

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE  
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY

PREČO STÚPOL POČET ŽRALOKOV POČAS  
1. SVETOVEJ VOJNY?

BAKALÁRSKA PRÁCA

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE  
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY



PREČO STÚPOL POČET ŽRALOKOV POČAS  
1. SVETOVEJ VOJNY?

BAKALÁRSKA PRÁCA

Študijný program: Ekonomická a finančná matematika  
Študijný odbor: 1114 Aplikovaná matematika  
Školiace pracovisko: Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky  
Vedúci práce: RNDr. Ľubica Kossaczká, CSc.



Univerzita Komenského v Bratislave  
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

---

## ZADANIE ZÁVEREČNEJ PRÁCE

**Meno a priezvisko študenta:** Michal Hajduk  
**Študijný program:** ekonomická a finančná matematika (Jednoodborové štúdium, bakalársky I. st., denná forma)  
**Študijný odbor:** 9.1.9. aplikovaná matematika  
**Typ záverečnej práce:** bakalárska  
**Jazyk záverečnej práce:** slovenský

**Názov:** Prečo stúpol počet žralokov počas 1. Svetovej vojny?

**Cieľ:** Prostredníctvom modelu dravec-korist' sa pokúsiť nájsť odpoveď na otázku v názve práce. Využiť vlastné poznatky z teórie diferenciálnych rovníc a spracovať prehľad súčasnej literatúry z tejto oblasti.

**Vedúci:** RNDr. Ľubica Kossaczká, CSc.  
**Katedra:** FMFI.KAMŠ - Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky  
**Vedúci katedry:** prof. RNDr. Daniel Ševčovič, CSc.  
**Dátum zadania:** 25.10.2012

**Dátum schválenia:** 03.11.2012  
doc. RNDr. Margaréta Halická, CSc.  
garant študijného programu

.....  
študent

.....  
vedúci práce

**Pod'akovanie** Týmto spôsobom by som chcel vyjadriť vďaku svojej vedúcej bakalárskej práce RNDr. Ľubici Kossaczkej, CSc. za jej pomoc, rady, ale hlavne aj trpezlivosť, ktorú prejavila počas celého obdobia vytvárania tejto práce. Rovnako by som sa chcel poďakovať svojej rodine a priateľom za ich podporu, ktorou mi dodali vieru v úspešné dokončenie tejto práce.

## Abstrakt v štátnom jazyku

HAJDUK, Michal: Prečo stúpol počet žralokov počas 1. Svetovej vojny? [Bakalárska práca], Univerzita Komenského v Bratislave, Fakulta matematiky, fyziky a informatiky, Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky; školiteľ: RNDr. Ľubica Kossaczká, CSc., Bratislava, 2013, 38 s.

V našej práci sme sa zaoberali modelmi typu dravec - korisť, hlavne základným modelom, ktorý vytvorili Lotka a Volterra. Ako prvé sme si charakterizovali teóriu diferenciálnych rovníc, v ktorej sme sa venovali hlavne autonómnym systémom. Následne sme si odvodili základný model, v ktorom sme zistili, že má periodické riešenie. Pridaním vonkajšieho vplyvu do modelu sme dosiahli presne taký model, aký sme potrebovali. Nájdením jeho riešenia sme vyriešili náš hlavný cieľ práce. Ako poslednú vec sme si predstavili ďalšie typy modelov, konkrétne model s vnútornou konkurenciou pre korisť a model s dvomi druhmi korisť. Touto prácou sme v podstate vytvorili prehľad o základných typoch modelov dravec - korisť a teórie použitej v nich.

**Kľúčové slová:** Model dravec - korisť, Diferenciálna rovnica, Autonómne systémy, Stabilita riešenia

## Abstract

HAJDUK, Michal: Why have the number of sharks increased during World War I? [Bachelor Thesis], Comenius University in Bratislava, Faculty of Mathematics, Physics and Informatics, Department of Applied Mathematics and Statistics; Supervisor: RNDr. Ľubica Kossacká, CSc., Bratislava, 2013, 38p.

In our work we investigate predator - prey models, especially the basic model that was created by Lotka and Volterra. First we describe the theory of differential equations, in which we deal mainly with autonomous systems. Consequently, we derive the basic model in which we found out that it has a periodic solution. By adding external influence into the model we have achieved exactly model what we have needed. Finding his solutions solves our main objective of work. As a final matter, we introduce other types of models, namely model with internal competition for prey and model with two types of prey. With this work we have basically created an overview of the basic types of models predator - prey and theories used in them.

**Keywords:** Predator - prey model, Differential equation , Autonomous systems, Stability of a solution

# Obsah

Úvod	8
<b>1 Diferenciálne rovnice</b>	<b>10</b>
1.1 Základné pojmy . . . . .	10
1.2 Autonómne systémy . . . . .	13
<b>2 Lotka - Volterra model dravec - korisť</b>	<b>20</b>
2.1 Formulácia modelu . . . . .	20
2.2 Vyriešenie modelu . . . . .	22
2.3 Rozšírenia modelu . . . . .	27
<b>3 Iné modely typu dravec - korisť</b>	<b>30</b>
3.1 Konkurencia druhov . . . . .	30
3.2 Rozdiel v koristi . . . . .	32
<b>Záver</b>	<b>36</b>
<b>Zoznam použitej literatúry</b>	<b>38</b>

## Úvod

V roku 1920 taliansky biológ Umberto D'Ancona skúmal populácie rôznych druhov rýb a ich správanie v Stredozemnom mori. Pri zbieraní dát si všimol, že v čase trvania 1. Svetovej vojny rapídne stúpol počet žralokov. Táto skutočnosť ho zaujala natoľko, že sa ňou začal zaoberať. Tento nárast si vysvetlil tým, že počas vojny prakticky nebol žiadny rybolov. Preto stúpol počet obyčajných „jedlých“ rýb, čo samozrejme znamenalo pre žraloky zvýšený počet potravy. Tento model ale nebol dokonalý a nevysvetľoval, prečo pokles rybolovu viac pomohol žralokom ako rybám, ktoré sú zámerne lovené narozdiel od žralokov.[1]

D'Ancona nakoniec nedokázal nájsť žiadne biologické vysvetlenie pre tento jav, a preto požiadal o pomoc svojho priateľa, matematika, Vita Volterra. Ten rozdelil ryby na dravce a korisť a tým vytvoril prvý model opisujúci vývoj dravca a jeho koristi. Tento model bude základom tejto práce a od neho sa budú odvíjať ďalšie modely.

Tento základný model síce nemá veľké uplatnenie v realite kvôli svojej zjednodušenej forme, no jeho následné modifikácie už presnejšie modelujú skutočnosť. Existujú modely, ktoré zachytávajú rôzne správania skúmaných živočíchov, napríklad si ukážeme model, v ktorom bude zachytená konkurencia koristi kvôli obmedzenému množstvu potravy.[5]

Medzi ďalšie rozvinutejšie modely patri aj model, v ktorom sa budú vyskytovať dva rôzne druhy koristi. Tento model opisuje ako sa dravec zameriava hlavne na lovenie dospelých koristi, pričom o lov mladých neprejavuje záujem.[1] Existujú aj modely, ktoré majú ošetrovaný exponenciálny rast koristi. V tomto prípade je určený limit, ku ktorému sa počet koristi približuje.

Aby sme mohli začať modelovať, budeme si musieť najprv vysvetliť základné pojmy z diferenciálnych rovníc. Diferenciálne rovnice sú v podstate stvorené pre podobné modelovanie, pomocou nich dokážeme zistiť napríklad budúci vývoj populácie koristi vzhľadom na jej interakciu s dravcami. Najprv začneme úplnými základmi, neskôr si už zdefinujeme prostriedky, ktorými budeme hľadať riešenia vytvorených modelov a pomocou ktorých ich budeme tiež môcť kategorizovať.

Ako už bolo uvedené vyššie, tieto modely sú vytvorené pre pochopenie určitých javov v prírode, pričom nám tiež môžu pomôcť predvídať ďalší vývoj. Častokrát dochádza



k myšľnej predstave, že matematika je nepraktická a v skutočnom živote nepotrebná vec. Tieto modely ale dokazujú, aký význam zohráva matematika a jej aplikácie aj v opisovaní a riešení reálnych, občas aj každodenných problémov.

# 1 Diferenciálne rovnice

Táto kapitola bude venovaná diferenciálnym rovniciam, ktoré nám pomôžu vyriešiť problém zadaný v názve práce. Pomocou nich sa dá opísať zmena napríklad veľkosti alebo rýchlosti objektu v čase alebo priestore. Preto sa využívajú v rôznych oblastiach vedy, medzi ktoré môžeme zaradiť napríklad chémiu, biológiu, fyziku alebo aj ekonómiu.

Diferenciálne rovnice boli prvý krát použité v 17. storočí. Medzi prvými ich začali používať Isaac Newton a Gottfried Leibnitz, neskôr sa k nim pridali aj švajčiarski matematici, bratia Jacob a Johann Bernoulli. Isaac Newton ich napríklad použil pri tvorbe svojho druhého pohybového zákona, keď ho zapísal v tvare

$$f = \frac{d}{dt}(mv)$$

, v ktorom opísal ako sa sila rovná zmene časovej hybnosti.[3][10]

V nasledujúcich podkapitolách zdefinujeme základné pojmy, ktoré budeme využívať v ďalších kapitolách. Využijeme hlavne teóriu o autonómnych systémoch a stabilite ich riešenia. Poznatky, ktoré využijeme v tejto kapitole pochádzajú z [2],[3],[4] a [8].

## 1.1 Základné pojmy

**Definícia 1.1** (Derivácia v bode). [4] *Majme spojitú funkciu  $x(t) : (a, b) \rightarrow R^1$ ,  $t$  je premenná času. Nech  $dx = x(t + dt) - x(t)$  (vyjadruje to zmenu hodnoty funkcie v čase  $t$  a  $t + dt$ ),  $dt$  označuje časový prírastok. Potom*

$$\lim_{dt \rightarrow 0} \frac{dx}{dt}$$

*nazývame deriváciou funkcie  $x(t)$  v bode  $[t, x(t)]$ .*

**Definícia 1.2** (Diferenciálna rovnica 1. rádu). [4] *Pod diferenciálnou rovnicou 1. rádu budeme rozumieť rovnicu*

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x(t))$$

*, kde  $f(t, x)$  je zadaná diferencovateľná funkcia,  $x(t) : (a, b) \rightarrow R^1$ .*

**Definícia 1.3** (Riešenie Diferenciálnej rovnice). [4] *Funkciu (diferencovateľná)*

$$x(t) : (a, b) \rightarrow R^1$$

nazývame riešením diferenciálnej rovnice  $\frac{dx}{dt} = f(t, x)$ , ak spĺňa diferenciálnu rovnicu v ľubovoľnom čase  $t$ , čiže  $\frac{dx}{dt} = f(t, x(t))$ .

Pod všeobecným riešením diferenciálnej rovnice budeme rozumieť množinu všetkých riešení  $\frac{dx}{dt} = f(t, x(t))$ . Väčšinou môže byť v tvare  $x(t) = \Phi(t, c)$ ,  $c \in \mathbb{R}^1$  a  $t \in I_c$ , pričom  $I_c$  označuje interval existencie riešenia  $x(t, c)$ .

Následovať budú definície a vety, ktoré nám upresnia, čo znamená pojem úplného riešenia diferenciálnej rovnice.

**Definícia 1.4.** [3] Majme funkciu  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$  je otvorená množina. Hovoríme, že táto funkcia spĺňa **Carathéodoryho podmienky**, ak platí, že funkcia  $f(t, x)$  je spojitá v  $x$  pri každom pevnom  $t$  a zároveň je merateľná v  $t$  pri každom pevnom  $x$ . Potom ku každému bodu  $(t_0, x_0) \in D$  existujú také  $\alpha_1, \alpha_2 > 0$  a funkcia  $\sigma : \langle t_0 - \alpha_1, t_0 + \alpha_1 \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ , že platí:

1.  $V = V(t_0, x_0; \alpha_1, \alpha_2) = \{(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, |t - t_0| \leq \alpha_1, |x - x_0| \leq \alpha_2\} \subset D$ ;
2.  $\sigma \in L(\langle t_0 - \alpha_1, t_0 + \alpha_1 \rangle, \mathbb{R})$ ,  $L$  označuje Lebesgueov integrál;
3.  $|f(t, x)| \leq \sigma(t)$  pre všetky  $(t, x) \in V$ .

**Definícia 1.5.** [3] Pod pojmom predĺženie riešenia vpravo budeme rozumieť také riešenie  $x : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ , pre ktoré platí, že ak existuje také riešenie  $y : [a, b_1] \rightarrow \mathbb{R}^n$  diferenciálnej rovnice  $\frac{dx}{dt} = f(t, x(t))$ , kde  $b_1 > b$ , tak  $x$  je zúžením  $y$  na intervale  $[a, b]$ . Teda  $y$  nazývame predĺžením  $x$  vpravo.

Analogicky sa zadefinuje predĺženie riešenia vľavo.

**Veta 1.6.** Riešenie  $x : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  diferenciálnej rovnice je predĺžiteľné vpravo práve vtedy, keď existuje taká limita

$$\lim_{t \rightarrow b^-} x(t) = c,$$

pričom bod  $(b, c) \in O$ ,  $O \subset \mathbb{R}^{n+1}$  je otvorená množina, zároveň funkcia  $f$  spĺňa v  $O$  lokálne Carathéodoryho podmienky.

Veta aj dôkaz sa nachádzajú v [3, str. 190]

**Definícia 1.7** (Úplné riešenie Diferenciálnej rovnice). [3] Úplným riešením nazývame riešenie  $x : J \rightarrow \mathbb{R}^n$  diferenciálnej rovnice, ak  $x$  nie je predĺžiteľné vpravo, ani vľavo. Interval  $J$  je maximálny interval, na ktorom takéto riešenie existuje.

**Definícia 1.8** (Začiatočná (Cauchyho) úloha). [4] *Začiatočnou úlohou sa nazýva úloha nájsť riešenie  $x(t)$  splňajúce diferenciálnu rovnicu*

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x(t))$$

*so začiatočnou podmienkou*

$$x(t_0) = x_0$$

*, pričom  $f(t, x) : (a, b) \times (c, d) \rightarrow \mathbb{R}^1$  je spojitá funkcia,  $a, b, c, d \in \mathbb{R}^1$ ,  $t_0 \in (a, b)$  a  $x_0 \in (c, d)$ .*

Teraz si zadefinujeme, čo znamená, že funkcia spĺňa Lipschitzovu podmienku. Túto podmienku využijeme pri dokázani existencie riešenia. Táto podmienka je zároveň postačujúcou podmienkou jednoznačnosti riešenia.[3]

**Definícia 1.9** (Lipschitzova podmienka). [3] *Nech  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ . Funkcia  $f = f(t, x)$  je lipschitzovská vzhľadom na premennu  $x$  na  $D$ , ak existuje taká konštanta  $L > 0$ , že pre 2 rôzne body  $(t, x_1)$  a  $(t, x_2)$  z  $D$  platí*

$$|f(t, x_1) - f(t, x_2)| \leq L|x_1 - x_2|.$$

*Funkciu  $f$  nazývame lokálne lipschitzovskou vzhľadom na premennu  $x$ , ak pre každý bod  $(t_0, x_0) \in D$  existujú také  $a > 0$ ,  $b > 0$ ,  $L > 0$ , že platí  $F = \{|t - t_0| < a, |x - x_0| < b\} \subset D$  a pre každú dvojicu  $(t, x_1), (t, x_2) \in F$  platí*

$$|f(t, x_1) - f(t, x_2)| \leq L|x_1 - x_2|.$$

**Veta 1.10** (Veta o lokálnej existencii). *Nech  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$  ( $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$  je otvorená množina) je spojitá a lokálne lipschitzovská vzhľadom na  $x$  na  $D$  a máme bod  $(t_0, x_0) \in D$ . Potom existujú také  $\delta > 0$ , že diferenciálna rovnica  $\frac{dx}{dt} = f(t, x(t))$  so začiatočnou podmienkou  $x(t_0) = x_0$  má aspoň jedno riešenie  $x(t)$  definované na intervale  $I = \langle t_0 - \delta, t_0 + \delta \rangle$ .*

Dôkaz tejto vety sa nachádza v [3, str. 44].

**Veta 1.11** (Veta o jednoznačnosti riešenia). [3] *Nech je funkcia  $f$  spojitá a lipschitzovská vzhľadom na  $x$  na  $D \subset \mathbb{R}^n$ , ďalej máme bod  $(t_0, x_0) \in D$ . Potom ak máme 2 riešenia  $x_1(t)$  a  $x_2(t)$  diferenciálnej rovnice  $\frac{dx}{dt} = f(t, x(t))$  na intervale  $I$  také, že  $x_1(t_0) = x_2(t_0) = x_0$ ,  $t_0 \in I$ , tak sa tieto riešenia rovnajú pre každé  $t \in I$ .*

*Poznámka:* Lipschitzovská podmienka nie je vždy potrebná k jednoznačnosti riešenia. Existujú aj všeobecnejšie podmienky pre jednoznačnosť.[3]

## 1.2 Autonómne systémy

V tejto podkapitole sa zameriame na autonómne systémy a hľadanie ich riešení. Takisto si zdefinujeme ako vyzerá stabilita týchto riešení. Tak ako vo väčšine tejto kapitoly budeme vychádzať z [2],[3],[7],[8] a [9].

Autonómny systém je taký systém, ktorý nie je závislý od premennej  $t$  ale iba od premennej  $x$ . [3]

**Definícia 1.12.** [3] *Diferenciálnu rovnicu*

$$x' = f(x) \tag{1}$$

nazývame **autonómnou rovnicou**, ak  $O_1 \subset R^n$  je otvorená, neprázdna množina a  $f : O_1 \rightarrow R^n$  je spojitá na množine  $O_1$ . Premenné funkcie  $f(t, x)$  sa potom menia:  $t$  v  $R$  a  $x \in O_1$ . V našom prípade sa budeme pohybovať v priestore  $O_1 = R^2$ , takže naša sústava rovníc bude vyzeráť pre  $n = 2$  nasledovne :

$$x'_1 = f_1(x_1, x_2)$$

$$x'_2 = f_2(x_1, x_2)$$

**Veta 1.13.** Ak  $x : (a, b) \rightarrow R^n$  je riešenie (1), potom pre každé  $c \in R$  je funkcia

$$y(t) = x(t - c)$$

pre všetky  $a + c < t < b + c$  riešením v  $(a + c, b + c)$ .

*Dôkaz ako aj táto veta sa nachádza v [3, str. 213]*

**Definícia 1.14.** [3] *Obor hodnôt riešenia  $x$  rovnice (1) sa nazýva trajektória autonómnej rovnice, pričom ak ide o úplné riešenie, tak ju nazývame úplnou trajektóriou.*

Trajektoriu si môžeme predstaviť ako projekciu grafu  $(t, x(t))$  riešenia  $x(t)$  na priestore definovanom pre všetkých  $x$ , alebo ako krivku, ktorá je parametricky definovaná v tvare  $x = x(t)$  v priestore definovanom pre všetkých  $x$ . [2]

**Veta 1.15.** Ak ma autonómna rovnica (1) dve úplne trajektórie, tak tie buď splývajú, alebo sú disjunktné.

Dôkaz vety nájdeme v [3, str. 215]

**Definícia 1.16.** [2] *Izoklína* je množina takých bodov  $x$  rovnice (1), pre ktoré platí, že funkcia  $f(x_1, x_2)$  je v daných bodoch konštantná.

V našom konkrétnom autonómnom systéme

$$x_1' = f_1(x_1, x_2)$$

$$x_2' = f_2(x_1, x_2)$$

budeme pod pojem  $x_1$  – izoklína rozumieť množinu takých  $x_1, x_2$ , pre ktoré bude platiť  $f_1(x_1, x_2) = 0$  a podobne  $x_2$  – izoklína ( $f_2(x_1, x_2) = 0$ ).

Následovať bude veta, ktorá nám ukáže, ako vyzerá množina úplných riešení autonómnej rovnice.

**Veta 1.17.** Majme  $x : (a, b) \rightarrow O_1$ , ktoré je úplným riešením autonómnej rovnice (1). Takéto riešenie spadá pod jeden z nasledujúcich prípadov:

1.  $x(t) = x(s)$  pre všetky  $t, s \in (a, b)$  a  $(a, b) = R$ ,
2.  $x(t) = x(s)$  pre všetky také  $t, s \in (a, b)$ , že  $t \neq s$ ,
3. Existuje také  $T > 0$ , že  $x(t) = x(s)$  práve vtedy, ak  $t - s = kT$ , pričom  $k \in Z$  a  $(a, b) = R$ .

Veta aj dôkaz sa nachádzajú v [3, str. 216]

*Poznámka:* Ak máme konštantné riešenie  $x(t) = x_0$  pre každé  $t \in R$ , tak jeho trajektória je jednoprvková  $\{x_0\}$  a nazývame ju stacionárnym bodom. Z autonómnej rovnice, ktorú sme si zdefinovali na začiatku podkapitoly, vyplýva, že  $x_0$  je stacionárnym bodom práve vtedy, keď  $f(x_0) = 0$ . [3]

*Poznámka:* Veta sa dá interpretovať aj v znení, že pre každú úplnú trajektóriu autonómnej rovnice platí, že je [3]:

1. stacionárnym bodom,
2. trajektóriou, ktorá sa nikde nepretína, alebo
3. uzavretou trajektóriou, ktorej prináleží periodické riešenie.

Zadefinujeme si pojem stability riešenia, pričom poznáme 3 rôzne typy stability.

**Definícia 1.18** (Stabilné riešenie). [3] *Stabilným riešením v Ljapunovom zmysle (jednoducho Stabilné riešenie) na intervale  $< t_0, \infty$  nazývame riešenie  $x(t)$  rovnice (1), ak je splnená podmienka:*

*Pre každé  $\epsilon > 0$  existuje taká  $\delta = \delta(\epsilon, t_0)$ , pre ktorú platí  $|y(t_0) - x(t_0)| < \delta$  ( $y(t)$  je taktiež riešenie (1)). Potom takéto riešenie  $y(t)$  existuje na intervale  $< t_0, \infty >$  a platí*

$$|y(t) - x(t)| < \epsilon$$

*pre každé  $t \geq t_0$ .*

**Definícia 1.19** (Asymptotický stabilné riešenie). [3] *Pod asymptotickým riešením rozumieme riešenie  $x(t)$  našej rovnice (1) na intervale  $< t_0, \infty$ , ak je stabilné a zároveň ak existuje také  $d = d(t_0) > 0$ , pre ktoré je  $y(t)$  riešenie rovnice (1) a platí*

$$|y(t_0) - x(t_0)| < d$$

*, potom platí*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |y(t) - x(t)| \leq 0$$

.

**Definícia 1.20** (Nestabilné riešenie). [3] *Riešenie  $x(t)$  je nestabilné (t.j. nie je stabilné), ak existuje taký  $\epsilon > 0$  pre všetky  $\delta > 0$ , pre ktoré existuje také riešenie  $y(t)$  rovnice (1), že platí*

$$|y(t_0) - x(t_0)| < \delta$$

*a zároveň*

$$|y(t_1) - x(t_1)| \geq \epsilon$$

*, pre nejaké  $t_1 > t_0$ , pričom vieme, že  $\epsilon > 0$ ,  $t_0 \in (a, \infty)$  a  $\delta > 0$ .*

Uvažujme teraz našu rovnicu (1) ako dvojrozmerný systém lineárnych rovníc v tvare  $x' = Ax$ , pričom  $A$  je  $2 \times 2$  regulárna matica s rôznymi vlastnými hodnotami. Teda náš systém bude vyzeráť takto:

$$(2) \quad \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

V tomto systéme poznáme rôzne typy stacionárnych bodov. Ich typ zistíme, keď sa pozrieme na vlastné hodnoty matice  $A$  [2]:

1. **Uzol**: obe vlastné hodnoty matice  $A$  sú reálne čísla s rovnakými znamienkami,
2. **Sedlo**: obe vlastné hodnoty matice  $A$  sú reálne čísla s rôznymi znamienkami,
3. **Stred**: obe vlastné hodnoty matice  $A$  sú komplexné čísla, pričom v tomto prípade ide o rýdzo imaginárne čísla,
4. **Ohnisko**: obe vlastné hodnoty matice  $A$  sú komplexné, ale v tomto prípade majú aj reálnu zložku.

Matica  $A$  nám tiež posluží pri zisťovaní, o aký typ stabilného riešenia ide. Uvedieme si ich v nasledujúcej vete.

**Veta 1.21.** *Stacionárne riešenie (1) je:*

1. **stabilné**, ak reálne časti všetkých vlastných hodnôt matice  $A$  sú nekladné, pričom vlastné hodnoty neobsahujúce reálnu časť musia byť jednoduché,
2. **asymptoticky stabilné**, ak reálne časti všetkých vlastných hodnôt matice  $A$  sú záporné,
3. **nestabilné**, ak niektorá vlastná hodnota má reálnu časť kladnú.

*Dôkaz vety je v [2, str. 31]*



Ak sa chceme pozrieť na tieto typy stacionárnych bodov a stabilitu riešenia zo všeobecnejšieho pohľadu, tak si najprv musíme zadať Jacobihu maticu (maticu prvých derivácií). Tá bude mať v našom systéme rovnic  $x' = Ax$  tvar:

$$J = \begin{pmatrix} \frac{df_1(x_1, x_2)}{dx_1} & \frac{df_1(x_1, x_2)}{dx_2} \\ \frac{df_2(x_1, x_2)}{dx_1} & \frac{df_2(x_1, x_2)}{dx_2} \end{pmatrix}$$

Teraz sa budeme pozerať na vlastné hodnoty Jacobihu matice a bude pri nich platiť rovnaký princíp pri určovaní typov stacionárnych bodov ako v predošlom prípade. Zároveň nám aj pomôžu určiť o aký typ stabilného riešenia ide. Bude to vyzeráť nasledovne[2]:

1. **Uzol**: obe vlastné hodnoty matice J sú reálne čísla s rovnakými znamienkami,
2. **Sedlo**: obe vlastné hodnoty matice J sú reálne čísla s rôznymi znamienkami,
3. **Stred**: obe vlastné hodnoty matice J sú komplexné čísla, pričom v tomto prípade ide o rýdzo imaginárne čísla,
4. **Ohnisko**: obe vlastné hodnoty matice J sú komplexné, ale v tomto prípade majú aj reálnu zložku,
5. Stacionárny bod  $x_0$  je **asymptoticky stabilný**, ak sú reálne časti vlastných hodnôt matice J záporné,
6. Stacionárny bod  $x_0$  je **nestabilný**, ak aspoň jedná vlastná hodnota matice J má reálnu časť kladnú.

Zo získanej Jacobihu matice vieme taktiež využiť jej determinant a stopu na zistenie typu a stability stacionárneho bodu.[9]

- Ak je  $\det(J) < 0$ , tak vlastné hodnoty majú rôzne znamienka, tým pádom je náš bod sedlo,
- Ak je  $\det(J) > 0$ , tak pre stopu matice J nastávajú tieto 3 možnosti:
  1.  $4\det(J) < \text{tr}(J)^2$ , v takomto prípade ak je  $\text{tr}(J) < 0$ , tak jej vlastné hodnoty sú tiež záporné (stabilný uzol) alebo ak je  $\text{tr}(J) > 0$ , tak vlastné hodnoty sú kladné a tým pádom ide o nestabilný uzol,

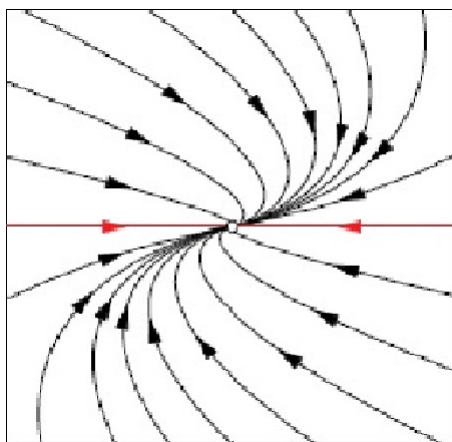
2.  $4\det(J) > \text{tr}(J)^2$  tak buď je  $\text{tr}(J) < 0$ , tým padom sú aj vlastné hodnoty záporne a je to stabilné ohnisko, alebo je  $\text{tr}(J) > 0$ , vlastné hodnoty sú kladné a bude to nestabilné ohnisko,
3.  $\text{tr}(J) = 0$ , v takomto prípade je stacionárny bod stredom alebo ohniskom.

Formula pre výpočet vlastných čísel Jakobiho matice má tvar [9]:

$$\lambda_{1,2} = \frac{\text{tr}(J) \pm \sqrt{\text{tr}(J)^2 - 4\det(J)}}{2}$$

Tieto rôzne typy stacionárnych bodov sa teraz pokúsime viac priblížiť, ukážeme si, čo vlastne znamenajú a zároveň aj ilustrujeme na obrázku ich tvar.[2][6][7]

**Uzol** je taký typ stacionárneho bodu  $x_0$ , pre ktorý platí, že všetky trajektórie riešenia  $x(t)$  vychádzajúce z bodu v jeho okolí konvergujú k tomuto  $x_0$ . Platí teda  $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = x_0$  alebo  $\lim_{t \rightarrow -\infty} x(t) = x_0$ . Uhol, ktorý zvierá vektor  $(x_0, x(t))$  s ľubovoľným pevným vektorom  $(x_0, y)$  má vlastnú limitu.

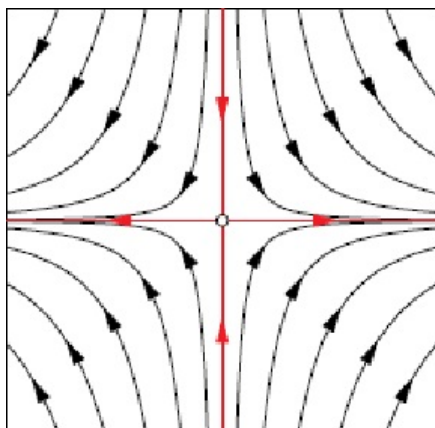
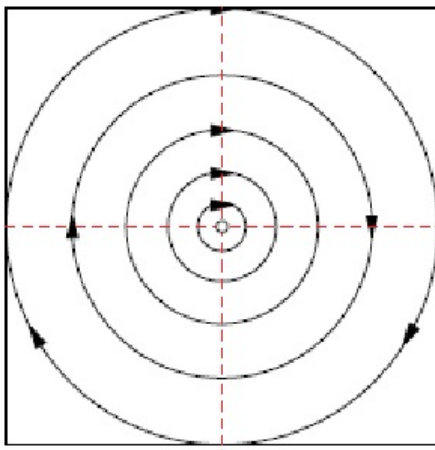
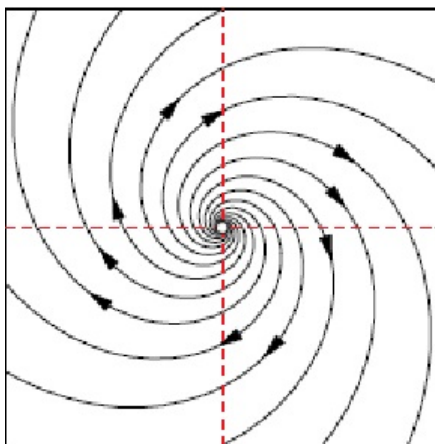


Obr. 1: Uzol [6]

**Sedlo** je typ stacionárneho bodu  $x_0$ , pre ktorý existuje konečne veľa trajektórii, ktoré konvergujú k tomuto bodu  $x_0$ .

**Stred** je typ stacionárneho bodu  $x_0$ , pre ktorý existuje také okolie, v ktorom každý bod je súčasťou práve jednej uzavretej trajektórie, ktorej stredom je bod  $x_0$ .

**Ohnisko** je podobný typ stacionárneho bodu ako uzol, rozdiel je len v uhle, ktorý zvierajú vektory. V tomto prípade bude mať uhol nevlastnú limitu.

**Obr. 2:** Sedlo [6]**Obr. 3:** Stred [6]**Obr. 4:** Ohnisko [6]

## 2 Lotka - Volterra model dravec - korist

V tejto kapitole sa budeme venovať modelu dravec - korist, ktorý bude popisovať ako sa navzájom ovplyvňujú dva druhy skúmaných organizmov. Jeden z týchto organizmov budeme nazývať dravcom, pričom druhý bude jeho koristou.

Najprv si ukážeme správanie a zmenu v počte ich populácie bez vplyvu iných faktorov, takže uvidíme len interakciu týchto dvoch organizmov. Neskôr pridáme subjekty, ktoré môžu ovplyvniť počty sledovaných organizmov, pričom u jedného by mohlo ísť o pozitívny vplyv, naopak u druhého organizmu by to malo negatívny vplyv.[1]

Tento model nezávisle na sebe vytvorili Alfred J. Lotka a Vito Volterra v roku 1925, resp. 1926. Lotka bol americký matematik a chemik, ktorý sa narodil 2. marca 1880 v Ľvove. Lotka tento model vytvoril na popísanie správania sa chemických reakcií, v roku 1925 ho už ale použil pri popísaní vzťahu bylinožravcov a ich potravy. Volterra bol taliansky matematik a fyzik žijúci v rokoch 1880 až 1940. Model dravec - korist vytvoril na popísanie rastu počtu žralokov v Stredozemnom mori počas 1. Svetovej vojny.[11]

Informácia k tejto kapitole pochádzajú z [1],[2],[5],[8] a [9].

### 2.1 Formulácia modelu

Tento model teda bude popisovať vzájomnú interakciu dvoch organizmov a vyjadrovať zmenu ich počtu. Preto bude vyzeráť v tvare:

$$x_1' = f_1(x_1, x_2)$$

$$x_2' = f_2(x_1, x_2).$$

V našom prípade bude  $x_1$  označovať veľkosť populácie koristi a  $x_2$  naopak veľkosť populácie dravcov. Pri vybudovaní modelu budeme predpokladať, že korist netrpí nedostatkom potravy, teda nebude medzi sebou súperiť o túto potravu. Zároveň dravci majú ako svoju jedínú možnú potravu ich korist.[1]

V prvej rovnici  $x_1' = f_1(x_1, x_2)$  popisujúcej rast či pokles populácie koristi si zavedieme 2 koeficienty  $a, b > 0$ , ktoré budú tento vývoj ovplyvňovať. Koeficient  $a$  nám bude opisovať rast populácie koristi, pričom pri absencii dravcov by opisoval lineárny

rast koristi a pri predpoklade nekonečného počtu potravy by neustále narastal. Rovnica teda zatiaľ bude v tvare

$$x_1' = ax_1.$$

Pridaním dravcov nám koeficient  $b$  bude vyjadrovať prirodzený pokles koristi pri strete s dravcami. Budeme predpokladať, že každé takéto stretnutie dravca s korisťou skončí výsledkom, v ktorom dravec uloví svoju korisť. Rovnica teda získava ďalší člen a bude vyzeráť nasledovne [1]:

$$x_1' = ax_1 - bx_1x_2.$$

Podobne si vytvoríme aj rovnicu popisujúcu zmenu počtu populácie dravcov v systéme. Budú v nej obsiahnuté koeficienty  $c, d > 0$ . Koeficient  $c$  bude vyjadrovať úmrtnosť dravcov v prípade nedostatku potravy(koristi) v prostredí, bude teda znázorňovať pokles počtu dravcov. Daná rovnica bude mať tvar:

$$x_2' = -cx_2.$$

Zároveň počet dravcov budú ovplyvňovať (podobne ako v prvej rovnici koristi) aj vzájomné stretnutia s korisťou. Túto situáciu bude vyjadrovať koeficient  $d$ . Výška tohto koeficientu opisuje ako často dochádza k stretom medzi dravcami a ich korisťou. Pridaním tohto faktoru do našej rovnice dostávame následovný výsledok [1]:

$$x_2' = -cx_2 + dx_1x_2.$$

Náš model bude teda vyzeráť v tvare týchto 2 výsledných diferenciálnych rovníc v autonómnom systéme, keďže tieto rovnice nie sú závislé od premennej času.[1]

$$\begin{aligned} x_1' &= ax_1 - bx_1x_2 \\ x_2' &= -cx_2 + dx_1x_2 \end{aligned} \tag{3}$$

## 2.2 Vyriešenie modelu

Teraz sa zameriame na naše 2 rovnice

$$x_1' = ax_1 - bx_1x_2$$

$$x_2' = -cx_2 + dx_1x_2$$

a hľadanie riešenia tohto systému. Začneme tým, že vyriešime  $x_1 - izoklinu$ , reps.  $x_2 - izoklinu$  a pomocou nich nájdeme stacionárne riešenia systému.[1][2]

Riešime teda  $x_1 - izoklinu$ , čo znamená, že hľadáme riešenie pre rovnicu

$$ax_1 - bx_1x_2 = 0.$$

Našli sme 2 riešenia

$$x_1 = 0, x_2 = \frac{a}{b}.$$

Podobne budeme hľadať  $x_2 - izoklinu$ , teda riešime

$$-cx_2 + dx_1x_2 = 0,$$

kde náš výsledok vyzera nasledovne:

$$x_2 = 0, x_1 = \frac{c}{d}.$$

Našli sme 2 stacionárne body

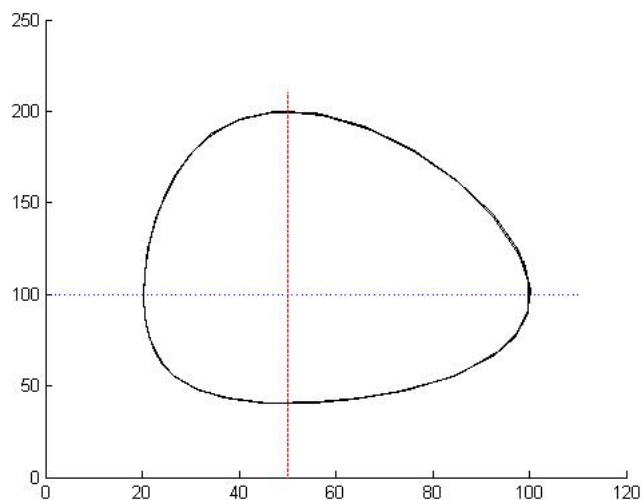
$$(0, 0), \left(\frac{c}{d}, \frac{a}{b}\right)$$

Tieto rovnice so získanými stacionárnymi bodmi a trajektóriami si vieme znázorniť pomocou nasledujúceho fázového portréту (Obr. (5)), ktorý nám nakreslí konkrétnu trajektóriu vývoja nášho systému. Os  $x$  bude predstavovať počet dravcov a os  $y$  počet koristi. Koeficienty sme zvolili nasledovne[2][6]:

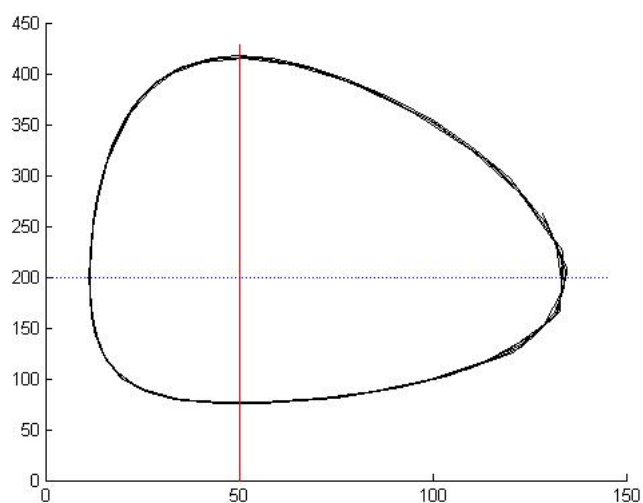
$$a = 1, b = 0, 01,$$

$$c = 1, d = 0, 02.$$

Ukážeme si ako výber koeficientov ovplyvní tvar trajektórie a veľkosti populácii oboch organizmov. Zvýšením koeficientu  $a = 2$  nám vzrástie počet počet dravcov aj koristi, výraznejší vplyv to ale bude mať na korisť(Obr. (6)).



**Obr. 5:** Fázový portrét s  $a=1$ ,  $b=0,01$ ,  $c=1$ ,  $d=0,02$  [6]

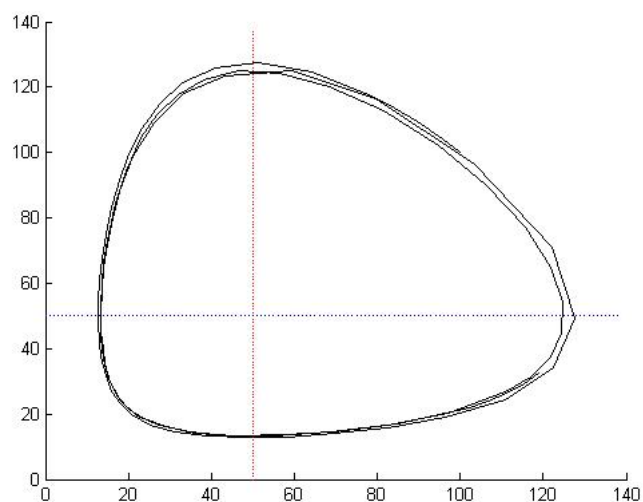


**Obr. 6:** Fázový portrét s  $a=2$ ,  $b=0,01$ ,  $c=1$ ,  $d=0,02$  [6]

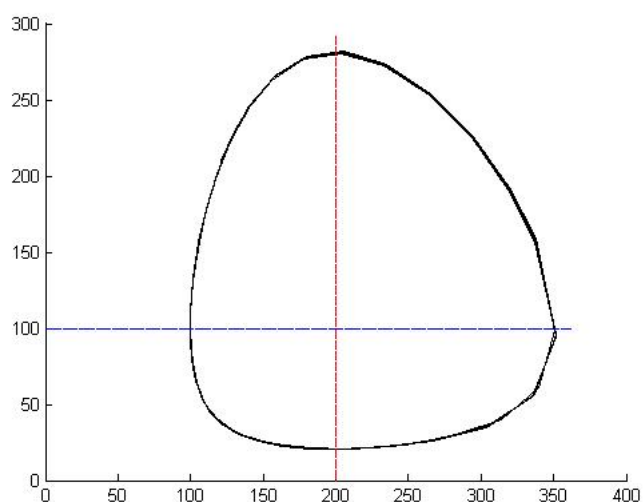
Zvýšenie koeficientu  $b = 0,02$  spôsobí zníženie počtu koristi, ale zároveň aj dravcov do istého bodu(Obr. (7)).

Teraz výraznejšie zvýšime koeficient  $c = 4$ , ktorý spôsobí nárast oboch populácií(Obr. (8)).

Koeficient  $d = 0,03$  mierne zvýšime, čím spôsobíme zníženie množstva koristi, pričom počet dravcov ostáva približne rovnaký(Obr. (9)).



**Obr. 7:** Fázový portrét s  $a=1$ ,  $b=0,02$ ,  $c=1$ ,  $d=0,02$  [6]



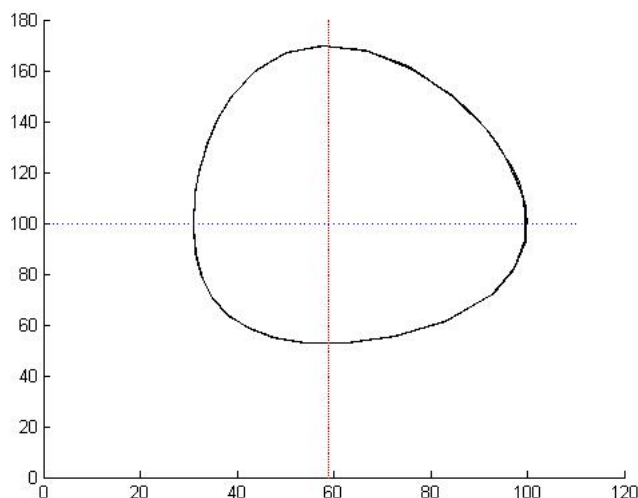
**Obr. 8:** Fázový portrét s  $a=1$ ,  $b=0,01$ ,  $c=4$ ,  $d=0,02$  [6]

Teraz sa vrátime späť k riešeniu nášho problému. Našli sme 2 stacionárne body a pokúsime sa zistiť, o aký typ ide. Bod  $(0, 0)$  nás nebude zaujímať, keďže populácie s nulovým počtom jedincov pre nás nebudú mať žiadnu informáciu. Zameriame sa teda na druhý stacionárny bod  $(\frac{c}{d}, \frac{a}{b})$ . [1]

Aby sme rozpoznali o aký stacionárny bod ide, tak si vypočítame Jakobiho maticu. Tá bude mať nasledujúci tvar:

$$J(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} a - bx_2 & -bx_1 \\ dx_2 & -c + dx_1 \end{pmatrix}$$





**Obr. 9:** Fázový portrét s  $a=1$ ,  $b=0,01$ ,  $c=1$ ,  $d=0,03$  [6]

Pre náš konkrétny stacionárny bod  $(\frac{c}{d}, \frac{a}{b})$  bude mať tvar:

$$J\left(\frac{c}{d}, \frac{a}{b}\right) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{-bc}{d} \\ \frac{da}{b} & 0 \end{pmatrix}$$

Vidíme, že stopa tejto matice je nulová, tým pádom tento stacionárny bod bude buď ohnisko alebo stred.(1.2)

Teraz sa zameriame na výpočet trajektórie riešenia, pokúsime sa nájsť jej riešenia a určiť, o aký stacionárny bod ide. Upravíme si teda rovnice na tvar

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{-cx_2 + dx_1x_2}{ax_1 - bx_1x_2} = \frac{(-c + dx_1)x_2}{(a - bx_2)x_1}.$$

Túto diferenciálnu rovnicu môžeme riešiť separáciou premenných, teda si to upravíme na tvar

$$\frac{a - bx_2}{x_2} dx_2 = \frac{-c + dx_1}{x_1} dx_1.$$

Zintegrujeme obe strany rovnice a dostaneme rovnicu v tvare:

$$a \ln x_2 - bx_2 + c \ln x_1 - dx_1 = k_1,$$

pričom  $k_1$  bude nejaká konštanta. Tento tvar zexponujeme, teda dostaneme

$$\frac{x_2^a}{e^{bx_2}} \frac{x_1^c}{e^{dx_1}} = K, \quad (4)$$

pre nejakú konštantu  $K$ . [1]

Teraz si ukážeme, že krivky definované rovnicou (4) sú uzavreté pre  $x_1, x_2 > 0$ . Rovnicu (4) si upravíme na tvar  $f(x_2)g(x_1) = K$ . Najprv sa pozrieme na rovnicu

$$f(x_2) = \frac{x_2^a}{e^{bx_2}},$$

pre ktorú budeme hľadať jej maximum pre  $x_2 > 0$ . Pozrieme sa teda na jej prvú deriváciu:

$$f'(x_2) = \frac{ax_2^{a-1} - bx_2^a}{e^{bx_2}} = \frac{x_2^{a-1}(a - bx_2)}{e^{bx_2}}.$$

Vidíme, že maximum bude dosahovať v bode  $x_2 = \frac{a}{b}$ . Funkčná hodnota v tomto bode teda bude  $M_{x_2} = \frac{(a/b)^a}{e^a} \cdot [1]$

Podobne budeme hľadať maximum rovnice  $g(x_1)$ , ktoré sa bude nachádzať v bode  $x_1 = \frac{c}{d}$  a bude mať hodnotu  $M_{x_1} = \frac{(c/d)^c}{e^c}$ .

Vďaka týmto zisteniam môžeme vyvodiť nasledujúce závery k rovnici (4) [1]:

1. Ak  $M_{x_1}M_{x_2} < K$ , tak nemáme žiadne riešenie rovnice (4),
2. ak  $M_{x_1}M_{x_2} = K$ , tak máme práve jedno riešenie v bodoch  $x_1 = \frac{c}{d}$ ,  $x_2 = \frac{a}{b}$ .
3. Pre  $M_{x_1}M_{x_2} > K$  si vytvoríme kladnú premennú  $\alpha$  menšiu ako  $M_{x_1}$ . Všimnime si, že rovnica  $\frac{x_1^c}{e^{dx_1}} = \alpha$  má dve riešenia  $x_{1m} < \frac{c}{d}$  a  $x_{1M} > \frac{c}{d}$ . Potom rovnica  $f(x_2) = \frac{x_2^a}{e^{bx_2}} = \left[ \frac{\alpha}{x_1^c e^{dx_1}} \right] M_{x_2}$ 
  - (a) nemá žiadne riešenie pre  $x_1 < x_{1m}$  alebo  $x_1 > x_{1M}$ ,
  - (b) práve jedno riešenie  $x_2 = \frac{a}{b}$  pre  $x_1 = x_{1m}$  alebo  $x_1 = x_{1M}$
  - (c) a dve riešenia  $x_{21}$  a  $x_{22}$  ( $x_{21} < x_{22}$ ) pre všetky  $x$  patriaceho do intervalu  $(x_{1m}, x_{1M})$ , pričom  $x_{21} < \frac{a}{b}$  a  $x_{22} > \frac{a}{b}$ .

Teda krivky definované rovnicou (4) sú naozaj uzavreté pre  $x_1, x_2 > 0$ , takže stacionárny bod  $(\frac{c}{d}, \frac{a}{b})$  je stred. Preto všetky riešenia rovnice (5) sú periodické funkcie času. Preto bude platiť, že  $x_1(t+T) = x_1(t)$  a  $x_2(t+T) = x_2(t)$  pre kladné  $T$ . [1]

Ak chceme porovnávať tieto predikcie vývoja populácii so skutočnými datami z minulosti, tak potrebujeme vypočítať priemerné hodnoty pre riešenia rovnice (5). Tie nám pomôže vypočítať nasledujúca léma.

**Lema 2.1.** [1] *Majme  $x_1(t), x_2(t)$ , ktoré sú periodickými riešeniami rovnice (5) s periódou  $T > 0$ . Potom priemerné hodnoty  $x_1$  a  $x_2$  definujeme v tvare*

$$\hat{x}_1 = \frac{1}{T} \int_0^T x_1(t) dt, \hat{x}_2 = \frac{1}{T} \int_0^T x_2(t) dt$$

*. Tieto priemerné hodnoty sú potom rovné stacionárnym bodom. V našom prípade to bude znamenať*

$$\hat{x}_1 = \frac{c}{d}, \hat{x}_2 = \frac{a}{b}.$$

*Dôkaz.* Predelením oboch strán prvej rovnice (5) premennou  $x_1$  dostanem  $\frac{x_1'}{x_1} = a - bx_2$ , teda

$$\frac{1}{T} \int_0^T \frac{x_1'(t)}{x_1(t)} dt = \frac{1}{T} \int_0^T [a - bx_2(t)] dt.$$

Potom  $\int_0^T \frac{x_1'(t)}{x_1(t)} dt = \ln x_1(T) - \ln x_1(0) = 0$ , keďže  $x_1(T) = x_1(0)$ . Potom platí

$$\frac{1}{T} \int_0^T bx_2(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T a dt = a,$$

teda  $\hat{x}_2 = \frac{a}{b}$ . Podobne aj predelením druhej rovnice by sme dostali výsledok  $\hat{x}_1 = \frac{c}{d}$ .  $\square$

## 2.3 Rozšírenia modelu

Zatiaľ sme si ukázali najjednoduchší model, v ktorom sa nachádzali len dravec a korisť, pričom ich interakcia bola zapísaná veľmi jednoduchým spôsobom. Teraz si ukážeme aj rozšírené verzie tohto modelu, zároveň aj význam, pre ktorý boli vytvorené. Budeme vychádzať z rovnakých zdrojov ako vo zvyšku kapitoly, v tomto prípade pôjde o [1].

Prvým z týchto modelov bude model, ktorý obsahuje vonkajší zásah do prostredia dravca a koristi. Pod týmto zásahom môžeme rozumieť napríklad lov alebo rybolov. Musíme si uvedomiť, že tento vplyv negatívne ovplyvní rast dravca aj koristi. Zavedieme si teda nový koeficient  $\epsilon > 0$ , ktorý bude vyjadrovať intenzitu tohto lovu(rybolovu), napr. v podobe zvýšeného počtu lodí alebo počas loveckej sezóny. Naše rovnice teda budú mať takýto tvar [1]:

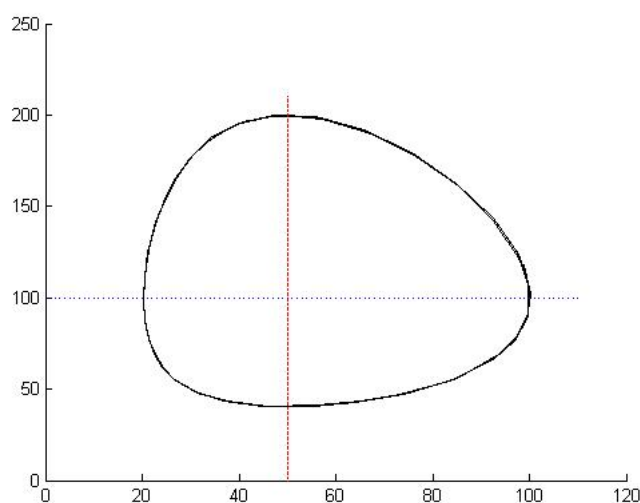
$$\begin{aligned} x_1' &= ax_1 - bx_1x_2 - \epsilon x_1 = (a - \epsilon)x_1 - bx_1x_2 \\ x_2' &= -cx_2 + dx_1x_2 - \epsilon x_2 = -(c + \epsilon)x_2 + dx_1x_2 \end{aligned} \quad (5)$$

Tento systém je v podstate rovnaký ako ten predošlý, líši sa len stacionárny bod (priemerná hodnota), ktorý vyzerá takto:

$$\hat{x}_1 = \frac{c + \epsilon}{d}$$

$$\hat{x}_2 = \frac{a - \epsilon}{b}$$

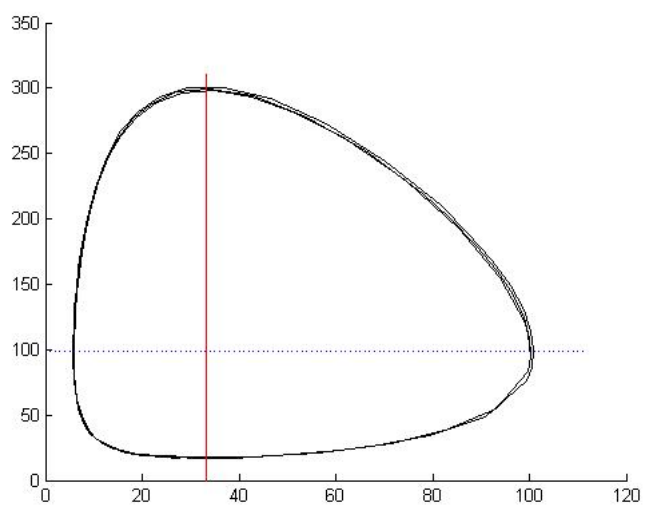
Z týchto výsledkov je zrejmé, že lov či rybolov v skutočnosti prospieva koristi, teda lovenému organizmu, naopak škodí dravcovi. Tento jav je tiež známy ako Volterrov princíp. Ukážeme si vplyv lovu na nasledujúcich obrázkoch.[1][6]



**Obr. 10:** Systém bez lovu [6]

Takýto jav nastal napr. po 1. Svetovej vojne v Stredozemnom mori, kde po absencii rybolovu sa začalo znovu loviť, tým pádom sa počet žralokov v mori začal znižovať až dosiahol svoju obvyklú hodnotu z čias pred vojnou.

Ďalším príkladom môže byť hmyz z Austrálie, ktorý sa v roku 1868 objavil v Amerike a ničil úrodu. Aj napriek tomu, že sa neskôr na neho nasadil jeho prirodzený dravec, ktorý znížil jeho počet na minimum, boli použité chemické látky, ktoré ničili ako tento hmyz, tak aj dravca. Efekt tejto látky bol však opačný ako sa čakalo, a miesto ďalšieho zníženia počtu tohto hmyzu, jeho populácia narástla.[1]



Obr. 11: Systém s lovom [6]

### 3 Iné modely typu dravec - korisť

V predošlej kapitole sme sa zaoberali základným modelom dravec - korisť, ktorý bol vytvorený vo veľmi jednoduchej forme a vytvoril základ pre vytváranie ďalších, komplexnejších modelov. V tejto kapitole si ukážeme niektoré zložitejšie modely, ktoré lepšie zachytávajú skutočnosť, tým pádom su praktickejšie a dajú sa použiť aj v realite pri niektorých druhoch organizmov.

V tejto kapitole budeme využívať teóriu a pravidlá, ktoré sme si zadefinovali v prvej kapitole. Pôjde hlavne o sekciu (1.2), v ktorej sme si uviedli, akým spôsobom dokážeme rozlíšiť typ a stabilitu stacionárneho bodu.

#### 3.1 Konkurencia druhov

Ako prvý si ukážeme model, ktorý vyzerá podobne ako základný model Lotka - Volterra, bude však pridaný prvok konkurencie medzi korisťou. To bude znamenať, že korisť tentokrát nebude mať neobmedzený prísun potravy, ale bude ho mať určité obmedzené množstvo. V takejto situácii samozrejme nastane boj o túto potravu, čím v podstate vytvoríme konkurenciu koristi medzi sebou.

Oproti základnému modelu teda pridáme aj prvok konkurencie, ktorý bude predstavovať koeficient  $0 < e \ll 1$ . Čím vyšší je tento koeficient, tým väčšia je konkurencia medzi korisťou o potravu, tým pádom sa k potrave dostane menej koristi a tá následne uhynie na následky vyhladovania. Vyjadrime si to teda opäť sústavou dvoch rovníc [5]:

$$\begin{aligned}x_1' &= ax_1 - bx_1x_2 - ex_1^2 \\x_2' &= cx_1x_2 - dx_2,\end{aligned}$$

koeficienty  $a, b, c, d > 0$  zohrávajú rovnakú úlohu ako v predošlej kapitole.

Najprv sa pokúsime si tento systém zjednodušiť jednoduchými substitúciami. Majme

$$\begin{aligned}\alpha &= \frac{a}{d} \\ \beta &= \frac{ed}{ac},\end{aligned}$$

pričom  $\alpha > 0$  a  $0 < \beta \leq 1$ . Pri takejto substitúcii sa nám systém zjednoduší a bude vyzeráť následovne [5]:

$$x_1' = \alpha(x_1 - x_1x_2 - \beta x_1^2)$$

$$x_2' = x_1x_2 - x_2.$$

Teraz sa pozrieme na prvú rovnicu a nájdeme jej  $x_1$  - *izoklinu*, takže hľadáme riešenie pre rovnicu

$$\alpha(x_1 - x_1x_2 - \beta x_1^2) = 0.$$

Našli sme 2 riešenia

$$x_1 = 0, x_2 = 1 - \beta x_1.$$

Podobne budeme hľadať  $x_2$  - *izoklinu*, teda riešime

$$x_1x_2 - x_2 = 0,$$

kde náš výsledok vyzerá nasledovne:

$$x_2 = 0, x_1 = 1.$$

Našli sme 3 stacionárne body

$$(0, 0), \left(\frac{1}{\beta}, 0\right), (1, 1 - \beta).$$

Teraz sa pokúsime tieto stacionárne body zanalyzovať a zistiť, o aké typy ide a či sú stabilné. Na to budeme potrebovať Jakobiho maticu prvých derivácií, ktorá vyzerá takto:

$$J(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} \alpha(1 - x_2 - 2\beta x_1) & -\alpha x_1 \\ x_2 & x_1 - 1 \end{pmatrix}$$

Po dosadení prvého stacionárneho bodu  $(0, 0)$

$$J(0, 0) = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

zistíme, že Jakobián je  $-\alpha < 0$ , čiže tento bod je sedlo. Ďalší bod  $\left(\frac{1}{\beta}, 0\right)$  má Jakobiho maticu v takomto tvare:

$$J\left(\frac{1}{\beta}, 0\right) = \begin{pmatrix} -\alpha & \frac{-\alpha}{\beta} \\ 0 & \frac{1-\beta}{\beta} \end{pmatrix}.$$

Determinant tejto matice nám vyšiel  $\frac{-\alpha(1-\beta)}{\beta} < 0$ , keďže z podmienov vieme, že  $\alpha > 0$  a  $0 < \beta \leq 1$ . To znamená, že tento bod je rovnako ako predošlý sedlo. Ostáva nám posledný bod  $(1, 1 - \beta)$ :

$$J(1, 1 - \beta) = \begin{pmatrix} -\alpha\beta & -\alpha \\ 1 - \beta & 0 \end{pmatrix}.$$

Jakobián výjde  $\alpha(1 - \beta) > 0$ , pričom stopa tejto matice je záporná  $tr(J) = -\alpha\beta$ , teda riešenie bude stabilné. Teraz využijeme (1.2) k určení typu stacionárneho bodu. Ideme porovnávať  $4 * det(J(1, 1 - \beta))$  so stopou matice  $tr(J(1, 1 - \beta))^2$ . Nerovnosť teda bude v tvare

$$4\alpha(1 - \beta) < \alpha^2\beta^2,$$

čím dostaneme podmienku pre  $\beta$ :

1.  $1 > \beta > -\frac{1}{2\alpha} + \frac{1}{2\alpha}\sqrt{1 + 16\alpha}$ : keďže nám vyšiel kladný determinant a pri tejto podmienke platí  $4 * det(J(1, 1 - \beta)) < tr(J(1, 1 - \beta))^2$ , takže stacionárny bod bude stabilný uzol,
2.  $0 < \beta < -\frac{1}{2\alpha} + \frac{1}{2\alpha}\sqrt{1 + 16\alpha}$ : ak máme dostatočné malé  $\beta$ , ktoré spĺňa túto podmienku, tak bude platiť  $4 * det(J(1, 1 - \beta)) > tr(J(1, 1 - \beta))^2$  a teda náš stacionárny bod bude stabilné ohnisko.

## 3.2 Rozdiel v koristi

Ďalším modelom, ktorému sa budeme venovať, je model, ktorý pozná viacero druhov koristi. V takomto modeli budeme rozlišovať, či ide o korisť dospelú, alebo ešte len o mláďa. Obe tieto kategórie majú svoju vlastnú diferenciálnu rovnicu popisujúcu ich budúci vývoj. V realite väčšinou platí, že dravec loví dospelú korisť, keďže mláďa je menšie alebo žije na inom mieste ako dospelí jedinec a ku styku s dravcom sa nedostane.[1]

Pri riešení tohto modelu sme využili vedomosti z prvej kapitoly, ale aj [8].

Teda v tomto modeli budeme mať sústavu troch rovníc, pričom  $x_1$  bude patriť dospelej koristi,  $x_2$  mladej a  $y$  patrí dravcovi. Sústava teda vyzera takto:



$$x_1' = -a_1x_1 + a_2x_2 - bx_1y$$

$$x_2' = nx_1 - (a_1 + a_2)x_2$$

$$y' = -cy + dx_1y.$$

Teraz si vysvetlíme, čo jednotlivé koeficienty znamenajú.  $a_1$  nám hovorí o prirodzenom poklese počtu koristi, ktorý nie je následkom stretu s dravcom,  $a_2$  predstavuje počet mladej koristi, ktorá sa vyvinie v dospelého jedinca.  $b$  a  $d$  označujú množstvo stretov dospelaj koristi s dravcom,  $c$  prirodzený úhyn dravca a nakoniec  $n$  predstavuje mieru rodenia sa novej koristi vzhľadom na počet dospelaj populácie.[1]

Začneme ako vždy hľadaním stacionárnych bodov pomocou  $x_1$ ,  $x_2$  a  $y$  - *izoklín*.  $x_1$  - *izoklína* vyzerá následovne:

$$-a_1x_1 + a_2x_2 - bx_1y = 0.$$

Má riešenie v tvare

$$x_1 = \frac{a_2x_2}{a_1 + by}.$$

Ďalšia izoklína  $x_2$  je takáto:

$$nx_1 - (a_1 + a_2)x_2 = 0$$

a má riešenie

$$x_2 = \frac{nx_1}{a_1 + a_2}.$$

Posledná izoklína  $y$  je:

$$-cy + dx_1y = 0$$

a jej riešenie je:

$$y = 0, x_1 = \frac{c}{d}.$$

Z týchto riešení teraz poskladáme stacionárne body. V tomto prípade budeme mať 3 stacionárne body:

$$(0, 0, 0), \left( \frac{a_2}{a_1} x_2, x_2, 0 \right), \left( \frac{c}{d}, \frac{cn}{d(a_1 + a_2)}, \frac{a_2 n - a_2 a_1 - a_1^2}{b(a_1 + a_2)} \right),$$

pri druhom bode je  $x_2$  ľubovoľný bod. Môžeme si všimnúť, že prvý stacionárny bod  $(0, 0, 0)$  je v podstate špeciálnym prípadom nášho druhého bodu  $\left( \frac{a_2}{a_1} x_2, x_2, 0 \right)$ .

Vypočítame si Jakobiho maticu, pomocou ktorej sa dá zistiť stabilita a typ stacionárneho bodu:

$$J(x_1, x_2, y) = \begin{pmatrix} -a_1 - by & a_2 & bx_1 \\ n & -a_1 - a_2 & 0 \\ dy & 0 & -c + dx_1 \end{pmatrix}.$$

Ideme sa teda zaoberať prvým stacionárnym bodom  $(0, 0, 0)$ , pre ktorý Jakobiho matica vyzerá takto:

$$J(0, 0, 0) = \begin{pmatrix} -a_1 & a_2 & 0 \\ n & -a_1 - a_2 & 0 \\ 0 & 0 & -c \end{pmatrix}.$$

Pre ďalší stacionárny bod  $\left( \frac{a_2}{a_1} x_2, x_2, 0 \right)$  vyzerá Jakobiho matica následovne:

$$J\left( \frac{a_2}{a_1} x_2, x_2, 0 \right) = \begin{pmatrix} -a_1 & a_2 & \frac{ba_2}{a_1} \\ n & -a_1 - a_2 & 0 \\ 0 & 0 & -c + \frac{da_2}{a_1} \end{pmatrix}.$$

A nakoniec si vypočítame Jakobiho maticu aj pre posledný stacionárny bod  $\left( \frac{c}{d}, \frac{cn}{d(a_1 + a_2)}, \frac{a_2 n - a_2 a_1 - a_1^2}{b(a_1 + a_2)} \right)$ :

$$J\left( \frac{c}{d}, \frac{cn}{d(a_1 + a_2)}, \frac{a_2 n - a_2 a_1 - a_1^2}{b(a_1 + a_2)} \right) = \begin{pmatrix} -a_1 - \frac{a_2 n - a_2 a_1 - a_1^2}{a_1 + a_2} & a_2 & \frac{bc}{d} \\ n & -a_1 - a_2 & 0 \\ d \frac{a_2 n - a_2 a_1 - a_1^2}{b(a_1 + a_2)} & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

V tomto prípade nemôžeme využiť rovnakú metódu pre zistenie typu a stability stacionárneho bodu ako pri predošlých modeloch, pretože už sa nepohybujeme v dvojrozmernom, ale v trojrozmernom priestore.

Tieto Jakobiho matice sa využijú na zistenie stability daných stacionárnych bodov. Konkrétne sa vypočítajú vlastné hodnoty týchto matíc a tie následne skúmame pomocou metódy, ktorú sme si uviedli v prvej kapitole (1.2) vo vete 1.21. V podstate si len otestujeme tieto vlastné hodnoty a zistíme, či sú kladné alebo nezáporné. Ak budú všetky nezáporné, tak bod bude stabilný, ak bude aspoň jedna vlastná hodnota kladná, tak riešenie bude nestabilné.

## Záver

V tejto práci sme si ako cieľ určili zistiť, prečo stúpol počet žralokov v Stredozemnom mori počas 1. Svetovej vojny. Aby sme sa mohli prepracovať k splneniu tohto cieľa, potrebovali sme si najprv ujasniť pojmy z diferenciálnych rovníc, ktorým sme venovali celú prvú kapitolu. Zdefinovali sme si existenciu a jednoznačnosť riešenia a predstavili si autonómne systémy, ktoré sú priamo využívané pri modelovaní vývoja populácie dravca a jeho koristi.

Pri týchto autonómnych systémoch sme si vysvetlili, aké existujú rôzne typy stacionárnych bodov, teda stred, uzol, ohnisko alebo sedlo. Definovali sme si, kedy je naše riešenie stabilné. Na konci prvej kapitoly sme si aj uviedli prostriedky, ako zistiť o aký typ a stabilitu bodu ide.

Tieto vedomosti sme v ďalšej kapitole priamo aplikovali na náš model. Tento model má jednoduchú formu a predpoklady, preto jeho zostavenie nebolo náročné. Ide v podstate o model, ktorý bol vytvorený ešte v prvej tretine 20. storočia. Pre zjednodušenie si pod dravcom budeme predstavovať žraloka a jeho korisťou budú bežné ryby. Vyšli nám dva stacionárne body, pričom ten reálny sme aj zanalyzovali.

Dostali sme sa nakoniec k výsledku, že daný model má periodické riešenie, teda po istej periode dochádza k tomu istému výsledku. Po predstavení si tohto základného modelu sme sa mohli konečne dostať k našej riešenej otázke, teda prečo sa zmenil počet žralokov v mori. Upravili sme si model, aby sme v ňom dokázali zachytiť efekt rybolovu. Rybolov priamo znižoval počet oboch druhov, my sme však chceli zistiť, aký má vedľajší efekt, teda či náhodou nepriamo nepomáha žralokom, alebo jeho koristi.

Využili sme rovnaké metódy pri analyzovaní tohto modelu, aké sme využili pri prvom modeli. Nakoniec sme sa dopracovali k stacionárnemu bodu, ktorý priamo ukázal, že rybolov je v tomto systéme v podstate prospešný pre obyčajné ryby a prekvapivo viac zasahuje populáciu žralokov. Tento efekt sa nazýva Volterrov princíp.[1] Ako už bolo uvedené priamo v druhej kapitole, takýto jav nastal aj s hmyzom napádajúcim úrodu. Po nasadení prirodzeného dravca pre tento hmyz jeho počet začal klesať, avšak keď farmári použili na jeho úplne zničenie chemikálie, tak dosiahli len jeho opätovný nárast populácie.

Týmto sme vlastne vyriešili otázku, ktorú sme si stanovili na začiatku práce. V tretej

kapitole sme si predstavili ďalšie modely, ktoré zachytávajú špecifické typy dravcov a koristi. Prvý uvedený opisoval konkurenciu o potravu pri koristi. Ďalší model riešil prípad viacerých druhov koristi. Pri hľadaní ich stacionárnych bodov a následne skúmaní ich typov a stability sme využili vedomosti z prvej kapitoly.

Treba však uviesť, že tieto modely nie sú aplikovateľné na všetky typy dravcov a koristi, ale iba na určité prípady. Existujú aj také prípady, v ktorých nejde predvídať ich vývoj, keďže do modelu sa nedá zahrnúť napríklad neracionálnosť koristi. Medzi tieto prípady môžeme napríklad zaradiť určitý typ prvokov. Existuje u nich typ veľmi agresívnych dravcov, ktoré potrebujú potravu každých pár hodín. E. F. Gause vytvoril experiment, v ktorom skúmal vývoj týchto dvoch druhov v 30 rôznych akváriách. Vo všetkých vytvoril úkryt pre korisť, do ktorého nemal dravec prístup. O dva dni neskôr zistil, že iba v 4 uhynuli predátori od hladu, pričom vo zvyšných našiel aj minimálny počet prežitej koristi.[1]

Týmto sme ukázali, že v realite sa nie vždy veci vyvíjajú logicky a racionálne. Preto je zložité modelovať a predpovedať vývoj situácie pri náročnejších prípadoch, v ktorých do procesu vstupuje množstvo faktorov, ktoré ovplyvňujú výsledok.

## Zoznam použitej literatúry

- [1] Braun, M., Coleman, C. S., Drew, D. A.: *Differential Equation Models*, Springer Verlag, New York, 1978
- [2] Brunovský, P.: *Diferenčné a diferenciálne rovnice*, FMFI UK, Bratislava, 2011, dostupné na internete (5.12.2012):  
<http://www.iam.fmph.uniba.sk/skripta/brunovsky/>
- [3] Greguš, M., Šeda, V., Švec, M.: *Obyčajné diferenciálne rovnice*, Alfa, Bratislava, 1985
- [4] Guba, P.: *Diferenčné a diferenciálne rovnice*, prednášky, FMFI UK, Bratislava, 2013
- [5] Haderer, K. P.: *Mathematik für Biologen*, Springer-Verlag Berlin and Heidelberg GmbH Co. K, Berlin-Heidelberg-New York, 1974
- [6] Harris, K.: *Differential Equations*, Department of Mathematics University of Michigan, Ann Arbor, Michigan, 2008, dostupné na internete (10.5.2013):  
<http://kaharris.org/teaching/216/Lectures/lec28/lec28.pdf>
- [7] Kalas, J., Ráb, M.: *Obyčejné diferenciální rovnice*, Masarykova univerzita, Brno, 1995
- [8] Kossaczká, Ľ.: *osobná komunikácia*, FMFI UK, Bratislava, 2013
- [9] Kuhnová, J.: *Analýza modelu dravec-kořist s klimaxovou populací kořisti*, 7. International Conference Aplimat, Bratislava, 2008, dostupné na internete (5.5.2013):  
[http://archiv.aplimat.com/2008/Proceedings/Differential\\_equations\\_and\\_their\\_applications/Kuhnova.pdf](http://archiv.aplimat.com/2008/Proceedings/Differential_equations_and_their_applications/Kuhnova.pdf)
- [10] *The History of Differential Equations*, dostupné na internete (10.5.2013):  
<http://www.scribd.com/doc/31730457/The-History-of-Differential-Equations-1670-1950>
- [11] *Wikipedia: Lotka-Volterra equation - history*, dostupné na internete (12.5.2013):  
[http://en.wikipedia.org/wiki/Lotka-Volterra\\_equation](http://en.wikipedia.org/wiki/Lotka-Volterra_equation)