola ešte odhalená. Po vyrovnaní časového radu aj od tejto zložky môžeme predpokladať, že rezíduá budú tvoriť biely šum a teda, že kvadratický trend je vhodný pre vystihnutie charakteru radu.

Záver

V bakalárskej práci sme opísali teóriu trendov v ekonomických časových radoch, čo bol jeden z cieľov tejto práce. V prvej kapitole sme sa venovali charakteristike časových radov a ich dekompozícii na známe zložky ako trend, sezónnosť, cyklicita a náhodná časť. Popisom teórie trendovej zložky sme sa zaoberali v druhej a tretej kapitole, kde sme čerpali najmä z [1, 2]. Pomocou jednoduchých matematických formúl sme odvodili odhady parametrov trendových funkcií. Pri lineárnych funkciách sme použili lineárnu regresiu a pri funkciách, ktoré sa nedajú linearizovať, sme sa opierali o metódu čiastkových súčtov. Nie všetky časové rady vystihuje jednoduchá matematická krivka, preto boli v tretej kapitole popísané metódy, ktorými vyhladzujeme časový rad od trendu adaptívnym prístupom.

Ďalším cieľom bolo aplikovať teóriu na reálne dáta v ekonomickej oblasti. V prostredí matematického softvéru Matlab sme použili postupy odhadu trendu popísané v teoretickej časti a uplatnili ich na príkladoch v štvrtej kapitole. Lineárnou regresiou sme na dátach podielu poľnohospodárstva na HDP v SR určili viaceré trendy, ktoré dostatočne presne vystihli charakter časového radu. Ďalšiu trendovú funkciu sme odhalili metódou čiastkových súčtov na údajoch totálnej nezamestnanosti mužov vo Francúzsku. Konkrétne ide o logistickú krivku, ktorá podľa (2.3.2) kvalitne odhaduje tendenciu nezamestnanosti. Posledný uvedený príklad bol venovaný vládnym príjmom SR, kde dáta boli veľmi nerovnomerné. Použitím kľzavých priemerov s dĺžkou vyrovnávacej kľzavej časti jeden rok sa odhalila tendencia vývoja údajov so zanedbateľným vplyvom náhodnej zložky.

Odstránením trendu z časového radu vidíme už len rad tvorený periodickými zložkami a náhodným vplyvom. Prípadná ďalšia štúdia sezónnej a cyklickej zložky nám poskytne komplexný pohľad na vývoj časového radu a dostatok informácií o účinkoch vonkajších síl pôsobiacich v čase, ktoré možno následne kvalitatívne ohodnotiť.

Zoznam použitej literatúry

- [1] Artl J., Artlová M., Rublíková E.: *Analýza ekonomických časových řad s příklady*, učebné texty, dostupné na internete (2002):
<http://nb.vse.cz/arltova/vyuka/crsbir02.pdf>
- [2] Cipra, T.: *Analýza časových řad s aplikacemi v ekonomii*, Alfa, Praha, 1986
- [3] Jobbágy, Š.: *Interaktívna učebnica štatistiky* : diplomová práca. Košice : UPJŠ, 2007, dostupné na internete (2007):
<http://umv.science.upjs.sk/zezula/stg/k13/k13.pdf>
- [4] Kľučka, J., Mikolaj, J., Vančo, B.: *Plánovanie a prognostika*, učebné texty, dostupné na internete (2005):
http://www.fsi.uniza.sk/kkm/old/publikacie/mikolaj_pp.html
- [5] Ostertagová, E.: *Modelovanie časových radoch*, Trendy a inovatívne prístupy v podnikových procesoch, ISBN 978-80-553-0570-7, dostupné na internete (2010):
<http://www.sjf.tuke.sk/kmae/TaIPvPP/2010/index.files/clanky%20PDF/OSTERTAGOVA.pdf>
- [6] Ostertagová, E.: *Niektoré trendové funkcie v ekonomických časových radoch*, Trendy a inovatívne prístupy v podnikových procesoch, ISBN 978-80-553-0742-8, dostupné na internete (2011):
<http://www.sjf.tuke.sk/kpiam/TaIPvPP/2011/index.files/clanky/Eva%20Ostertagova%20Niektore.pdf>
- [7] Siebertová, Z.: *Prednášky z ekonometrie*, učebné texty, dostupné na internete (2012):
<http://www.iam.fmph.uniba.sk/institute/siebertova/ekonometria2012.html>

Príloha A

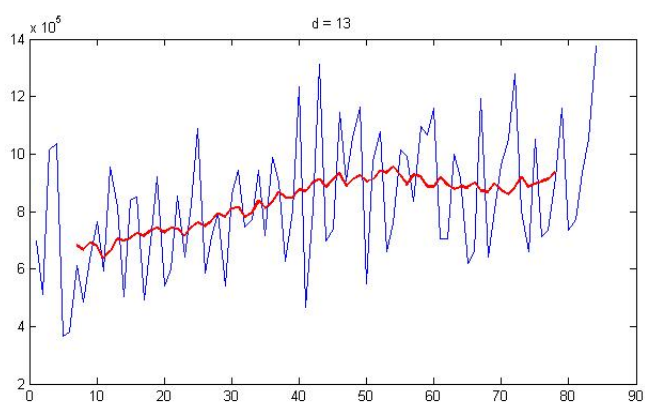
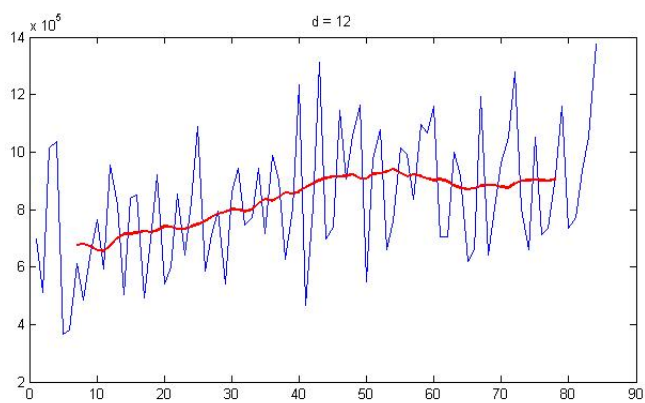
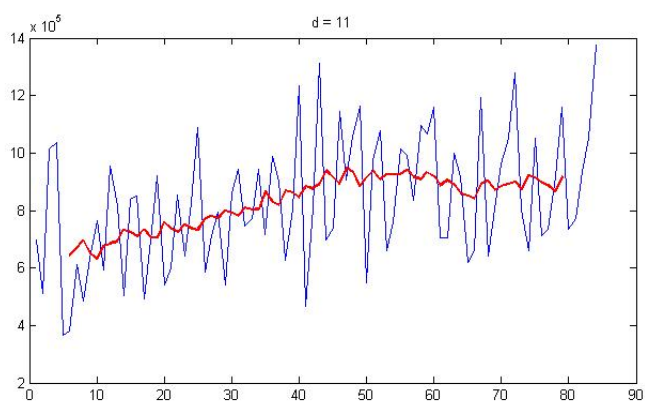
Vládne príjmy SR v tis. eur

rok	príjem						
2004	698101	2005	818031	2006	1088395	2007	901514
	509958		502722		584611		625639
	1014107		838379		711246		804189
	1035219		849134		794828		1234150
	366594		492332		542455		467570
	382361		697769		860420		808106
	611797		919505		943272		1311226
	484266		542555		744506		695811
	634834		601241		772887		738100
	764058		855772		943106		1145754
	591416		640178		716258		905995
	954956		829450		989876		1057691
2008	1161887	2009	706678	2010	800289		
	548861		704339		661119		
	976897		999603		1050087		
	1077541		915839		712550		
	658833		619038		734423		
	761137		659467		918571		
	1014107		1194507		1158079		
	993129		641586		734846		
	836122		806832		770342		
	1097789		962378		934234		
	1066919		1050505		1052395		
	1159198		1280024		1373928		

Zdroj: Štatistický úrad SR, 2012

Príloha B

Kľzavé priemery vládných príjmov



Príloha C

Totálna nezamestnanosť vo Francúzsku v tis.

1974	313	1981	755	1988	899	1995	1,234	2002	1,061	2009	1,391
	354		744		879		1,273		1,082		1,349
	381		742		874		1,311		1,102		1,326
	379		737		868		1,330		1,141		1,265
1975	386	1982	770	1989	863	1996	1,340	2003	1,141	2010	1,277
	379		793		860		1,338		1,139		1,283
	360		803		863		1,321		1,162		1,295
	374		814		864		1,293		1,173		1,347
1976	408	1983	858	1990	865	1997	1,258	2004	1,155	2011	1,436
	432		947		877		1,248		1,166		
	438		1,024		891		1,251		1,174		
	441		1,023		915		1,248		1,163		
1977	445	1984	997	1991	955	1998	1,255	2005	1,200		
	455		1,025		985		1,247		1,199		
	466		1,088		1,037		1,224		1,160		
	487		1,105		1,087		1,173		1,144		
1978	508	1985	1,075	1992	1,131	1999	1,099	2006	1,144		
	523		1,062		1,189		1,043		1,106		
	533		1,053		1,223		996		1,112		
	519		1,045		1,260		957		1,009		
1979	490	1986	1,049	1993	1,298	2000	931	2007	985		
	492		1,035		1,304		919		1,004		
	535		1,028		1,284		912		1,023		
	580		1,036		1,253		926		1,047		
1980	614	1987	1,016	1994	1,202	2001	978	2008	1,231		
	615		993		1,167		1,004		1,335		
	653		966		1,178		1,014		1,314		
	750		933		1,196		1,042		1,399		

Zdroj: Francúzsky štatistický úrad, INSEE, 2011

Príloha D

Podiel poľnohospodárstva na HDP SR

rok	podiel
1985	6.47
1986	7.20
1987	6.90
1988	6.90
1989	8.15
1990	7.41
1991	5.59
1992	5.65
1993	6.10
1994	6.67
1995	5.81
1996	5.47
1997	5.20
1998	5.47
1999	4.94
2000	4.47
2001	4.68
2002	5.16
2003	4.52
2004	4.07
2005	3.71
2006	3.65
2007	4.09
2008	4.27
2009	3.97
2010	3.88

Zdroj: Štatistický úrad SR, 2012

Príloha E

Lineárna regresia v prostredí Matlabu - funkcie

```
%regresny model – linearny  
k=2;  
X=[ones(1,length(y));1:length(y)]';  
b=inv(X'*X)*X'*y;  
t = 1:1:length(y);  
c=X*b;  
plot(t,y,t,c,':') %graf s regresnou priamkou
```

```
%regresny model – kvadraticky  
k=3;  
w=[1:length(y)];  
X=[ones(1,length(y)); w; w.*w];  
b=inv(X'*X)*X'*y;  
t = 1:1:length(y);  
c=X*b;  
plot(t,y,t,c,':') %graf s regresnou priamkou
```

```
%regresny model - exponencialny  
k=2;  
X=[ones(1,length(y));1:length(y)]';  
b1=inv(X'*X)*X'*log(y);  
b=exp(b1) %vypis koeficientov  
t = 1:1:length(y);  
c=exp(X*b1);  
subplot(2,2,1)  
plot(t,y,t,c,':') %graf s regresnou priamkou
```

Príloha F

Lineárna regresia v prostredí Matlabu - charakteristiky

%graf rezidui a autokorelacia

r=y-c;

d=0:1/10:length(y)+2;

plot(d,0,'-',t,r)

autocorr(r,[],[],[])

%priemerne charakteristiky rezidui

ME=sum(r)/length(y)

MSE=(sum(r.*r))/length(y)

MAE=sum(abs(r))/length(y)

MAPE=sum(abs(r)./y)/length(y)

MPE=sum(r./y)/length(y)

p=sum(y)/length(y);

q=y'-p*ones(1,length(y));

Rna2=1-(sum(r.*r)/sum(q.*q))

Rna2modif=Rna2-((1-Rna2)*(k-1)/(length(y)-k))

Príloha G

Modifikovaný exponenciálny trend v Matlabe

```

b=rem(length(y),3) %zvysok po deleni 3
%uprava vektora
u=y((b+1):1:end);
m=length(u);
h=m/3;
%praca s ciastkovym sucom a keoficienty
s1=sum(u(1:1:h))
s2=sum(u((h+1):1:(2*h)))
s3=sum(u((2*h+1):1:end))
b1=((s3-s2)/(s2-s1))^(1/h)
b0=((b1-1)/(b1*(((b1)^(h))-1)^2))*(s2-s1)
gamma=(s1-b0*b1*(((b1)^(h))-1)/(b1-1))/(h)
%graf s trendom, graf rezidui a autokorelacia
t = 1:1:length(u);
c=[gamma+b0*(((b1).^(t)))]';
plot(t,u,t,c)%trend
r=u-c;
d=0:1/10:length(u)+2;
plot(d,0,'-',t,r)%rezidua
autocorr(r,[],[],[])
%priemerne charakteristiky rezidui
ME=sum(r)/m
MSE=(sum(r.*r))/m
MAE=sum(abs(r))/m
MAPE=sum(abs(r)./u)/m
MPE=sum(r./u)/m
p=sum(u)/m; q=u'-p*ones(1,m);
Rna2=1-(sum(r.*r)/sum(q.*q))
Rna2modif=Rna2-((1-Rna2)*(3-1)/(m-3))

```

Príloha H

Logistický trend v Matlabe

```

%uprava vektora
b=rem(length(y),3)
u=y((b+1):1:end);
m=length(u);
h=m/3;
v=ones(1,m)'/u; %prevratena hodnota
%praca s ciastkovym suctom a koeficienty
s1=sum(v(1:1:h))
s2=sum(v((h+1):1:(2*h)))
s3=sum(v((2*h+1):1:end))
b1=((s3-s2)/(s2-s1))^(1/h)
b0=((b1-1)/(b1*(((b1)^(h))-1)^(1/h)))*(s2-s1)
gamma=(s1-b0*b1*(((b1)^(h))-1)/(b1-1))/(h)
%graf s trendom, graf rezidui
t = 1:1:m;
c=[gamma+b0*(((b1)^(t)))]';
plot(t,u,t,ones(1,m)'/c,':')
r=u-ones(1,m)'/c;
d=0:1/10:length(u)+2;
plot(d,0, '-',t,r)
%priemerne charakteristiky rezidui
ME=sum(r)/m
MSE=(sum(r.*r))/m
MAE=sum(abs(r))/m
MAPE=sum(abs(r)./u)/m
MPE=sum(r./u)/m
p=sum(u)/m; q=u'-p*ones(1,m);
Rna2=1-(sum(r.*r)/sum(q.*q))
Rna2modif=Rna2-((1-Rna2)*(3-1)/(m-3))

```

Príloha I

Gompertzov trend v Matlabe

```

%uprava vektora
b=rem(length(y),3);
u=y((b+1):1:end);
m=length(u);
h=m/3;
v=log(u);

%praca s ciastkovym suctom a koeficienty
s1=sum(v(1:1:h)); s2=sum(v((h+1):1:(2*h))); s3=sum(v((2*h+1):1:end));
b1=((s3-s2)/(s2-s1))^(1/h); b1
b0x=((b1-1)/(b1*(((b1)^(h))-1)^(1/h)))*(s2-s1); b0=exp(b0x)
gammax=(s1-b0x*b1*(((b1)^(h))-1)/(b1-1))/(h); gamma=exp(gammax)

%graf s trendom a graf rezidui
t = 1:1:length(u);
c=[gamma*(b0.^(b1.^(t)))]';
plot(t,u,t,c,':') %trend
r=u-c;
d=0:1/10:length(u)+2;
plot(d,0,'-',t,r) %rezidua

%priemerne charakteristiky rezidui
ME=sum(r)/m
MSE=(sum(r.*r))/m
MAE=sum(abs(r))/m
MAPE=sum(abs(r)./u)/m
MPE=sum(r./u)/m
p=sum(u)/m; q=u'-p*ones(1,m);
Rna2=1-(sum(r.*r)/sum(q.*q))
Rna2modif=Rna2-((1-Rna2)^(3-1))/(m-3)

```

Príloha J

Kĺzavé priemery v Matlabe

```
function [ b ] = klz(y,n)
```

```
b=rem(n,2);
```

```
    if b==1 %pre neparne
```

```
    for i=1:(length(y)-n+1)
```

```
    g(i)=(sum(y(i:1:i+n-1))/n);
```

```
    end
```

```
    %pre parne
```

```
    else for i=1:(length(y)-n)
```

```
    g(i)=(sum(y(i:1:i+n-1))+sum(y(i+1:1:i+n)))/(2*n);
```

```
    end
```

```
    end
```

```
    %povodny graf s klzavym priemerom
```

```
t = 1:1:length(y);
```

```
h = 1:1:length(g);
```

```
plot(t,y,h+(n-b)/2,g)
```

```
end
```