

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE  
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY



VZŤAHY SPEKTIER MATICE A JEJ PODMATÍC

Bakalárska práca

2013

Viktor GREGOR

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE  
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY

VZŤAHY SPEKTIER MATICE A JEJ PODMATÍC

BAKALÁRSKA PRÁCA

Študijný program: Ekonomická a finančná matematika  
Študijný odbor: 1114 Aplikovaná matematika  
Školiace pracovisko: Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky  
Vedúci práce: Mgr. Martin Niepel, PhD.



Univerzita Komenského v Bratislave  
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

---

## ZADANIE ZÁVEREČNEJ PRÁCE

**Meno a priezvisko študenta:** Viktor Gregor  
**Študijný program:** ekonomická a finančná matematika (Jednoodborové štúdium, bakalársky I. st., denná forma)  
**Študijný odbor:** 9.1.9. aplikovaná matematika  
**Typ záverečnej práce:** bakalárska  
**Jazyk záverečnej práce:** slovenský

**Názov:** Vzťahy spektier matice a jej podmatíc

**Cieľ:** Oboznámiť sa s teóriou v pozadí Cauchyho preplietacej vety o vlastných hodnotách Hermitovských matíc, jej zovšeobecneniami pre iné triedy matíc. Prispôsobenie projekčných metód hľadania vlastných hodnôt pre matice relevantné v ekonometrii (vstupno-výstupne matice, produkčné matice a pod.).

**Vedúci:** Mgr. Martin Niepel, PhD.  
**Katedra:** FMFI.KAMŠ - Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky  
**Vedúci katedry:** prof. RNDr. Daniel Ševčovič, CSc.  
**Dátum zadania:** 10.10.2012

**Dátum schválenia:** 03.11.2012  
doc. RNDr. Margaréta Halická, CSc.  
garant študijného programu

.....  
študent

.....  
vedúci práce

**Pod'akovanie** Ďakujem vedúcemu tejto bakalárskej práce Mgr. Martinovi Niepelovi, PhD. za ochotu, odbornú pomoc a podnetné rady, ktoré mi pomohli pri písaní tejto práce.

## Abstrakt

Gregor, Viktor: Vzťahy spektier matice a jej podmatíc (Bakalárska práca), Univerzita Komenského v Bratislave, Fakulta matematiky, fyziky a informatiky, Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky; vedúci práce: Mgr. Martin Niepel, PhD., Bratislava, 2013, 45s.

V tejto práci sme sa zaoberali vzťahmi spektier matíc a ich podmatíc. Zhrnuli sme známe vzťahy pre hermitovské matice. Zovšeobecnil sme Cauchyho preplietaciu vetu a vyjadrili sme odhad vlastných hodnôt matíc a podmatíc pre náhodné matice pomocou Wignerovho polkružnicového zákona. Skúmali sme, aké sú vzťahy spektier pre markovovské matice. Zistili sme, aké sú charakteristiky spektier markovovských matíc používaných v praxi (vstupno - výstupné matice a SAM matice) a ukázali sme, ako veľmi sa menia vlastné hodnoty zúžením matice. V závere sme sa zaoberali vzťahom vlastných vektorov diagonálnych a symetrických matíc a podmatíc.

**Kľúčové slová:** Cauchyho preplietacia veta, podmatica, vlastná hodnota, markovovská matica, hermitovská matica, vstupno - výstupná matica, Wignerov polkružnicový zákon

## Abstract

Gregor, Viktor: The Relations of spectrums of Matrix and its Submatrices (Bachelor thesis), Comenius University in Bratislava, Faculty of Mathematics, Physics and Informatics, Department of Applied Mathematics and Statistics; Supervisor: Mgr. Martin Niepel, PhD., Bratislava, 2013, 45p.

In this thesis, we addressed the relation between eigenvalues of a matrix and its submatrices. We summarized the known relations for Hermitian matrices. We generalized Cauchy interlacing theorem and stated an estimate of spectra of random Hermitian matrices and submatrices using Wigner semicircle law. We examined the relation of spectra of Markov matrices, determined the features of eigenvalues of Markov matrices used in economic applications (input - output matrices and SAM matrices) and showed how much they can change with reduction of matrix. In the final part, we examined the relations of eigenvectors of diagonal and symmetric matrices and submatrices.

**Key words:** Cauchy interlacing theorem, submatrix, eigenvalue, Markov matrix, Hermitian matrix, input - output matrix, Wigner semicircle law

# Obsah

Úvod	7
<b>1 Definície a pojmy</b>	<b>9</b>
<b>2 Hermitovské matice</b>	<b>12</b>
2.1 Základné vlastnosti hermitovských matíc . . . . .	12
2.2 Preplietacia veta . . . . .	14
2.3 Wignerov polkružnicový zákon . . . . .	19
<b>3 Markovovské matice</b>	<b>22</b>
3.1 Markovovský proces . . . . .	22
3.2 Idea vstupno - výstupného modelu . . . . .	23
3.3 Spektrum markovovskej matice . . . . .	24
3.3.1 Rovnako rozdelené náhodné zložky matice . . . . .	25
3.3.2 Náhodné matice s výraznou diagonálou . . . . .	26
3.3.3 Riedke matice . . . . .	27
3.3.4 Generovanie náhodných matíc podľa reálnych dát . . . . .	29
3.4 Podmatice markovovských matíc . . . . .	31
3.4.1 Vylúčenie jedného zo stavov . . . . .	31
3.4.2 Zlúčenie dvoch sektorov . . . . .	32
3.5 Spektrum podmatice markovovskej matice . . . . .	34
<b>4 Vlastné vektory</b>	<b>38</b>
4.1 Diagonálne a symetrické matice . . . . .	39
Záver	42
Literatúra	44

# Úvod

Numerický výpočet vlastných hodnôt matíc je dôležitou úlohou mnohých vedeckých a inžinierskych oblastí. Pre matice veľkých rozmerov je to výpočtovo veľmi náročný problém. V praxi sa ale vyskytujú situácie, keď je potrebné určiť spektrum matíc s rozmermi rádovo niekoľko tisíc a viac. Pri takýchto úlohách sú často používané Krylovove projekčné metódy (viac o Krylovových metódach sa dá nájsť v publikácii [4] a kapitole 7.11 z [3]). Tie vo všeobecnosti aproximujú vlastné hodnoty pomocou ich Ritzových hodnôt (vlastných hodnôt podmatíc). V tejto práci sme sa zaoberali teóriou, ktorá stojí za týmito metódami. Skúmali sme vzťah vlastných hodnôt matíc a ich podmatíc. Pre triedu hermitovských matíc je tento vzťah známy a nazýva sa Cauchyho preplietacia veta. Tá v skratke hovorí, že každú vlastnú hodnotu podmatice vieme ohraničiť zdola aj zhora vlastnou hodnotou pôvodnej matice.

Hlavným cieľom tejto práce bolo zistiť, či vieme nájsť podobný vzťah aj pre inú triedu matíc, konkrétne pre markovovské matice. Otázkou bolo, či z toho, že poznáme spektrum markovovskej matice, vieme zostrojiť nejaké nerovnosti alebo ohraničenia pre vlastné hodnoty podmatice. Keďže Krylovove projekčné metódy sa využívajú aj pre matice, ktoré nie sú hermitovské a zúženie matice môže byť nejaký typ projekcie, aspoň vo väčšine prípadov by takéto ohraničenia mohli existovať.

V prvej časti práce sme zhrnuli známu teóriu hermitovských matíc súvisiacu z preplietacou vetou a tiež sme dokázali preplietaciu vetu vo všeobecnejšom zmysle, ako je väčšinou vyslovená v učebniciach.

V ďalšej časti sme sa zaoberali markovovskými maticami. V skratke sme popísali ich aplikácie, a to markovovské procesy a vstupno - výstupné modely. Na to, aby sme mohli skúmať vlastnosti podmatíc, sme museli zistiť, ako správne skonštruovať podmaticu markovovskej matice. Ďalej sme sa zaoberali empirickými maticami s reálnymi dátami z ekonómie. Cieľom bolo zistiť špecifické vlastnosti spektier matíc využívaných v konkrétnych aplikáciách a napodobniť ich náhodne generovanými maticami v matematickom softvéri MATLAB. Pomocou týchto simulácií sme overovali rôzne hypotézy o vlastných hodnotách podmatíc. Zisťovali sme, ako vyzerajú typické spektrá pri zúžení empirických matíc a na druhej strane sme sa snažili nájsť protipríklad pre takéto hypotézy. Teda nájsť maticu, ktorá zúžením výrazne zmení svoje vlastné hodnoty.



V záverečnej kapitole sme sa vrátili k symetrickým a diagonálnym maticiam a skúmali sme vlastné vektory matíc a ich podmatíc, čím sme sa snažili navrhnuť iný pohľad na problematiku.

# 1 Definície a pojmy

V tejto kapitole zhrnieme použité značenie a definície dôležitých pojmov. Definície a znenia tvrdení sú prebraté z publikácie [3] a sú prispôbené konvenciám značenia použitým v tejto práci.

Matice budeme spravidla označovať veľkými tlačenými písmenami  $A, B, U, V, M, \dots$ . Ich zložky označujeme príslušnými malými písmenami:  $A = \{a_{ij}\}_{\substack{i=1, \dots, m \\ j=1, \dots, n}}$ . Prvým indexom  $i$  značíme spravidla riadok a druhým indexom  $j$  stĺpec.

Transpozíciu matice  $A$  značíme  $A^T$ ,

hermitovské združenie matice  $A$  značíme  $A^H = \bar{A}^T$ .

Hovoríme, že matica  $A$  je *symetrická matica*, ak spĺňa rovnosť  $A^T = A$ . Obdobne, matica  $A$  je *hermitovská matica*, ak spĺňa rovnosť  $A^H = A$ .

Matica  $U_{n \times n}$  je *unitárna*, ak spĺňa rovnosť  $U^H U = I$ . V takom prípade jej stĺpce tvoria ortonormálnu bázu  $\mathbb{C}^n$ .

Reálna matica  $M$  typu  $n \times n$  je *markovovská* (niekedy nazývaná aj *stochastická matica*) ak má nezáporné zložky a súčet zložiek po stĺpcoch je rovný 1, t.j. ak spĺňa:

- $m_{ij} \geq 0 \quad \forall i, j = 1, \dots, n$
- $\sum_{i=1}^n m_{ij} = 1 \quad \forall j = 1, \dots, n$

*Vlastná hodnota* a *vlastný vektor* matice  $A$  sú číslo  $\lambda \in \mathbb{C}$  a nenulový vektor  $x \in \mathbb{C}^n$ , ktoré spĺňajú rovnicu

$$Ax = \lambda x.$$

Ak sú vlastné hodnoty  $n$  rozmernej matice  $A$  reálne, môžeme ich zoradiť a označiť podľa veľkosti:  $\lambda_1(A) \geq \lambda_2(A) \geq \dots \geq \lambda_n(A)$ .

Množinu vlastných hodnôt matice  $A$  nazývame *spektrom matice*  $A$ . Značíme ho  $\sigma(A)$ , teda  $\sigma(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \exists x \neq 0, Ax = \lambda x\}$ . *Spektrálnym polomerom* nazývame číslo  $\rho(A) = \max_{1 \leq i \leq n} |\lambda_i|$ .

Nech  $A$  je matica typu  $n \times m$  hodnosti  $r$ . Potom *singulárny rozklad* matice má tvar  $A = U \Sigma V^H$ , kde matice  $U_{n \times n}$ ,  $V_{m \times m}$  sú unitárne matice a  $\Sigma_{n \times m}$  je reálna obdĺžniková diagonálna matica s nezápornými prvkami. Prvých  $r$  diagonálnych zložiek  $\Sigma$  je

nenulových a nazývame ich *singulárne hodnoty* matice  $A$ . Ostatné diagonálne prvky sú nulové.

Singulárne hodnoty matice môžeme ekvivalentne definovať ako druhé odmocniny z nenulových vlastných čísiel matice  $A^H A$ . Značíme ich podľa veľkosti:

$$s_1(A) \geq s_2(A) \geq \dots \geq s_r(A) > 0.$$

Matice  $A$  a  $B$  nazývame *podobné*, ak existuje regulárna matica  $C$  taká, že  $C^{-1}AC = B$ . Platí, že podobné matice majú rovnaké vlastné hodnoty.

Matica  $A$  je *diagonalizovateľná*, ak je podobná diagonálnej matici. Väčšinou budeme používať značenie  $A = SAS^{-1}$ , kde  $S$  je matica vlastných vektorov a  $\Lambda$  je diagonálna matica s vlastnými hodnotami na diagonále.

*Vektorová norma* je funkcia  $\|\cdot\| : \mathbb{C}^n \mapsto \mathbb{R}$  spĺňajúca nasledujúce vlastnosti:  
 $\forall x, y \in \mathbb{C}^n, \alpha \in \mathbb{C} :$

- $\|x\| \geq 0$  a  $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0_n$
- $\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$
- $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

V tejto práci budeme používať hlavne 2-normu (tzv. Euklidovskú normu) definovanú nasledovne:

$$\|x\|_2 = \left( \sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{(x^H x)}.$$

*Maticová norma* je funkcia  $\|\cdot\| : \mathbb{C}^{n \times m} \mapsto \mathbb{R}$  spĺňajúca nasledujúce vlastnosti:  
 $\forall A, B \in \mathbb{C}^{n \times m}, \alpha \in \mathbb{C} :$

- $\|A\| \geq 0$  a  $\|A\| = 0 \Leftrightarrow A = 0_{n \times m}$
- $\|\alpha A\| = |\alpha| \cdot \|A\|$
- $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$

$\forall A, B \in \mathbb{C}^{n \times n} :$

- $\|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$

Noríem spĺňajúcich takéto axiomy je viacero, príkladom sú tzv. operátorové normy, ktoré sú indukované príslušnými vektorovými normami. Sú definované nasledovne:

$$\|A\|_1 = \sup_{\|x\|_1=1} \|Ax\|_1 = \max_j \sum_i |a_{ij}|,$$

$$\|A\|_2 = \sup_{\|x\|_2=1} \|Ax\|_2 = s_1(A) = \sqrt{\rho(A^T A)},$$

kde  $s_1(A)$  je najväčšia singulárna hodnota matice  $A$ . Ľubovoľná norma matice môže poslúžiť ako veľmi hrubý odhad polomeru spektra matice, a teda aj všetkých jej vlastných čísel.

**Tvrdenie 1.1.** *Horná hranica polomeru spektra matice*

Pre ľubovoľnú maticovú normu  $\|*\|$  platí:  $|\lambda| \leq \|A\|$  pre všetky vlastné hodnoty  $\lambda$ .

*Dôkaz.*

Nech  $\lambda$  je vlastné číslo a  $x$  je vlastný vektor matice  $A$ .

Označme maticu  $X = \begin{pmatrix} x & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}_{n \times n}$ . Potom platí  $AX = \lambda X$ , a teda

$$|\lambda| \cdot \|X\| = \|\lambda X\| = \|AX\| \leq \|A\| \cdot \|X\|$$

$$|\lambda| \leq \|A\|$$

□

## 2 Hermitovské matice

V tejto kapitole sa bližšie pozrieme na hermitovské matice. O ich spektre sa dá povedať viac v porovnaní s ostatnými triedami matíc. Ich spektrum má rôzne vlastnosti, ktoré značne zjednodušujú situáciu. Tie sformulujeme na začiatku tejto kapitoly. Následne dokážeme Courant-Fisherovu vetu a z nej vyplývajúcu Cauchyho preplietaciu vetu, ktoré hovoria o tom, aký je vzťah medzi spektrom hermitovských matíc a ich podmatíc. Ukazuje sa, že vlastné hodnoty podmatice môžeme ohraničiť vlastnými hodnotami originálnej matice bez toho, aby sme vedeli, aké sú jej vlastné vektory. Vysvetlíme, ako súvisí spektrálny a singulárny rozklad a ako môžeme pomocou nich geometricky interpretovať preplietaciu vetu. Na záver kapitoly uvedieme, ako môžeme odhadnúť vlastné hodnoty náhodnej hermitovskej matice pomocou Wignerovho polkružnicového zákona. Zdrojom k tejto kapitole boli publikácie [3] a [6].

### 2.1 Základné vlastnosti hermitovských matíc

Ak je matica  $A$  typu  $n \times n$  hermitovská, potom vieme, že je unitárne diagonalizovateľná. Teda existuje jej spektrálny rozklad  $A = U\Lambda U^H$ , kde  $U$  je unitárna matica tvorená ortonormálnou bázou vlastných vektorov. Navyše platí, že všetky vlastné hodnoty  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  sú reálne. Toto je veľmi dôležitý fakt, pretože spektrum každej hermitovskej matice je  $n$ -tica reálnych čísiel, ktoré môžeme zoradiť podľa veľkosti. Keďže na množine komplexných čísiel nemáme prirodzené usporiadanie, tak pre matice s vlastnými hodnotami mimo reálnych čísiel nemôžeme očakávať platnosť tvrdení s nerovnosťami.

**Tvrdenie 2.1.** *O extrémnych vlastných hodnotách*

Extrémne vlastné hodnoty  $\lambda_1, \lambda_n$  hermitovskej matice  $A_{n \times n}$  sa dajú vyjadriť nasledovne:

$$\lambda_1 = \max_{x \neq 0} \frac{x^H A x}{x^H x}, \quad \lambda_n = \min_{x \neq 0} \frac{x^H A x}{x^H x}.$$

*Dôkaz.* Matica  $A_{n \times n}$  je hermitovská, teda je unitárne diagonalizovateľná. Ak vektory  $v_1, v_2, \dots, v_n$  sú jej vlastné vektory prislúchajúce k vlastným hodnotám  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ , môžeme ich zvoliť tak, aby tvorili ortonormálnu bázu  $\mathbb{C}^n$ . Máme

$$v_i^H v_j = \begin{cases} 1 & \text{pre } i = j \\ 0 & \text{pre } i \neq j \end{cases}.$$

Teda ľubovoľný vektor  $x \in \mathbb{C}^n$  môžeme napísať ako lineárnu kombináciu báзовých vlastných vektorov:  $x = c_1 v_1 + c_2 v_2 + \dots + c_n v_n$ .

Potom

$$\begin{aligned} \frac{x^H A x}{x^H x} &= \frac{(c_1 v_1 + c_2 v_2 + \dots + c_n v_n)^H A (c_1 v_1 + c_2 v_2 + \dots + c_n v_n)}{(c_1 v_1 + c_2 v_2 + \dots + c_n v_n)^H (c_1 v_1 + c_2 v_2 + \dots + c_n v_n)} = \\ &= \frac{\sum_{i=1}^n c_i c_j v_i^H A v_j}{\sum_{i=1}^n c_i c_j v_i^H v_j} = \frac{\sum_{i=1}^n c_i c_j v_i^H \lambda_j v_j}{\sum_{i=1}^n c_i c_j v_i^H v_j} = \frac{\sum_{i=1}^n c_i^2 \lambda_i}{\sum_{i=1}^n c_i^2} \leq \frac{\lambda_1 \sum_{i=1}^n c_i^2}{\sum_{i=1}^n c_i^2} = \lambda_1. \end{aligned}$$

Analogicky môžeme odvodiť aj druhú nerovnosť:

$$\frac{x^H A x}{x^H x} = \frac{\sum_{i=1}^n c_i^2 \lambda_i}{\sum_{i=1}^n c_i^2} \geq \frac{\lambda_n \sum_{i=1}^n c_i^2}{\sum_{i=1}^n c_i^2} = \lambda_n.$$

□

Pomery  $\frac{x^H A x}{x^H x}$  sa nazývajú *Rayleighove pomery*. Teraz, keď máme najmenšiu aj najväčšiu vlastnú hodnotu vyjadrenú Rayleighovým pomerom, môžeme sa pýtať, či sa aj ostatné vlastné hodnoty nedajú vyjadriť podobne. V roku 1905 ukázal Ernst Fischer, že existuje zovšeobecnenie aj pre ostatné vlastné hodnoty. Richard Courant neskôr v roku 1920 rozšíril tvrdenie pre nekonečno rozmerné operátory (kapitola 7.5 v [3]).

**Tvrdenie 2.2.** *Courantova-Fischerova veta*

Vlastné hodnoty  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$  hermitovskej matice  $A_{n \times n}$  sa dajú vyjadriť nasledovne:

$$\lambda_i = \max_{\mathcal{P}} \min_{\substack{\dim \mathcal{P}=i \\ x \in \mathcal{P} \\ \|x\|_2=1}} (x^H A x) = \min_{\mathcal{P}} \max_{\substack{\dim \mathcal{P}=n-i+1 \\ x \in \mathcal{P} \\ \|x\|_2=1}} (x^H A x) \quad (1)$$

*Dôkaz.* Nech  $\mathcal{P}$  je podpriestor  $\mathbb{C}^n$  dimenzie  $i$ . Potom označme  $\mathcal{S}_{\mathcal{P}} = \{x \in \mathcal{P}, \|x\|_2 = 1\}$ . Matica  $A$  je hermitovská, teda vlastné vektory  $v_1, v_2, \dots, v_n$  môžeme zvoliť tak, aby tvorili ortonormálnu bázu  $\mathbb{C}^n$ . Označme  $\mathcal{F} = \text{span}\{v_i, v_{i+1}, \dots, v_n\}$ , kde  $\text{span}$  označuje lineárny obal vektorov. Dimenzia  $\mathcal{S}_{\mathcal{P}}$  je  $i$  a dimenzia  $\mathcal{F}$  je  $n - i + 1$ . Teda podpriestory majú netriviálny prienik. Inak by

$$\dim(\mathcal{S}_{\mathcal{P}} \oplus \mathcal{F}) = \dim(\mathcal{S}_{\mathcal{P}}) + \dim(\mathcal{F}) = n + 1 > n,$$

čo je spor s tým, že  $\mathcal{S}_{\mathcal{P}}$  a  $\mathcal{F}$  sú podpriestory  $\mathbb{C}^n$ . Prienik označme  $\tilde{\mathcal{S}}_{\mathcal{P}} = \mathcal{S}_{\mathcal{P}} \cap \mathcal{F}$ .

Potom  $\forall x \in \tilde{\mathcal{S}}_{\mathcal{P}}$  sa dá napísať ako  $x = c_i v_i + c_{i+1} v_{i+1} + \dots + c_n v_n$ . Podobnou úpravou ako v dôkaze vety 2.1 dostaneme  $\|x\|_2^2 = \sum_{j=i}^n c_j^2 = 1$ . Teda

$$x^H A x = \sum_{j=i}^n c_j^2 \lambda_j \leq \lambda_j \sum_{j=i}^n c_j^2 = \lambda_j \quad \forall x \in \tilde{\mathcal{S}}_{\mathcal{P}}.$$

Keďže  $\tilde{\mathcal{S}}_{\mathcal{P}} \subseteq \mathcal{S}_{\mathcal{P}}$  potom

$$\min_{x \in \mathcal{S}_{\mathcal{P}}} x^H A x \leq \min_{x \in \tilde{\mathcal{S}}_{\mathcal{P}}} x^H A x \leq \lambda_i.$$

To platí pre ľubovoľný podpriestor dimenzie  $i$ . Teda

$$\max_{\mathcal{P}} \left( \min_{x \in \mathcal{P}, \|x\|_2=1} x^H A x \right) \leq \lambda_i.$$

Aby sme dokázali rovnosť, stačí nájsť podpriestor  $\tilde{\mathcal{P}}$  dimenzie  $i$ , pre ktorý platí

$$\min_{x \in \tilde{\mathcal{P}}, \|x\|_2=1} x^H A x = \lambda_i.$$

Takým podpriestorom je  $\tilde{\mathcal{P}} = \text{span}\{v_1, v_2, \dots, v_i\}$ . Vieme, že  $\min_{x \in \tilde{\mathcal{P}}, \|x\|_2=1} x^H A x \leq \lambda_i$ .

Ale zároveň platí  $x^H A x = \sum_{j=1}^i c_j^2 \lambda_j \geq \lambda_j$  pre všetky  $x \in \tilde{\mathcal{P}}$ . Teda platí rovnosť

$\min_{x \in \tilde{\mathcal{P}}, \|x\|_2=1} x^H A x = \lambda_i$ . A teda aj rovnosť

$$\max_{\mathcal{P}} \left( \min_{x \in \mathcal{P}, \|x\|_2=1} x^H A x \right) = \lambda_i.$$

Druhá časť dôkazu je analogická, preto ju neuvádzame.  $\square$

Pomocou Courantovej-Fischerovej vety sa dajú odvodiť rôzne nerovnosti pre vlastné hodnoty matíc. Nás zaujíma predovšetkým preplietacia veta.

## 2.2 Preplietacia veta

**Tvrdenie 2.3.** *Cauchyho preplietacia veta*

Nech  $A$  je hermitovská matica typu  $n \times n$ . Nech  $B = V A V^H$  je matica typu  $k \times k$ , kde  $k < n$  a pre maticu  $V_{k \times n}$  platí  $V V^H = I_{k \times k}$ . Nech  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$  a  $\beta_1 \geq \beta_2 \geq \dots \geq \beta_k$  sú vlastné hodnoty matíc  $A$  a  $B$  v tomto poradí. Potom platí:

$$\lambda_j \geq \beta_j \geq \lambda_{n-k+j} \quad \forall j = 1, \dots, k. \quad (2)$$

*Dôkaz.* Pre obdĺžnikovú maticu  $V$  platí  $VV^H = I_{k \times k}$ . Teda  $k$  riadkov matice  $V$  sú vektory ortonormálnej bázy  $\mathbb{C}^n$ . Môžeme ich doplniť do úplnej bázy ďalšími  $n - k$  vektormi. Tie zapíšeme do riadkov matice  $W_{(n-k) \times n}$  aby platilo  $WW^H = I_{(n-k) \times (n-k)}$ .

Potom  $\begin{pmatrix} V \\ W \end{pmatrix}$  je  $n \times n$  unitárna matica.

Matica  $B$  je hermitovská, teda sa dá diagonalizovať unitárnou maticou:

$UBU^H = D = \text{diag}(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m)$ . Teda môžeme písať:

$$\begin{aligned} \tilde{A} &= QAQ^H = \underbrace{\begin{bmatrix} U^H & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{pmatrix} V \\ W \end{pmatrix}}_Q A \underbrace{\begin{pmatrix} V^H & W^H \end{pmatrix} \begin{bmatrix} U & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}}_{Q^H} \\ &= \begin{pmatrix} U^H & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B & VAW^H \\ WAW^H & WAW^H \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D & U^HVAW^H \\ WAW^H & WAW^H \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Platí  $QQ^H = I_{n \times n}$ , teda  $Q$  je unitárna matica. Potom matice  $A$  a  $\tilde{A}$  sú podobné a majú rovnaké vlastné hodnoty. Najskôr dokážeme prvú nerovnosť.

Nech  $j \in \{1, 2, \dots, m\}$ . Označme  $\mathcal{F} = \text{span}\{e_1, e_2, \dots, e_j\}$ . Potom  $x \in \mathcal{F}$  má tvar  $x = (x_1 \ x_2 \ \dots \ x_j \ 0 \ \dots \ 0)^T$  a platí:

$$x^H \tilde{A} x = \sum_{i=1}^j \beta_i x_i^H x_i \geq \beta_j \quad \forall x \in \mathcal{F}.$$

Potom podľa Courantovej-Fischerovej vety 2.2:

$$\lambda_j = \max_{\mathcal{P}, \dim \mathcal{P}=j} \left( \min_{x \in \mathcal{P}, \|x\|_2=1} x^H \tilde{A} x \right) \geq \min_{x \in \mathcal{F}, \|x\|_2=1} x^H \tilde{A} x \geq \beta_j \quad \forall j = 1, 2, \dots, m$$

Druhú nerovnosť dokážeme podobne. Označme  $\mathcal{T} = \text{span}\{e_j, e_{j+1}, \dots, e_m\}$ . Vidíme, že  $\dim \mathcal{T} = m - j + 1$  a  $x \in \mathcal{T}$  má tvar

$x = (0 \ \dots \ 0 \ x_j \ x_{j+1} \ \dots \ x_m \ 0 \ \dots \ 0)^T$ . Potom platí:

$$x^H \tilde{A} x = \sum_{i=j}^m \beta_i x_i^H x_i \leq \beta_j \quad \forall x \in \mathcal{T}.$$

Teda podľa Courantovej-Fischerovej vety 2.2 platí aj druhá nerovnosť:

$$\lambda_{n-m+j} = \min_{\mathcal{P}, \dim \mathcal{P}=m-j+1} \left( \max_{x \in \mathcal{P}, \|x\|_2=1} x^H \tilde{A} x \right) \leq \max_{x \in \mathcal{T}, \|x\|_2=1} x^H \tilde{A} x \leq \beta_j \quad \forall j = 1, 2, \dots, m.$$

□



**Poznámka 2.1.** Keď položíme  $m = n - 1$ , potom  $\lambda_i$  a  $\beta_j$  sú navzájom "prepletené":  
 $\lambda_1 \geq \beta_1 \geq \lambda_2 \geq \beta_2 \dots \geq \beta_{n-1} \geq \lambda_n$ . Z toho vznikol názov vety.

V učebniciach sa väčšinou uvádza verzia preplietacej vety, kde  $B$  je podmatica matice  $A$ . Teda, že  $B$  vznikne vynechaním niekoľkých riadkov a stĺpcov matice  $A$ . Tu uvedená verzia zahŕňa túto situáciu, ale je všeobecnejšia. Hovorí o ľubovoľnej kolmej projekcii. Pre maticu  $V$  z dôkazu vety platí, že  $V^H V$  je hermitovská a  $(V^H V)^2 = V^H V$ . Teda  $V^H V$  je naozaj matica kolmej projekcie na podpriestor  $\mathbb{C}^n$  daný riadkami matice  $V$ . Teraz sa pozrime na kvadratické formy dané maticami  $A$  a  $B$ :

$$(V^H V x)^H A (V^H V x) = x^H V^H \underbrace{(V A V^H)}_B V x = (V x)^H B (V x) = y^H B y. \quad (3)$$

Znamená to, že kvadratická forma reprezentovaná maticou  $A$  projekcie vektora  $x \in \mathbb{C}^n$  je ekvivalentná kvadratickej forme reprezentovanej maticou  $B$  vektora  $V x = y \in \mathbb{C}^k$ . Maticu  $B = V A V^H$  môžeme teda chápať ako kolmú projekciu matice  $A$  alebo ako podmaticu vo všeobecnejšom zmysle.

Preplietacej vete môžeme hlbšie porozumieť, ak sa na maticu  $A$  pozrieme ako na lineárne zobrazenie. O geometrii lineárneho zobrazenia nám takmer všetko prezradí jeho singulárny rozklad. V prípade hermitovských matíc vlastné hodnoty a singulárne hodnoty spolu veľmi úzko súvisia. Preto predtým ako vysvetlíme preplietaciu vetu, zopakujeme význam singulárnych hodnôt pri skúmaní lineárneho zobrazenia.

Zoberme si lineárne zobrazenie dané regulárnou reálnou maticou  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . Jej singulárny rozklad je  $A = U \Sigma V^T$ , kde  $\Sigma$  je diagonálna matica so singulárnymi hodnotami  $s_1 \geq s_2 \geq \dots \geq s_n > 0$  na diagonále a  $U, V$  sú ortogonálne matice. Singulárne hodnoty nám hovoria, ako veľmi zobrazenie zdeformuje jednotkovú sféru  $\mathcal{S}_n = \{x \in \mathbb{R}^n, \|x\|_2 = 1\}$ . Majme ľubovoľné  $y \in A(\mathcal{S}_n)$ , kde  $A(\mathcal{S}_n)$  je obraz jednotkovej sféry. Potom existuje  $x \in \mathcal{S}_n$  také, že  $y = Ax$  a platí:

$$\|y\|_2^2 = \|Ax\|_2^2 = \|U \Sigma V^T x\|_2^2 = \|\Sigma V^T x\|_2^2 = \|\Sigma w\|_2^2 = s_1^2 w_1^2 + s_2^2 w_2^2 + \dots + s_n^2 w_n^2.$$

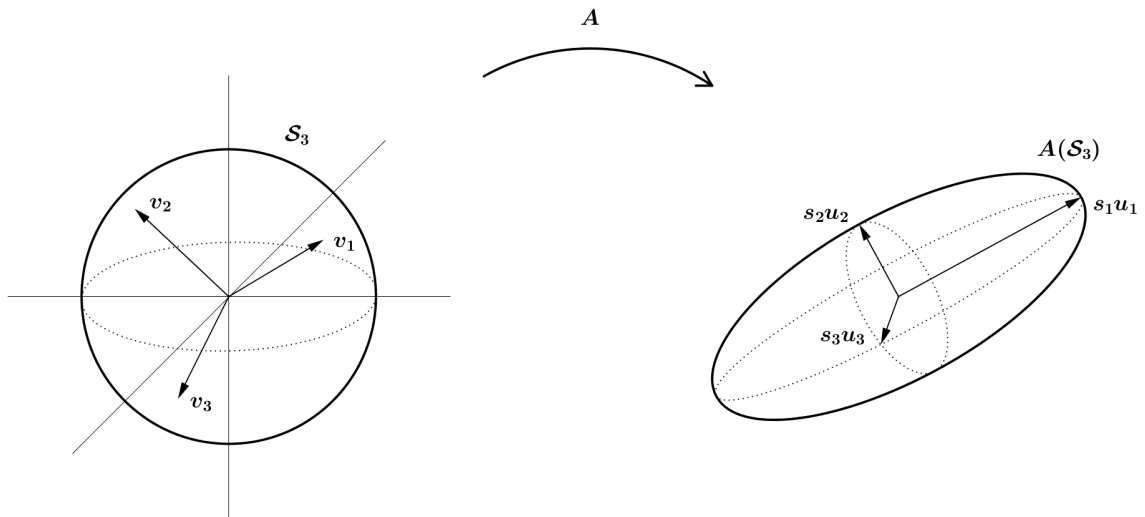
Matica  $V^T$  je ortogonálna, takže môže zmeniť smer vektora, ale nezmení jeho normu. Vektor  $w = V^T x$  je potom tiež vektor jednotkovej dĺžky, a teda  $w \in \mathcal{S}_n$ . Z toho vyplýva, že jednotková sféra sa zobrazí na elipsoid s dĺžkami poloosí  $s_1, s_2, \dots, s_n$ .

Ďalej z rozkladu  $AV = \Sigma U$  vyplýva pre stĺpce matice  $V$

$$\|Av_i\|_2 = \|s_i u_i\|_2 = s_i.$$

Teda stĺpce matice  $V$  zodpovedajú bodom na sfére  $\mathcal{S}_n$ , ktoré sa zobrazia na poloosi elipsoidu  $A(\mathcal{S}_n)$  a samostatné poloosi sú stĺpce matice  $U$  vynásobené príslušnými singulárnymi hodnotami. Situácia je zhrnutá na obrázku 1.

**Obr. 1:** Lineárne zobrazenie  $A = U\Sigma V^T$  zobrazí jednotkovú sféru na elipsoid s poloosami s dĺžkami  $s_1, s_2, \dots, s_n$ . Poloosi sú dané vektormi  $s_i u_i$  a vektory  $v_i$  sú body na jednotkovej sfére, ktoré sa zobrazia na tieto poloosi. Teda  $Av_i = s_i u_i$ .



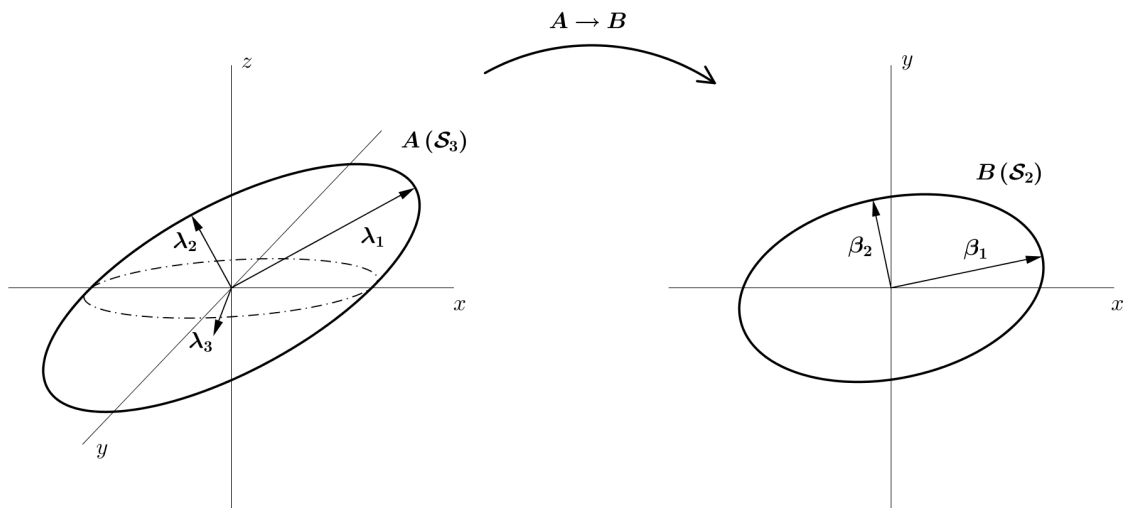
Teraz si zoberme prípad, kedy je matica  $A$  symetrická. Vieme, že jej vlastné hodnoty sú reálne. Označme ich  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$ . Aké sú jej singulárne hodnoty? Matica  $A^T A = A^2$ , teda jej vlastné hodnoty sú  $\lambda_1^2, \lambda_2^2, \dots, \lambda_n^2$ . Singulárne hodnoty  $A$  sú odmocniny z vlastných hodnôt  $A^T A$ , teda  $|\lambda_1|, |\lambda_2|, \dots, |\lambda_n|$ . Vidíme, že pre symetrické lineárne zobrazenia môžeme predošlú úvahu o obraze jednotkovej sféry zopakovať s absolútnymi hodnotami vlastných hodnôt namiesto singulárnych hodnôt.

Teraz sa už dostávame ku geometrickému významu prepletacej vety. Majme teda lineárne zobrazenie dané symetrickou maticou  $A$ , ktoré zobrazí jednotkovú sféru na elipsoid s dĺžkami poloosí  $|\lambda_1|, |\lambda_2|, \dots, |\lambda_n|$ . Ako sa situácia zmení, keď zoberieme namiesto matice  $A$  jej podmaticu  $B$ , ktorú získame tak, že vynecháme z  $A$  posledný riadok a stĺpec? Je to to isté, ako keby sme zabudli na  $n$ -tú súradnicu vektorov z  $\mathbb{R}^n$ . Urobíme

teda rez elipsoidom  $n - 1$  rozmernou nadrovinou danou vektormi  $\{e_1, e_2, \dots, e_{n-1}\}$ .

Bližšie rozoberieme prípad pre  $n = 3$ . Pre jednoduchosť uvažujme, že matica  $A_{3 \times 3}$  je kladne definitná. Teda matica  $A$  zobrazí dvojrozmernú sféru v  $\mathbb{R}^3$  na elipsoid s poloosami dlhými  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ . Z matice  $A$  vynecháme tretí riadok a stĺpec, čím získame maticu  $B_{2 \times 2}$ . Lineárne zobrazenie dané maticou  $B$  zobrazí kružnicu na elipsu s poloosami dlhými  $\beta_1, \beta_2$ , čo sú vlastné hodnoty matice  $B$ . Táto elipsa vznikne ako rez elipsoidu rovinou danou osami  $x, y$ . Po krátkom rozmyslení vidíme, že nech je elipsoid ľubovoľne otočený, vzniknutá elipsa bude mať dĺžky poloosí prepletené s dĺžkami poloosí elipsoidu. Tým myslíme, že vždy bude platiť  $\lambda_1 \geq \beta_1 \geq \lambda_2 \geq \beta_2 \geq \lambda_3$ . Situácia je znázornená na obrázku 2.

**Obr. 2:** Geometrické znázornenie preplietacej vety.



Teda na preplietáciu vetu sa môžeme pozeráť ako na dôsledok toho, že vlastné hodnoty a singulárne hodnoty nám z geometrického pohľadu dávajú o lineárnom zobrazení rovnakú informáciu. Vzťah medzi vlastnými a singulárnymi hodnotami môže byť pre iné matice oveľa komplikovanejší, čím strácame možnosť takejto jednoduchej geometrickej interpretácie a následne prestávajú platiť spomínané nerovnosti. Ale o singulárnom rozklade môžeme spraviť podobnú úvahu aj pre iné triedy matíc ako hermitovské, a teda by mohla platiť istá forma preplietacej vety pre singulárne hodnoty. Ukazuje sa, že je to naozaj tak.

Majme komplexnú maticu  $A$  typu  $n \times n$ . Matica  $\tilde{A}_{n \times n-k}$  vznikla z matice  $A$  vy-

nechaním posledných  $k$  stĺpcov.  $A^H A$  je hermitovská. Potom pre všetky  $x \in \mathbb{C}^n$  platí  $x^H A^H A x = \|Ax\|^2 \geq 0$ , a teda je aj kladne semi-definitná. Jej vlastné hodnoty sú reálne nezáporné čísla. Označme ich  $s_1^2 \geq \dots \geq s_n^2$ . To isté platí aj pre vlastné hodnoty matice  $\tilde{A}$ , ktoré označíme  $\tilde{s}_1^2 \geq \dots \geq \tilde{s}_{n-k}^2$ . Ak označíme stĺpce matice  $A$  ako  $a_1, a_2, \dots, a_n$ , potom môžeme matice  $A^H A$  a  $\tilde{A}^H \tilde{A}$  zapísať nasledovne:

$$A^H A = \begin{pmatrix} a_1^H a_1 & a_1^H a_2 & \dots & a_1^H a_n \\ a_2^H a_1 & a_2^H a_2 & \dots & a_2^H a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n^H a_1 & a_n^H a_2 & \dots & a_n^H a_n \end{pmatrix} \quad \tilde{A}^H \tilde{A} = \begin{pmatrix} a_1^H a_1 & a_1^H a_2 & \dots & a_1^H a_{n-k} \\ a_2^H a_1 & a_2^H a_2 & \dots & a_2^H a_{n-k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n-k}^H a_1 & a_{n-k}^H a_2 & \dots & a_{n-k}^H a_{n-k} \end{pmatrix}.$$

Vidíme, že  $\tilde{A}^H \tilde{A}$  je podmaticou matice  $A^H A$ . Teda použitím Cauchyho preplietacej vety 2.3 a odmocnením príslušných nerovností dostávame platnosť nasledovného tvrdenia:

**Tvrdenie 2.4.** *Preplietanie singulárnych hodnôt matice*

Nech komplexná matica  $A$  typu  $n \times n$  má singulárne hodnoty  $s_1 \geq \dots \geq s_n$ . Matica  $\tilde{A}_{n \times n-k}$  vznikla z matice  $A$  vynechaním posledných  $k$  stĺpcov a jej singulárne hodnoty sú  $\tilde{s}_1 \geq \dots \geq \tilde{s}_{n-k}$ . Potom platí:

$$s_i \geq \tilde{s}_i \geq s_{k+i} \quad i = 1, \dots, n-k. \quad (4)$$

## 2.3 Wignerov polkružnicový zákon

Cauchyho preplietacia veta hovorí o spektre ľubovoľných hermitovských matíc. Vieme ale povedať niečo viac o vlastných hodnotách, ak sa zameriame na spektrum typickej hermitovskej matice? Tým máme na mysli: Aká je najpravdepodobnejšia distribúcia vlastných hodnôt náhodnej hermitovskej matice z nejakého pravdepodobnostného priestoru matíc? Na túto otázku vieme odpovedať s pomocou teórie náhodných matíc.

Uvažujme nasledujúcu situáciu.  $A$  je náhodná hermitovská matica s navzájom nezávislými zložkami. Na diagonále sú zložky z normálneho rozdelenia  $N(0, 1)_{\mathbb{R}}$ . Zložky nad diagonálou sú z komplexného normálneho rozdelenia  $N(0, 1)_{\mathbb{C}}^1$ . Takéto matice sa nazývajú Gaussian Unitary Ensemble (GUE). Potom Wignerov polkružnicový zákon hovorí, že pre veľké rozmery  $n$  matice  $A$  sa distribúcia vlastných hodnôt blíži tvaru

<sup>1</sup> $z \sim N(0, 1)_{\mathbb{C}}$  znamená, že  $z = x + iy$ , kde  $x, y \sim N(0, \frac{1}{2})_{\mathbb{R}}$ . Potom  $E(z) = 0$  a  $D(z) = 1$ .

polkružnice. Navyše, keď maticu normujeme na  $\frac{1}{\sqrt{n}}A$ , polomer polkružnice, a teda aj najväčšia vlastná hodnota sú rovné 2. Presná formulácia a dôkaz tohto tvrdenia sa nachádza v publikácii [6].

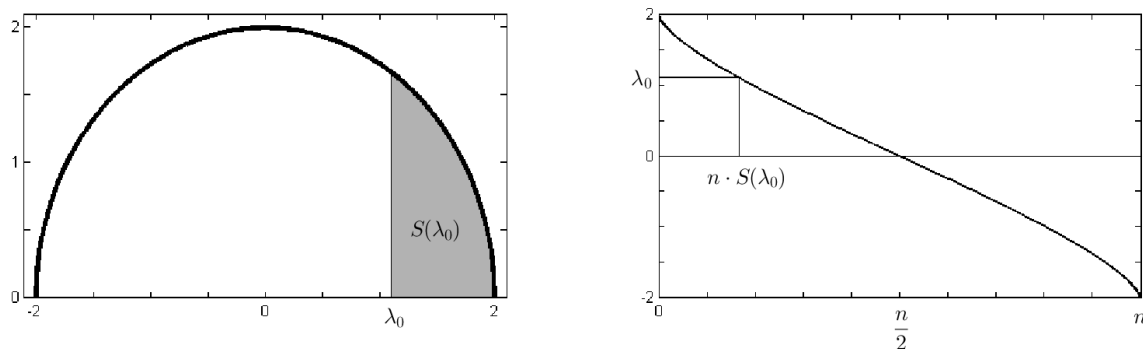
Za tohoto predpokladu teraz odvodíme závislosť vlastnej hodnoty  $\lambda(i)$  od jej indexu  $i$ . Tradične predpokladáme, že vlastné hodnoty sú usporiadané podľa veľkosti. Teda  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$ .

Na obrázku 3 vidíme, že počet vlastných hodnôt väčších ako  $\lambda_0 \in [-2, 2]$  môžeme vyjadriť ako časť obsahu polkruhu násobenú počtom vlastných hodnôt  $n$ . Jednoduchou geometrickou úvahou môžeme odvodiť, že táto časť je

$$S(\lambda) = \frac{1}{\pi} \left[ \arccos \left( \frac{\lambda}{2} \right) - \frac{\lambda}{2} \sqrt{1 - \frac{\lambda^2}{4}} \right].$$

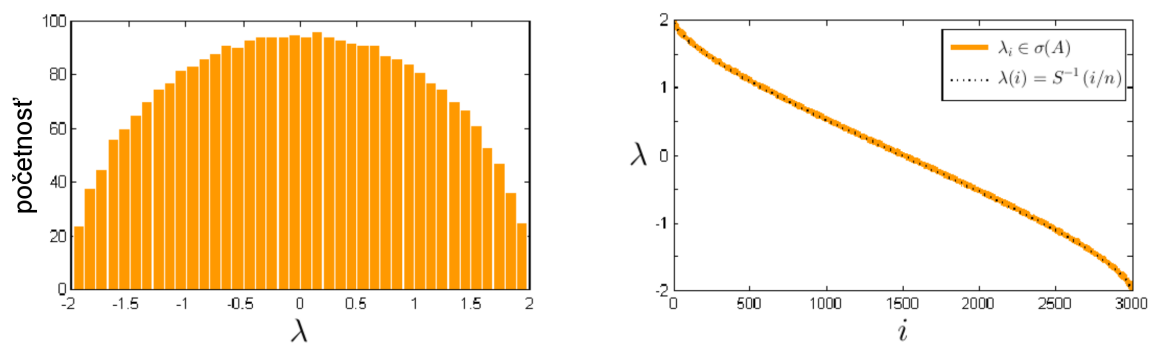
Potom hľadaná funkcia zobrazená napravo na obrázku 3 je  $\lambda(i) = S^{-1} \left( \frac{i}{n} \right)$ . Pre  $i = 1, 2, \dots, n$  táto funkcia udáva, aké vlastné hodnoty má typická hermitovská matica z GUE.

**Obr. 3:** Distribúcia vlastných hodnôt pre veľké  $n$  podľa Wignerovho polkružnicového zákona.



Na obrázku 4 sú vlastné hodnoty konkrétnej matice typu  $3000 \times 3000$  vygenerovanej spomínaným spôsobom porovnané s funkciou  $\lambda(i)$ . Tento výpočet môžeme zopakovať aj pre maticu rozmeru  $k < n$ . Teda vieme povedať viac ako hovorí preplietacia veta, ktorá nám udáva interval, v akom sa vlastné hodnoty podmatice nachádzajú. Pre veľké rozmery matíc môžeme týmto spôsobom vypočítať konkrétnu hodnotu, ktorú vlastná hodnota nadobudne s najväčšou pravdepodobnosťou.

**Obr. 4:** Ľavý obrázok zobrazuje histogram vlastných hodnôt  $3000 \times 3000$  matice. Vidíme, že má takmer presne tvar polkruhu. Napravo je oranžovou zobrazená funkcia  $\lambda(i)$  a čiernou prerušovanou čiarou vlastné hodnoty vygenerovanej matice. Krivky sú skoro totožné. Líšia sa o  $\max_{i=1, \dots, n} \left| \lambda(i) - S^{-1} \left( \frac{i}{n} \right) \right| = 0,00513$ . Takže vlastné hodnoty sme odhadli s presnosťou na 1 desatinné miesto.



### 3 Markovovské matice

Ako sme už spomínali v prvej kapitole, markovovské matice sú reálne nezáporné a súčet ich zložiek po stĺpcoch je 1. Najčastejšie sa vyskytujú pri opisoch tzv. markovovských procesov. Markovovské procesy hovoria o pravdepodobnostiach nastatia istého javu. Aj keď nie sú hlavnou témou tejto práce (viac sa budeme zaoberať vstupno - výstupnými modelmi opísanými markovovskými maticami), spomínáme ich, pretože dobre vysvetľujú vlastnosti markovovských matíc. A navyše princíp je rovnaký pri všetkých aplikáciach týchto matíc.

#### 3.1 Markovovský proces

Markovovský proces je diskretný stochastický proces, teda postupnosť náhodných premenných  $\{X_t\}_{t=1,\dots,\infty}$ , ktoré majú rovnaký obraz  $\{S_1, \dots, S_n\}$  pre všetky  $t$  a platí:

$$\begin{aligned} P(X_t = S_i | X_{t-1} = S_j \wedge X_{t-2} = S_{i_{t-2}}, \dots, \wedge X_1 = S_{i_1}) = \\ = P(X_t = S_i | X_{t-1} = S_j) = \pi_{ij}. \end{aligned}$$

Teda markovovské procesy majú „pamäť“ iba jeden krok dozadu a zbytok sa zabúda. Ak predpokladáme, že pravdepodobnosti  $\pi_{ij}$  prechodu zo stavu  $S_i$  do  $S_j$  sú pre všetky kroky  $t$  konštantné, potom sa celý proces dá opísať maticou prechodu  $M$  a vektorom pravdepodobnostného rozdelenia počiatočného stavu  $p(0)$ . Prvky matice  $M$  sú  $\{\pi_{ij}\}_{i,j=1,\dots,n}$ . Ľahko sa dá nahliadnuť, že každá matica prechodu je markovovská. Prvky matice prechodu sú pravdepodobnosti, teda sú nezáporné. A keďže  $\{S_1, \dots, S_n\}$  je celý obraz náhodných premenných  $X_t$ , platí:

$$\begin{aligned} 1 &= P(X_t = S_1 \vee X_t = S_2 \vee \dots \vee X_t = S_n | X_{t-1} = S_j) = \\ &= \sum_{i=1}^n P(X_t = S_i | X_{t-1} = S_j) = \sum_{i=1}^n \pi_{ij} \quad \forall j = 1, \dots, n, \end{aligned}$$

teda súčet prvkov v stĺpci je rovný jednej. Vektor pravdepodobnostného rozdelenia náhodnej premennej v  $k$ -tom kroku  $p(k) = (p_1(k), \dots, p_n(k))^T$  hovorí, aké sú pravdepodobnosti, že náhodná premenná  $X_k$  nadobudne jednotlivé zo stavov  $S_1, \dots, S_n$ . Teda  $p_i(k) = P(X_k = S_i)$ . Z toho vyplýva, že vektory  $p(k)$  sú nezáporné a súčet ich prvkov je rovný jednej. Teda spĺňajú rovnaké podmienky ako stĺpce markovovskej matice. Každé  $p(k)$  sa dá vyjadriť pomocou počiatočného stavu ako  $p(k) = M^k p(0)$ .

Ak máme model opisujúci situáciu pomocou markovovského procesu, zaujíma nás hlavne dlhodobý vývoj pravdepodobnostného rozdelenia, teda

$$\lim_{k \rightarrow \infty} p(k) = \left( \lim_{k \rightarrow \infty} M^k \right) p(0).$$

Čo ale vieme povedať o mocninách  $M^k$ ? V prípade, že  $M$  je diagonalizovateľná, všetko nám prezradí spektrum  $M$ . Platí  $M^k = S\Lambda^k S^{-1}$ , kde  $S$  je matica vlastných vektorov a  $\Lambda$  je diagonálna matica s vlastnými hodnotami na diagonále. Potom  $p(k)$  sa dá napísať ako

$$p(k) = M^k p(0) = S\Lambda^k S^{-1} p(0) = S\Lambda^k c = c_1 \lambda_1^k x_1 + c_2 \lambda_2^k x_2 + \dots + c_n \lambda_n^k x_n,$$

kde  $c$  je vektor konštánt daný počiatočnými podmienkami systému. Teda stabilita systému závisí od absolútnej hodnoty vlastných čísel  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ . Ak je systém stabilný, pre vektor pravdepodobnostného rozdelenia  $p(k)$  bude rozhodujúci vektor prislúchajúci najväčšej vlastnej hodnote  $\lambda_1$ . Pravdaže markovovská matica nie je vo všeobecnosti diagonalizovateľná, ale aj v takom prípade hrá vektor najväčšej vlastnej hodnoty a spektrum rozhodujúcu úlohu. Podrobne sa tejto problematike venuje publikácia [3] v kapitole 8.4.

### 3.2 Idea vstupno - výstupného modelu

V ekonómii sa markovovské matice využívajú pri vstupno - výstupných modeloch. Povedzme, že máme  $n$  sektorov ekonomiky, ktoré tvoria uzavretú ekonomiku (alebo jej viac-menej izolovanú časť). Každý sektor má vstupy a z nich produkuje výstupy. Výstupy jedného sektora sú vstupmi iného sektora. Ich rozdelenie je zapísané v markovovskej matici. V  $j$ -tom stĺpci matice je rozdelenie výstupu  $j$ -teho sektora medzi vstupy ostatných sektorov a v  $i$ -tom riadku sú časti výstupov všetkých sektorov, ktoré spotrebuje  $i$ -ty sektor. Teda ako sme už spomínali, princíp je naozaj rovnaký ako pri markovovských procesoch, len teraz zložky matice nemajú interpretáciu pravdepodobností, ale určujú, na aké časti sú rozdelené výstupy jednotlivých sektorov. Aby to bolo pochopiteľnejšie, uvidíme ilustračný príklad.

Majme ekonomiku rozdelenú na tri sektory a majme vstupno - výstupnú markovov-



skú maticu

$$M = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{10} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{10} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{4}{5} \end{pmatrix}$$

Podľa matice  $M$  sa výstup prvého sektora rozdelí rovnomerne medzi druhý a tretí sektor. Výstup druhého sektora je rozdelený po tretinách medzi všetky tri sektory. 80% výstupu tretieho sektora zostane v tomto sektore a budú využité znova ako vstupy a ostatných 20% je rovnomerne rozdelených medzi prvý a tretí sektor.

Fakt, že nejaký model je opísaný markovovskou maticou, vyplýva práve z toho, že uvažujeme uzavretú ekonomiku. Teda 100% toho, čo sa vyrobí v jednom sektore, je spotrebované v iných. To je základný predpoklad všetkých prípadov skúmaných v tejto práci. V praxi sa používajú aj nezáporné matice, ktoré nespĺňajú markovovskú vlastnosť. Tými sa ale v tejto práci nebudeme zaoberať.

### 3.3 Spektrum markovovskej matice

Vráťme sa ku vlastným hodnotám markovovskej matice. Čo vieme o nich povedať? Vo všeobecnosti nie sú reálne, na rozdiel od hermitovských matic. Ale keď vezmeme do úvahy definičnú vlastnosť markovovskej matice, môžeme ohraničiť ich absolútnu hodnotu. Maticová 1-norma je maximum zo súčtov zložiek stĺpcov matice. Teda každá markovovská matica  $M$  spĺňa  $\|M\|_1 = 1$ . A podľa tvrdenia 1.1 platí  $\lambda \leq \|M\|_1 = 1$  pre všetky vlastné hodnoty  $M$ . Navyše každá markovovská matica má 1 ako vlastné číslo. Zoberme si transponovanú maticu  $M^T$  a vektor  $x = (1, 1, \dots, 1)^T$ . Vidíme, že platí  $M^T x = 1 \cdot x$ , teda 1 je vlastná hodnota matice  $M^T$  a teda aj matice  $M$ .

Teda spektrum markovovskej matice je celé obsiahnuté v jednotkovom kruhu so stredom v počiatku komplexnej roviny s tým, že 1 je vlastná hodnota. V prípade, že  $\lambda_1 = 1$  je jediná vlastná hodnota spĺňajúca  $|\lambda| = 1$ , potom vektor pravdepodobnostného rozdelenia  $p(k)$  konverguje ku vlastnému vektoru prislúchajúcemu tejto vlastnej hodnote a ostatné vlastné vektory pre iné vlastné hodnoty postupne zaniknú. Ak má  $M$  viac vlastných hodnôt spĺňajúcich  $|\lambda| = 1$ , tieto vlastné hodnoty a vektory zodpovedajú cyklom vyskytujúcim sa v modeli. O tých povieme viac neskôr.

Vo všeobecnosti o spektre markovovskej matice nevieme povedať viac. V praktic-

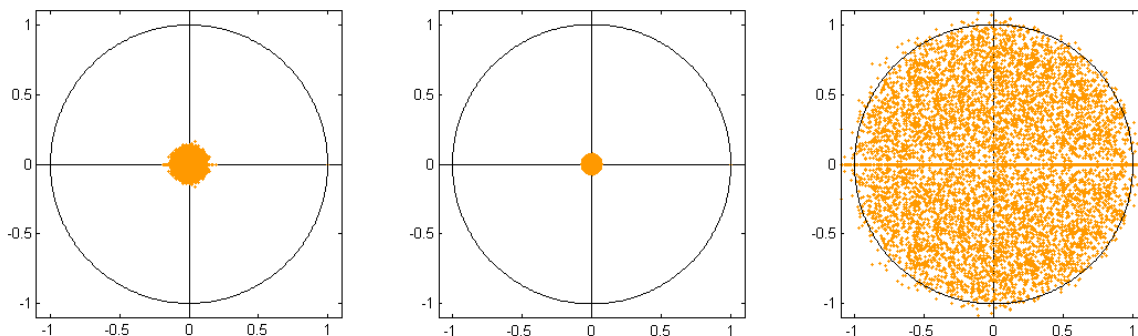
kých aplikáciach ale majú matice aj ďalšie špecifické vlastnosti, ktoré istým spôsobom ovplyvňujú ich spektrum. V nasledujúcej časti sa bližšie pozrieme na tri druhy spektra, aké môže markovovská matica mať. Budeme skúmať spektrá náhodne generovaných matíc, ktoré porovnáme so spektrami empirických matíc získaných z reálnych dát. Pokúsime sa nájsť taký spôsob generovania matíc, aby sa ich spektrum podobalo na spektrum empirických matíc. Generovanie náhodných matíc nám nepovie, aký je všeobecný vzťah vlastných hodnôt matice a podmatice. Získame však vďaka nemu predstavu, ako tento vzťah typicky vyzerá.

### 3.3.1 Rovnako rozdelené náhodné zložky matice

Prirodzene prvým krokom bolo pozorovať, ako vyzerá spektrum náhodnej matice, ktorej zložky sú nezávislé a rovnako rozdelené. Najskôr sme vygenerovali každú zložku matice z daného nezáporného rozdelenia. Potom sme každý stĺpec vydělili súčtom jeho zložiek, čím sme dostali markovovskú maticu. Na obrázku 5 sú zobrazené spektrá 100 takto vygenerovaných matíc typu  $20 \times 20$ . Zložky matice sú z rovnomerného rozdelenia z intervalu  $[0, 1]$ . Pozorujeme kruhový disk rozptýlený okolo počiatku súradnicovej sústavy a okrem toho jednu vlastnú hodnotu rovnú 1. Pri tomto spôsobe generovania je priemerná hodnota každej zložky  $\frac{1}{n}$ . Teda pri zvyšovaní rozmeru matice sa generované matice blížia k matici so všetkými zložkami rovnými  $\frac{1}{n}$ . To by zodpovedalo jednoduchej vlastnej hodnote 1 a  $n - 1$  násobnej vlastnej hodnote 0. A naozaj, so zvyšujúcim sa rozmerom pozorujeme znižovanie polomeru disku (obrázok 5). Môžeme sa pýtať, ako rýchlo sa so zväčšujúcim rozmerom znižuje polomer disku. Pravdaže, závisí to od toho, aké zvolíme počiatočné náhodné rozdelenie zložiek generovanej matice. Ak zvolíme exponenciálne rozdelenie s ľubovoľným kladným parametrom, polomer disku klesá nepriamo úmerne s odmocninou rozmeru matice. Teda ak výslednú maticu prenásobíme normovacím faktorom  $\sqrt{n}$ , pre veľké  $n$  výsledný disk rovnomerne vyplní jednotkový kruh (obrázok 5). Experimenty ukazujú, že toto neplatí pri iných rozdeleniach. Napríklad rovnomerné rozdelenie z intervalu  $[0, 1]$  generuje disk s výrazne menším polomerom ako 1. Viac o tomto jave a náhodných maticiach je v publikácii [1].

Pozrime sa na takúto maticu ako na vstupno - výstupnú. Aký systém opisuje? Je to náhodne homogénny systém bez vnútornej štruktúry. Výstupy každého sektora

**Obr. 5:** Vľavo je spektrum 100 matíc typu  $20 \times 20$ . V strede je spektrum 100 matíc typu  $80 \times 80$ . Pri väčšom rozmere pozorujeme zmenšenie polomeru kruhového disku vlastných hodnôt. Na pravom obrázku je spektrum 100 matíc typu  $80 \times 80$ , ktorých zložky sú z exponenciálneho rozdelenia s parametrom 1 a matice sú pre násobené konštantou  $\sqrt{n}$ .



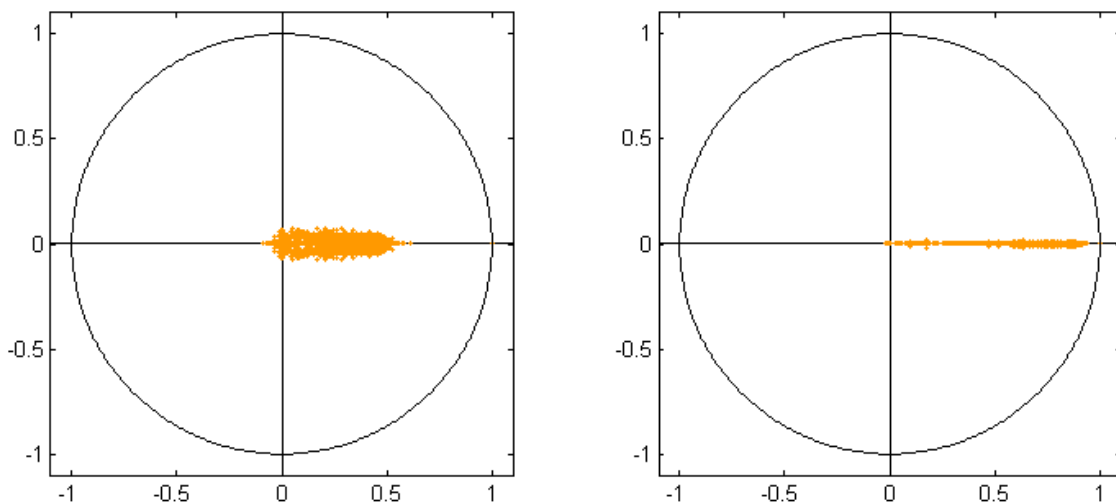
sú náhodne rozdelené medzi ostatné sektory a všetky sektory sú v tejto náhodnosti rovnocenné. Alebo z pohľadu matice prechodu: Ak sme v ľubovoľnom z  $n$  stavov, pravdepodobnosť prejdenia do každého stavu je v priemere  $\frac{1}{n}$ . Dalo by sa to prirovnať k javu známemu ako Brownov pohyb. Je to neusporiadaný náhodný pohyb častíc. Napríklad pohyb molekúl vody v pohári.

### 3.3.2 Náhodné matice s výraznou diagonálou

Ďalším typom matice, ktorú sme generovali je matica s výraznou diagonálou. Zložky mimo diagonály boli generované rovnako ako v predošlom prípade, teda nezávisle z rovnakého rozdelenia. Diagonálne zložky sú z toho istého rozdelenia, len sú pre násobené konštantou  $D > 1$ . Nakoniec je každý stĺpec predelený svojim súčtom. Ak by sme zvolili  $D = 1$ , dostali by sme rovnaké matice a spektrum by tvoril rovnaký kruhový disk ako v predošlom prípade. Pre  $D \gg 1$  pozorujeme „naťahovanie“ disku vlastných hodnôt po kladnej časti reálnej osi. Na obrázku 6 je príklad spektier 100 matíc typu  $20 \times 20$ , ktorých nediagonálne zložky sú z rovnomerného rozdelenia z intervalu  $[0, 1]$  a diagonálne z intervalu  $[0, 10]$  (teda  $D = 10$ ). Pre zvyšujúce sa  $D$  sa matica asymptoticky blíži k diagonálnej matici s jednotkami na diagonále. Spektrum takejto matice je  $n$ -násobná vlastná hodnota 1. Na obrázku 6 sú pre porovnanie  $20 \times 20$  matice s  $D = 100$ .

Takýto spôsob generovania matíc sme zvolili na základe pozorovania empirických

**Obr. 6:** Grafy spektier 100 matíc typu  $20 \times 20$  s diagonálnymi zložkami  $D$ -krát väčšími ako nediagonálnymi. Vľavo je zvolené  $D = 10$ . Vpravo je  $D = 100$ .



vstupno - výstupných matíc. Pre všetky sledované matice platilo, že diagonálne zložky boli rádovo väčšie ako ostatné.<sup>2</sup> Z pohľadu vstupno - výstupného modelu to môžeme interpretovať tak, že väčšina sektorov je do veľkej miery nezávislá. Teda, že veľká časť výstupov ostane v tomto sektore a je použitá ako vstupy v ďalšej výrobe.

Mohli by sme teda očakávať, že takto generované spektrum bude podobné ako spektrum empirických vstupno - výstupných matíc. Ale nie je to tak, pretože tie majú ešte jednu dôležitú vlastnosť, ktorá výrazne ovplyvňuje ich vlastné hodnoty. A to, že sú riedke.

### 3.3.3 Riedke matice

Riedke matice sú matice, ktoré majú veľkú časť zložiek nulových. Čo to znamená „veľká časť“ nie je presne definované, závisí to od konkrétnej situácie. Pri generovaní sme si zvolili konštantu  $p \in (0, 1)$ . Potom každá zložka generovanej matice bola s pravdepodobnosťou  $p$  kladná a s pravdepodobnosťou  $1 - p$  nulová. Kladné zložky sme generovali rovnako ako v prvej časti. Teda ak by sme zvolili  $p = 1$ , dostali by sme rovnaké matice

<sup>2</sup>V tomto prípade sme sledovali dostupné vstupno - výstupné matice pre Rakúsko, Českú republiku a Maďarsko z rokov 1995 až 2009.

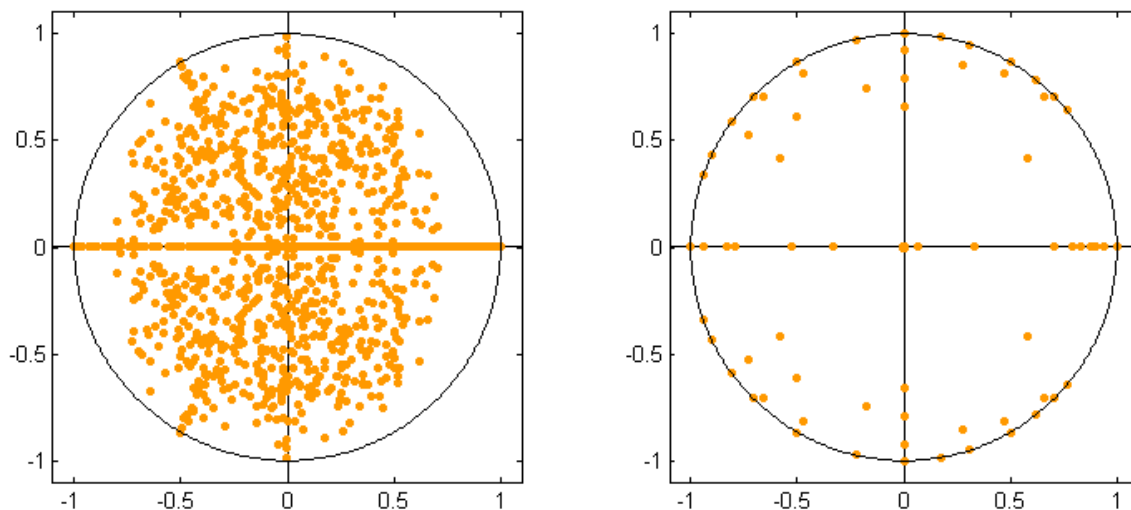
Zdroj: <http://epp.eurostat.ec.europa.eu/portal/page/portal/eurostat/home/>

ako pri generovaní prvým spôsobom. Ak by sme zvolili  $p$  dostatočne malé, môže sa stať, že výsledná matica by mala nulový stĺpec, a teda by nebola markovovská. V tom prípade sme náhode vygenerovali jednu kladnú zložku v takomto stĺpci.

Takto vygenerovaná matica je často singulárna alebo blízka singulárnej, a teda má viacnásobnú vlastnú hodnotu rovnú alebo blízku 0. Keďže platí, že stopa matice je rovná súčtu jej vlastných hodnôt, môžeme očakávať, že nenulové vlastné hodnoty sú v absolútnej hodnote väčšie ako vlastné hodnoty neriedkej matice rovnakých rozmerov. A naozaj môžeme sledovať, že kruhový disk vlastných hodnôt sa „rozptýli“ a v počiatku komplexnej roviny je koncentrovaná viacnásobná nulová vlastná hodnota. Na obrázku 7 je spektrum 100 matíc typu  $20 \times 20$  vygenerovaných týmto spôsobom s parametrom  $p = 0, 1$ . Ak zvolíme  $p$  veľmi blízke nule, vygenerujeme maticu, ktorá má v každom stĺpci iba jednu nenulovú zložku rovnú jednej. Väčšina vlastných hodnôt takejto matice sú nuly. Nenulové vlastné hodnoty ležia na jednotkovej kružnici (obrázok 7). Vieme, že komplexné čísla s absolútnou hodnotou rovnou jednej zodpovedajú nejakej rotácii. Ak sa pozrieme na takúto riedku maticu ako na vstupno - výstupnú, vlastné hodnoty ležiace na jednotkovej kružnici zodpovedajú určitému cyklu v opisovanom systéme. Napríklad vlastná hodnota  $e^{i\frac{\pi}{3}}$  zodpovedá tomu, že výstupy jedného sektora sa všetky zmenia na vstupy iného sektora, ktorého výstupy budú zasa vstupy ďalšieho tretieho sektora a tak ďalej, až po šiestich obdobiach sa opäť všetko vráti do prvého sektora. To zodpovedá tomu, že  $(e^{i\frac{\pi}{3}})^6 = 1$ .

Príkladom riedkych matíc používaných v praxi sú takzvané matice sociálneho účtovníctva alebo SAM matice (Social Accounting Matrix). SAM je maticová reprezentácia národného účtovníctva, pričom sú v nej zaznamenané základné transakcie v ekonomike. Jednotlivé účty, ako napríklad účet výrobkov a služieb, účet tvorby dôchodkov, kapitálový účet a iné [2], sú zoradené do stĺpcov aj riadkov matice. Z toho vyplýva, že SAM matice sú štvorcové. V riadkoch sú prostriedky jednotlivých účtov a v stĺpcoch výdaje. Aj SAM teda chápeme ako istý typ vstupno - výstupnej matice. Viac o SAM maticiach môže čitateľ nájsť v publikáciách [2, 5]. Ukazuje sa, že všetky sledované empirické matice sú do istej miery riedke. V SAM maticiach, ktoré sme použili na porovnanie

**Obr. 7:** Na tomto obrázku sú zobrazené spektrá 100 riedkych matíc typu  $20 \times 20$ . Na ľavom grafe je pravdepodobnosť nenulovej zložky  $p = 0,1$ , na pravom je  $p = 0,01$ .



je približne 80% zložiek nulových.<sup>3</sup> Vstupno - výstupné matice spomínané v predošlej časti 3.3.2 mali asi štvrtinu zložiek nulových.

### 3.3.4 Generovanie náhodných matíc podľa reálnych dát

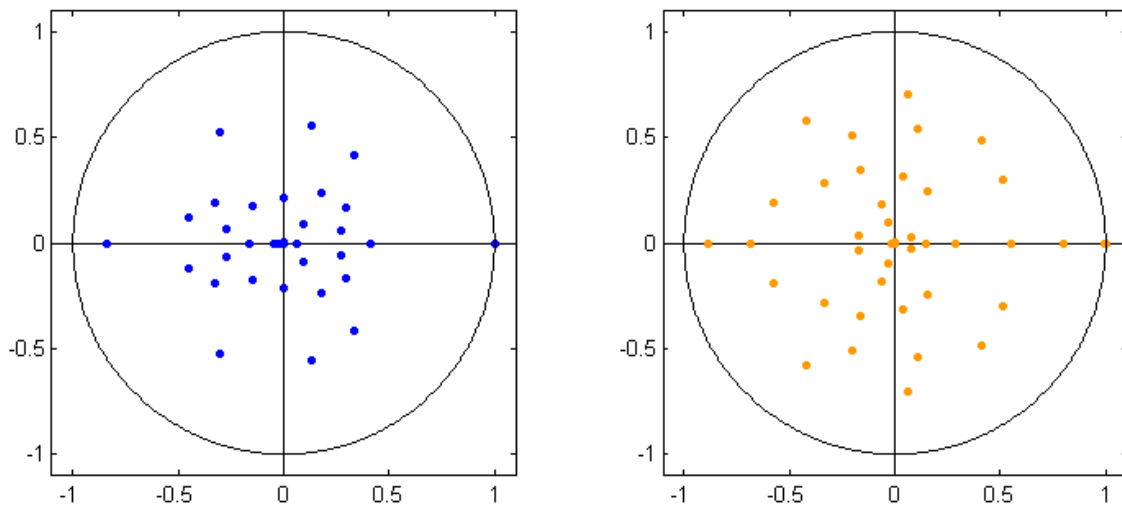
Ak použijeme tretí spôsob generovania náhodných matíc (3.3.3) so správne zvoleným parametrom  $p$ , potom spektrum náhodne generovanej matice je veľmi podobné spektru empirických SAM matíc. Porovnanie je na obrázku 8. Generovali sme maticu rovnakého rozmeru ako boli príslušné SAM matice a zvolili sme parameter  $p = 0,05$ . Na grafe spektra empirickej matice vidíme, že okrem  $\lambda_1 = 1$  nemá vlastné hodnoty na jednotkovej kružnici. Ale má také, ktoré majú absolútnu hodnotu blízku 1. Tie zodpovedajú tlmeným cyklom v účtovníctve.

Aj vstupno - výstupné matice spomínané v časti (3.3.2) vieme simulovať náhodným generovaním. Použili sme kombináciu druhého a tretieho spôsobu. Teda každá zložka matice je s pravdepodobnosťou  $(1 - p)$  nulová a diagonálu vygenerujeme  $D$ -krát väčšiu ako ostatné zložky. Porovnanie je na obrázku 9. Generovaná matica má rovnaký rozmer ako príslušné vstupno - výstupné matice a parametre sme zvolili  $p = 0,25$  a  $D = 8$ .

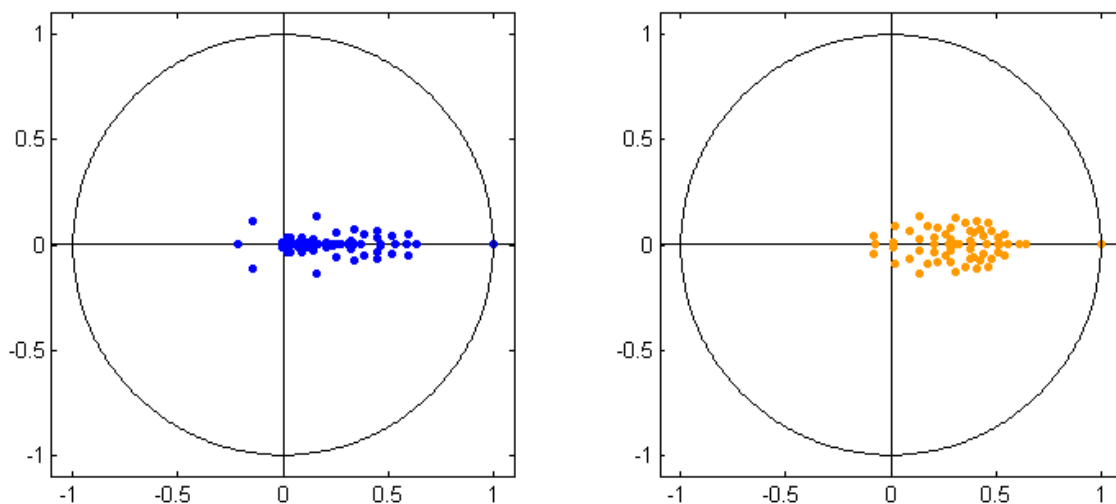
<sup>3</sup>Sledovali sme SAM matice z rokov 2004 až 2007 pre Egypt, Maroko, Tunis a Južnú Afriku.

Zdroj: [http://www.un.org/en/development/desa/policy/capacity/output\\_sam.shtml](http://www.un.org/en/development/desa/policy/capacity/output_sam.shtml)

**Obr. 8:** Porovnanie spektra empirickej matice (modrou vľavo) a spektra vygenerovanej matice (oranžovou vpravo). Obe matice sú typu  $53 \times 53$ . Empirická matica je SAM matica pre Egypt za rok 2006.



**Obr. 9:** Porovnanie spektra empirickej matice (modrou vľavo) a spektra vygenerovanej matice (oranžovou vpravo). Obe matice sú typu  $61 \times 61$ . Empirická matica je vstupno - výstupná matica Českej republiky z roku 2000.



### 3.4 Podmatice markovovských matic

V predošlej kapitole sme skúmali vzťah hermitovskej matice a podmatice. Podmatica vznikla kolmou projekciou obdĺžnikovou maticou (3). Jednoduchým príkladom takejto projekcie je vynechanie niekoľkých stĺpcov a príslušných riadkov. To dáva zmysel, pretože potom aj podmatica je hermitovská. Teraz si zoberme situáciu, že máme markovovskú maticu a z nej vynecháme stĺpec a príslušný riadok. Ak vynechaný riadok nebol nulový, dostaneme podmaticu, ktorá nie je markovovská, pretože súčet zložiek aspoň v jednom stĺpci bude menší ako 1. Ak máme markovovský proces popísaný maticou a chceme ho zjednodušiť napríklad vynechaním alebo zlúčením niektorých stavov, chceme vlastne vyrobiť podmaticu pôvodnej matice. Ale proces má byť stále markovovský, preto chceme aby aj podmatica bola markovovská.

V nasledujúcej časti rozoberieme na rôznych príkladoch, ako môžeme vyrobiť podmaticu s tým, aby sme zachovali markovovskú vlastnosť. Je veľa spôsobov, ako to dosiahnuť, a nedá sa povedať, že by bol iba jeden ten správny. Záleží to od situácie, ktorú chceme opísať.

#### 3.4.1 Vylúčenie jedného zo stavov

Majme bludisko zložené z troch miestností, ktoré sú navzájom poprepájané tunelmi. V bludisku behá myš, ktorá si v každej miestnosti náhodne vyberie jeden vchod do tunela a ním prejde do inej (alebo tej istej) miestnosti. Každý tunel si vyberie s rovnakou pravdepodobnosťou, teda záleží iba na počte vchodov do tunelov, ktoré vedú do jednotlivých miestností. Na obrázku 10 je zobrazená konkrétna situácia. Šípkami sú znázornené jednotlivé tunely. Ak vieme, s akou pravdepodobnosťou je myš v jednotlivých miestnostiach, pomocou matice prechodu môžeme zistiť pravdepodobnostné rozdelenia pre všetky ďalšie časové okamihy. Matica prechodu v tomto príklade je

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{5} & \frac{1}{2} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{5} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{5} & 0 \end{pmatrix}.$$

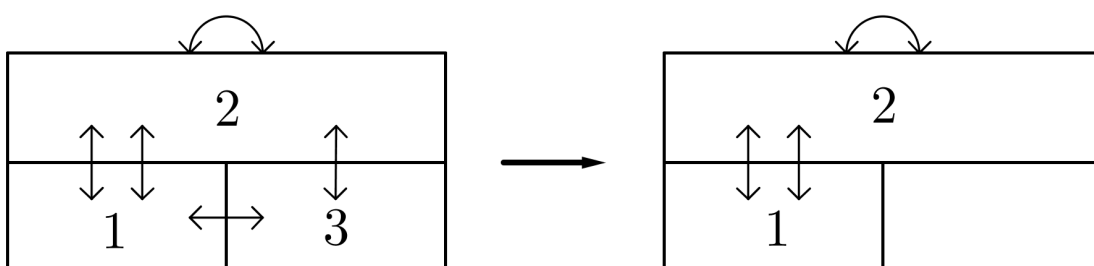
Teraz situáciu zmeníme tým, že vyradíme tretiu miestnosť z bludiska a všetky tunely s ňou spojené. Vidíme, že matica prechodu teraz bude  $B = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ . Matica B vznikla



z  $A$  vynechaním tretieho stĺpca a riadku a následným prenasobením stĺpcov. Maticovo to môžeme napísať

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & \frac{5}{4} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

**Obr. 10:** Bludisko s tromi miestnosťami opísané maticou  $A$  a zjednodušené bludisko opísané maticou  $B$ .



Vo všeobecnosti vyzerajú vzťahy nasledovne. Máme maticu  $A$  typu  $n \times n$  a chceme ju zúžiť na maticu typu  $k \times k$ , tým že vynecháme  $n - k$  z pôvodných  $n$  stavov ( $k < n$ ). Pre jednoduchosť zápisu si stavy zoradíme tak, že vynecháme posledných  $n - k$  stavov. Potom platí

$$B_{k \times k} = \begin{pmatrix} 1 & & 0 & \dots & 0 \\ & \ddots & \vdots & & \vdots \\ & & 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}_{k \times n} A_{n \times n} \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_k \\ 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}_{n \times k} = U A V^T,$$

kde  $v_i = \frac{1}{1 - \sum_{j=k+1}^n a_{ij}}$ .

### 3.4.2 Zlúčenie dvoch sektorov

Majme vstupno - výstupnú maticu, ktorá opisuje vzťahy medzi  $n$  sektormi. Povedzme, že z nejakého dôvodu je  $n$  sektorov príliš veľa a my chceme maticu s menšími rozmermi.

Vyberieme niektoré sektory, ktoré sú dostatočne podobné a zlúčime ich do jedného všeobecnejšieho sektora. Napríklad sektory spracovania železa, ostatných ťažkých kovov a farebných kovov zlúčime do sektora hutníctvo. Rozoberieme konkrétny ilustračný príklad.

Máme tri sektory: poľnohospodárstvo, strojárstvo a služby. Vzťahy medzi sektormi v tomto poradí popisuje matica  $A$ . Veľkosť výroby jednotlivých sektorov je zapísaná do vektora  $v$ .

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{2}{5} & \frac{3}{10} \\ \frac{3}{8} & \frac{1}{2} & \frac{3}{10} \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{10} & \frac{2}{5} \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} 1600 \\ 2000 \\ 1000 \end{pmatrix}$$

Zložky  $A$  vyjadrujú pomerné rozdelenie výroby medzi dané sektory, zložky  $v$  vyjadrujú objem výroby v peniazoch. Teda napríklad strojárstvo vyrobí produkty v hodnote 2000, ktoré sú rozdelené nasledovne:  $\frac{2}{5} \cdot 2000 = 800$  do poľnohospodárstva,  $\frac{1}{2} \cdot 2000 = 1000$  do strojárstva a  $\frac{1}{10} \cdot 2000 = 200$  do služieb.

Chceme zlúčiť poľnohospodárstvo a strojárstvo do jedného výrobného sektoru a vytvoriť vstupno - výstupnú maticu  $B$  opisujúcu vzťahy medzi výrobným sektorom a sektorom služieb. Teda jednoducho sčítame produkty jednotlivých sektorov s tým, že prvý a druhý sektor berieme ako jeden. Zložky matice  $B$  teda sú

$$b_{11} = \frac{v_1(a_{11} + a_{12}) + v_2(a_{21} + a_{22})}{v_1 + v_2} = \frac{1400 + 1800}{3600} = \frac{8}{9},$$

$$b_{12} = \frac{v_3(a_{13} + a_{23})}{v_3} = \frac{3}{5},$$

$$b_{21} = \frac{v_1 a_{31} + v_2 a_{32}}{v_1 + v_2} = \frac{200 + 200}{3600} = \frac{1}{9},$$

$$b_{22} = a_{33} = \frac{2}{5}.$$

Vidíme, že v tomto prípade nám na vytvorenie podmatice nestačí iba informácia z pôvodnej matice  $A$ , ale potrebujeme aj dodatočnú informáciu o vzájomnej veľkosti sektorov, ktoré chceme zlučovať. Ak označíme  $\alpha_1 = \frac{v_1}{v_1 + v_2} = \frac{1}{2}$  a  $\alpha_2 = \frac{v_2}{v_1 + v_2} = \frac{1}{2}$ , môžeme zúženie zapísať maticovo:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{8}{9} & \frac{3}{5} \\ \frac{1}{9} & \frac{2}{5} \end{pmatrix}.$$

Tento vzťah môžeme zovšeobecniť. Majme vstupno - výstupnú maticu  $A$  typu  $n \times n$  opisujúcu vzťah  $n$  sektorov a  $n$ -rozmerný vektor veľkosti výroby  $v$ . Zlúčime  $n - k + 1$  sektorov do jedného tak, aby sme dostali maticu  $B$  typu  $k \times k$ . Pre jednoduchosť označenia sú sektory zoradené tak, aby sme zlučovali posledných  $n - k + 1$  sektorov. Označme relatívnu veľkosť zlučovaných sektorov  $\alpha_i = \frac{v_{i+k-1}}{\sum_{j=k}^n v_j}$  pre  $i = 1, \dots, n - k + 1$ . Potom  $B$  môžeme napísať nasledovne:

$$B_{k \times k} = \begin{pmatrix} 1 & & & & 0 & \dots & 0 \\ & 1 & & & \vdots & & \vdots \\ & & \ddots & & 0 & \dots & 0 \\ & & & 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}_{k \times n} A_{n \times n} \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & \ddots & & \vdots \\ & & 1 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \alpha_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \alpha_{n-k+1} \end{pmatrix}_{n \times k} = U A V^T. \quad (5)$$

S tým, že platí  $\sum_{i=1}^{n-k+1} \alpha_i = 1$ .

**Poznámka 3.1.** Toto zúženie môžeme tak isto ako v prípade hermitovských matíc (3) chápať ako projekciu (platí  $(V^T U)(V^T U) = V^T U$ ). Aby to bola špeciálne kolmá projekcia, musí platiť  $(V^T U)^T = V^T U$ , z čoho vyplýva  $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_{n-k+1}$ .

Ukázali sme teda, že podmaticu z markovovskej matice môžeme vyrobiť rôzne a záleží iba od konkrétnej situácie, ktorý spôsob je správny. V tejto práci sa zaoberáme hlavne vstupno - výstupnými a SAM maticami, respektíve maticami generovanými podľa nich. Preto budeme pri skúmaní vzťahu spektra matíc a podmatíc využívať zúženie dané vzťahom (5).

### 3.5 Spektrum podmatice markovovskej matice

V predošlých častiach práce sme zistili, ako typicky vyzerá spektrum markovovskej matice a vieme aj, ako správne skonštruovať podmaticu (vzťah (5)). V tejto kapitole sa pozrieme na to, ako sa zmení spektrum matice po jej zúžení. Pre hermitovské matice vieme, že platí preplietacia veta 2.3. Teda vieme, že vlastné hodnoty podmatice sú ohraničené najväčšou a najmenšou vlastnou hodnotou pôvodnej matice. Mohla by nejaká podoba preplietacej vety platiť aj pre markovovské matice a jej podmatice?

Tu narážame na viaceré komplikácie. Hermitovské matice sú unitárne diagonalizovateľné. Markovovské matice vo všeobecnosti nie sú diagonalizovateľné. Teda nemôžeme zopakovať úvahy z druhej kapitoly, pri ktorých sme takmer vždy využívali fakt, že máme k dispozícii ortonormálnu bázu vlastných vektorov. Ďalej, vlastné hodnoty hermitovskej matice sú reálne. Pre markovovskú maticu môže byť vlastná hodnota ľubovoľné komplexné číslo s absolútnou hodnotou menšou alebo rovnou 1. Teda vlastné hodnoty nemôžeme zoradiť od najväčšej po najmenšiu, a teda ťažko môžeme dúfať v nejaké nerovnosti medzi vlastnými hodnotami matice a podmatice ako v prípade hermitovských matíc.

Napriek tomu, keď máme maticu typu  $50 \times 50$  a zúžime ju na maticu typu  $49 \times 49$ , priveľmi maticu nezmeníme a teda môžeme predpokladať, že ani spektrum sa veľmi nezmení. Intuitívnym zovšeobecnením preplietacej vety môže byť, že vlastné hodnoty matice tvoria hranicu oblasti, v ktorej sú aj vlastné hodnoty podmatice. Konkrétne, že vlastné hodnoty podmatice patria do konvexného obalu vlastných hodnôt pôvodnej matice. Simulácie ukazujú, že typicky to je naozaj tak, ale môžeme nájsť pomerne jednoduchý protipríklad tohoto tvrdenia. V nasledujúcom príklade ukážeme, ako veľmi sa môže zmeniť spektrum matice jej zúžením.

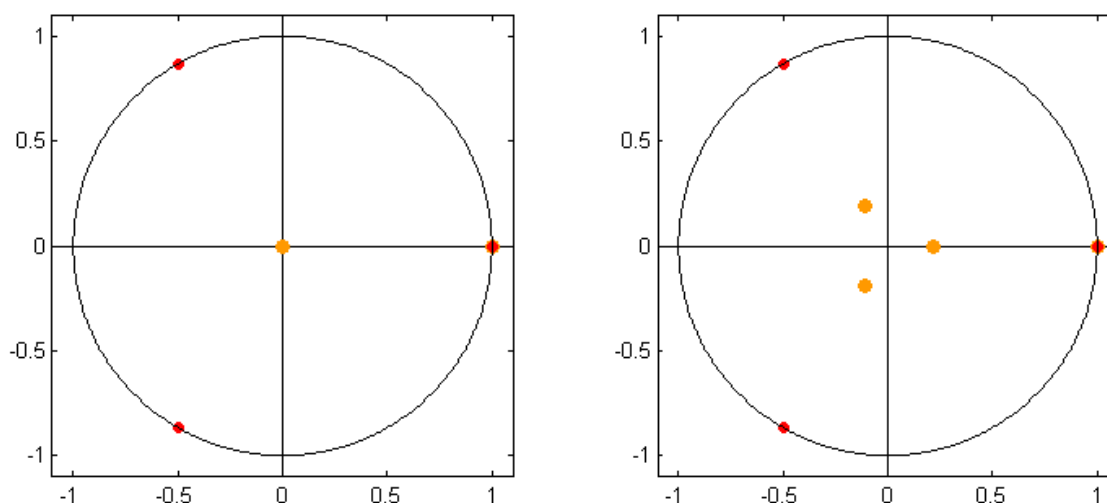
Majme markovovskú maticu  $A$  typu  $4 \times 4$ , ktorú zúžime zlúčením 3. a 4. riadku a stĺpca na maticu  $B$  typu  $3 \times 3$  pomocou vzorca (5). Aby sme dosiahli maximálny rozptyl spektra, zvolíme relatívne veľkosti sektorov  $\alpha_3 = 1$  a  $\alpha_4 = 0$ . Matice  $A$  a  $B$  vyzerajú nasledovne:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & 1 - \varepsilon & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (6)$$

Ak je  $\varepsilon = 0$ , potom  $A$  má jednoduchú vlastnú hodnotu 1 a trojnásobnú vlastnú hodnotu 0. Ale vlastné hodnoty  $B$  sú 1,  $e^{\frac{2}{3}\pi i}$  a  $e^{\frac{4}{3}\pi i}$ , čo sú čísla ležiace na jednotkovej kružnici. Teda spektrum koncentrované v nule explodovalo až na okraj jednotkovej kružnice. Vidíme, že vlastné hodnoty  $B$  nie sú v konvexnom obale vlastných hodnôt  $A$ . Práve naopak. Dá sa povedať, že sú najďalej ako môžu byť vzhľadom na hranicu spektra vyplývajúcu z markovovskej vlastnosti  $B$ .

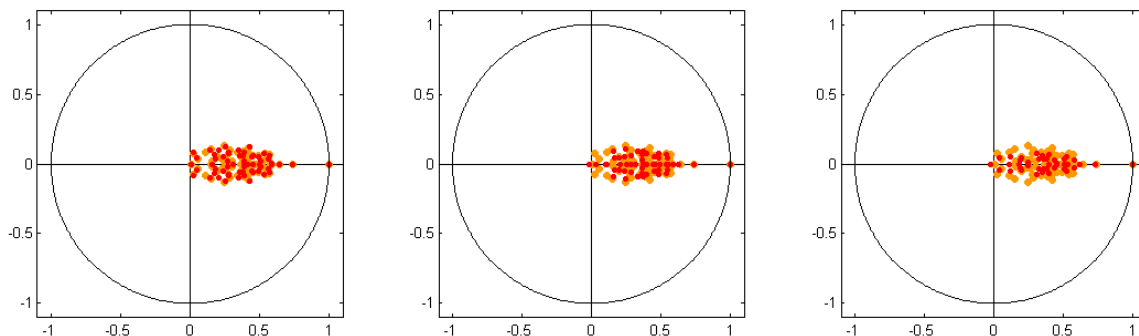
Fakt, že vlastné hodnoty  $A$  a  $B$  sa takto extrémne líšia, súvisí s tým, že pre malé  $\varepsilon$  je matica  $A$  skoro singularná ( $\det A = \varepsilon$ ). A singularne matice majú nestabilné spektrum vzhľadom na perturbáciu. Na obrázku 11 sú spektrá matíc  $A$  a  $B$  pre  $\varepsilon = 0$  a  $\varepsilon = 0,01$ . Vidíme, že zmena vlastných hodnôt skoro singularnej matice  $A$  je rádovo väčšia ako zmena  $\varepsilon$ .

**Obr. 11:** Spektrum matice  $A$  (oranžovou) a matice  $B$  (červenou). Vľavo pre  $\varepsilon = 0$ , vpravo pre  $\varepsilon = 0.01$ .

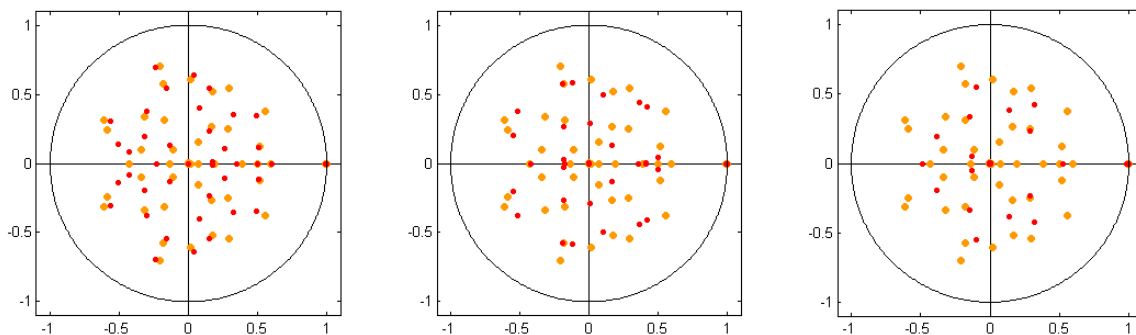


Vzhľadom na tento príklad to vyzerá tak, že všeobecné tvrdenie pre markovovské matice, ktoré by ohraňovalo vlastné hodnoty podmatice pomocou vlastných hodnôt pôvodnej matice neplatí. Toto je však veľmi špecifický príklad. Pozrime sa na to, ako to vyzerá s maticami podobnými empirickým vstupno - výstupným a SAM maticiam. Na obrázkoch 12 a 13 sú zobrazené spektrá rôznych matíc generovaných spôsobom opísaným v časti 3.3.4 a ich podmatíc vytvorených spôsobom (5). Pre tieto matice takmer vždy platí, že vlastné hodnoty podmatice patria do konvexného obalu vlastných hodnôt matice. Podobne je to aj pri Krylovových projekčných metódach. Tie fungujú dobre pre takmer všetky matice, ale môžeme nájsť aj protipríklad, kde to nefunguje.

**Obr. 12:** Na generovanie týchto matíc sme použili spôsob opísaný v 3.3.4 podľa vstupno - výstupných matíc. Obrázky zobrazujú matice typu  $61 \times 61$  (oranžovou) a jej podmatíc (červenou). V prvom prípade sme maticu zúžili iba o 1 riadok a stĺpec a vidíme, že spektrum sa takmer vôbec nezmenilo. V druhom obrázku sme zlúčili 11 sektorov do jedného. V treťom 21.



**Obr. 13:** Tieto tri obrázky zobrazujú spektrum matice typu  $53 \times 53$  (oranžovou) generovanej spôsobom opísaným v 3.3.4 podľa SAM matíc a spektrum jej podmatíc (červenou). Znova sme v prvom prípade maticu zúžili iba o 1 riadok a stĺpec, v druhom o 10 a v treťom o 20. Spektrum podmatíc je celkovo podobné pôvodnému spektru. Toto je typický príklad, ako situácia vyzerala pri všetkých simuláciach. Nikdy sme nesledovali niečo podobné protipríkladu 6.



## 4 Vlastné vektory

Zatiaľ sme sa v tejto práci zaoberali iba vzťahmi medzi vlastnými hodnotami matice a podmatice. To bolo preto, že našou pôvodnou motiváciou bola preplietacia veta pre vlastné hodnoty hermitovských matíc a pri tejto triede matíc to naozaj stačilo. Poznáme nerovnosti medzi vlastnými hodnotami a vieme, že sú navzájom prepletené bez toho, aby sme niečo vedeli o vlastných vektoroch. No tie sú neoddeliteľnou súčasťou diagonalizácie matice a teda veľmi úzko súvisia s vlastnými hodnotami.

Ako sme zistili v predchádzajúcej kapitole, pre markovovské matice nám vo všeobecnosti nestačí poznať spektrum matice na to, aby sme vedeli niečo povedať o spektre jej podmatice. To nás vedie k skúmaniu toho, ako sa správajú vlastné vektory pri zúžení matice. Keďže tejto téme sme sa v tejto práci ešte nevenovali, budeme sa zaoberať jednoduchšími triedami matíc. A to diagonálnymi a symetrickými maticami.

Vieme, že zúženie matice je istý typ projekcie. Pri symetrických maticiach typu  $n \times n$  sme vynechali  $n$  - tý riadok a stĺpec, čo zodpovedá kolmej projekcii z  $n$  - rozmerného priestoru do  $(n - 1)$  - rozmerného podpriestoru. Projektujeme na podpriestor prvých  $(n - 1)$  súradníc pozdĺž podpriestoru  $n$  - tej súradnice. Matica takejto projekcie je  $U = (I_{n-1 \times n-1} \quad 0_{n-1 \times 1})$ . Potom  $B = UAU^T$ , kde  $A$  je pôvodná matica a  $B$  je podmatica. Nás zaujíma, ako sa zmenia vlastné vektory takýmto zúžením matice. Keďže  $A$  má  $n$  - rozmerné vlastné vektory, budeme porovnávať ich projekcie do  $(n - 1)$  - rozmerného priestoru s vlastnými vektormi  $B$ . Matice vlastných vektorov  $A$ ,  $B$  označíme  $S_1, S_2$ . Potom projekcie vlastných vektorov  $A$  sú  $US_1$ . Otázkou je, či sa pôvodné vektory sprojektujú priamo na vlastné vektory podmatice. A ak nie, ako veľmi sa líšia?

Symetrické matice sú ortogonálne diagonalizovateľné, teda skalárny súčin dvoch rôznych vlastných vektorov je 0. Skalárny súčin vlastného vektora samého zo sebou je druhá mocnina jeho normy, ktorú vieme zabezpečiť, aby bola rovná 1. Zostrojme teda maticu skalárnych súčinov sprojektovaných vlastných vektorov  $A$  s vlastnými vektormi  $B$ . Je to matica  $X = S_2^T US_1$ . Ak sa tieto vektory veľmi nelíšia, matica  $X$  by sa mala podobáť identite.

## 4.1 Diagonálne a symetrické matice

Najprv sa pozrime na diagonálnu maticu. Tá už je v diagonálnom tvare a teda matica jej vlastných vektorov je identita. Ak urobíme projekciu na  $k$  rozmerný podpriestor, matica  $X$  bude typu  $k \times n$  a bude to identická matica bez  $n - k$  vynechaných riadkov. Je  $\binom{n}{k}$  spôsobov, ako zvoliť  $k$  súradníc, ktoré projekciou nezahodíme, teda je  $\binom{n}{k}$  rôznych matíc  $X$ , ktoré môžu vzniknúť. Ak budeme predpokladať, že každý výber  $k$  súradníc má rovnakú pravdepodobnosť, môžeme zistiť ako vyzerá priemerná matica  $\bar{X}$ . Pre názornosť najskôr uvedieme príklad pre konkrétne  $n, k$  a až potom odvodíme všeobecnú formulu pre  $\bar{X}$ .

Uvažujme situáciu  $n = 4, k = 2$ . Máme  $\binom{4}{2} = 6$  možností rôznych matíc  $X$ :

$$\begin{aligned} X_1 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & X_2 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, & X_3 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \\ X_4 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, & X_5 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, & X_6 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Priemerná matica  $\bar{X}$  potom vyzerá

$$\bar{X} = \frac{1}{6} (X_1 + X_2 + \dots + X_6) = \begin{pmatrix} \frac{3}{6} & \frac{2}{6} & \frac{1}{6} & 0 \\ 0 & \frac{1}{6} & \frac{2}{6} & \frac{3}{6} \end{pmatrix}$$

Pozrime sa teraz na všeobecný prípad matice  $\bar{X}$  typu  $n \times k$ . Nech  $x_{ij}$  je prvok matice  $X$  so súradnicami  $i, j$ . Koľko je rôznych spôsobov zvolenia  $k$  súradníc tak, aby bol prvok  $x_{ij} = 1$ ? Vieme, že zo stĺpcov  $1, 2, \dots, j - 1$  je  $i - 1$  takých, že obsahujú 1. A tak isto zo stĺpcov  $j + 1, j + 2, \dots, n$  je  $k - i$  takých, že obsahujú 1. Spolu je teda  $\binom{j-1}{i-1} \cdot \binom{n-j}{k-i}$  rôznych matíc  $X$  typu  $k \times n$ , ktoré majú  $x_{ij} = 1$ . Toto platí, ak sú jednotlivé kombinačné čísla definované. Teda ak  $j \geq i$  a súčasne  $n - j \geq k - i$ . V opačnom prípade je  $x_{ij} = 0$  pre všetky matice  $X$ . Ďalej vieme, že všetkých matíc  $X$  je  $\binom{n}{k}$ , teda môžeme explicitne napísať maticu  $\bar{X}$ :

$$\bar{x}_{ij} = \begin{cases} \frac{\binom{j-1}{i-1} \cdot \binom{n-j}{k-i}}{\binom{n}{k}}, & \text{ak } n - j \geq k - i \quad \wedge \quad j \geq i \\ 0 & \text{inak.} \end{cases}$$

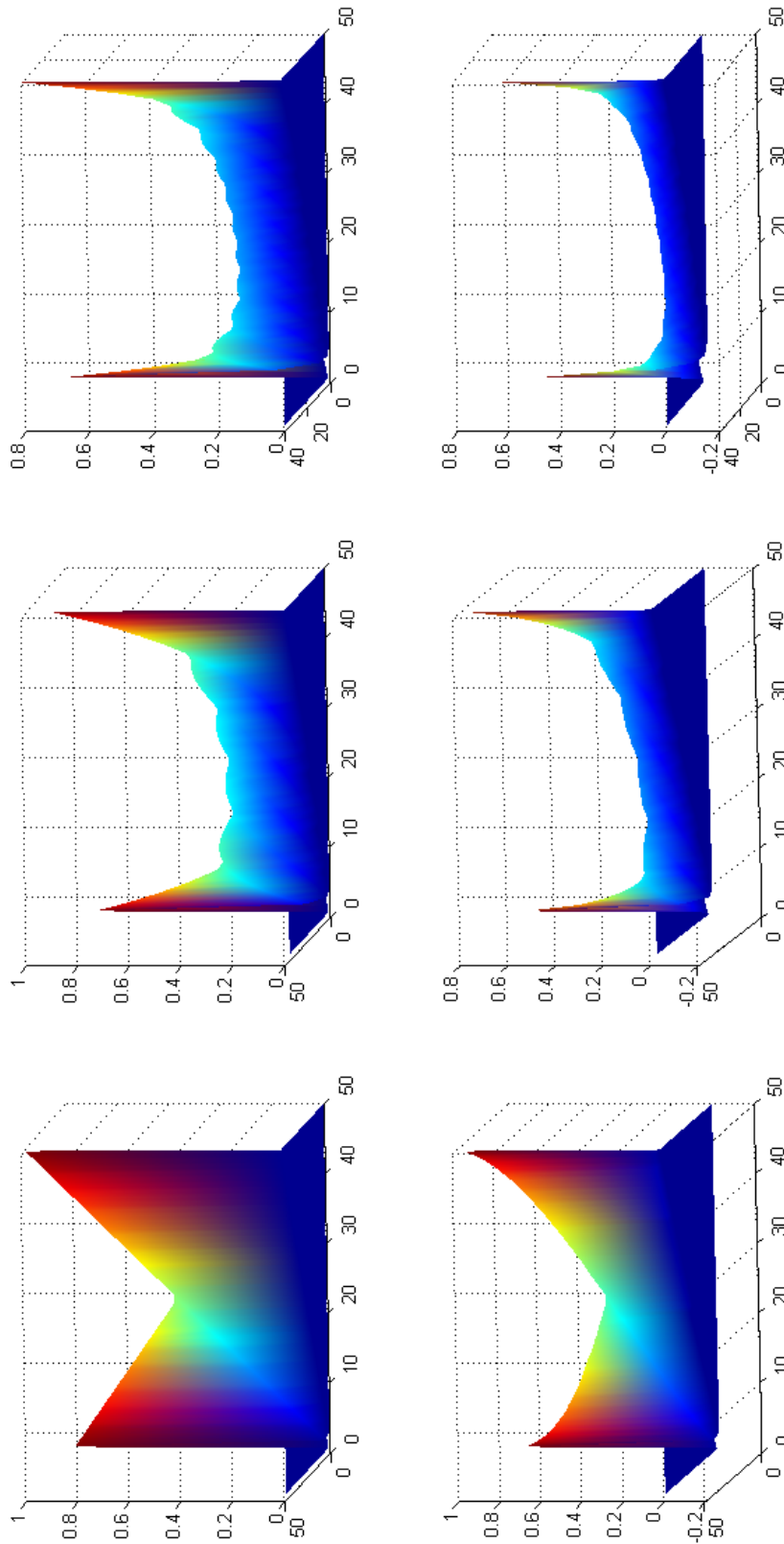


Pre symetrické matice je situácia zložitejšia. Vlastné vektory tvoria ortonormálnu bázu. Ale tá je pre každú maticu inak otočená vzhľadom na súradnicovú sústavu, teda nevieme, ako bude vyzeráť ich projekcia po vynechaní poslednej súradnice, respektíve posledných  $(n - k)$  súradníc. Aj keď nepoznáme jednoduchý explicitný vzťah ako pri diagonálnych maticiach, môžeme zistiť, ako približne vyzerá matica  $\bar{X}$  pre symetrické matice pomocou Monte Carlo simulácií.

Náhodne vygenerujeme symetrickú maticu typu  $n \times n$ , vypočítame jej vlastné vektory a ich projekcie do  $k$  - rozmerného podpriestoru, zúžime ju na  $k \times k$  podmaticu a vypočítame aj jej vlastné vektory. Potom zostrojíme maticu skalárnych súčinov sprojektovaných vlastných vektorov matice a vlastných vektorov podmaticy - maticu  $X^{sym}$  typu  $k \times n$ . Po veľa opakovaní zistíme priemer všetkých matíc  $X^{sym}$ , ktorý označíme  $\bar{X}^{sym}$ .

Výsledky takýchto simulácií a matice  $\bar{X}$  v prípade diagonálnych matíc sú zobrazené na obrázku 14. Simulácie ukazujú, že pre ľubovoľné zvolené symetrické náhodné rozdelenie, z ktorého volíme zložky matíc, je tvar matice  $\bar{X}^{sym}$  rovnaký. Diagonálna časť je podobná matici  $\bar{X}$ . Diagonálnou časťou pri matici typu  $k \times n$  rozumieme zložky  $x_{ij}$ , pre ktoré platí  $j < i$  alebo  $j > i + (n - k)$ . Práve tieto sú v matici  $\bar{X}$  nenulové. Pri matici  $X^{sym}$  sú všeobecne všetky zložky nenulové, aj keď tie mimo diagonálnej časti sú malé. To je dôsledok faktu, že pri diagonálnych maticiach boli projekcie vlastných vektorov buď tie isté vlastné vektory alebo nulové vektory, ale pri symetrických maticiach rôzne natočenie vlastných vektorov spôsobilo, že ich projekcia môže byť čokoľvek v rozmedzí od pôvodného vlastného vektora až po nulový vektor. To spôsobilo, že matica  $\bar{X}^{sym}$  má „rozšírenú diagonálu“ oproti  $\bar{X}$  a taktiež nedosahuje až hodnotu 1. Okrem toho je tvar diagonál podobný. Pri  $\bar{X}$  a aj pri  $\bar{X}^{sym}$  pozorujeme  $n - k - 1$  „kopčekov“ a  $n - k$  „sedieli“.

**Obr. 14:** Prvé tri grafy sú matice  $\bar{X}$  pre diagonálne matice typu  $50 \times 50$  zúžené postupne o 1, 5 a 10 riadkov a stĺpcov. Ďalšie tri grafy sú matice  $\bar{X}^{sym}$  pre symetrické matice typu  $50 \times 50$  zúžené postupne o 1, 5 a 10 riadkov a stĺpcov. Na  $x$ -ovej a  $y$ -ovej osi sú indexy zložiek matice a na  $z$ -ovej osi je hodnota príslušnej zložky matice.



## Záver

V tejto práci sme sa zaoberali otázkou spektier matíc a tým, aký majú vzťah so spektrom svojich podmatíc. Práca je rozdelená na tri časti: Hermitovské matice, Markovské matice a krátka časť o vlastných vektoroch matíc a podmatíc.

Prvá časť je venovaná hermitovským maticiam. Vzťah spektier hermitovských matíc a podmatíc je známy a bol motiváciou tejto práce - Cauchyho preplietacia veta (2.3). Tá hovorí, že vlastné hodnoty podmatice môžeme ohraničiť nerovnosťami s vlastnými hodnotami pôvodnej matice. V tejto časti sme zhrnuli a doplnili známu teóriu. Odvodili sme tvrdenia potrebné na dôkaz preplietacej vety a doplnili sme tvrdenie samotnej vety pre ľubovoľnú kolmú projekciu. Záver kapitoly je venovaný geometrickej interpretácii tejto vety (2). Na to sme využili singulárny rozklad matice. Ukázali sme súvis medzi vlastnými a singulárnymi hodnotami pre hermitovské matice a vysvetlili sme preplietanie vlastných hodnôt v rámci kolmých projekcií.

V ďalšej časti sme sa zaoberali markovovskými maticami. V skratke sme čitateľa oboznámili s konceptom markovovských procesov (kapitola 3.1) a vstupno - výstupných modelov (kapitola 3.2). Ďalšia časť práce bola venovaná spektru markovovskej matice. Ukázali sme, že všetky vlastné hodnoty sa nachádzajú v jednotkovom kruhu so stredom v počiatku komplexnej roviny.

Rozobrali sme rôzne typy matíc vygenerovaných na základe empirických ekonomických dát a vytvorili sme spôsob, ako náhodne generovať matice so spektrom s rovnakými vlastnosťami, aby sme mohli lepšie skúmať, ako sa menia vlastné hodnoty pri zúžení (3.3.4). Na to bolo treba zdefinovať nový spôsob zúženia markovovskej matice, ktorý zachováva markovovské vlastnosti. Odvodili sme ho pre situáciu vyradovania a zlučovania sektorov. Pre vstupno - výstupné matice zúženie zodpovedá zlúčeniu niektorých sektorov (5) skúmanej ekonomiky, teda zjednodušeniu modelu.

Všeobecne pre markovovské matice neplatí, že by sme mohli vlastnými hodnotami matice ohraničiť nejakým spôsobom vlastné hodnoty jej podmatice, čo sme ukázali na konkrétnom príklade (6). Napriek tomu, simulácie ukázali, že pre bežne sa vyskytujúce empirické matice je zmena spektra zúžením o poznanie menšia a typicky sa vlastné hodnoty podmatice naozaj nenachádzajú mimo konvexný obal vlastných hodnôt pôvodnej matice.

V záverečnej časti sme sa venovali vlastným vektorom matíc. Je to súčasť diagonalizácie, ktorú sme v predošlých častiach práce príliš nespomínali. Konkrétne sme sledovali vzájomný vzťah vektorov zúžených matíc a projekcií vlastných vektorov pôvodných matíc. Odvodili sme explicitný vzťah pre diagonálne matice a simuláciami sme ukázali, že situácia je obdobná aj pre symetrické matice. Táto práca nezodpovedala otázku, aký presne je vzťah medzi vlastnými číslami markovovských matíc a podmatíc, ale posledná kapitola slúži ako návrh, ktorým smerom by sa mohol uberať ďalší výskum tejto problematiky, keďže sme pozorovali zaujímavý fenomén a zatiaľ neznáme rozdelenie súvisiace s GUE.

## Literatúra

- [1] Bordenave, Ch., Caputo, P., Chafai, D.: *Circular law theorem for random Markov matrices*, Probability Theory and Related Fields 152, 3-4 (2012), 751-779, dostupné na internete (27.5.2013):  
<http://hal.archives-ouvertes.fr/docs/00/49/05/14/PDF/cirmar.pdf>
- [2] Hajnovičová, V.: *Prejavy krízy vo výsledkoch hospodárenia inštitucionálnych sektorov ekonomiky SR v roku 2009*, Prognostický ústav SAV, 2011, dostupné na internete (16.4.2013):  
[http://www.prog.sav.sk/fileadmin/pusav/download\\_files/prognosticke\\_prace/2011/no1/PP\\_3clanok\\_Hajnovicova.pdf](http://www.prog.sav.sk/fileadmin/pusav/download_files/prognosticke_prace/2011/no1/PP_3clanok_Hajnovicova.pdf)
- [3] Meyer, C. D.: *Matrix Analysis and Applied Linear Algebra*, SIAM, 2000
- [4] Saad, Y.: *Numerical Methods for Large Eigenvalue Problems - 2nd Edition*, Society for Industrial and Applied Mathematics, SIAM, 2011, dostupné na internete (15.5.2013):  
[http://www-users.cs.umn.edu/~saad/eig\\_book\\_2ndEd.pdf](http://www-users.cs.umn.edu/~saad/eig_book_2ndEd.pdf)
- [5] Santos, S.: *The Importance of The Social Accounting Matrix*, School of Economics and Management, Technical University of Lisbon, 2001, dostupné na internete (27.5.2013):  
[http://www.iseg.utl.pt/mm-conteudos/docentes/1062/New%20Folder/Investiga%C3%A7%C3%A3o%20\(texto%20apresenta%C3%A7%C3%A3o%202\).pdf](http://www.iseg.utl.pt/mm-conteudos/docentes/1062/New%20Folder/Investiga%C3%A7%C3%A3o%20(texto%20apresenta%C3%A7%C3%A3o%202).pdf)
- [6] Tao, T.: *Topics in random matrix theory*, Departement of Mathematics, UCLA, Los Angeles, 2012, dostupné na internete (8.4.2013):  
<http://terrytao.files.wordpress.com/2011/02/matrix-book.pdf>