

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY



ZÁKLADNÉ METÓDY VÝPOČTU REZERV V
NEŽIVOTNOM POISTENÍ

BAKALÁRSKA PRÁCA

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY

**ZÁKLADNÉ METÓDY VÝPOČTU REZERV V
NEŽIVOTNOM POISTENÍ**

BAKALÁRSKA PRÁCA

Študijný program: Ekonomická a finančná matematika
Študijný odbor: 1114 Aplikovaná matematika
Školiace pracovisko: Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky
Vedúci práce: Mgr. Soňa Kilianová, PhD.



Univerzita Komenského v Bratislave
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

ZADANIE ZÁVEREČNEJ PRÁCE

Meno a priezvisko študenta: Simona Galková
Študijný program: ekonomická a finančná matematika (Jednoodborové štúdium, bakalársky I. st., denná forma)
Študijný odbor: 9.1.9. aplikovaná matematika
Typ záverečnej práce: bakalárska
Jazyk záverečnej práce: slovenský

Názov: Základné metódy výpočtu rezerv v neživotnom poistení
Cieľ: Naštudovať a prehľadne spracovať základ problematiky neživotného poistenia. Popísať základné metódy pre výpočet rezerv pre budúce nároky.
Literatúra: Wüthrich, Mario V., Merz, Michael (2008): Stochastic Claims Reserving Methods in Insurance. Wiley Finance Series.

Vedúci: Mgr. Soňa Kilianová, PhD.
Katedra: FMFI.KAMŠ - Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky
Vedúci katedry: prof. RNDr. Daniel Ševčovič, CSc.
Dátum zadania: 25.10.2012

Dátum schválenia: 03.11.2012
doc. RNDr. Margaréta Halická, CSc.
garant študijného programu

.....
študent

.....
vedúci práce

PodĎakovanie Touto cestou sa chcem poďakovať svojej vedúcej bakalárskej práce Mgr. Soni Kilianovej, PhD. za ochotu, pomoc, odborné rady a podnetné pripomienky, ktoré mi pomohli pri písaní tejto práce. Ďakujem aj svojej rodine a priateľom za ich trpezlivosť a podporu.

Abstrakt

GALKOVÁ, Simona: Základné metódy výpočtu rezerv v neživotnom poistení [Bakalárska práca], Univerzita Komenského v Bratislave, Fakulta matematiky, fyziky a informatiky, Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky; školiteľ: Mgr. Soňa Kilianová, PhD., Bratislava, 2013, 46 s.

V našej práci sa zaoberáme výpočtom technických rezerv v neživotnom poistení. Zoznamujeme čitateľa so všeobecnými pojmami a definujeme všeobecnú štruktúru problému plánovania technických rezerv. Predstavujeme dve najčastejšie používané deterministické metódy na výpočet týchto rezerv: reťazovo - rebríkovú metódu a metódu Bornhuetter - Fergusona. Venujeme pozornosť základným deterministickým modelom oboch metód a odvádzame ich algoritmy. Reťazovo - rebríková metóda je v praxi používannejšia a jednoduchšia. Preto v jej prípade definujeme viaceré ukazovatele, ako napríklad chybu predikcie a mieru neistoty. Naším cieľom je zosumarizovať obe metódy tak, aby bolo ich použitie pre čitateľa čo najjednoduchšie. Použitím dvoch rôznych metód na rovnakých príkladoch demonštrujeme niektoré ich vlastnosti. Ukazuje sa, že metóda Bornhuetter - Fergusona je výpočtovo oveľa náročnejšia, s pesimistickejším postojom k plánovaniu daných rezerv.

Kľúčové slová: Neživotné poistenie, Technické rezervy, Reťazovo - rebríková metóda, Metóda Bornhuetter - Fergusona

Abstract

GALKOVÁ, Simona: Basic Claims Reserving Methods in Non-Life Insurance [Bachelor Thesis], Comenius University in Bratislava, Faculty of Mathematics, Physics and Informatics, Department of Applied Mathematics and Statistics; Supervisor: Mgr. Soňa Kilianová, PhD., Bratislava, 2013, 46 p.

In our work we investigate loss claims reserving in non-life insurance. We present basic concepts and notations and define general structure of loss claims reserving problem. We introduce two deterministic methods, which are most frequently used for calculation of these reserves: Chain-Ladder Method and Bornhuetter-Ferguson Method. We pay attention to basic deterministic models of both methods and derive their algorithms. The Chain-Ladder Method is the most used one in practice and easier. In this case we also therefore define prediction error and coefficient of variation. Our aim is to summarize both methods in a way, that provides easy and comfortable use for every reader. Using both methods on the same examples we demonstrate some of their attributes. It seems, that the Bornhuetter-Ferguson Method is computationally more difficult and its predictions are more pessimistic than the ones obtained by the Chain-Ladder Method.

Keywords: Non-Life Insurance, Claims Reserving, Chain-Ladder Method, Bornhuetter-Ferguson method

Obsah

Úvod	8
1 Neživotné poistenie	10
1.1 Pohľadávky v neživotnom poistení	10
1.2 Príklady zo života	12
2 Technické rezervy	15
2.1 Technická rezerva na poistné plnenie	16
2.2 Štruktúra problému technických rezerv	17
2.2.1 Známe a neznáme pohľadávky	19
2.3 Nevysporiadané poistné plnenia	20
2.3.1 Vývojové trojuholníky	21
3 Reťazovo - rebríková metóda	25
3.1 CL model	25
3.2 Chyba predikcie	30
4 Metóda Bornhuetter - Fergusona	33
4.1 BF model	33
5 Vzorové príklady	35
5.1 Jednoduchý príklad	35
5.2 Príklad s outlierom	37
Záver	43
Príloha A	46

Úvod

Neživotné poistenie je finančná služba, s ktorou sa každý človek skôr či neskôr určite stretne. Aj keď môže byť prídavné meno neživotný trochu zavádzajúce, do tejto skupiny patrí nielen poistenie majetku, škodových udalostí, ale aj zdravotné a úrazové poistenie.

Aby mohli neživotné poisťovne po celom svete dôkladne plniť svoju funkciu, musia si všetko dobre naplánovať. Každý rok sa stretávajú s tou istou výzvou: s plánovaním technických rezerv na budúce obdobie. Aktuári neživotnej poisťovne majú za úlohu čo najpresnejšie odhadnúť obnos peňazí potrebný pre budúce vyplatenie poistných udalostí. Ide o udalosti, ktoré v danom účtovnom období buď ešte nenastali, alebo nastali, ale ešte neboli vybavené. Technické rezervy majú zvyčajne veľký podiel na celkovom majetku poisťovne, a preto aj malé odchýlky od skutočného potrebného obnosu môžu zapríčiniť veľké problémy.

V praxi sa využíva niekoľko matematicko-štatistických metód na výpočet technických rezerv. Jednak metódy deterministické, ktoré majú poväčšine jednoduché algoritmy, a potom metódy stochastické, ktoré sú náročnejšie, avšak presnejšie.

Najznámejšou deterministickou metódou je jednoznačne reťazovo-rebríková metóda. Napriek svojej jednoduchosti dosahuje celkom dobré výsledky. Vychádza iba z dostupných dát, čo môže byť problém v prípade neúplných alebo nekvalitných dát. Len nedávno sa začalo uvažovať o tejto metóde aj v stochastickom zmysle. Stochastickým submodelom sa venuje napríklad T. Mack v [3]. Druhou metódou, ktorej sa budeme venovať, je metóda Bornhuetter-Fergusona z roku 1972, ktorú publikovali vo veľmi populárnom článku [1].

Cieľom tejto bakalárskej práce je objasniť základné pojmy problematiky neživotného poistenia, predstaviť dva najznámejšie modely používané na výpočet technických rezerv a následne ich aplikovať na dostupné dáta.

V prvej kapitole definujeme kategórie neživotného poistenia, vysvetlíme pojem pohľadávka v neživotnom poistení a uvedieme niekoľko príkladov ako môže pohľadávka vzniknúť. Druhá kapitola sa venuje technickým rezervám. Predstavíme rôzne typy technických rezerv, ktoré sú neživotné poisťovne povinné vytvárať. Ukážeme zvyčajný spôsob usporiadania dát v takzvaných vývojových trojuholníkoch. Tretia a štvrtá kapitola sú venované samotným metódam na výpočet technických rezerv. Tretia kapitola sa

venuje reťazovo-rebríkovej metóde, jej základnému modelu a taktiež chybám jej predikcií. Štvrtá kapitola predstavuje metódu Bornhuetter-Fergusona. V oboch kapitolách definujeme aj základný stochastický model, podrobnejšie sa dá o nich dočítať napríklad v [4]. Posledná kapitola je venovaná príkladom. Prvý príklad slúži na jednoduchú ilustráciu oboch metód. V druhom príklade vytvoríme outlier a budeme sledovať ako to zmení odhady aj chyby predikcií. Taktiež porovnáme metódy z hľadiska toho, ktorá sa vie s outliermi lepšie vysporiadať. Všetky výpočty budú robené v softvéri Excel.

V tejto práci vychádzame hlavne z [5] a [6], v ktorých sú rozsiahlo popísané základné modely a metódy používané na výpočet technických rezerv.

1 Neživotné poistenie

Neživotné poistenie niekedy nazývame aj všeobecným poistením (z angl. general insurance) [2]. Zmluvy o neživotnom poistení sa uzatvárajú väčšinou na krátke časové obdobia, najčastejšie na jeden rok s prípadným predĺžením. Zväčša ide o škodové poistenia s poistným plnením obmedzeným na skutočnú výšku škody.

Pod odvetvie neživotného poistenia patria všetky druhy poistenia s výnimkou životného poistenia, a teda nasledujúce oblasti:

- poistenie automobilu (havarijné poistenie, povinné zmluvné poistenie),
- poistenie majetku (poistenie súkromného a verejného majetku proti ohňu, povodniam, prerušeniu podnikania, ...),
- poistenie zodpovednosti za škodu
- úrazové poistenie (poistenie nehody jednotlivca a kolektívu zahrňujúce aj povinné úrazové poistenie a náhradu škody),
- zdravotné poistenie (súkromné poistenie jednotlivca a kolektívu),
- námorné poistenie (doprava),
- iné produkty poistenia (letectvo, cestovné poistenie, právna ochrana, úverové poistenie, ...).

Fakt, že aj úrazové a zdravotné poistenie, napriek tomu, že sa týkajú osôb, nepatria do životného poistenia je spôsobený ich administratívnou podobnosťou s neživotným poistením.

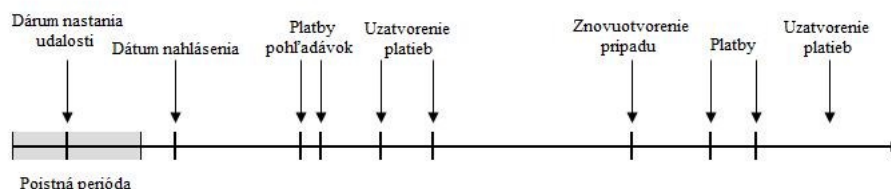
1.1 Pohľadávky v neživotnom poistení

V neživotnom poistení funguje jednoduchý poistný princíp, opísaný v [5, 6]. Za platenie pravidelnej sumy poistného sa poisťovňa zaručuje, že v prípade nastatia poistnej udalosti poskytne finančnú náhradu za spôsobené škody. Nastatím poistnej udalosti teda poistenec automaticky vytvára pohľadávku voči poisťovni. Zvyčajne však nie je možné, aby poisťovňa splatila pohľadávku ihneď, kvôli trom hlavným dôvodom:

- Oneskorené vykázanie nastatia poistnej udalosti (určitý čas medzi nastatím udalosti a jej ohlásením). Nahlásenie udalosti môže trvať aj niekoľko rokov, napríklad pri výskyte azbestu a až neskorších zdravotných problémoch.
- Po nahlásení udalosti môže niekoľko rokov trvať stanovenie konečnej výšky pohľadávky. Napríklad pri ublížení na zdraví častokrát trvá dlho, pokiaľ sú známe všetky okolnosti a hlavne následky.
- Môže sa stať, že uzavretá pohľadávka bude opäť otvorená kvôli neočakávaným novým poznatkom.

Na ilustráciu uvádzame príklad zo života. Pán Novák mal poistený vikendový dom do konca augusta 2010. Koncom augusta však prišli prudké dažde a dom vytopilo. Pán Novák mal veľa starostí a nahlásil poisťovni poistnú udalosť až v septembri, teda po skončení poistnej periódy. Keďže udalosť však nastala ešte v čase, v ktorom bola poistná zmluva platná, pán Novák si nárokoval na vyplatenie poistného za spôsobené škody v pivnici domu a teda vytvoril voči poisťovni pohľadávku. V októbri mu bolo poistné vyplatené v dvoch častiach a prípad bol uzavretý. V decembri však prišli tuhé mrazy a zistilo sa, že vplyvom vody nebola poškodená len pivnica, ale aj ďalšie dve steny domu, ktoré začali praskať. Bolo potrebné ich opraviť, a preto pán Novák opäť zašiel do poisťovne, prípad bol znovuotvorený a ďalšie poistné bolo vyplatené. Potom bol prípad opätovne uzavretý.

Systém vytvorenia pohľadávky v neživotnom poistení môžeme v tomto prípade jednoducho znázorniť graficky:



Obr. 1: Systém vytvorenia typickej pohľadávky v neživotnom poistení, zdroj:[5].

1.2 Príklady zo života

Ako už bolo spomenuté vyššie, niektoré poistné udalosti sú nahlásené, poistná suma je vyplatená a prípad navždy uzavretý. Takým prípadom môže byť nasledujúci príklad havarijného poistenia. Všetky udalosti sme spísali do jednoduchkej tabuľky. 23. februára 2010 sa stala autonehoda. Poistovní bola táto udalosť nahlásená 18. mája 2010 a ešte v ten deň bolo poistné vyplatené, pravdepodobne na základe účtu z autoservisu. Taktiež je v tabuľke uvedený stav ku koncu mesiaca, teda k 31. máju 2010. Poistovňa predbežne odhadla, že bude musieť vyplatiť 2 100 EUR, nakoniec však vyplatila iba 2 004 EUR. Po tejto jednorazovej platbe bol prípad uzavretý a preto bola rezerva nulová. V prípade, že by sme očakávali ďalšie platby, rezerva by sa rovnala odhadovanej celkovej výške pohľadávky mínus už zrealizované platby.

nastanie udalosti	dátum nahlásenia udalosti	dátum vysporia- dania	situácia v čase	odhadovaná celková výška pohľadávky	kumulované platby	rezervy	stav
23.2.2010	18.5.2010	18.5.2010	31.5.2010	2 100	2 004	0	uzavreté

Tabuľka 1: Havarijné poistenie - jednorazová výplata poistného plnenia, zdroj:[6].

Ďalšou situáciou, ktorá môže nastať, je krátkodobé vyplácané plnenie napríklad v prípade poistenia domácnosti. 1. februára 2010 nastala poistná udalosť, mohlo to byť napríklad vykradnutie bytu. Ešte v ten deň bola udalosť nahlásená poisťovni a náhrada škody bola odhadnutá na 60 000 EUR. V priebehu februára bola vyplatená prvá časť sumy a to 20 000 EUR. Rezerva ostala 60 000 mínus 20 000, teda 40 000 EUR, a teda keďže ešte nebola vyplatená plná suma, stav plnenia je otvorený. V marci bola vyplatená ďalšia čiastka a nakoniec bola 8. apríla splatená posledná časť. Preto je 8. apríl aj dňom konečného vysporiadania a prípad bol uzavretý.

nastanie udalosti	dátum nahlásenia udalosti	dátum vysporia- dania	situácia v čase	odhadovaná celková výška pohľadávky	kumulované platby	rezervy	stav
1.2.2010	1.2.2010	8.4.2010	28.2.2010	60 000	20 000	40 000	otvorené
			31.3.2010	60 000	42 591	17 409	otvorené
			8.4.2010	57 550	57 550	0	uzavreté

Tabuľka 2: Poistenie domácnosti - krátkodobé vyplácané plnenie, zdroj:[6].

nastanie udalosti	dátum nahlásenia udalosti	dátum vysporia- dania	situácia v čase	odhadovaná celková výška pohľadávky	kumulované platby	rezervy	stav
28.11.2000	29.11.2000	20.11.2009	30.11.2000	900 000	0	900 000	otvorené
			30.1.2001	900 000	100	899 900	otvorené
			31.3.2001	900 000	280	899 720	otvorené
			30.4.2001	2 000 000	5 280	1 994 720	otvorené
			31.5.2001	2 000 000	45 280	1 954 720	otvorené
			30.6.2001	2 000 000	49 848	1 950 152	otvorené
			31.8.2001	2 000 000	149 848	1 850 152	otvorené
			⋮	⋮	⋮	⋮	otvorené
			31.12.2001	2 500 000	206 447	2 293 553	otvorené
			31.1.2003	3 200 000	289 995	2 910 005	otvorené
			⋮	⋮	⋮	⋮	otvorené
			31.3.2003	3 200 000	360 796	2 839 204	otvorené
			30.6.2003	3 200 000	420 796	2 779 204	otvorené
			31.7.2003	3 200 000	420 681	2 778 319	otvorené
			⋮	⋮	⋮	⋮	otvorené
			31.3.2004	3 200 000	449 307	2 750 693	otvorené
			30.6.2004	3 200 000	549 307	2 650 693	otvorené
			⋮	⋮	⋮	⋮	otvorené
			31.1.2005	3 200 000	550 508	2 649 492	otvorené
			28.2.2005	3 200 000	700 508	2 499 492	otvorené
			31.3.2005	3 200 000	700 688	2 499 312	otvorené
			30.6.2005	3 200 000	707 688	2 492 312	otvorené
			31.10.2005	3 200 000	907 688	2 292 312	otvorené
			31.12.2006	3 600 000	907 688	2 692 312	otvorené
			31.7.2007	3 600 000	1 107 688	2 492 312	otvorené
			31.3.2008	3 600 000	1 611 332	1 988 668	otvorené
			20.11.2009	3 600 000	3 161 332	0	uzavreté

Tabuľka 3: Poistenie domácnosti - dlhodobé vyplácané plnenie, zdroj:[6]

Uvádžeme takisto situáciu (Tabuľka 3), pri ktorej je plnenie vyplácané dlhodobo. V tomto prípade ide opäť o havarijné poistenie. 28. novembra 2000 sa stala dopravná nehoda a nasledujúci deň bola oznámená poisťovni. Na rozdiel od predchádzajúcich prípadov, kedy bola rezerva mierne vyššia, ako bola konečná vyplatená suma, v tomto prípade musela poisťovňa svoj odhad niekoľko krát navyšovať. Vidíme, že dokiaľ bola pohľadávka vysporiadaná, ubehlo 9 rokov. Mohlo to byť spôsobené stále novými a novými zisteniami, pravdepodobne sa objavovali ďalšie a ďalšie škody spôsobené touto

dopravnou nehodou (napríklad následky na zdraví poškodených, ktoré neboli známe ihneď), a preto bola poisťovňa nútená vyplácať pohľadávku vo viacerých častiach a navyšovať svoj odhad.

2 Technické rezervy

V tejto kapitole sa oboznámime so zaužívanými pojmami v oblasti plánovania technických rezerv pri neživotnom poistení. Taktiež si predstavíme všeobecný model, používaný pri výpočtoch. Vychádzať budeme hlavne z [5, 6, 7, 2].

Aby bola poisťovňa schopná plniť svoje záväzky vzniknuté pri vykonávaní poisťovacej činnosti, teda záväzky voči poisteným, je zo Zákona o poisťovníctve povinná odkladať si určitú časť zinkasovaného poistného. Túto časť nazývame **technické rezervy** poisťovne [2]. Vznik týchto záväzkov je takmer istý, avšak nevieme kedy sa tak stane a aká bude ich výška. Poisťovňa si však musí vytvárať rezervy, ktoré pokryjú nielen záväzky vzniknuté z momentálne platných zmlúv, ale aj rezervy pre záväzky, ktoré môžu vzniknúť v rámci už neplatných zmlúv. Napríklad ak poistený nahlási poistnú udalosť v čase, v ktorom je poistná zmluva už neplatná, avšak poistná udalosť sa vyskytla ešte počas platnosti zmluvy. Preto je poisťovňa povinná vytvárať technické rezervy v takej výške, aby bola v každom momente schopná v plnej sume uhradiť všetky svoje záväzky vyplývajúce z poistných zmlúv. Na vykonávanie poisťovacej činnosti vytvára neživotná poisťovňa v súlade so zákonom tieto technické rezervy [2, 7]:

- **technickú rezervu na poistné budúcich období (rezerva na nezaslúžené poistné)** - tvorí sa z tej časti poistného, ktorá sa vzťahuje na budúce účtovné obdobia. Súčasťou je taktiež rezerva na neukončené riziká, ktorá sa tvorí v prípade, že predpísané poistné, ktoré sa vzťahuje na budúce účtovné obdobie nie je dostatočné na krytie všetkých poistných plnení z poistných udalostí a nákladov, ktoré nastanú v budúcom období a vzťahujú sa k platným poistným zmluvám. Jej výška sa prvotne určuje ako súhrn technických rezerv vypočítaných podľa jednotlivých poistných zmlúv. Ak nie je možné použiť tento spôsob, použijú sa na určenie jej výšky rôzne matematicko-štatistické metódy.
- **technickú rezervu na poistné plnenie** - táto rezerva predstavuje odhad celkových nákladov, ktoré vyplývajú z úhrad všetkých poistných plnení, ktoré nastali do konca účtovného obdobia. Kryje teda záväzky z poistných udalostí, ktoré boli v bežnom účtovnom období nahlásené, ale ešte nevybavené, alebo boli vzniknuté, ale ešte neboli nahlásené. Táto rezerva teda predstavuje všetky predpokladané re-

zervy spojené s vybavením poistných udalostí. Na výpočet tejto rezervy spravidla používame rôzne matematicko-štatistické metódy.

- **technickú rezervu na poistné prémie a zľavy** - táto rezerva je určená na poskytovanie prémieí a zliav na poistnom.
- **technickú rezervu poistného neživotných poisťovní** - vytvára sa v poistných odvetviach, v ktorých výška poistného závisí od veku poistenca.
- **technickú rezervu na vyrovňovanie mimoriadnych rizík** - vytvára sa na vyrovnanie akéhokoľvek technického deficitu, resp. ak by došlo k nezvyčajne vysokému škodovému priebehu.

V tejto práci sa budeme zaoberať hlavne technickou rezervou určenou na poistné plnenie, podľa [5, 6].

2.1 Technická rezerva na poistné plnenie

Táto rezerva predstavuje tú najdôležitejšiu pre neživotné poisťovne, pokiaľ sa nechcú dostať do finančných problémov. Výška rezervy je plánovaná tak, aby pokryla poistné plnenia z poistných udalostí a taktiež všetky náklady spojené s vybavovaním.

Technické rezervy na poistné plnenia sa podľa [5] delia na dva typy:

- IBNyR rezervy (z angl. Incurred But Not yet Reported) - rezervy na poistné plnenia, ktoré vznikli v bežnom účtovnom období, avšak v tomto období neboli nahlásené;
- IBNeR rezervy (z angl. Incurred But Not enough Reported) - rezervy na poistné plnenia z poistných udalostí, ktoré boli nahlásené v bežnom účtovnom období, avšak dosiaľ neboli zlikvidované, resp. konečná výška poistných nárokov (pohľadávok) nebola stanovená.

Dokopy tvoria tieto dva typy IBNR (z angl. Incurred But Not Reported) rezervy. Na odhad týchto rezerv sa používajú najčastejšie matematicko-štatistické metódy, prípadne metódy kvalifikovaného odhadu (ak poisťovňa nemá dostatok dát na použitie vhodnej štatistickej metódy).

2.2 Štruktúra problému technických rezerv

V tejto sekcii sa budeme venovať zaužíwanej notácii a základnej matematickej teórii používanej pri plánovaní technických rezerv. Východiskom pre túto časť boli [5, 6].

Existujú dva rôzne systémy, ktorými si poisťovne vedú záznamy o pohľadávkach. Zvyčajne je to podľa dátumu, kedy bola poistná udalosť nahlásená. Z účtovníkeho hľadiska by však bolo výhodnejšie keby boli pohľadávky zoradené podľa dňa nastania poistnej udalosti.

Uvažujme, že máme N pohľadávok za určitú fixnú časovú jednotku. Jednotlivé dátumy nahlásenia poistných udalostí označíme $T_1, \dots, T_N$, pričom $T_i \leq T_{i+1}$ pre všetky i . Ak zafixujeme i -tu pohľadávku, tak potom $T_i = T_{i,0} \leq T_{i,1} \leq \dots \leq T_{i,j} \leq \dots \leq T_{i,N_i}$ určuje postupnosť dátumov, kedy prebieha nejaká akcia s i -tou pohľadávkou. Napríklad, v čase $T_{i,j}$ môže byť vykonaná platba, teda poistenému bude vyplatená časť poistného, alebo môže prísť k doplneniu informácií, týkajúcich sa i -tej pohľadávky. T_{i,N_i} určuje finálne vyrovnanie pohľadávky. Predpokladáme, že $T_{i,N_i+k} = \infty$ pre $k \geq 1$, teda predpokladáme, že po finálnom vyrovnaní i -tej pohľadávky sú už známe úplne všetky informácie ohľadom tejto pohľadávky.

Udalosti, ktoré nastali v čase $T_{i,j}$, budeme značiť nasledujúco:

$$\begin{aligned} X_{i,j} &= \begin{cases} \text{poistné plnenie v čase } T_{i,j} \text{ za } i\text{-tu pohľadávku,} \\ 0, \text{ ak v čase } T_{i,j} \text{ neprebehla žiadna platba;} \end{cases} \\ I_{i,j} &= \begin{cases} \text{nová informácia v čase } T_{i,j}, \text{ týkajúca sa } i\text{-tej pohľadávky,} \\ \emptyset, \text{ ak v čase } T_{i,j} \text{ nie je prístupná žiadna nová informácia.} \end{cases} \end{aligned}$$

V prípade, že $T_{i,j} = \infty$, položíme $X_{i,j} = 0$ a $I_{i,j} = \emptyset$. Teda uvažujeme, že po finálnom splatení pohľadávky už nenasledujú žiadne platby, ani sa neobjavujú nové informácie.

Pomocou týchto premenných definujeme niekoľko dôležitých procesov, aby sme mohli problém tvorby technických rezerv rozdeliť do niekoľkých podproblémov. Pre každú pohľadávku vytvoríme niekoľko procesov:

- **Proces platby pohľadávky i** je daný ako $(T_{i,j}, X_{i,j})_{j \geq 0}$ a určuje nasledujúci proces kumulovania platieb do času t :

$$C_i(t) = \sum_{j \in \{k; T_{i,k} \leq t\}} X_{i,j}, \quad (2.2.1)$$

pričom $C_i(t) = 0$ pre $t < T_i$. Konečná výška i -tej pohľadávky je daná ako

$$C_i(\infty) = C_i(T_{i,N_i}) = \sum_{j=0}^{\infty} X_{i,j}. \quad (2.2.2)$$

Celkové ostávajúce platby pre budúce plnenia i -tej pohľadávky v čase t sú dané ako

$$R_i(t) = C_i(\infty) - C_i(t) = \sum_{j \in \{k; T_{i,k} > t\}} X_{i,j}. \quad (2.2.3)$$

$R_i(t)$ je náhodná premenná, závislá od času t , ktorú potrebujeme predpovedať. $R_i(t)$ teda predstavuje výšku rezervy pre budúce poistné plnenie i -tej pohľadávky. Je to teda ekvivalentné predpovedaniu konečnej výšky i -tej pohľadávky, teda $C_i(\infty)$.

- **Informačný proces pohľadávky i** je definovaný ako $(T_{i,j}, I_{i,j})_{j \geq 0}$.
- **Proces vysporiadania pohľadávky i** je daný ako $(T_{i,j}, I_{i,j}, X_{i,j})_{j \geq 0}$.

Keď spojíme čiastkové procesy všetkých N pohľadávok, dostaneme ucelený proces plánovania technických rezerv, ktorý je charakterizovaný dvoma veličinami:

- $C(t)$ reprezentuje všetky platby do času t za všetkých N pohľadávok,

$$C(t) = \sum_{i=1}^N C_i(t). \quad (2.2.4)$$

- $R(t)$ je množstvo ostávajúcich platieb pre pohľadávky vzniknuté do času t za všetkých N pohľadávok,

$$R(t) = \sum_{i=1}^N R_i(t). \quad (2.2.5)$$

Uvažujme odteraz problém plánovania rezerv ako problém predvídania. Nech

$$\mathcal{F}_t^N = \sigma(\{(T_{i,j}, I_{i,j}, X_{i,j}); 1 \leq i \leq N, j \geq 0, T_{i,j} \leq t\})$$

je σ -algebra, čo môže byť interpretované ako informácia dostupná v čase t z N informačných procesov pohľadáviek. Často sa vyskytuje aj dopĺňajúca externá informácia $\mathcal{E}_t$ v čase t , pričom platí $\mathcal{E}_s \subseteq \mathcal{E}_t$ pre $s \leq t$. Za vonkajšiu informáciu môžeme považovať napríklad zmenu zákonov, vysokú infláciu, zmenu na trhu práce, atď. Preto je celková informácia, ku ktorej má poisťovňa prístup v čase t , definovaná ako

$$\mathcal{F}_t = \sigma(\mathcal{F}_t^N \otimes \mathcal{E}_t).$$

2.2.1 Známe a neznáme pohľadávky

Ako bolo povedané v sekcii 1.1, rozlišujeme medzi IBNyR a IBNeR pohľadávkami. Proces $(N_t)_{t \geq 0}$ definovaný ako

$$N_t = \sum_{i=1}^N 1_{\{T_i \leq t\}} \quad (2.2.6)$$

vyjadruje množstvo nahlásených poistných udalostí. Podľa toho, či ide o IBNyR alebo IBNeR pohľadávku, vieme konečné množstvo ostávajúcich platieb rozdeliť na

$$R(t) = \sum_{i=1}^N R_i(t) 1_{\{T_i \leq t\}} + \sum_{i=1}^N R_i(t) 1_{\{T_i > t\}}, \quad (2.2.7)$$

kde prvý člen vyjadruje nevysporiadané záväzky vzniknuté zo škôd poistných udalostí v čase t pre pohľadávky, ktoré boli už zreportované a druhý člen predstavuje nevysporiadané záväzky v čase t pre IBNyR pohľadávky.

V tomto prípade budeme považovať za IBNyR pohľadávky aj také, ktoré ešte ani nevznikli (poistná udalosť zatiaľ nenastala) a teda neboli ani nahlásené.

Nech N je celkový (náhodný) počet pohľadávok. Rezervy v čase t pre nahlásené pohľadávky definujeme ako

$$R_t^{IBNeR} = E \left[\sum_{i=1}^N R_i(t) 1_{\{T_i \leq t\}} \middle| \mathcal{F}_t \right] = E \left[\sum_{i=1}^{N_t} R_i(t) \middle| \mathcal{F}_t \right]. \quad (2.2.8)$$

R_t^{IBNeR} teda indikuje očakávané budúce platby v čase t za nevysporiadané poistné plnenia už zreportovaných poistných udalostí. Inak vravíme tomuto pojmu aj "najlepší odhad rezerv v čase t pre IBNeR pohľadávky". IBNyR rezervy v čase t definujeme ako

$$R_t^{IBNyR} = E \left[\sum_{i=1}^N R_i(t) 1_{\{T_i > t\}} \middle| \mathcal{F}_t \right] = E \left[\sum_{i=N_t+1}^N R_i(t) \middle| \mathcal{F}_t \right]. \quad (2.2.9)$$

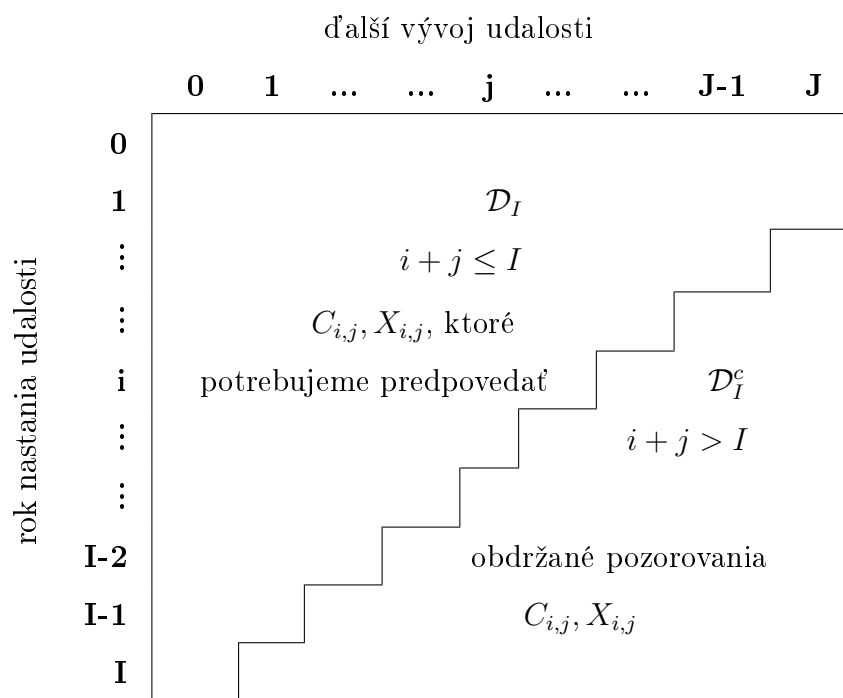
R_t^{IBNyR} indikuje očakávané budúce platby v čase t pre IBNyR pohľadávky. Inak povedané "najlepší odhad rezerv v čase t pre IBNyR pohľadávky".

Vidíme, že rezervy pre tieto dva druhy pohľadávok sa rôznia. Rezervy pre nahlásené udalosti môžu byť vymedzené individuálne. Často totiž máme dostatok informácií a teda môžeme odhadovať rezervy na báze jednotlivých poistných plnení. Avšak rezervy pre IBNyR pohľadávky nemôžeme riešiť jednotlivo, pretože v čase t nepoznáme celkový počet pohľadávok N . Navyše, informácie o jednotlivých pohľadávkach nemáme k dispozícii. O IBNyR rezervách musíme teda uvažovať na skupinovej báze. V skutočnosti

však väčšina klasických metód na výpočet technických rezerv medzi týmito dvoma rezervami nerozlišuje a preto budeme v našej práci rátať technické rezervy pre budúce nároky pre oba typy rovnakým spôsobom.

2.3 Nevysporiadané poistné plnenia

V tejto sekcii si predstavíme zaužívaný zápis a terminológiu, tak ako sú zadefinované v [5, 6]. Najčastejšie usporiadame podkladové údaje za minulé roky značíme ostávajúce záväzky do takzvaných vývojových trojuholníkov poistných plnení. Celkové, doteraz vyplatené poistné plnenia sú usporiadané v riadkoch podľa roku vzniku poistnej udalosti a v stĺpcoch podľa počtu rokov, ktoré od vzniku týchto udalostí uplynuli. Roky i sú teda rokmi nastania udalosti (vertikálna os) a roky j predstavujú obdobie ďalšieho vývoja udalosti (horizontálna os). Trojuholníkové schémy teda oddeľujú pohľadávky podľa dvoch časových osí tak, ako vidíme na obrázku.



Tabuľka 4: Vývojový trojuholník všeobecne, zdroj:[5].

Súčasný rok nastatia udalosti je označovaný I , zatiaľ čo aktuálny rok vývoja udalosti označujeme J . Z toho vyplýva, že $i \in \{0, \dots, I\}$ a $j \in \{0, \dots, J\}$. Pre účel ilustrácie uvažujme, že $X_{i,j}$ predstavuje platby. Teda $X_{i,j}$ predstavuje všetky platby v období vývoja udalosti j pre pohľadávky s rokom nastania udalosti i . To zároveň znamená, že

$X_{i,j}$ prislúcha platbám pohľadávok v roku nastania udalosti i , v účtovnom období $i + j$. Kumulatívne platby $C_{i,j}$ pre rok nastania udalosti i a rok vývoja udalosti j sú dané ako

$$C_{i,j} = \sum_{k=0}^j X_{i,k}. \quad (2.3.1)$$

$X_{i,j}$ a $C_{i,j}$ teda zvyčajne pozorujeme v trojuholníkových schémach, ktoré zobrazujú vývoj poistných plnení. V čase I sú tabuľky zobrazujúce vývoj pohľadáviek rozdelené na dve časti: horný trojuholník obsahuje pozorovania $X_{i,j}, i + j \leq I$ a dolný trojuholník zobrazuje odhadované hodnoty ostávajúcich platieb $X_{i,j}, i + j > I$. V hornom trojuholníku

$$\mathcal{D}_I = \{X_{i,j}; i + j \leq I, 0 \leq j \leq J\} \quad (2.3.2)$$

sú zobrazené dostupné pozorovania a v dolnom trojuholníku

$$\mathcal{D}_I^c = \{X_{i,j}; i + j > I, i \leq I, j \leq J\} \quad (2.3.3)$$

sa nachádzajú platby, ktoré musíme predpovedať, resp. odhadnúť. Účtovné roky sú dané na diagonále $i + j = k, k \geq 0$. Postupné platby v účtovnom roku $k \geq 0$ sú dané ako

$$X_k = \sum_{i+j=k} X_{i,j} \quad (2.3.4)$$

a vo vývojovom trojuholníku poistných plnení sú zobrazené na $(k+1)$ -vom mieste na diagonále.

2.3.1 Vývojové trojuholníky

Vývojové trojuholníky sú základom pre všetky analýzy technických rezerv. Pre jednoduchosť môžeme akúkoľvek formu dať ohľadom vývoja pohľadávok (trojuholník, trapézoid, trojuholník alebo trapézoid s chýbajúcimi dátami v ľavom dolnom rohu) považovať za vývojový trojuholník. Preto vnímame pojem trojuholník v širšom zmysle. Ako príklad uvádzame nasledujúcu Tabuľku 5, ktorá ilustruje tok pohľadávkových platieb počas rokov nastatia udalosti 1994 až 2000. Údaje sú v tisícoch EUR. Vidíme, že napríklad v roku 1994 bolo vyplatených 1 001 000 EUR na udalostiach, ktoré sa udiali

v tom istom roku. V roku 1995 bolo použitých 750 000 EUR na vyplatenie poistných udalostí, ktoré nastali v roku 1994. Postupne každým ďalším rokom bola suma použitá na splatenie udalostí, ktoré sa stali ešte v roku 1994 nižšia, v roku 1999 už boli všetky pohľadávky vysporiadané, na tejto pozícii je 0 EUR. Podobný klesajúci trend môžeme sledovať pre všetky roky nastania udalosti.

		rok splatenia (vysporiadania) pohľadávky						
		1994	1995	1996	1997	1998	1999	2000
rok nastania udalosti	1994	1 001	750	365	120	48	0	0
	1995		1 041	833	417	156	0	0
	1996			992	895	450	172	62
	1997				1 145	924	438	186
	1998					1 380	882	516
	1999						1 294	962
	2000							1 320

Tabuľka 5: Vývojový trojuholník, zdroj:[6].

Dáta na x-ovej osi môžeme usporiadať aj opačne, podľa počtu rokov, ktoré ubehli od nastatia udalosti (rok vývoja postupných platieb). Tento spôsob usporiadania dát je v praxi bežnejší. V tomto prípade by predchádzajúce dáta boli usporiadané ako v Tabuľke 6:

		rok vývoja postupných platieb							
		0	1	2	3	4	5	6	
rok nastania udalosti	1994	1 001	750	365	120	48	0	0	
	1995	1 041	833	417	156	0	0		
	1996	992	895	450	172	62			
	1997	1 145	924	438	186				
	1998	1 380	882	516					
	1999	1 294	962						
	2000	1 320							

Tabuľka 6: Vývojový trojuholník postupných platieb, zdroj:[6].

Na diagonále sa nachádzajú platby v rovnakom kalendárnom roku, ako bol rok nastania udalosti. Vidíme, že po štvrtom roku vývoja platieb nie sú očakávané ďalšie platby, a preto môžeme časť za týmto stĺpcom trojuholníka zanedbať a vznikne trapézoid (Tabuľka 7).

		rok vývoja postupných platieb				
		0	1	2	3	4
rok nastania udalosti	1994	1 001	750	365	120	48
	1995	1 041	833	417	156	0
	1996	992	895	450	172	62
	1997	1 145	924	438	186	
	1998	1 380	882	516		
	1999	1 294	962			
	2000	1 320				

Tabuľka 7: Vývojový trapézoid postupných platieb, zdroj:[6].

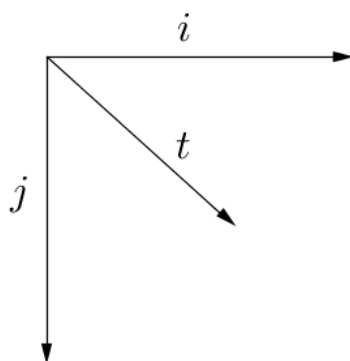
Obdobne vieme tú istú tabuľku vytvoriť nielen pre postupné, ale aj pre kumulované platby. V pravom dolnom trojuholníku sa nachádzajú čísla, ktoré sú nám teraz neznáme a potrebujeme ich dobre odhadnúť. V poslednom stĺpci sa nachádza konečná výška pohľadávok.

		rok vývoja kumulovaných platieb				
		0	1	2	3	4
rok nastania udalosti	0	1 001	1 751	2 116	2 236	2 284
	1	1 041	1 874	2 291	2 447	2 447
	2	992	1 887	2 337	2 509	2 571
	3	1 145	2 069	2 507	2 693	
	4	1 380	2 262	2 778		
	5	1 294	2 256			
	6	1 320				

Tabuľka 8: Vývojový trapézoid kumulovaných platieb, zdroj:[6].

Vývojové trojuholníky vo všeobecnosti vyplňame v troch smeroch:

- rok vývoja platieb $i = 0, 1, \dots$ (vertikálny smer),
- rok nastania udalosti $j = 0, 1, \dots$ (horizontálny smer),
- kalendárny rok $t = 0, 1, \dots$ (diagonálny smer).



Obr. 2: Smery vo vývojovom trojuholníku.

Pod označením $X_{i,j}$ a $C_{i,j}$ v trojuholníkových schémach však rozumieme rôzne akcie. Navyšujúce sa pohľadávky $X_{i,j}$ môžu v skutočnosti interpretovať postupné platby v bunke (i, j) , počet nahlásených udalostí s omeškaním j rokov a nastatím v roku i , alebo aj zmenu nahlásenej pohľadávky na pozícii (i, j) . Kumulatívne pohľadávky $C_{i,j}$ môžu predstavovať kumulované platby, celkový počet nahlásených pohľadávok, alebo aj počet nahlásených poistných udalostí. $C_{i,J}$ často predstavuje celkový počet pohľadávok v roku i . Ak $X_{i,j}$ predstavuje postupné platby, potom nevysporiadané záväzky zo škôd poistných udalostí pre rok nastania udalosti i v čase j vypočítame vzorcom

$$R_{i,j} = \sum_{k=j+1}^J X_{i,k} = C_{i,J} - C_{i,j}. \quad (2.3.5)$$

$R_{i,j}$ predstavuje technické rezervy, ktoré musíme predpovedať.

3 Reťazovo - rebríková metóda

V tejto kapitole si predstavíme jednu z najčastejšie používaných metód pri odhade technických rezerv poisťných plnení, podľa [5, 6]. Je ňou reťazovo-rebríková metóda (z angl. Chain-ladder method, pre prídavné meno reťazovo-rebríkový budeme preto používať skratku CL). Svoju popularitu v teórii ale aj praxi si získala hlavne svojou jednoduchosťou a relatívne nízkymi požiadavkami na dostupné dáta. Je založená na čisto pragmatickom uvažovaní, avšak aj napriek svojej jednoduchosti a algoritmickému postupu je veľmi presná. Jej cieľom je predpovedanie konečnej výšky pohľadávok v danom roku a teda aj predpovedanie technických rezerv. Táto metóda je pôvodne deterministická, no v niektorých prípadoch sa stretávame aj s jej stochastickou obdobou, stačí ju upraviť niekoľkými stochastickými submodelmi.

3.1 CL model

Odteraz budeme uvažovať, že posledný rok vývoja udalosti je označený J a teda $X_{i,j} = 0$ pre $j > J$ a posledný rok nastatia udalosti je I . Pre jednoduchosť budeme taktiež uvažovať $I = J$.

Reťazovo-rebríková metóda využíva kumulované pohľadávky, resp. kumulované platby spolu s vhodnými koeficientami a je založená na nasledujúcich predpokladoch modelu.

Predpoklady 1. *Pre CL model uvažujeme tieto predpoklady [5]:*

1. *Kumulované platby $C_{i,j}$ sú v rôznych rokoch nastatia udalosti i nezávislé.*
2. *Existujú vývojové koeficienty $f_0, \dots, f_{J-1} > 0$ také, že pre všetky $0 \leq i \leq I$ a pre všetky $0 \leq j \leq J$ platí*

$$E[C_{i,j}|C_{i,0}, \dots, C_{i,j-1}] = E[C_{i,j}|C_{i,j-1}] = f_{j-1}C_{i,j-1}.$$

Jednoducho povedané, definícia hovorí o vzájomnej úmernosti stĺpcov vývojového trojuholníka. Teda na prechod z roku vývoja udalosti j do roku $j + 1$ stačí prenásobiť čísla v roku j faktorom f_j . Náhodné fluktuácie v tejto metóde neuvažujeme.

Poznámka 1. Ako uvidíme neskôr, predpoklad nezávislosti pohľadávok, resp. platieb v rôznych rokoch nastatia udalosti je bežný pre takmer všetky metódy používané na výpočet rezerv. Znamená to, že potrebujeme eliminovať vplyv účtovných rokov na dáta.

Poznámka 2. Koeficienty f_j nazývame vývojovými koeficientami, pomermi súvislosti alebo aj CL faktormi. Sú hlavným bodom záujmu v CL metóde a popisujú, ako súvisia za sebou idúce kumulované platby. Najťažšie na metóde je stanovenie vhodných odhadov pre tieto koeficienty.

V nasledujúcej leme načrtujeme výpočet údajov vo vývojovom trojuholníku.

Lema 1. [5] *Za platnosti predpokladov modelu máme*

$$E[C_{i,j}|\mathcal{D}_I] = E[C_{i,J}|C_{i,I-i}] = C_{i,I-i}f_{I-i}\dots f_{J-1}$$

pre všetky $1 \leq i \leq I$.

$\mathcal{D}_I = \{C_{i,j}; i+j \leq I, 0 \leq j \leq J\}$ je množina pozorovaní v čase I , teda horný trojuholník vo vývojovej trojuholníkovej schéme.

Dôkaz. Využijeme podmienenú strednú hodnotu, nezávislosť rokov nastania udalosti a predpoklady modelu.

$$\begin{aligned} E[C_{i,j}|\mathcal{D}_I] &= E[C_{i,j}|C_{i,0}, \dots, C_{i,I-i}] \\ &= E[E[C_{i,J}|C_{i,J-1}]|C_{i,0}, \dots, C_{i,I-i}] \\ &= f_{J-1}E[C_{i,J-1}|\mathcal{D}_I] \end{aligned}$$

Ak budeme obdobne pokračovať, dostaneme sa až po diagonálu $i+j=I$, a teda po výšku pohľadávky. Analogicky pre $E[C_{i,J}|C_{i,I-i}]$. $\square$

Vďaka Leme 1 poznáme algoritmus na predpovedanie konečnej výšky pohľadávok $C_{i,J}$ daných pozorovaniami $\mathcal{D}_I$. Tento algoritmus je rekurzívny. Pre známe faktory f_j sú potom nevysporiadané poistné plnenia v roku nastatia udalosti i založenom na $\mathcal{D}_I$ predpovedané ako

$$E[C_{i,j}|\mathcal{D}_I] - C_{i,I-i} = C_{i,I-i}(f_{I-i}\dots f_{J-1} - 1).$$

Cieľom tejto metódy je odhadnúť konečnú výšku pohľadávok pre každý rok nastatia udalosti i , teda $C_{i,J}$. Pre rezervy v roku i potom máme:

$$\hat{R}_i = \hat{C}_{i,J} - C_{i,I-i}^{paid}. \quad (3.1.1)$$

Máme teda „najlepší odhad“ rezerv pre rok nastatia udalosti i v čase I , založený na informácii $\mathcal{D}_I$ a známych faktoroch f_j . V skutočnosti však väčšinou faktory f_j

nepoznáme a taktiež ich potrebujeme vhodne odhadnúť. Pre $j = 0, \dots, J-1$ ich budeme odhadovať nasledovne:

$$\hat{f}_j = \frac{\sum_{i=0}^{I-j-1} C_{i,j+1}}{\sum_{i=0}^{I-j-1} C_{i,j}} = \sum_{i=0}^{I-j-1} \frac{C_{i,j}}{\sum_{k=0}^{I-j-1} C_{k,j}} \frac{C_{i,j+1}}{C_{i,j}}. \quad (3.1.2)$$

Poznámka 3. Ak je posledným rokom vo vývojovom trojuholníku rok J , potom interpretujeme čísla v tomto roku ako konečné množstvo pohľadávok. Potom faktor f_J značí CL faktor od roku $J-1$ do konečného stavu a nazývame ho chvostový faktor (z angl. tail faktor).

Poznámka 4. Jednotlivé (pre každé dve susediace bunky v riadkoch vývojového trojuholníka) pozorované CL faktory sú dané ako

$$F_{i,j} = \frac{C_{i,j+1}}{C_{i,j}} \quad \text{pre } C_{i,j}, C_{i,j+1} \in \mathcal{D}_I. \quad (3.1.3)$$

Potom

$$\hat{f}_j = \frac{C_{I-j-1,j+1}}{C_{I-j-1,j}} = \sum_{i=0}^{I-j-1} \frac{C_{i,j}}{C_{I-j-1,j}} F_{i,j}. \quad (3.1.4)$$

Teda $\hat{f}_j$ je vážený priemer $F_{i,j}$ s váhami $C_{i,j}$.

Veta 1. [5] *Odhad pomocou CL metódy - **CL odhad** - pre $E[C_{i,j}|\mathcal{D}_I]$ je daný ako:*

$$\hat{C}_{i,j}^{CL} = E[C_{i,j}|\mathcal{D}_I] = C_{i,I-i} \hat{f}_{I-i} \dots \hat{f}_{j-1} = C_{i,I-i} \prod_{j=1}^{k=I-i} \hat{f}_k \quad (3.1.5)$$

pre $i+j > I$

Ak uvažujeme o CL metóde čisto mechanicky, potom algoritmus spomenutý vyššie vedie k CL rezervám. Tento algoritmus je často používaný bez úvah o stochastických častiach modelu.

Definujeme množinu

$$\mathcal{B}_k = C_{i,j}; i+j \leq I, 0 \leq j \leq k \subseteq \mathcal{D}_I. \quad (3.1.6)$$

Obzvlášť máme $\mathcal{B}_J = \mathcal{D}_I$, čo je množina pozorovaní v čase I .

Lema 2. [5] *Za platnosti predpokladov modelu platia nasledujúce tvrdenia:*

(a) *Ak je $\mathcal{B}_j$ dané, tak potom je $\hat{f}_j$ nevychýleným odhadom f_j , teda $E[\hat{f}_j|\mathcal{B}_j] = f_j$.*

- (b) $\widehat{f}_j$ je (nepodmienene) nevychýleným pre f_j , teda $E[\widehat{f}_j] = f_j$.
- (c) $E[\widehat{f}_0 \dots \widehat{f}_j] = E[\widehat{f}_0] \dots E[\widehat{f}_j]$, teda $\widehat{f}_0, \dots, \widehat{f}_{j-1}$ sú nekorelované.
- (d) Pri danom $C_{i,I-i}$ je $\widehat{C}_{i,j}^{CL}$ nevychýleným odhadom pre $E[C_{i,J}|\mathcal{D}_I] = E[C_{i,J}|C_{i,I-i}]$, teda $E[\widehat{C}_{i,j}^{CL}|C_{i,I-i}] = E[C_{i,J}|\mathcal{D}_I]$.
- (e) $\widehat{C}_{i,j}^{CL}$ je (nepodmienene) nevychýleným pre $E[C_{i,J}]$, teda $E[\widehat{C}_{i,j}^{CL}] = E[C_{i,J}]$.

Dôkaz. (a) Využitím merateľnosti $C_{i,j}$ vzhľadom na $\mathcal{B}_j$, zo závislosti rôznych rokov nastania udalosti a predpokladov modelu dostaneme

$$E[\widehat{f}_j|\mathcal{B}_j] = \frac{\sum_{i=0}^{I-j-1} E[C_{i,j+1}|\mathcal{B}_j]}{\sum_{i=0}^{I-j-1} C_{i,j}} = \frac{\sum_{i=0}^{I-j-1} E[C_{i,j}f_j]}{\sum_{i=0}^{I-j-1} C_{i,j}} = f_j.$$

To automaticky implikuje podmienenú nevychýlenosť.

(b) Vyplýva z (a).

(c) Uvažujme

$$\begin{aligned} E[\widehat{f}_0 \dots \widehat{f}_j] &= E[E[\widehat{f}_0 \dots \widehat{f}_j|\mathcal{B}_j]] \\ &= E[\widehat{f}_0 \dots \widehat{f}_{j-1} E[\widehat{f}_j|\mathcal{B}_j]] \\ &= E[\widehat{f}_0 \dots \widehat{f}_{j-1}] f_j \\ &= E[\widehat{f}_0 \dots \widehat{f}_{j-1}] E[\widehat{f}_j]. \end{aligned}$$

Keby sme ďalej pokračovali rovnakým spôsobom, dostaneme sa priamo k tvrdeniu (c).

(d) Aby sme dokázali nevychýlenosť CL odhadu, uvažujme

$$\begin{aligned} E[\widehat{C}_{i,J}^{CL}|C_{i,I-i}] &= E[C_{i,I-i} \widehat{f}_{I-i} \dots \widehat{f}_{J-2} \widehat{f}_{J-1} | C_{i,I-i}] \\ &= E[C_{i,I-i} \widehat{f}_{I-i} \dots \widehat{f}_{J-2} E[\widehat{f}_{J-1}|\mathcal{B}_{J-1}] | C_{i,I-i}] \\ &= f_{J-1} E[\widehat{C}_{i,J}^{CL}|C_{i,I-i}]. \end{aligned}$$

Ďalšími iteráciami by sme sa dostali k

$$E[\widehat{C}_{i,J}^{CL}|C_{i,I-i}] = C_{i,I-i} f_{I-i} \dots f_{J-1} = E[C_{i,J}|\mathcal{D}_I].$$

(e) Vyplýva z (d).

□

Poznámka 5. Na prvý pohľad môže byť nekorelovanosť CL faktorov $\hat{f}_j$ prekvapujúca, keďže susediace odhady týchto faktorov v skutočnosti závisia z časti na rovnakých dátach (pre jeden faktor sa vyskytnú v čitateli a pre susediaci v menovateli).

Poznámka 6. V Leme 3 sme dokázali, že CL faktory $\hat{f}_j$ sú nekorelované. To však neznamená, že sú nezávislé. V skutočnosti sú závislé a vieme dokázať, že štvorce dvoch nasledujúcich faktorov $\hat{f}_j$ a $\hat{f}_{j+1}$ sú záporne korelované.

Poznámka 7. Lema v bode a) dokazuje, že CL faktory sú odhadované nevychýlenými odhadmi $\hat{f}_j$. To perfektne sedí pre definíciu CL odhadu. Existujú aj iné nevychýlené odhady, avšak práve tieto plnia optimalizačné kritéria pre určité predpoklady variancie.

Poznámka 8. Lema v bode d) dokazuje, že pre najlepší odhad $E[C_{i,j}|\mathcal{D}_I]$ obdržíme nevychýlené odhady $\hat{C}_{i,j}^{CL}$. To potvrdzuje, že CL algoritmus je vhodný v rámci štruktúry CL modelu pre akékoľvek pravdepodobnostné rozdelenie.

CL model existuje aj v stochastickej verzii, pričom od predchádzajúceho modelu sa líši v počiatočných predpokladoch. Stochastický CL model jestvuje v niekoľkých podobách, avšak podľa [6] Mackov model najlepšie odráža skutočnú podstatu CL metódy.

Predpoklady 2. *Pre stochastický CL model, inak nazývaný aj Mackov model, uvažujeme tieto predpoklady [3, 5]:*

1. *Existujú faktory $f_0, \dots, f_{J-1}$ také, že platí*

$$E[C_{i,j-1}|C_{i,j}] = f_{j-1}C_{i,j-1}, 0 \leq i \leq I, 1 \leq j \leq J.$$

2. *Kumulované platby $C_{i,j}$ sú v rôznych rokoch nastatia udalosti i nezávislé.*

3. *Existujú konštanty $\sigma_0^2, \dots, \sigma_{J-1}^2$ také, že platí*

$$\text{Var}(C_{i,j}|C_{i,j-1}) = \sigma_{j-1}^2 C_{i,j-1}, 0 \leq i \leq I, 1 \leq j \leq J.$$

Prvé dva predpoklady tohto modelu sú však veľmi silné a preto v praxi často nesplnené. Čo sa týka prvého predpokladu, stačí, že nastanú organizačné zmeny, napríklad

sa zrýchli proces vyplácania pohľadávok. Druhý predpoklad hovorí o tom, že kalendárny rok (na diagonále) nemá žiaden vplyv, avšak v praxi to nie je pravda. Môže sa zmeniť inflácia, legislatíva, organizačná štruktúra a kumulované platby zďaleka nebudú nezávislé.

Navyše, vo vývojových trojuholníkoch sú hneď tri kritické zóny. Jednak pravý horný roh, kedy máme príliš málo dát na presné určenie odhadov, teda jednotlivé dáta majú veľmi silný vplyv na CL faktory v posledných rokoch. Druhým problémom je ľavý dolný roh, kedy máme málo dát pre najbližšie roky nastania udalosti. Môže byť medzi nimi aj outlier a keďže máme málo dát, na výpočet rezerv by to malo veľký vplyv. Posledným problémom je samotná diagonála. Outlier na diagonále totiž môže spôsobiť ako precenenie, tak aj podcenenie rezerv v tom danom roku nastania udalosti.

CL metóda je považovaná za veľmi jednoduchú, avšak aj pre vyššie uvedené dôvody je niekedy jednoduchá až príliš. Preto sa v praxi často robia manuálne úpravy a teda aktuari skutočne musia vedieť, aké informácie sa v dátach nachádzajú. Z toho vyplýva, že CL metóda nie je až taká algoritmická, ako sme si mysleli na začiatku.

3.2 Chyba predikcie

V predchádzajúcej časti sme sa venovali tomu, ako odhadnúť výšku technických rezerv pomocou CL metódy. Chceme však aj vedieť, aké dobré su naše odhady, a preto budeme venovať nasledujúcu podkapitolu chybám odhadov. Z toho dôvodu sme potrebovali zadať stochastický model. Aby sme zmerali kvalitu odhadov, budeme používať druhé momenty, teda budeme počítať takzvanú chybu predikcie (mse, z anglického mean square error of prediction).

Chyba predikcie odhadu $\hat{C}_{i,J}$, teda chyba odhadu konečnej výšky pohľadávky $C_{i,J}$ je definovaná ako

$$mse(\hat{C}_{i,J}) = E((\hat{C}_{i,J} - C_{i,J})^2 | \mathcal{D}), \quad (3.2.1)$$

kde $\mathcal{D}$ je množina pozorovaní, ktorú máme k dispozícii. V trojuholníkovej schéme je to teda ľavý horný trojuholník. Pre chybu odhadov rezerv potom dostávame

$$mse(\hat{R}_i) = E((\hat{R}_i - R_i)^2 | \mathcal{D}) = E((\hat{C}_{i,J} - C_{i,J})^2 | \mathcal{D}) = mse(\hat{C}_{i,J}).$$

Vidíme teda, že chyba odhadu rezerv v jednotlivých rokoch i je rovná chybe odhadu

konečnej výšky pohľadávok v danom roku i . Ďalej využijeme všeobecné pravidlo pre strednú hodnotu $E(X - a)^2 = \text{Var}(X) + (E(X) - a)^2$. Dosadením do (3.2.1) dostávame

$$mse(\widehat{C}_{i,J}) = \text{Var}(C_i, J|\mathcal{D}) + (E(C_{i,J}|\mathcal{D}) - \widehat{C}_{i,J})^2, \quad (3.2.2)$$

čo je vlastne suma stochastickej chyby a chyby odhadu.

Keďže podobne ako pri faktoroch f_j nepoznáme presnú hodnotu σ_j^2 , musíme ju odhadnúť, a to nasledovne:

$$\sigma_j^2 = \frac{1}{I - j - 1} \sum_{i=0}^{I-j-1} C_{i,j} \left(\frac{C_{i,j+1}}{C_{i,j}} - \widehat{f}_j \right)^2. \quad (3.2.3)$$

Ešte v kapitole 2 sme si povedali, že uvažujeme $I = J$. Táto metóda je však použiteľná aj v prípade $I \neq J$. Problém však nastáva v prípade, že nemáme $I \leq J$ a teda nedokážeme odhadnúť parameter σ_{J-1}^2 . Túto situáciu rieši Mack v [3]. V prípade, že $\widehat{f}_{J-1} = 1$ a vývojový proces pohľadávok po roku $J-1$ končí, môžeme zvoliť $\sigma_{J-1}^2 = 0$. V prípade, že nie, zvolíme $\sigma_{J-1}^2 = \min \left\{ \frac{\sigma_{J-2}^4}{\sigma_{J-3}^2}, \sigma_{J-3}^2, \sigma_{J-2}^2 \right\}$. Po definovaní všetkých premenných sa dostávame k samotnému odhadu chyby v nasledujúcej vete.

Veta 2. *Za platnosti predpokladov stochastického CL modelu odhadujeme priemernú chybu predikcie $msep(\widehat{R}_i)$ pomocou*

$$\widehat{mse}(\widehat{R}_i) = \left(\widehat{C}_{i,J}^{CL} \right)^2 \sum_{j=I-i}^{J-1} \frac{\widehat{\sigma}_j^2}{\widehat{f}_j^2} \left(\frac{1}{\widehat{C}_{i,j}^{CL}} + \frac{1}{\sum_{i=0}^{I-j-1} C_{i,j}} \right). \quad (3.2.4)$$

Obsiahly dôkaz, že rovnica (3.2.4) platí, sa nachádza v [3].

Aby sme mali predstavu aj o celkovej chybe, teda o $msep(\widehat{R})$, nemôžeme iba jednoducho zrátať odhadnuté chyby predikcií v jednotlivých rokoch i , pretože tieto chyby sú korelované vďaka odhadom $\widehat{f}_j$ a $\widehat{\sigma}_j$. Preto na výpočet chyby predikcie celkovej konečnej výšky rezervy použijeme iný vzorec.

Veta 3. *Za platnosti predpokladov stochastického CL modelu odhadujeme celkovú chybu predikcie $msep(\widehat{R})$, kde $R = \sum_{i=1}^I R_i$, pomocou*

$$\widehat{mse}(\widehat{R}) = \sum_{i=1}^I \widehat{mse}(\widehat{R}_i) + 2 \sum_{1 \leq i < k \leq I} \widehat{C}_{i,J}^{CL} \widehat{C}_{k,J}^{CL} \sum_{j=I-i}^{J-1} \frac{\widehat{\sigma}_j^2 / \widehat{f}_j^2}{\sum_{i=0}^{I-j-1} C_{i,j}}. \quad (3.2.5)$$

Podobne ako dôkaz pre (3.2.4), aj dôkaz pre (3.2.5) sa nachádza v [3].

Ďalším ukazovateľom chyby, ktorý vieme spočítať je variančný koeficient. Označujeme ho Vco (z angl. variational coefficient). Tento koeficient môžeme brať ako akúsi mieru neistoty. Je to neistota, ktorá vzniká v dôsledku predikovania náhodných premenných.

Pre jednotlivé roky nastania udalosti i tento koeficient vypočítame ako:

$$Vco_i = \widehat{Vco}(C_{i,J} - C_{i,I-i} | \mathcal{D}_I) = \frac{\widehat{Var}(C_{i,J} | \mathcal{D}_I)^{1/2}}{\widehat{C}_{i,J}^{CL} - C_{i,I-i}}. \quad (3.2.6)$$

V praxi sa od poistných matematikov vyžaduje miera neistoty okolo 5%.

Na vypočítanie miery neistoty potrebujeme vedieť vypočítať varianciu. Použijeme na to nasledujúce vzorce, odvodené v [5]. Varianciu v roku i odhadujeme ako

$$\widehat{Var}(R_i | \mathcal{D}_I) = \left(\widehat{C}_{i,J}^{CL} \right)^2 \sum_{j=I-i}^{J-1} \frac{\widehat{\sigma}_j^2 / \widehat{f}_j^2}{\widehat{C}_{i,j}^{CL}}. \quad (3.2.7)$$

Keďže považujeme jednotlivé roky nastania udalosti za nezávislé, môžeme vypočítať celkovú varianciu ako sumu jednotlivých variancií v rokoch i .

4 Metóda Bornhuetter - Fergusona

Metóda Bornhuetter - Fergusona nesie meno podľa svojich zostaviteľov. Túto metódu prvýkrát uverejnili v roku 1972 vo veľmi úspešnom článku [1]. Štartovacím bodom pre túto metódu je vývojový trojuholník, podobne ako pri ostatných metódach, ktorých cieľom je predpovedať výšku potrebných rezerv. Hlavnou myšlienkou BF metódy (pre uľahčenie budeme používať túto skratku) je využitie pri stanovení výšky poistného pre poistencov. Pre stanovenie výšky poistného potrebuje najprv poisťovňa dobre odhadnúť výšku celkového poistného, ktoré v budúcom roku vyplatí, aby sa nedostala do finančných problémov. Tieto odhady musí pochopiteľne spraviť ešte predtým, než má k dispozícii akékoľvek údaje o pozorovaniach v danom nadchádzajúcom roku nastania udalosti.

4.1 BF model

Podobne ako algoritmus CL metódy je aj algoritmus BF metódy z veľkej časti čisto mechanický. BF metóda je podobne ako CL metóda deterministická, avšak vhodným zadefinovaním niektorých submodelov ju vieme prerobiť aj na metódu stochastickú.

Vo všeobecnosti je BF metóda veľmi robustná. To je veľmi výhodné, pretože na rozdiel od CL metódy, prípadné outliers nám odhad rezerv nijako významne neovplyvnia. Taktiež, na rozdiel od CL metódy je BF metóda dobre aplikovateľná aj v prípade chýbajúcich dát, keďže nie je založená iba na pozorovaniach.

Predpoklady 3. *Pre BF model uvažujeme tieto predpoklady [5]:*

1. *Kumulované platby $C_{i,j}$ sú v rôznych rokoch nastatia udalosti i nezávislé.*
2. *Existujú parametre $\mu_0, \dots, \mu_I > 0$ a percentuálna postupnosť $\beta_0, \dots, \beta_J > 0$ s $\beta_J = 1$ také, že pre všetky $0 \leq i \leq I$, $0 \leq j \leq J - 1$ a $1 \leq k \leq J - j$ platí*

$$\begin{aligned} E[C_{i,0}] &= \beta_0 \mu_i, \\ E[C_{i,j+k} | C_{i,0}, \dots, C_{i,j}] &= C_{i,j} + (\beta_{j+k} - \beta_j) \mu_j. \end{aligned}$$

Z predpokladov modelu teda vyplýva, že $E[C_{i,j}] = \beta_j \mu_i$ a $E[C_{i,j}] = \mu_i$. Ak $C_{i,j}$ sú kumulované platby, tak potom postupnosť $\{\beta_j\}_{j=0,\dots,J}$ predstavuje kumulatívny tok

peňazí. Používa sa hlavne v prípade, že hodnota peňazí v čase sa veľmi mení, napríklad kvôli inflácii.

Podobne ako pri CL metóde, ani pri BF metóde nepoznáme presné hodnoty koeficientov β_j a μ_i , preto ich musíme vhodne odhadnúť. Pre μ_i potrebujeme odhad $\hat{\mu}_i$. Je to vlastne očakávaná konečná výška pohľadávok v roku i . Zvyčajne to býva hodnota vyplývajúca zo strategického plánu firmy, alebo hodnota používaná na výpočet výšky poistného. Hodnota μ_i by mala byť odhadnutá bez ohľadu na akékoľvek pozorovania, ide teda o čisto expertný odhad.

Taktiež β_j by bolo vhodné odhadovať nezávisle na pozorovaniach. Avšak v praxi sa zvyčajne pri výpočte týchto koeficientov vraciame k CL metóde, kedy sme odhadovali faktory $\hat{f}_k$.

Veta 4. [5] Ak $\hat{f}_k$ predstavuje odhad pre vývojové koeficienty f_k , tak potom

$$\hat{\beta}_j^{(CL)} = \hat{\beta}_j = \prod_{k=j}^{J-1} \frac{1}{\hat{f}_k}. \quad (4.1.1)$$

Dôkaz. Vzorec na výpočet β_j je ľahké zdôvodniť, a to nasledovne. Pre dané CL faktory $\hat{f}_j$ a nový rok nastania udalosti máme:

$$\begin{aligned} \hat{C}_{i,j}^{CL} &= C_{i,0} \prod_{k=0}^{j-1} \hat{f}_k \\ \hat{R}_i^{CL} &= C_{i,0} \prod_{k=0}^{J-1} \hat{f}_k. \end{aligned}$$

Z toho máme

$$\hat{\beta}_j = \frac{\hat{C}_{i,j}^{CL}}{\hat{R}_i^{CL}} = \prod_{k=0}^{J-1} \hat{f}_k^{-1}.$$

□

Veta 5. [6] Odhad pomocou BF metódy - **BF odhad** - pre $i + j > I$ je daný ako:

$$\hat{C}_{i,j}^{BF} = C_{i,I-i} + (\hat{\beta}_j - \hat{\beta}_{I-i})\hat{\mu}_i. \quad (4.1.2)$$

Pre rezervy, ktoré sa vzťahujú na rok nastatia udalosti i , potom podľa BF metódy máme:

$$\hat{R}_i^{BF} = (1 - \hat{\beta}_j)\hat{\mu}_i. \quad (4.1.3)$$

5 Vzorové příklady

5.1 Jednoduchý příklad

V tejto kapitole si na niekoľkých príkladoch porovnáme výsledky vypočítané pomocou CL a BF metódy v MS Excel. Ako prvý si ukážeme jednoduchý príklad (Tabuľka 9) s kumulovanými platbami. Začali sme s pôvodnými dátami z [5], ktoré tvorili ľavý horný trojuholník. Vidíme, že $I = J = 9$. Teda ak je teraz rok 2013, pre ktorý ideme rezeevy predpovedať, znamená to, že udalosti, ktoré nastali v roku $i = 5$ vlastne nastali v roku 2008. Potom napríklad rok vývoja udalosti $j = 3$ pre $i = 5$ uvádza, ako sa naakumulovali platby do roku 2012 vrátane.

Ako prvé potrebujeme doplniť pravý dolný trojuholník. Začneme výpočtom pomocou CL metódy. Pomocou vzorca (3.1.2) sme vypočítali odhadované faktory $\hat{f}_j$. To je vlastne jediné, čo v CL metóde potrebujeme na výpočet jednotlivých $\hat{C}_{i,j}^{CL}$. Preto bolo ďalším krokom doplnenie pravého dolného trojuholníka pomocou vzorca (3.1.5). CL rezerva pre daný rok i sa následne zráta ako rozdiel medzi konečnou očakávanou výškou kumulovaných platieb v danom roku a momentálnou výškou kumulovaných platieb v danom roku. Napríklad pre rok $i = 5$ je očakávaná konečná výška pohľadávok 10 092 247, pričom momentálna výška kumulovaných platieb je 9 935 753. Plánované rezervy sú teda $10\,092\,247 - 9\,935\,753 = 156\,494$. Všetky výsledky a teda odhady jednotlivých kumulovaných platieb a rezerv uvádzame v prehľadnej tabuľke. V Tabuľke 9 sú šedou farbou vyznačené údaje, ktoré bolo treba vypočítať pomocou štatistických metód.

Nezaujímajú nás však iba vypočítané odhady, chceme aj vedieť, nakoľko im môžeme dôverovať. Ako sme už spomenuli v Kapitole 3.2, nezávisí na tom, či rátame chybu predikcie rezerv alebo chybu predikcie konečnej výšky pohľadávky, pretože sa rovnajú. Na odhadnutie predikčných chýb v jednotlivých rokoch i sme použili vzorec (3.2.4). Posledným krokom bolo vypočítanie celkovej chyby predikcie. Treba si však opätovne uvedomiť, že kvôli korelácii odhadov chyby v jednotlivých rokoch nemôžeme chyby jednoducho sčítať. Potrebujeme použiť vzorec (3.2.5).

Budeme teraz sledovať správanie sa chyby a mieru neistoty v jednotlivých rokoch nastatia udalosti. Kvôli lepšej prehľadnosti uvádzame tieto údaje v novej Tabuľke 10. Vidíme, že chyba je najnižšia pre $i = 1$, potom rastie až do maxima v $i = 6$ a následne

opäť klesá. Nízka chyba v prvých rokoch je dosahovaná vďaka informáciám o vývoji platieb v dlhom časovom období. To znamená, že máme dostatok pozorovaní za minulé roky, pričom potrebujeme odhady len pre málo budúcich rokov. Chyba však postupne rastie a to jednoducho preto, že čím novší rok nastania udalosti máme, tým sa znižuje množstvo dostupných pozorovaní pre daný rok. Takisto sa aj znižuje počet údajov za minulé roky, teda ako sa iné roky vyvíjali po takom istom časovom úseku. To zas ovplyvňuje výpočet koeficientu $\hat{f}_j$ a taktiež zvyšuje chybu. Posledné roky i dosahujú opäť nižšie chyby. Tieto roky nastatia udalosti síce ešte nemajú zaznamenaný dostatočne dlhý vývoj, avšak máme dostatok pozorovaní na vhodný výpočet parametru $\hat{f}_j$, a keďže sa predpokladá, že každý nasledujúci rok sa správa ako roky minulé, chyba bude menšia.

V predposlednom stĺpci Tabuľky 10 počítame varianciu rezerv v roku i ako aj celkovú varianciu pomocou vzorca 3.2.7. Variancia, alebo inak aj rozptyl, určuje strednú kvadratickú odchýlku jednotlivých hodnôt od výberového priemeru. V našom príklade má tento stĺpec skôr pomocný charakter, keďže hodnota variancie je potrebný údaj na vypočítanie miery neistoty Vco_i . Vco_i vypočítame pomocou vzorca (3.2.6). Vidíme, že miera neistoty Vco_i má podobnú stúpajúcu, resp. klesajúcu tendenciu ako chyba predikcie. Je to spôsobené úzkym súvisom medzi týmito dvoma premennými vyplývajúcim aj z (3.2.7). Celková miera neistoty vyšla v tomto prípade 7,03%. Ako bolo spomenuté v Kapitole 4, v praxi sa vyžaduje miera neistoty okolo 5%, preto by určite v tomto prípade aktuari ešte manuálne upravovali čísla.

Ako druhú metódu sme zvolili výpočet pomocou BF metódy. Táto metóda je na výpočty trochu náročnejšia, preto nebudeme počítať chyby merania ani mieru neistoty. K ich výpočtom by sme potrebovali nemalé množstvo matematickej teórie. Vypočítame iba rezervy, aby sme ich mohli porovnať s rezervami vypočítanými pomocou CL metódy. BF metóda nie je založená čisto na pozorovaniach, a preto potrebujeme najprv stanoviť expertné odhady, ktoré určia očakávanú konečnú výšku platieb pre daný rok. Tieto odhady sú použité z [5]. Nasleduje výpočet β_{I-i} . Priamo β_{I-i} vypočítať nedokážeme, budeme preto počítať len jej odhad $\hat{\beta}_{I-i}$ pomocou (4.1.1), pričom použijeme koeficienty $\hat{f}_j$ vypočítané v CL metóde. Expertné odhady $\hat{\mu}_i$ a vypočítané koeficienty $\hat{\beta}_{I-i}$ uvádzame v Tabuľke 11. Výsledky vypočítané pomocou BF metódy uvádzame v

Tabuľke 12.

Vidíme, že rezervy, či už v jednotlivých rokoch alebo celkové, zrátané pomocou BF metódy sú vyššie. V praxi to znamená, že expertné odhady sú zjavne pesimistickejšie.

5.2 Príklad s outlierom

V Kapitole 3 sme spomínali, ako veľmi ovplyvnia outliere výsledné predikcie. V nasledujúcom príklade umelo zmeníme jeden údaj tak, aby vznikol outlier a budeme pozorovať správanie sa výpočtov v CL aj BF metóde. Rozhodli sme sa zmeniť údaj na pozícii (5,4) z 9 935 753 EUR na oveľa vyššie číslo, na 14 935 753 (+ 5 000 000 oproti pôvodnému). Zvolili sme číslo na diagonále, lebo ako bolo spomenuté v tretej kapitole, práve údaje na týchto pozíciách zásadne ovplyvňujú výšku odhadovaných rezerv ako aj chybu predikcií. Následkom tohto outlieru sa zmení hodnota dvoch podstatných koeficientov v CL metóde, a to:

- vývojového koeficientu $\hat{f}_3$ z 1.0148 na 1.0977,
- variancie $\hat{\sigma}_3$ z 19.8467 na 646.3762.

Keďže sme zmenili údaj v riadku $i = 5$, zmenia sa taktiež všetky predikované rezervy, chyby a aj miera neistoty od tohto roku. Údaje vypočítané pomocou CL metódy pre tento príklad uvádzame v Tabuľke 13. Úmerne navýšeniu platieb sa zmenili aj očakávané rezervy pre daný rok. Keďže však pri CL metóde vychádzame z predpokladu podobnosti rokov, outlier má veľký vplyv hlavne na nasledujúce najbližšie roky. V roku $i = 6$ sa rezervy takmer zoštvornásobili, v roku $i = 7$ sa viac než zdvojnásobili. Prudké stúpnutie variancie spôsobilo aj veľký nárast chyby predikcie. V roku $i=6$ narástla chyba predikcie z 25,57% na 201,31%. Celková chyba predikcie sa zvýšila až na 53,63%, čo značí veľmi neisté predikcie. To potvrdzuje aj miera neistoty, ktorá je v celkovej hodnote 42,30%. Potvrdili sa naše očakávania, že v prípade outlieru je CL metóda veľmi nespoľahlivá a bez manuálneho zásahu prakticky nepoužiteľná.

Otestovali sme tie isté dáta aj pomocou BF metódy. Ako prvé musíme zmeniť expertný odhad pre $\hat{\mu}_5$, čo predstavuje konečnú predpokladanú výšku platieb v roku $i = 5$. Pre jednoduchosť sme pripočítali k pôvodnému odhadu 5 000 000 EUR a odhady v ďalších rokoch sme nemenili. Outlier mal vplyv aj na hodnoty $\widehat{\beta}_{I-i}$, ktoré sa

znížili. Nakoniec sme vypočítali predikované rezervy pre tento prípad. Nové hodnoty sú uvedené v Tabuľke 14. Vidíme, že aj pri použití BF metódy sa celkové rezervy navýšili. Vo všeobecnosti sa však vie BF metóda s outliermi vysporiadať oveľa lepšie ako CL metóda. V tomto prípade, ak by sme porovnali percentuálne navýšenie rezerv, v prípade CL metódy sa rezervy navýšili o 50,71 % voči pôvodným a v prípade BF metódy o 40,20%. Teda napriek tomu, že pozorujeme veľký nárast rezerv pri použití oboch metód sa potvrdilo, že BF metóda nie je natoľko ovplyvnená outliermi ako CL metóda. Ďalšími manuálnymi zásahmi do expertných odhadov BF metódy by sme boli schopní jej odhady ešte vylepšiť.

rok nastania udalosti i	rok vývoja udalosti j										CL Rezervy
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
0	5 946 975	9 668 212	10 563 929	10 771 690	10 978 394	11 040 518	11 106 331	11 121 181	11 132 310	11 148 124	0
1	6 346 756	9 593 162	10 316 383	10 468 180	10 536 004	10 572 608	10 625 360	10 636 546	10 648 192	10 663 318	15 126
2	6 269 090	9 245 313	10 092 366	10 355 134	10 507 837	10 573 282	10 626 827	10 635 751	10 646 884	10 662 008	26 257
3	5 863 015	8 546 239	9 268 771	9 459 424	9 592 399	9 680 740	9 724 068	9 734 574	9 744 764	9 758 606	34 538
4	5 778 885	8 524 114	9 178 009	9 451 404	9 681 692	9 786 916	9 837 277	9 847 905	9 858 214	9 872 218	85 302
5	6 184 793	9 013 132	9 585 897	9 830 796	9 935 753	10 005 044	10 056 528	10 067 393	10 077 931	10 092 247	156 494
6	5 600 184	8 493 391	9 056 505	9 282 022	9 419 776	9 485 469	9 534 279	9 544 579	9 568 143	9 568 143	286 121
7	5 288 066	7 728 169	8 256 211	8 445 057	8 570 389	8 630 159	8 674 567	8 683 939	8 693 029	8 705 378	449 167
8	5 290 793	7 648 729	8 243 496	8 432 051	8 557 190	8 616 868	8 661 208	8 670 566	8 679 642	8 691 971	1 043 242
9	5 675 568	8 470 989	9 129 696	9 338 521	9 477 113	9 543 206	9 592 313	9 602 676	9 612 728	9 626 383	3 950 815
$\hat{f}_j$	1,4925	1,0778	1,0229	1,0148	1,0070	1,0051	1,0011	1,0010	1,0014		6 047 064
$\hat{\sigma}_j$	135,2530	33,8029	15,7596	19,8467	9,3362	2,0011	0,8232	0,2196	0,0586		
Spolu											

Tabuľka 9: Príklad 1 - výpočet pomocou CL metódy, zdroj počiatočných dát: [5].

i	$(\widehat{mse} \widehat{R}_i)^{1/2}$	$(\widehat{mse} \widehat{R}_i)^{1/2} \%$	$(\widehat{Var} \widehat{R}_i)^{1/2}$	$\widehat{Vco}_i \%$
0	-	-	-	
1	268	1,77%	191	1,26%
2	915	3,49%	742	2,83%
3	3 052	8,84%	2 661	7,71%
4	7 631	8,95%	6 835	8,01%
5	33 358	21,32%	30 496	19,49%
6	73 162	25,57%	67 883	23,73%
7	82 910	18,46%	77 418	17,24%
8	132 736	12,72%	125 266	12,01%
9	412 511	10,44%	391 568	9,91%
Spolu	463 505	7,66%	424 974	7,03%

Tabuľka 10: Príklad 1 - výpočet pomocou CL metódy, zdroj počiatočných dát: [5].

i	$\widehat{\mu}_i$	$\widehat{\beta}_{I-i}$
0	11 653 101	100,0%
1	11 367 306	99,9%
2	10 962 965	99,8%
3	10 616 762	99,6%
4	11 044 881	99,1%
5	11 480 700	98,4%
6	11 413 572	97,0%
7	11 126 527	94,8%
8	10 986 548	88,0%
9	11 618 437	59,0%

Tabuľka 11: Príklad 1 - koeficienty pre BF metódu.

rok nastania udalosti i	rok vývoja udalosti j										BF Rezervy
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
0	5 946 975	9 668 212	10 563 929	10 771 690	10 978 394	11 040 518	11 106 331	11 121 181	11 132 310	11 148 124	0
1	6 346 756	9 593 162	10 316 383	10 468 180	10 536 004	10 572 608	10 625 360	10 636 546	10 648 192	10 664 317	16 125
2	6 269 090	9 245 313	10 092 366	10 355 134	10 507 837	10 573 282	10 626 827	10 635 751	10 647 198	10 662 750	26 999
3	5 863 015	8 546 239	9 268 771	9 459 424	9 592 399	9 680 740	9 724 068	9 735 498	9 746 583	9 761 644	37 576
4	5 778 885	8 524 114	9 178 009	9 451 404	9 681 692	9 786 916	9 843 259	9 855 150	9 866 683	9 882 350	95 434
5	6 184 793	9 013 132	9 585 897	9 830 796	9 935 753	10 014 577	10 073 144	10 085 503	10 097 491	10 113 777	178 024
6	5 600 184	8 493 391	9 056 505	9 282 022	9 446 345	9 524 708	9 582 932	9 595 219	9 607 137	9 623 328	341 306
7	5 288 066	7 728 169	8 256 211	8 497 579	8 657 769	8 734 161	8 790 921	8 802 899	8 814 517	8 830 301	574 090
8	5 290 793	7 648 729	8 400 508	8 638 839	8 797 013	8 872 445	8 928 490	8 940 318	8 951 790	8 967 375	1 318 646
9	5 675 568	9 049 465	9 844 482	10 096 521	10 263 793	10 343 563	10 402 832	10 415 340	10 427 471	10 443 953	4 768 385
											7 356 584
											Spolu

Tabuľka 12: Príklad 1 - výpočet pomocou BF metódy, zdroj počiatočných dát: [5].

i	CL Rezervy	$(\widehat{mse}p\hat{R}_i)^{1/2}$	$(\widehat{mse}p\hat{R}_i)^{1/2}\%$	$(\widehat{Var}\hat{R}_i)^{1/2}$	$\widehat{Vco}_i\%$
0	0	-	-	-	-
1	15 126	268	1,77%	191	1,26%
2	26 257	915	3,49%	742	2,83%
3	34 538	3 052	8,84%	2 661	7,71%
4	85 302	7 631	8,95%	6 835	8,01%
5	235 247	42 987	18,27%	37 881	16,10%
6	1 067 423	2 148 852	201,31%	2 000 460	187,41%
7	1 160 018	1 955 819	168,60%	1 820 778	156,96%
8	1 752 999	1 956 030	111,58%	1 821 098	103,88%
9	4 736 872	2 206 060	46,57%	2 055 393	43,39%
Spolu	9 113 783	4 888 049	53,63%	3 854 815	42,30%

Tabuľka 13: Príklad 2 - výpočet pomocou CL metódy v prípade outlieru, zdroj počítaných dát: [5].

i	$\hat{\mu}_i$	$\hat{\beta}_{I-i}$	BF Rezervy
0	11 653 101	100,0%	0
1	11 367 306	99,9%	16 125
2	10 962 965	99,8%	26 999
3	10 616 762	99,6%	37 576
4	11 044 881	99,1%	95 434
5	16 480 700	98,4%	255 556
6	11 413 572	89,7%	1 177 175
7	11 126 527	87,7%	1 370 716
8	10 986 548	81,4%	2 048 496
9	11 618 437	54,5%	5 285 510
		Spolu	10 313 586

Tabuľka 14: Príklad 2 - koeficienty a vypočítané rezervy v prípade použitia BF metódy.

Záver

Plánovanie technických rezerv je veľmi dôležitou úlohou poisťných matematikov, pôsobiacich v oblasti neživotného poistenia. Správnym odhadom potrebných rezerv zabezpečujú poisťovňu pred potenciálnymi finančnými problémami.

V tejto práci sme sa snažili o ozrejmiť základné metódy odhadov rezerv. Predstavili sme si, čo to vlastne technické rezervy sú a na čo slúžia. Snažili sme sa uviesť čitateľa do problematiky známych a neznámych pohľadávok. Ukázali sme, ako pohľadávka vzniká a uviedli niekoľko modelových situácií, ako sa takéto pohľadávky vyplácajú. V rámci podkapitoly 2.3 o nevysporiadaných poisťných plneniach sme definovali vývojový trojuholník (Tabuľka 4). Vývojové trojuholníky majú podstatnú úlohu pri plánovaní technických rezerv, keďže slúžia ako základná počítačová schéma pre každú metódu.

Najpoužívanejšou metódou na odhad technických rezerv je reťazovo - rebríková metóda (CL metóda). Jej najväčšou výhodou je jej jednoduchosť. Veľmi známou, avšak v praxi oveľa menej používanou metódou je metóda Bornhuetter - Fergusona (BF metóda). Zatiaľ čo CL metóda je založená čisto na dostupných pozorovaniach, v BF metóde sú oveľa podstatnejšie odhady kumulatívneho toku peňazí $\hat{\beta}_j$ a očakávanej konečnej výšky pohľadávok $\hat{\mu}_i$, ktoré sa stanovujú na základe expertných odhadov. Z tohto pohľadu sú tieto dve metódy akými protipólmi a najlepšie by bolo skombinovať ich.

Výhodou BF metódy je napríklad možné použitie v prípade chýbajúcich dát. V našej bakalárskej práci sme na odhad $\hat{\beta}_j$ síce používali vývojové koeficienty z CL metódy, ktoré vychádzajú z dostupných dát, avšak odhad $\hat{\beta}_j$ vieme stanoviť aj pomocou už spomenutých expertných odhadov, a teda chýbajúce dáta nepredstavujú v BF metóde žiadny problém. Výhodou oboch metód je funkčnosť bez ohľadu na pravdepodobnostné rozdelenie dát. V praxi sa čoraz častejšie používajú stochastické modely namiesto deterministických. Sú náročnejšie na výpočty a predpoklady, avšak zdatní poisťní matematici ich uprednostňujú kvôli presnejším výsledkom.

Keďže sme chceli algoritmy oboch metód nakoniec aplikovať aj na dáta, zaujímalo nás, aké budú presné. Pre CL metódu sme odvodili chybu predikcie 3.2.1, ktorá vyjadruje rozdiel medzi našimi odhadmi a skutočnými hodnotami. Keďže skutočné hodnoty nepoznáme, v skutočnosti sme v našich príkladoch počítali odhad chyby predikcie. In-

formáciu o kvalite našich odhadov nám poskytla aj miera neistoty 3.2.6. V BF metóde sme od odhadovania chyby predikcie upustili. V prípade potreby znalosti chýb predikcií BF metódy by sme museli vychádzať z ďalších matematických poznatkov, ako napríklad Poissonov model a Gamma funkcia.

Naším cieľom v záverečnej kapitole bolo porovnať uvedené dve metódy na dostupných dátach. Výpočty sme robili v MS Excel 2010. Ako prvý sme použili jednoduchý príklad s „peknými“ dátami, teda s dátami bez outlierov a bez chýbajúcich dát. Všeobecne sa predpokladá, že BF metóda sa stavia k rezervám pesimistickejšie, a teda poskytuje vyššie odhady ako CL metóda. Tento predpoklad sa potvrdil aj v našom prípade, kedy BF rezervy vyšli znateľne vyššie ako CL rezervy. Pri počítaní CL rezerv sme sa zaoberali aj ich presnosťou. Dobrým ukazovateľom je 7% miera neistoty, v praxi by sme od poisťných matematikov však vyžadovali presnejšie výsledky.

Veľmi zaujímavým testovaním bolo testovanie dát s outlierom. Podľa dostupnej teórie sme predpokladali, že vplyv outlieru na CL rezervy bude oveľa väčší ako pri BF rezervách, keďže priamo ovplyvňuje všetky medzivýpočty. V BF metóde ovplyvňuje outlier iba koeficienty $\hat{\beta}_j$ a tie vieme jednoducho upraviť. V našom prípade sa síce ukázalo, že vplyv outlieru je v prípade CL metódy väčší ako v prípade BF metódy, avšak rozdiel nebol na prvý pohľad až taký pozorovateľný. Obe rezervy totiž prudko stúpili. Percentuálnym porovnaním sme zistili, že CL rezervy stúpili asi o 10% viac ako BF rezervy. Zaujímavým pokračovaním tohto testovania by mohlo byť pozorovanie správania sa rezerv v prípade outlierov na rôznych pozíciách vývojového trojuholníka, napríklad ako veľmi závaží outlier v prvom roku a ako v poslednom roku nastania udalosti, poprípade testovanie dát s viacerými outliermi.

Cieľom tejto práce bolo popísať postup pri odhadovaní oboma metódami tak, aby čitateľovi nerobilo problém tento postup zopakovať na akýchkoľvek dostupných dátach. Táto práca by mohla slúžiť ako východiskový materiál pre práce zamerané na stochastické modely v neživotnom poistení. Taktiež by na ňu mohli nadväzovať práce venujúce sa iným metódam, používaným na odhad technických rezerv (napríklad metóda Renshaw Christofides alebo Zehnwirtova metóda), ktoré by bolo možné taktiež aplikovať na dáta a následne porovnať výsledky.

Zoznam použitej literatúry

- [1] Bornhuetter, R.L., Ferguson R.E.: *The Actuary and IBNR*, Proc. CAS, Vol. LIX, 1972, 181-195
- [2] Cipra, T.: *Pojistná matematika, teorie a praxe*, EKOPRESS, Praha, 1999
- [3] Mack T.: *Distribution-free calculation of the standard error of chain ladder reserve estimates*, ASTIN Bulletin 23/2, 1993, 213-225
- [4] Mikosch, T.: *Non-Life Insurance Mathematics*, Springer, Berlín, 2004
- [5] Wüthrich, M.V., Merz, M.: *Stochastic Claims Reserving Methods in Insurance*, John Wiley & Sons, Hoboken, New Jersey, 2008
- [6] Wüthrich, M.V., Gisler, A.: *Stochastic Claims Reserving Methods in Insurance*, Medzinárodná letná škola 4.-8.júla 2011, prednášky, Technische Universität Wien, Viedeň, 2011
- [7] *Zákon č. 8/2008 Z.z. o poisťovníctve a o zmene a doplnení niektorých zákonov*

Príloha A

Priložené CD s aplikáciou metód na dáta použité z [5] v MS Excel 2010.