UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY

VYUŽITIE "GAMBLER'S FALLACY" PRI ROZVÍJANÍ FINANČNEJ GRAMOTNOSTI

BAKALÁRSKA PRÁCA

2013

Kristína JABLONICKÁ

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY

VYUŽITIE "GAMBLER'S FALLACY" PRI ROZVÍJANÍ FINANČNEJ GRAMOTNOSTI

BAKALÁRSKA PRÁCA

Študijný program:	Ekonomická a finančná matematika
Študijný odbor:	1114 Aplikovaná matematika
Školiace pracovisko:	Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky
Vedúci práce:	Mgr. Barbora Kamrlová, PhD.

Bratislava 2013

Kristína JABLONICKÁ

74532867

Univerzita Komenského v Bratislave
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

ZADANIE ZÁVEREČNEJ PRÁCE

Meno a priezvisko študenta: Kristína Jablonická
Študijný program: ekonomická a finančná matematika (Jednoodborové štúdium, bakalársky I. st., denná forma)
Študijný odbor: 9.1.9. aplikovaná matematika
Typ záverečnej práce: bakalárska
Jazyk záverečnej práce: slovenský

Názov: Využitie "Gambler´s fallacy" pri rozvíjaní finančnej gramotnosti.

Cieľ: Cieľom práce je spracovať gambler´s fallacy ako matematický problém, charakterizovať matematiku, ktorá vstupuje do hry a následne navrhnúť spôsoby využitia tejto problematiky pri rozvíjaní finančnej gramotnosti v sekundárnom vzdelávaní.

Vedúci: Mgr. Barbora Kamrlová, PhD.
Katedra: FMFI.KAMŠ - Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky
Vedúci katedry: prof. RNDr. Daniel Ševčovič, CSc.

Dátum zadania: 10.10.2012

Dátum schválenia: 03.11.2012 doc. RNDr. Margaréta Halická, CSc.
garant študijného programu

....
študent vedúci práce

Poďakovanie Touto cestou sa chcem poďakovať svojej vedúcej bakalárskej práce Mgr. Barbore Kamrlovej, PhD. za ochotu, pomoc a čas, ktorý venovala rozhovorom o mojej práci. Ďakujem aj Mgr. A. Bachratej a Mgr. A. Belanovi za podnetné komentáre a podelenie sa so skúsenosťami z učiteľskej praxe.

Abstrakt v štátnom jazyku

JABLONICKÁ, Kristína: Gambler's fallacy ako matematický problém [Bakalárska práca], Univerzita Komenského v Bratislave, Fakulta matematiky, fyziky a informatiky, Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky; školiteľ: Mgr. Barbora Kamrlová, PhD., Bratislava, 2013, 42 s.

Gambler's fallacy (GF) je klamné očakávanie, že pravdepodobnosť nezávislých po sebe nasledujúcich udalostí vykazuje tzv. negatívnu recenciu. Napríklad, ak padla päťkrát hlava, gambler's fallacy hovorí, že pravdepodobnosť, že padne teraz znak je väčšia. GF vedie ľudí, ktorí týmto klamom trpia, aj k tomu, aby sa spoliehali na systémy upravovania stávok podľa výsledkov predchádzajúcich udalostí. Tieto systémy však pri dlhodobom používaní vedú k problémovému hazardnému správaniu a k strate všetkých vložených prostriedkov. GF patrí do prieniku medzi psychológiou a matematikou a v tejto práci ju rozoberáme z matematickej a didaktickej stránky. Sústredíme sa na to, z čoho vyplýva rozdiel medzi GF a skutočnosťou. Ponúkame návrhy, ako použiť GF vo vyučovaní matematiky budúcich učiteľov a gymnazistov pre rozvoj finančnej gramotnosti.

Kľúčové slová: gambler's fallacy, pravdepodobnosť, hazard

Abstract

JABLONICKÁ, Kristína: Gambler's fallacy ako matematický problém [Bachelor Thesis], Comenius University in Bratislava, Faculty of Mathematics, Physics and Informatics, Department of Applied Mathematics and Statistics; Supervisor: Mgr. Barbora Kamrlová, PhD., Bratislava, 2013, 42 p.

Gambler's fallacy (GF) is an erroneous belief that probability of independent events occuring one after another shows the so-called negative recency. For example, if a coin toss resulted in head five consequent times, GF tells us that probability of a tail is now greater than before. GF leads the people who believe it also towards systems of betting according to previous results. In long term use, these systems lead to problem gambling and cause loss of all money used for betting. GF is a part of intersection between psychology and mathematics. In this thesis we approach it from mathematical and didactical side. The stressed aspect is the relationship between GF and reality. We also propose solutions how to use GF in context of existing curricula in the education of future teachers of mathematics and high school students in order to enhance financial competency.

Keywords: gambler's fallacy, probability, gambling

Obsah

Zoznam obrázkov

Zoznam tabuliek

Zoznam použitých symbolov a skratiek

$\mathbb{N}$	množina všetkých prirodzených čísel
$\cup, \cap, \&, ^{C}, \Longrightarrow$	množinové operácie
$\sum_{i=0}^{\infty}$	súčet nekonečného radu
$\boldsymbol{E}(\cdot)$	očakávaná hodnota
$\boldsymbol{D}(\cdot)$	disperzia
$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{A}\|\boldsymbol{B})$	pravdepodobnosť udalosti A podmienenej udalosťou B
$\lim_{n\to\infty}$	limita postupnosti
$\binom{n}{k}$	kombinačné číslo
$\|\cdot\|$	absolútna hodnota
GF	gambler's fallacy

Úvod

Jedným z predpokladov matematických modelov klasickej ekonomickej teórie je, že človek sa rozhoduje racionálne. Kognitívna psychológia však ukazuje, že ľudia sa často správajú iracionálne a podliehajú rôznym klamom (*fallacies* [18]). Jedna skupina týchto klamov sa týka používania matematiky. Z nej sme vybrali na bližšie preskúmanie *gambler's fallacy* (hráčov klam, GF). Objavuje sa v situáciách, kde vystupuje riziko a pravdepodobnosť. Tými sa matematika začala zaoberať v 15. - 17. storočí. Historickou analýzou počiatkov týchto konceptov sa zaoberá napríklad Cooper [4] a Minto [14].

GF sa týka nesprávneho vnímania pravdepodobnosti v reálnych situáciách ([13] [21] [23]). Napríklad pri hádzaní mincou človek podliehajúci tomuto klamu očakáva, že keď pred chvíľou padol viackrát znak (napr. 5 krát), je teraz väčšia pravdepodobnosť, že padne hlava. Vychádza zo správneho predpokladu, že pravdepodobnosť, že padne hlava je jedna polovica, no nesprávne si myslí, že keď teraz sa minca ňesprávala podľa pravdepodobnosti.; tak sa pravdepodobnosť musí v najbližšej dobe musí vyrovnať. Tento klam sa prejavuje napríklad v hazardných hrách ale aj v bežnom živote a rozhodovaní o investíciách.

Opakom GF je tzv. *hot hand fallacy*. Pri tomto klame si človek myslí, že keď hádže mincou a veľa krát mu padol znak, tak to znamená, že má výnimočné šťastie a očakáva, že s veľkou pravdepodobnosťou znova hodí znak. Zaujímavé je, že tieto opačné klamy sa môžu vyskytovať na základe rovnakého rozdelenia pravdepodonosti, čomu sa venoval výskum Aytona a Fishera [1].

Sme presvedčení, že k finančnej gramotnosti patrí aj vedomosť o klamoch, ktorým majú ľudia sklony podliehať. GF môže mať negatívny vplyv napríklad na rozhodovanie pri hazardných hrách, podnikaní a obchodoch s cennými papiermi. Preto je cieľom našej práce spracovať problematiku pre stredoškolských študentov, ktorí začínajú robiť svoje prvé finančné rozhodnutia. Vychádzame pri tom hlavne zo Štátneho vzdelávacieho programu matematiky pre gymnáziá [25].

Práca je rozdelená do štyroch kapitol. V prvej kapitole ponúkame dôvody, prečo je GF zaujímavý problém a prečo sa ním zaoberať. V druhej kapitole spomíname oblasti života a hazardných hier, v ktorých sa GF vyskytuje. V tretej kapitole rozoberáme GF z matematickej stránky a uvádzame základy pravdepodobnosti, potrebné k matematickému vyvráteniu tohto klamu. V štvrtej kapitole opisujeme pedagogické využitie problému GF na dvoch úrovniach: v rámci vysokoškolského štúdia učiteľstva a stredoškolskej matematiky. Ponúkame návrhy, ako zapojiť GF do vyučovania na oboch úrovniach.

1 Čo je GF a prečo sa ním zaoberať?

Pravdepodobnosť, že na minci padne znak, je jedna polovica. Je to tak, pretože minca je z oboch strán približne rovnaká a spôsob, akým dopadne, závisí od faktorov, ktoré nevie človek dostatočne presne odhadnúť. Nevieme dopredu, ktorá strana bude na vrchu mince, keď dopadne. Vedieť pravdepodobnosť tejto jednoduchej udalosti patrí k najzákladnejším vedomostiam o matematike pravdepodobnosti. Každý, kto sa nevie rozhodnúť a hodí si mincou, očakáva, že šanca hlavy a znaku je približne rovnaká.

Je prekvapujúce, že aj v takomto jednoduchom výpočte sa ľudia často mýlia. V nemalej miere sa tieto omyly týkajú rizikových činností: hazardných hier (osobitne rulety a stávkovania na dostihoch) a obchodovania s finančnými derivátmi (opcie, futurity). Takýto omyl, naša *gambler's fallacy* (hráčov klam, GF) nastáva vtedy, keď zaznamenáme náhodný výsledok, ktorý sa nezhoduje s našou (čiastočne mylnou) predstavou o náhode. Keď vidíme, že už siedmy krát padla hlava, intuitívne sa nám teraz zdá pravdepodobnejší znak. Je ľahké zabudnúť vo víre nečakaného, že jednotlivé hody sú nezávislé udalosti, pretože minca si nepamätá, ako padla naposledy. Pravdepodobnosť jednej polovice sme nestanovili kvôli akejsi férovosti a spravodlivosti, ale jednoducho preto, že z toho, čo o minci vieme, nemáme dôvod tvrdiť, že je niektorý výsledok pravdepodobnejší.

Fenoménom GF sa ako prví osobitne zaoberali Kahneman a Tverský [8], no príklady výskytu takéhoto uvažovania boli zdokumentované už skôr (napr. u Laplaca [10]). Veľká časť článkov o GF skúma, nakoľko je tento klam rozšírený, v akých kontextoch sa často vyskytuje a ako mu možno predchádzať.

Štúdie ako napríklad Numerical Reasoning Ability and Irrational Beliefs in Problem Gambling z roku 2007 [3] poukazujú na spojitosť medzi GF, podobnými klammi a problémovým hraním hazardných hier (*problem gambling*). Tieto štúdie celkovo zamietajú možnosť, že by osoby trpiace týmito klammi mali väčšie problémy s počítaním skutočných pravdepodobností v hazardných hrách. Vedieť vypočítať výsledok a skutočne ho vziať do úvahy v reálnej situácii sú totiž dve rôzne stránky matematickej gramotnosti.

Prečo sa v takých otázkach, ako je určovanie pravdepodobnosti, treba spoliehať na matematiku? Teoretické pravdepodobnosti sa predsa pri jednotlivej udalosti takmer nikdy nezhodujú s očakávanou hodnotou. Padne hlava, alebo padne znak, nepadne nejaká kombinácia polohlava, poloznak. K pochopeniu nám môže pomôcť analógia s geometriou. Objekty ako trojuholník, štvorec v reálnom živote tiež neexistujú. Pri uvažovaní o nich však vieme vyvodiť dôsledky pre celé triedy objektov, ktoré sa im dostatočne podobajú. Podobne, počítanie teoretických pravdepodobností pracuje s modelmi našich vedomostí o reálnych udalostiach (početností ich výskytu v minulosti, fyzikálnych vlastností experimentu a pod.) a vyvodzuje z nich, čo môžeme očakávať v budúcnosti, ak sú naše vedomosti (predpoklady) pravdivé.

Možnosť zaradiť GF do stredoškolskej matematiky rozoberal kolektív Harvardskej univerzity v dokumente Facing the Odds [2] v rámci študijného celku, týkajúceho sa matematického pohľadu na hazard. Približuje problém GF pomocou jednoduchých, študentom blízkych príkladov, nevenuje sa však pri tomto probléme hlbšiemu pohľadu na počítanie pravdepodobnosti.

Zámerom našej práce bolo spojiť vyvrátenie GF s pohľadom do teoretických základov pravdepodobnosti. Tento pohľad má aj didaktický rozmer: preskúmanie možností zapojenia GF do stredoškolského učiva ako motivačný prvok k ďalšiemu štúdiu matematiky a zároveň prevenciu hazardného správania mladistvých. Vedomosti o nebezpečenstve hazardu sú súčasťou finančnej gramotnosti. Hoci problémy s hazardnými hrami sa týkajú len asi 5% mladých ľudí [3], prevencia v mladom veku má potenciál ovplyvniť finančné rozhodnutia počas celého života.

2 Výskyt GF

V 14. kapitole knihy Osudy dobrého vojáka Švejka [6] sa spomína prípad, kedy mal zámočník Vejvoda šťastie v kartách, ktoré sa pre neho neskončilo dobre. Začalo to nevinne: Hral s priateľmi mariáš a darilo sa mu. No čím dlhšie mu chodili dobré karty, a teda v každej hre vyhrával, tým sa stávala situácia absurdnejšou. Čoskoro sa kartárom minula hotovosť a začali vypisovať dlžobné úpisy. Vejvoda túžil len po tom, aby hra už konečne skončila, no nemohol odísť ako výherca. Napokon zašiel na policajnú strážnicu a udal svojich kamarátov za nepovolený hazard. Polícia však rozhodla, že mu ponechá tretinu výhry - milióny v dlžných úpisoch a päť tisíc vo vtedajšej mene. Chudák Vejvoda sa do rána zbláznil. Trocha absurdným spôsobom sa aj na tomto príklade ukazuje GF. Hoci historka ako celok je veľmi nepravdepodobná, v každej jednotlivej hre tejto historky bola rovnaká šanca, že Vejvoda bude mať dobré karty, keďže balíček sa miešal vždy nanovo. Kartári si však vďaka GF znova a znova namýšľali, že teraz už "musí" dostať Vejvoda zlé karty a musí prehrať.

GF sa vyskytuje pri náhodných procesoch, ktoré sa týkajú binomického rozdelenia. Vo svete hazardných hier je to napríklad pri rulete, hracích automatoch, hádzaní mincou a lotériách. Pri rulete je možné staviť na rôzne vlastnosti čísla, na ktoré dopadne gulička. Je to farba, parita, príslušnosť k určitému riadku alebo stĺpcu, konkrétne číslo a podobne. Veľmi rozšírené je aj stávkovanie cez internet na počítačovú simuláciu rulety. Na internete sú tisícky stránok, kltoré ponúkajú zaručené stratégie výhry, založené na GF a takisto stránky, ktoré sa venujú vyvracaniu týchto stratégii. Podľa štúdii ako Croson a Sundali[5] je GF prítomný u malého percenta hráčov týchto hier ako štatisticky signifikantný klam.

V nasledujúcich odstavcoch ponúkame výber z množstva štúdii, ktoré sa zaoberali preukázaním, že niektorí ľudia sa naozaj riadia podľa GF. Tieto a podobné štúdie zároveň ponúkajú reálne scenáre, ktoré možno použiť pri príprave zaujímavých príkladov zameraných na GF.

V Terrellovej štúdii [26] bolo preukázané, že GF sa vyskytuje aj v prípade parimutuel games. Sú to hry, v ktorých sa hráč delí o výhru so všetkými ostatnými, ktorí vsadili na dané zviera alebo číslo. Okrem stávkovania na preteky koní a psov môže mať pari-mutuel pravidlá aj lotéria (v niekoľkých amerických štátoch, napr. New Jersey). Preukázalo sa, že menej ľudí tipovalo čísla, ktoré boli víťazné v lotérii deň a dva dni predtým.

Mladí problémovo sa správajúci hráči (problem gamblers), mali podľa austrálskej štúdie Delfabbra a Lambosa podobné znalosti o pravdepodobnosti ako ostatní mladí zo vzorky, ale častejšie sa u nich prejavili pomýlené názory, napríklad že „niektoré výsledky, čísla, alebo sekvencie udalostí umožňujú predvídať, kedy je výhra pravdepodobnejšia.“[3]

Štúdia Piquara a Podolského [17] preukazuje, že GF sa prejavuje u trestaných kriminálnikov. Myslia si, že po tom, čo ich raz pristihli, majú menšiu pravdepodobnosť, že ich pristihnú znova.

Článok Shefrin a Statman [22] potvrdzuje existenciu GF aj u investorov, ktorí predpokladajú, že po dlhom období, kedy im akcia prinášala zisk, prestane byť taká zisková ako predtým. Preto predávajú svoje akcie priskoro.

GF sa teda vyskytuje nielen v prípade hazardných hráčov, ale aj v širšom kontexte. Rozborom podobnosti klamov, ktoré sa objavujú u hazardných hráčov a u investorov, sa zaoberala bakalárska práca Weustena [29]. Zistil, že hoci je GF potvrdené v laboratórnych podmienkach, je treba viac štúdií, ktoré by sa sústredili na GF v ekonomickej realite. Výskyt GF v podmienkach hazardných hier je však už všeobecne prijímaný.

3 Matematika a GF

V tejto časti najprv zadefinujeme potrebné pojmy a zopakujeme si vybrané partie zo základov pravdepodobnosti. Na týchto základoch vystaviame tvrdenia o binomických rozdeleniach, Bernoulliho vete, neúčinnosti systémov, ktoré využívajú informácie o minulých realizáciách náhodných premenných. Pozrieme sa aj na štatistiku čakania na prvý výskyt a tiež iné významy pojmu *gambler's fallacy*.

3.1 Pravdepodobnosť

Pre pochopenie, prečo *GF* nemá pravdu a riadením sa podľa tohto klamu nikam nedospejeme (prípadne dospejeme ku katastrofe), je potrebné skutočne porozumieť základom matematickej teórie pravdepodobnosti. Pri tejto časti práce sme vychádzali hlavne z učebnice Pravdepodobnosť a štatistika od Jankovej a Pázmana [7], z Mazurovej knihy What's luck to do with it? [13] a Packelovej The Mathematics of Games and Gambling [16]. Existuje aj matematický pohľad na GF založený na tzv. nomickej pravdepodobnosti, ktorou sa zaoberá kniha Nomic Probability and the Foundations of Induction [19]. Klasická definícia pravdepodobnosti je však intuitívnejšia, spracovaná v množstve dostupnej literatúry a lepšie sa hodí pre naše účely. Takisto by sme mohli *GF* skúmať z hľadiska rozhodovania sa na základe rizika s použitím úžitkových funkcii, ako napríklad Machina v článku [11] Choice under Uncertainty: Problems Solved and Unsolved. Je to možné rozšírenie do ďalších prác.

GF je spôsob, akým ľudia niekedy vnímajú pravdepodobnosť rôznych výsledkov procesu, ktorý vnímajú ako náhodný. Preto náš prvý pojem bude matematicky opisovať pravdepodobnosť rôznych výsledkov určitého experimentu.

Definícia 3.1. *Náhodná premenná* (typicky X) je premenná, ktorá nadobúda svoju hodnotu podľa výsledku zadaného experimentu.

Definícia 3.2. *Realizácia náhodnej premennej* je konkrétny nameraný výsledok zadaného experimentu.

Napríklad pri hode kockou môže byť náhodnou premennou $B =$ súčet bodiek, ktoré sú výsledkom tohto hodu. V konkrétnom experimente táto premenná nadobudne realizáciu napr. 5 alebo 2. Inou náhodnou premennou by mohla byť $D =$ súčet bodiek z dvoch hodov kockou. Realizáciou bude opäť konkrétny výsledok: konkrétne číslo z intervalu $\langle 2, 12 \rangle$. Ďalším príkladom náhodnej premennej by bola $P =$ parita jedného hodu kockou. Pre účely tejto práce sa zameriame na tzv. diskrétnu náhodnú premennú, ktorá má spočítateľný počet možných výsledkov.

Je dôležité si uvedomiť, že výsledky diskrétnej náhodnej premennej nemusia byť rovnako pravdepodobné. Napríklad náhodná premenná U, ktorá hovorí o úspechu basketbalistu pri jednej streľbe na kôš, môže mať dva možné výsledky: kôš trafí alebo ho netrafí. Ak je hráč slabý, tak bude zrejme pravdepodobnejšie, že kôš netrafí.

Pri práci s výsledkami experimentov týkajúcich sa *GF*, ako je napríklad výsledok stávky v lotérii, nás často zaujímajú aj rôzne kombinácie výsledkov: ak by sme napríklad zakúpili viac než jeden tiket do lotérie alebo by sme začiarkli viac než jedno číslo, zaujíma nás teoretická početnosť výsledkov. Pre prácu s takýmito kombináciami je vhodné zaviesť do teórie používanie množín výsledkov. V tejto práci predpokladáme u čitateľa znalosť základov teórie množín.

Najprv si zadefinujeme množinu, ktorá popisuje náš experiment ako celok:

Definícia 3.3. *Množina možných výsledkov* Ω je množinou všetkých možných výsledkov experimentu.

Ak ako experiment chápeme hod mincou a náhodná premenná X označuje, ktorý symbol skončil na vrchu mince, $\Omega = \{\text{hlava znak}\}$.

Definícia 3.4. *Vybraná množina výsledkov* označovaná ako $A, B, \ldots$ je množinou výsledkov experimentu, ktorej pravdepodobnosť chceme zistiť.

Takouto množinou môže byť napríklad v prípade hádzania kockou $A = \{123\}$ alebo v prípade rulety $B = $\{červené políčka\}

Definícia 3.5. *Absolútna početnosť výsledku(množiny)* je počet výskytu daného výsledku (výsledku patriaceho do danej množiny) počas trvania experimentu.

Absolútna početnosť závisí od počtu pokusov. Pre účely porovnávania experimentov s rôznym počtom pokusov (dát) je vhodná nasledujúca definícia:

Definícia 3.6. *Relatívna početnosť* je podielom absolútnej početnosti a počtu pokusov.

Napríklad pri hode mincou je relatívna početnosť výsledku hlava podielom zaznamenaného počtu hláv a počtu hodov, ktoré boli súčasťou experimentu.

Definícia 3.7. *Teoretická početnosť (pravdepodobnosť)* je početnosť, ktorú často vieme určiť na základe predpokladaných vlastností procesu matematickou úvahou.

Napríklad, kocka má šesť strán a jej hmotnosť je natoľko rovnomerne rozložená, že nemáme dôvod predpokladať, že by padala na jednu stranu častejšie ako na iné. Preto je toretická početnosť, že na hornej stane kocky bude po hode 6 bodiek $\frac{1}{6}$. Iná situácia nastáva pri chlebe s maslom, ktorý podľa štúdii padá na maslovú stranu častejšie (čo môžeme očakávať aj podľa toho, že nemá rovnomernú hustotu). Teoretická pravdepodobnosť môže vychádzať vždy len z toho, čo o procese vieme. Ak sa dá každý možný výsledok rozdeliť na konečný počet rovnako pravdepodobných jednoduchých výsledkov (ako pri hádzaní kockou, kde sa každý výsledok môže rozložiť na možné výsledky jednotlivého hodu), môžeme pravdepodobnosť jednoduchého výsledku určiť ako $\frac{1}{\text{počet jednoduchých výsledkov}}$. Pravdepodobnosť zložených výsledkov určíme ako podiel počtu možných jednoduchých výsledkov, ktoré spĺňajú naše podmienky(párnosť čísla, farba,...) a celkového počtu jednoduchých výsledkov.

3.2 Vlastnosti pravdepodobnosti

Pre pravdepodobnosť platia okrem iných aj nasledujúce vlastnosti, ktoré budú neskôr užitočné:

$$P(\Omega) = 1, \tag{1}$$

(Pretože platí $P(\Omega) = \frac{P(\Omega)}{P(\Omega)}$)

$$P(A) + P(A^c) = P(\Omega) = 1, \tag{2}$$

$$0 \leq P \leq 1, \tag{3}$$

$$P(A \cup B) \quad = \quad P(A) + P(B) + P(A \cap B). \tag{4}$$

Poslednú vlastnosť môžeme overiť napríklad pomocou Vennových diagramov.

3.3 Očakávaná hodnota a disperzia

Aby sa s náhodnými premennými ľahšie pracovalo, existuje pojem očakávanej hodnoty, ktorá nám hovorí, okolo akej hodnoty sa dá očakávať výsledok experimentu.

Definícia 3.8. *Očakávaná hodnota $E(X)$:* Ak máme spočítateľný počet číselných hodnôt x_i, ktoré náhodná premenná X nadobúda s pravdepodobnosťami p_i a zároveň rad $\sum_{i=0}^{\infty} x_i p_i$ absolútne konverguje, hovoríme tomuto radu očakávaná hodnota náhodnej premennej X.

Napríklad, očakávaná hodnota jedného hodu kockou je

$$\sum_{i=1}^{6} x_i \frac{1}{6} = \frac{1}{6}(1+2+3+4+5+6) = \frac{21}{6} = \frac{7}{2} = 3.5. \tag{5}$$

Očakávaná hodnota je užitočná, no je často užitočné vedieť aj, aký je rozptyl hodnôt okolo nej. Nasledujúci pojem je matematickým vyjadrením tohto rozptylu.

Definícia 3.9. *Disperzia $D(X)$:* Ak stredná hodnota $E[(X - E(X))^2]$ existuje, potom sa nazýva disperziou náhodnej premennej X.

Tieto dve funkcie sú pri štúdiu pravdepodobnosti nevyhnutne prítomné a matematická podstata *GF* s nimi úzko súvisí. Práve očakávaná hodnota stávky pre nás neskôr bude mať kľúčový význam. Očakávaná hodnota a disperzia patria do širšej skupiny *štatistík*. Štatistiky sú čísla, ktoré umožňujú skúmať náhodnú premennú na základe jej realizácii alebo si lepšie predstaviť možné realizácie na základe teoretického popisu náhodnej premennej.

3.4 Podmienená pravdepodobnosť

Podmienená pravdpodobnosť $P(A|B)$je pravdepodobnosť výsledku A ak vieme, že nastal výsledok B.

O podmienenej pravdepodobnosti vieme, že

$$P(A|B) = \frac{P(A\&B)}{P(B)}. \tag{6}$$

Napríklad, ak sme hodili kockou a vieme, že padlo párne číslo, pravdepodobnosť, že padne šestka bude

$$P(\text{šestka}|\text{párne číslo}) = \frac{P(\text{šestka\&párne číslo})}{P(\text{párne číslo})} \tag{7}$$

$$= \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}. \tag{8}$$

Ak sa výsledky A a B navzájom *vylučujú*, teda

$$P(A|B) = 0 \wedge P(B|A) = 0, \tag{9}$$

respektíve nemajú prienik

$$P(B \cap A) = 0, \tag{10}$$

potom

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B). \tag{11}$$

3.5 Nezávislé javy

Definícia 3.10. Za *nezávislé udalosti* považujeme také udalosti, ktoré navzájom nemajú vplyv na pravdepodobnosť svojich výsledkov. Inými slovami, ak sú A a B nezávislé udalosti, potom pre podmienené pravdepodobnosti $P(A|B)$ a $P(B|A)$ platí:

$$P(A|B) = P(A), \tag{12}$$

$$P(B|A) = P(B). \tag{13}$$

Príklad nezávislých udalostí môžu byť dva hody mincou, hody kockou, kolá rulety ale aj dve rôzne udalosti ako napríklad hod mincou voči hodnote karty vytiahnutej z balíčka kariet. Typickým príkladom prisudzovania závislosti udalostiam, ktoré závislé nie sú, môže byť napríklad nosenie talizmanu pre šťastie v hre.

3.6 Pravdepodobnosť nezávislých javov

Keď do vzťahu pre podmienenú pravdepodobnosť $P(A|B) = \frac{P(A\&B)}{P(B)}$ dosadíme nezávislé udalosti A a B, dostaneme

$$P(A) = \frac{P(A\&B)}{P(B)} \Longrightarrow P(A\&B) = P(A) \cdot P(B). \tag{14}$$

3.7 Rozdelenia náhodných premenných

Rozdelenie náhodnej premennej X je (pre naše účely) postupnosť $p(x_i)$, ktorá každému výsledku x_i náhodnej premennej X priradí jeho pravdepodobnosť p_i.

X *je z alternatívneho rozdelenia* ($X \sim Alt(p)$) ak má náhodná premenná len dva výsledky 1 a 0 s korešpondujúcimi pravdepodobnosťami p a $1-p$.

Takéto rozdelenie je obzvlášť vhodné pri skúmaní hazardných hier, kde má každá jednotlivá stávka dva možné výsledky: výhra alebo prehra. Očakávaná hodnota premennej s takýmto rozdelením je

$$E(X) = p_1x_1 + p_2x_2. = p \cdot 1 + (1-p) \cdot 0 = p. \tag{15}$$

X *má binomické rozdelenie* ($X \sim Bin(n,p)$ *kde* $n \in \mathbb{N}, p \in (0,1)$) ak je X súčtom n nezávislých, rovnako rozdelených náhodných premenných z alternatívneho rozdelenia. $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$.

Príkladom premennej s binomickým rozdelením môže byť napríklad $X =$ počet hláv z troch hodov mincou. V tomto prípade $X \sim Bin(3, 0.5)$.

Veta 3.11. *Bernoulliho schéma* Nech $X \sim Bin(n,p)$. Potom platí, že:

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}. \tag{16}$$

Dôkaz. Pravdepodobnosť jednej z n-tíc výsledkov, v ktorej bude k-krát sledovaný výsledok A (napríklad takej, že prvých k bude sledovaný výsledok A a ďalších $n-k$ bude opačný výsledok A^C) vyrátame za použitia vlastností nezávislých premenných ako súčin

$$P(\text{jedna zo sledovaných } n\text{-tíc}) = p^k(1-p)^{n-k}. \tag{17}$$

Takýchto n-tíc bude $\binom{n}{k}$ podľa vedomostí zo základov kombinatoriky a teda

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}. \tag{18}$$

□

3.8 Prečo GF neplatí

Na ilustráciu princípov, vďaka ktorým je *GF* skutočne klam, si vezmeme prípad s hádzaním mince. X_i označíme ako 1 ak padla hlava v i-tom hode a 0 ak padol znak. Pre i-ty hod platí, že je realizáciou náhodnej premennej $X_i \sim Alt(0.5)$. Za normálnych okolností je nám celkom jasné, že $P(X_i = 1) = 0.5$ pre všetky i. Zmení sa niečo, ak realizáciami X_{i-k} až X_{i-1} boli samé jednotky?

GF hovorí, že áno, že teraz už nebude platiť $P(X_i = 1) = 0.5$, ale pravdepodobnosť bude nejaké menšie číslo. Dôvody, pre ktoré sme určili pravdepodobnosť ako 0.5, sa však nezmenili a preto je *GF* klam.

$$P(X_i = 1 | X_{i-5} = 1 \wedge \cdots \wedge X_{i-1} = 1) \tag{19}$$

sa z dôvodu nezávislosti X_i stále rovná $P(X_i = 1)$. Nič na tom nezmení fakt, že sme sa stali svedkami nepravdepodobnej udalosti

$$(X_{i-5} = 1) \wedge \cdots \wedge (X_{i-1} = 1), \tag{20}$$

ktorej pravdepodobnosť bola len

$$P(X = 5) = \binom{5}{5} 0.5^5 (1-0.5)^{5-5} \tag{21}$$

$$= 0.5^5 = 0.03125 \doteq 3.12\%. \tag{22}$$

3.9 Počítacie systémy

Ak je u hráča *GF* pevne zakorenené, môže sa uchýliť aj k rôznym schémam, založeným na sledovaní výsledkov predošlých hier, ktoré mu „zaručia výhru“. Tieto schémy budeme v ďalšom texte nazývať počítacie systémy. V literatúre sa počítacie systémy nazývajú aj martingaleské hazardné stratégie, no slovo martingala má v matematike aj iný význam. V tejto časti si ukážeme, prečo sú všetky počítacie systémy neužitočné. Dokonca, ak je hra nastavená proti hráčovi (napr. ruleta, lotéria), čím dlhšie bude hrať, tým viac bude prehrávať. Táto časť je spracovaná podľa Thorpových kníh Elementary probability [27] a The Mathematics of Gambling [28]. Týka sa rulety, prípadne hádzania mincou alebo iných výberov z alternatívneho rozdelenia. Okrem Thorpa sa tomuto problému podobným spôsobom venuje aj Proctor [21] a Packel [16].

3.9.1 Stávka, hodnota stávky, očakávaná hodnota stávky

Definícia 3.12. *Stávka* B_i je finančná suma, ktorú vložíme do i-teho kola hry. Platí, že B_i je vždy kladné číslo.

Definícia 3.13. *Akcia* B je daná postupnosť stávok $B_1, \cdots, B_n$.

Definícia 3.14. *Hodnota stávky* H_i je finančná suma, ktorú získame alebo stratíme z i-teho kola hry.

H_i je náhodná premenná so strednou hodnotou závisiacou od B_i a od konkrétnej hry. Ak vezmeme alternatívne rozdelenie $A_i \sim Alt(p)$ (výhru budeme reprezentovať ako 1, prehru ako 0, pravdepodobnosť výhry bude p), potom $H_i = A_i \cdot v \cdot B_i - B_i$, kde v je pomer, v akom sa vypláca výhra v danej hre (napríklad v rulete pri stávke na červenú je to dvojnásobok vloženej stávky) a je to konštanta. Na rozdiel od B_i, ktorá je vždy kladná, H_i môže byť ľubovoľná. Navyše, pri hazardných hrách je očakávaná hodnota $E(H_i)$ typicky záporná. Vyplýva to z toho, že pri hazarde organizátori používajú také hry, ktoré majú pre nich kladnú očakávanú hodnotu. Za tento prírastok očakávanej hodnoty banku platia hráči zápornosťou svojej očakávanej hodnoty.

3.9.2 Počítacie systémy

Definícia 3.15. *Počítací systém* je systém, ktorý je založený na dvoch druhoch informácie:

- *záznam o predchádzajúcich stávkach*
- *záznam o predchádzajúcich číslach*

Dôležité predpoklady:

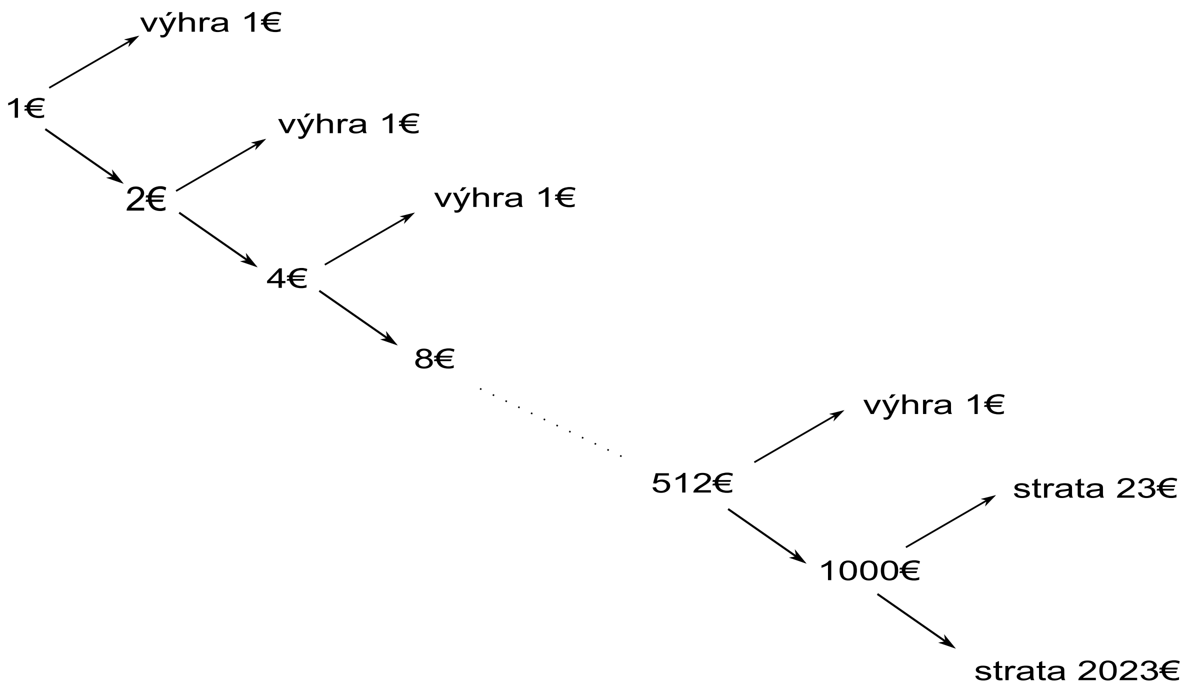
1. Ruleta alebo minca nie je falošná, teda každá jednotlivá udalosť je rovnako pravdepodobná.
2. Je stanovené obmedzenie na najmenšiu a najväčšiu stávku.

3.9.3 Príklad

Jedným zo systémov je tzv. zdvojovanie stávok. Ak hráč v rulete stavia na jednu z dvoch farieb, pravdepodobnosť jeho výhry pri európskej rulete je $\frac{18}{37}$ a teda očakévaná hodnota jedného staveného eura je

$$2 \cdot \frac{18}{37} + 0 \cdot \frac{19}{37} = 0,973€. \tag{23}$$

V tejto hre sa teda z dlhodobého hľadiska očakáva, že $\frac{19}{36}$ všetkých hier hráč prehrá. V ďalšom výpočte budeme predpokladať, že minimálny vklad je 1€a maximálny 1000€. Hráč verí, že zdvojovanie stávok mu pomôže zvrátiť očakávanú hodnotu jednotlivých stávok na výhru 1€. Ak v nejakom kole vyhrá, prestane hrať a odnesie si výhru. Ak však prehrá, v nasledujúcom kole zdvojnásobí svoju stávku. Ak teda začne s 1€, hra sa môže vyvíjať tak, že v prvom kole vyhrá 1€alebo ho prehrá. V ďalšom kole staví 2€a ak vyhrá, $4 - 3 = 1$ znova mu ostane 1€. Ak prehrá, tentokrát vsadí 4€, a tak bude pokračovať exponenciálne: $8, 16, 32, 64, 128, 256, 512$.To by už musela prehra nastať 10 krát za sebou a hráčovi sa niečo také zdá veľmi nepravdepodobné, takže má pocit, že systém je dosť dobrý. Ak by však prehra trvala ešte dlhšie, hráč už nemôže použiť zdvojovanie a maximálna stávka bude 1000. Na obrázku 1 je zobrazená táto stratégia formou grafu.



Obr. 1: obrázok stromového grafu stratégie

Vieme však ukázať, že táto stratégia nemôže zmeniť očakávanú hodnotu $\frac{-0{,}027€}{1€}$. Predpokladáme, že keďže od 11.kola už hráč nie je schopný zdvojovať stávky, skončí s hrou aj keby musel prehrať.

Výpočet očakávanej výhry jednej hry:

$$\begin{aligned}
&1\cdot\frac{18}{37}+1\cdot\frac{18}{37}\cdot\frac{19}{37}+1\cdot\frac{18}{37}\cdot\frac{19}{37}^2\\
&+1\cdot\frac{18}{37}\cdot\frac{19}{37}^3+1\cdot\frac{18}{37}\cdot\frac{19}{37}^4\\
&+1\cdot\frac{18}{37}\cdot\frac{19}{37}^5+1\cdot\frac{18}{37}\cdot\frac{19}{37}^6\\
&+1\cdot\frac{18}{37}\cdot\frac{19}{37}^7+1\cdot\frac{18}{37}\cdot\frac{19}{37}^8\\
&+1\cdot\frac{18}{37}\cdot\frac{19}{37}^9-23\cdot\frac{18}{37}\cdot\frac{19}{37}^{10}\\
&-2023\cdot\frac{19}{37}^{11}=-0.3400859€.
\end{aligned}$$

3.9.4 Matematické zdôvodnenie neúspešnosti počítacích systémov

Takýto výpočtový dôkaz je presvedčivý, no vieme ukázať, že existuje nekonečne veľa možných počítacích systémov a nekonečne veľa výpočtov nie je možné previesť ani prečítať:

Ak vezmeme za prvý systém taký, ktorý káže staviť až potom, ako zaznamenáme v predchádzajúcom kole "prehru", druhý káže staviť až po dvoch "prehrách", ... n-tý káže staviť po n prehrách po sebe, vieme ísť ľubovoľne ďaleko a stále sme nevyčerpali všetky možné systémy. Preto treba hlbší dôkaz, ktorý sa postará o celé nekonečné množstvo systémov naraz.

K tomuto dôkazu si najprv pripravíme potrebnú všeobecnú teóriu pravdepodobnosti: Zadefinujeme potrebné pojmy a dokážeme potrebné lemy a vety. Potom pomocou týchto nástrojov dokážeme neúspešnosť počítacích systémov.

Nasledujúca nerovnosť je v teórii pravdepodobnosti veľmi známa a pochádza z Ruska z 19. storočia. Bude pre nás užitočná, pretože ponúka horné ohraničenie pre pravdepodobnosť netypických výsledkov kladnej náhodnej premennej. Takouto náhodnou premennou je aj disperzia: je kladná, pretože predstavuje vzdialenosť výsledku od očakávanej hodnoty.

Veta 3.16. *Markovova nerovnosť*
(podľa [7])
Predpoklady
$X(\omega)\geq 0$ *je kladná diskrétna náhodná premenná, existuje* $\mu=E(X)$.
Tvrdenie
pre ľubovoľné kladné $\lambda(\forall\lambda>0)$ *platí:*

$$P(X\geq\lambda\cdot\mu)\leq\frac{1}{\lambda} \tag{24}$$

Dôkaz. Diskrétna náhodná premenná X nadobúda hodnoty x_i s pravdepodobnosťami p_i.

Označíme S =$\{i \in \mathbb{N} : x_i \geq \lambda \cdot \mu\}$ množinu indexov všetkých možných výsledkov, ktoré svojou hodnotou presahujú zvolený násobok očakávanej hodnoty.

Použijeme rovnosť, ktorou je zadefinovaná očakávaná hodnota $E(X)$ a rozdelíme jej pravú stranu podľa toho, či indexy patria alebo nepatria do S.

$$E(X) = \sum_{i=0}^{\infty} x_i p_i \tag{25}$$

$$E(X) = \sum_{S}(x_i \cdot p_i) + \sum_{S^c}(x_i \cdot p_i). \tag{26}$$

Keďže pravdepodobnosti p_i aj hodnoty našej premennej x_i sú kladné, odstránením člena $\sum_{S^c}(x_i \cdot p_i)$ sa pravá strana zmenší, preto môžeme písať:

$$E(X) \geq \sum_{S}(x_i \cdot p_i). \tag{27}$$

Využijeme, čo sme si označili ako S:

$$E(X) \geq \lambda \cdot \mu \cdot \sum_{S} p_i. \tag{28}$$

Znova použijeme definíciu S (λ je vďaka nášmu predpokladu kladná a preto ňou môžeme predeliť nerovnicu):

$$\frac{E(X)}{\lambda} \geq \mu P(X \geq \lambda \cdot \mu). \tag{29}$$

Využijeme, že $\mu = E(X)$ a keďže X je kladná, tak aj $E(X)$ je kladná a môžeme ňou násobiť nerovnicu:

$$\frac{1}{\lambda} \geq P(X \geq \lambda \cdot \mu), \tag{30}$$

čo sme chceli dokázať. □

Prichádzame k ďalšej významnej nerovnosti, ktorá je dôsledkom Markovovej nerovnosti a vznikla v tom istom období.

Veta 3.17. *Čebyševova nerovnosť*

Predpoklady

Pre náhodnú veličinu X existuje $E(X), D(X)$.

Tvrdenie *Pre každé $\varepsilon > 0$*

$$P(|X - E(X)| \geq \varepsilon) \leq \frac{D(X)}{\varepsilon^2} \tag{31}$$

Dôkaz. $Y = (E(X) - X)^2$ spĺňa predpoklady Markovovej vety. Preto pre ľubovoľné $\lambda > 0$ platí:

$$P((X - E(X))^2 \geq \lambda \cdot E((X - E(X))^2) \leq \frac{1}{\lambda} \tag{32}$$

Potrebujeme dostať podobný tvar ako má tvrdenie. Preto za λ vyberieme $\lambda = \frac{\varepsilon^2}{D(X)}$.

$$P((X - E(X))^2 \geq \frac{\varepsilon^2}{D(X)} \cdot E((X - E(X))^2) \leq \frac{D(X)}{\varepsilon^2} \tag{33}$$

Dosadíme $D(X)$ podľa definície disperzie.

$$P((X - E(X))^2 \geq \frac{\varepsilon^2}{D(X)} \cdot D(X)) \leq \frac{D(X)}{\varepsilon^2} \tag{34}$$

Vykrátime $D(X)$ zo zlomku.

$$P((X - E(X))^2 \geq \varepsilon^2) \leq \frac{D(X)}{\varepsilon^2} \tag{35}$$

Využijeme, že $(X - E(X))^2 \geq \varepsilon^2$ je to isté ako $|X - E(X)| \geq \varepsilon$.

$$P(|X - E(X)| \geq \varepsilon) \leq \frac{D(X)}{\varepsilon^2} \tag{36}$$

□

Lema 3.18. *Ak sú splnené podmienky:*

$$\lim_{n\to\infty} E(\hat{\theta}_n) = \theta, \tag{37}$$

$$\lim_{n\to\infty} D(\hat{\theta}_n) = 0, \tag{38}$$

potom pre ľubovoľné $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty} P(|\hat{\theta_n} - \theta_n| \geq \varepsilon) = 0. \tag{39}$$

Dôkaz. Dosadíme do Čebyševovej nerovnosti a zlimitujeme. □

Táto lema sa dá preformulovať aj za použitia pojmu konzistentný odhad, nie je to však nutné pre túto prácu.

Veta 3.19. *Slabý zákon veľkých čísiel*

Predpoklady

$X_1, ..., Xn$ sú nezávislé náhodné premenné.

$E(X_i)$ a $D(X_i)$ sú definované pre všetky i.

Existuje M také, že $D(Xi) \leq M$ pre všetky i.

Označenia:
$S_n = X1 + ... + Xn.$
Priemerná výhra v n kolách $= \frac{S_n}{n}$
Očakávaná priemerná výhra v n kolách $= E(\frac{S_n}{n})$
Tvrdenie
Ak zväčšujeme n, pre dané $a > 0$ *sa*
$P(|\frac{S_n}{n} - E(\frac{S_n}{n})| > a)$ *blíži nule.*
$\forall a > 0 : \lim_{n\to\infty} P(|\frac{S_n}{n} - E(\frac{S_n}{n})| > a) = 0$

Dôkaz. Použijeme lemu 1:
ako ε dosadíme a, ako $\hat{\theta}_n$ dosadíme $\frac{S_n}{n}$ a ako θ_n dosadíme $E(\frac{S_n}{n})$.
Ukážeme, že naša situácia spĺňa predpoklady lemy 3.18:

$$E(\hat{\theta}_n) = E(\frac{S_n}{n}) = \theta_n \to \theta, n \to \infty. \tag{40}$$

$$D(\hat{\theta}_n) = D(\frac{S_n}{n}) \tag{41}$$

Použijeme vlastnosť $D(aX) = a^2 D(X)$.

$$D(\frac{S_n}{n}) = \frac{1}{n^2} D(S_n) \tag{42}$$

pre nezávislé $X_i : D(\sum(X_i)) = \sum D(X_i)$

$$D(\frac{S_n}{n}) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n} D(Xi) \tag{43}$$

Využijeme tretí predpoklad tejto vety.

$$D(\frac{S_n}{n}) \leq \frac{1}{n^2} \cdot nM \tag{44}$$

a teda

$$D(\frac{S_n}{n}) \leq \frac{M}{n} \to 0, n \to \infty. \tag{45}$$

Splnili sme predpoklady lemy 3.18, môžeme do jej tvrdenia dosadiť naše premenné, čím sme dokázali vetu 3.19. □

O *GF* sa vo všeobecnosti predpokladá, že vychádza z tzv. zákona malých čísel. Zákon malých čísel tvrdí to isté, ako slabý zákon veľkých čísiel no pre malé n. Zákon malých čísel však vo všeobecnosti neplatí, čo si možno overiť jednoducho hádzaním kocky alebo mince.

Veta 3.20 (Veta o neúčinnosti počítacích systémov)**.** Predpoklady

A *Pre každú jednotlivú stávku B_i je príslušná očakávaná hodnota $E(H_i)$ záporná. Platnosť predpokladu vyplýva z toho, že $A_i \cdot v < 1$.*

B *Je daný maximálny limit množstva peňazí v hre P*

C *Výsledok ktorejkoľvek hry neovplyvňuje výsledky ostatných hier.*

D *Je daná minimálna veľkosť jednotlivej stávky B_i.*

Tvrdenia

1. *Existuje konštanta M ohraničujúca zhora všetky disperzie jednotlivých premenných. $D(B_i) \leq M$ pre všetky i*

2. *Nech $S_n = H_1 + \cdots + H_n$. Akejkoľvek akcii B kde $H_1, \cdots H_n$ sú hodnoty prislúchajúce stávkam $B_1, \cdots B_n$ prislúcha záporná očakávaná hodnota súčtu hodnôt $E(S_n)$, t.j. pre ľubovoľnú akciu B platí $E(S_n) < 0$.*

3. *Táto očakávaná hodnota je záporná a je to súčet očakávaných hodnôt jednotlivých stávok $E(\sum H_i) = \sum E(H_i)$.*

4. *Platí $\lim_{n\to\infty} P(S_n < 0) = 1$ a teda je takmer isté, že čím dlhšie hráč pokračuje v hre, tým väčšia je pravdepodobnosť, že:*

   a) *prehrá,*

   b) *nikdy nevyhrá naspäť peniaze, ktoré prehral.*

5. *Navyše, platí aj silnejšie tvrdenie $\lim_{n\to\infty} P(S_n < L) = 1$ z čoho vyplýva, že hráč nakoniec príde o celý svoj rozpočet vyhradený na hru bez ohľadu na to, aký bol veľký.*

Návod na dôkaz tejto vety možno nájsť v knihe [27], v ktorej sú spísané čiastkové tvrdenia, ktoré treba dokázať. Toto je hlavný výsledok matematickej časti práce.

Dôkaz. Vďaka predpokladom A a D môžeme tvrdiť, že existuje také K, že $0 \leq |B_i| \leq K$ pre všetky i. $A_i * v - 1$ je tiež ohraničiteľné konštantou a preto môžeme ohraničiť aj ich násobok, teda H_i. Vďaka predpokladu C môžeme povedať, že H_i sú nezávislé náhodné premenné.

1 Ukážeme, že existuje konštanta M: $D(H_i) \leq M$ pre všetky i:

$|H_i| \leq K$ pre všetky $i \longrightarrow E|H_i| \leq K \longrightarrow$ aj $E(H_i) \leq K$

$$(D(H_i) = E(H_i^2) - E^2(H_i) \tag{46}$$

Tento súčet si rozložíme na jednotlivé sčítance. Najskôr použijeme vlastnosť umocňovania na druhú v spojení s absolútnou hodnotou.

$$E(H_i^2) = E(|H_i|^2) \leq K^2 \leq 2K^2 \tag{47}$$

Nerovnosť ohraničenosti $E|H_i|$ umocníme na druhú.

$$E^2(H_i) \leq K^2 \tag{48}$$

Spojením sčítancov teda dostávame:

$$=> D(H_i) \leq K^2 := M \tag{49}$$

2., 3.: Ukážeme, že očakávaná hodnota súčtu stávok môže byť ohraničená záporným číslom:
Vďaka predpokladom A a D môžeme povedať, že $E(H_i)$ je zhora ohraničené zápornou konštantou m, ktorá je rovnaká pre všetky i.
Chceme ukázať: $E(S_n) \leq m$.

$$\begin{aligned} E(S_n) &= E(H_1 + ... + H_n) && (50) \\ &= E(H_1) + ... + E(H_n). && (51) \end{aligned}$$

Toto platí kvôli linearite očakávanej hodnoty.

$$E(H_i) \leq m \text{ pre všetky } i => \sum_{i=1}^{n} E(H_i) \leq n \cdot m \leq m. \tag{52}$$

4. a), b): Z 1.,2., 3. a slabého zákona veľkých čísel ukážeme, že $\lim_{n\to\infty} P(S_n < 0) = 1$.
Podľa tvrdenia 1 a slabého zákona veľkých čísel ak zväčšujeme n, tak $\frac{S_n}{n}$ sa bude približovať k $E(\frac{S_n}{n})$. Pravdepodobnosť, že $\frac{S_n}{n}$ bude pre veľké n v intervale $(E(\frac{S_n}{n}) + \frac{m}{2}, E(\frac{S_n}{n}) - \frac{m}{2})$, sa bude blížiť 1. Zároveň vieme z b), že

$$E(\frac{S_n}{n}) \leq m \tag{53}$$

a teda horné ohraničenie pre $\frac{S_n}{n}$ bude $\frac{m}{2}$:

$$\frac{S_n}{n} \leq \frac{m}{2}. \tag{54}$$

Z rovnice vyjadríme vzťah pre S_n:

$$S_n \leq \frac{mn}{2} < 0. \tag{55}$$

A teda

$$\lim_{n\to\infty} P(S_n < 0) = 1, \tag{56}$$

čo sme chceli ukázať.

5. Ukážeme, že ak je daná strata $L < 0$, tak

$$\lim_{n\to\infty} P(S_n < L) = 1. \tag{57}$$

Vráťme sa k nerovnosti 55:

$$S_n \leq \frac{mn}{2} < 0. \tag{56}$$

Keďže n môžeme byť ľubovoľne veľké, tak pre dané záporné hodnoty L a m určite nájdeme také n_0, aby

$$\frac{mn_0}{2} < L. \tag{58}$$

Konkrétne to bude pre $n_0 > \frac{2L}{m}$.
Bude platiť

$$S_n \leq \frac{mn}{2} < L \text{ pre ľubovoľné } n \geq n_0, \tag{59}$$

z čoho už vyplýva vzťah 57.

$\square$

Teda, ukázali sme, že matematické systémy nemôžu zmeniť očakávanú hodnotu stávky a že čím dlhšia je hra, tým je pravdepodobnejšie, že hráč prehrá a príde o všetky peniaze, ktoré na hru vyhradil.

Ešte poznamenáme, že v prípade kartových hier je situácia zložitejšia než pri rulete. V rámci jednej kartovej hry vytiahnutia jednotlivých kariet totiž nie sú realizáciami nezávislých náhodných premenných. Ak napríklad vytiahneme červené eso, v ďalšom ťahu ho už nemôžeme vytiahnuť a teda neplatí, že $P(X_i = \text{č.eso}|X_{i-1} = \text{č.eso}) = P(X_i = \text{č.eso})$. Preto v prípade kartových hier nemožno použiť úvahy v takej podobe, ako uvádzame.

3.10 Waiting time

Waiting time je čas čakania na konkrétnu kombináciu výsledkov (napríklad, pri hádzaní mincou $HHHHH$ alebo $HZHHZ$). Zatiaľ čo pravdepodobnosť výskytu každej kombinácie je rovnaká, ak hádžeme mincou postupne, niektoré kombinácie sa v priemere objavia skôr. Je to vyvážené tým, že kombinácie, ktoré sa objavia v priemere neskôr majú väčšiu šancu, že sa budú samy so sebou prekrývať. Je to zaujímavý pohľad na trochu inú štatistiku než sme v elementárnej pravdepodobnosti zvyknutí. Podrobnejšie sa waiting time venujú Sun a Wang v článku Gambler's fallacy, hot hand belief, and the time of patterns [23] a Nickerson v článku Penney Ante: Counterintuitive probabilities in coin tossing [15]. Štatistika waiting time pomáha ukázať racionálny dôvod, prečo sa ľuďom zdajú kombinácie ako $HHHHHH$ také podozrivé a naznačuje, že čas čakania človek vníma niekedy aj silnejšie ako očakávanú hodnotu. Je to určité zdôvodnenie *GF* ako konfliktu vnímania rôznych štatistík.

3.11 Iný význam GF

Pojem *gambler's fallacy* niektorí autori používajú aj v odlišných významoch ako ten, ktorý sme rozoberali v našej práci. Napríklad Kaul používa v svojom článku [9] tento pojem vo význame odlišného narábania s peniazmi na základe spôsobu ich získania. Napríklad ak hráč vsadí jedno €, vyhrá 100 €a následne o ne príde, hoci prišiel o 100 €, keďže tieto peniaze predtým vyhral, v jeho predstave prišiel len o 1 €, ktoré si zarobil predtým, ako vošiel do kasína. Lenže ak by po výhre 100 €z kasína odišiel, už by ich začal naozaj považovať za svoje. Autor predpokladá, že tento fenomén existuje aj pri obchodníkoch na burze a dáva ho do súvislosti s ekonomickou krízou.

4 Pedagogické využitie GF

GF je zaujímavé v spojitosti s behaviorálnou ekonómiou ako štatisticky skúmaný fenomén, ktorý ukazuje iracionalitu ľudského konania. Táto téma má však aj potenciál oživiť vyučovanie pravdepodobnosti a štatistiky v dvoch oblastiach: pri štúdiu učiteľstva matematiky a na stredných školách. Preto je táto kapitola rozdelená na časť o učiteľstve matematiky a na časť o využití GF v rámci matematiky na gymnáziu.

4.1 Učiteľstvo matematiky a GF

Predmet zo súčasného študijného plánu učiteľstva matematiky na FMFI UK, v ktorom je najvhodnejšie zaradiť rozbor GF, sa nazýva Pravdepodobnosť a matematická štatistika (1−UMA-302) [24]. Po konzultácii s cvičiacou tohto predmetu sme prišli k záveru, že tento predmet je pomerne náročný a obsahuje veľké množstvo učiva. Preto je veľmi ťažké v ňom robiť podstatné zmeny. Zaradenie matematického pohľadu na GF však nevyžaduje radikálne zmeny tohto predmetu. Potrebné pojmy a nerovnosti sú už v nejakej podobe obsiahnuté v predmete v jeho súčasnej náplni. Do cvičení tohto predmetu je možné doplniť príklad o vyvrátení GF a príklad o systéme zdvojovania stávok s následným teoretickým vyvrátením počítacích systémov.

Taktiež je užitočné budúcim učiteľom vytvoriť pevné spojenie vysokoškolských poznatkov so stredoškolskou praxou. Často sa vyučujúci snažia dať motivačný príklad vychádzajúci zo stredoškolskej matematiky a potom prejdú k vysokoškolskému rozšíreniu pohľadu na daný problém. Zaujímavé by však bolo ponúknuť tam, kde je to možné, aj spätný prechod do reči strednej školy, na ktorý pri výučbe ani praxi nových učiteľov často už nezostáva čas. Je to spôsob, akým vylepšiť použiteľnosť a relevantnosť vysokoškolských poznatkov pre budúcich učiteľov.

Napríklad Markovovej a Čebyševovej nerovnosti sa venuje za celé štúdium učiteľa matematiky pätnásť minút z prednášky. Učiteľ napíše na tabuľu tvrdenie a dokáže ho, naň nadväzuje ďalšie tvrdenie, ktoré sa dokáže a napokon týmto postupom prejde aj zákon veľkých čísel. Pre mnohých študentov je takýto prístup nevhodný. Abstraktne podané nerovnosti a ich dôkazy sa naučia naspamäť na skúšku, no nevidia v nich žiadne spojenie s reálnym svetom alebo vyučovaním matematiky na nižšej ako vysokoškolskej úrovni. Na základe diskusii so študentmi viem, že o pár týždňov už tieto nerovnosti ani nerozoznajú po mene.

Jednou z príčin tohto stavu je nutnosť prejsť počas štúdia veľkým množstvom preberanej látky. Ak by sa venovalo viac pozornosti týmto nerovnostiam, ostalo by menej času na iné, dôležitejšie časti učiva. Učiteľ aj študent štatistiky sú pod tlakom stihnúť všetko prebrať a všetkému porozumieť.

Problematické je aj využitie týchto matematických vedomostí. Ak idú učitelia učiť na základné alebo stredné školy, budú učiť pravdepodobnosť a štatistiku na celkom inej úrovni. Zdá sa, že nie je jasné, ako, ak vôbec, prepájať vysokoškolskú matematiku s učiteľskou praxou. Tu prichádza didaktická stránka našej práce. Je to snaha preložiť vysokoškolské poznatky do reči stredoškolskej matematiky, aby učiteľ mohol prepojiť konkrétny príklad, zrozumiteľný aj na stredoškolskej úrovni, so svojimi vysokoškolskými poznatkami.

Prínos je dvojaký: z jednej strany zvýšenie zaujímavosti preberaného matematického obsahu pre učiteľa aj žiaka a zároveň je možné už stredoškolákovi ukázať, aká celkom iná matematika ho môže neskôr zaujať na vysokej škole. Koncept matematiky ako vedy umožňuje zahrnúť veľké množstvo rôznych príkladov pod jeden koncept. Preto treba robiť všetko pre to, aby sa spôsob myslenia, ktorý majú študenti učiteľstva nadobudnúť, nestratil v nutnosti všetko stihnúť a prebrať. Je to vzťah medzi kvalitou a kvantitou vedomostí. Cieľom každého vzdelávania je v prvom rade kvalita.

4.2 GF a vyučovanie na gymnáziu

4.2.1 Štátny vzdelávací program a GF

V Štátnom vzdelávacom programe (ďalej ŠVP) [25] sú mnohé myšlienky, ktoré súvisia s problémom GF. Začlenenie tohto propblému do vyučovania môže pomôcť rozvoju týchto myšlienok. Keďže sa tento problém dotýka matematiky, etiky aj psychológie, podporuje medzipredmetový prístup k tvorbe obsahu vzdelania. Umožňuje totiž upevniť a preveriť v príkladoch matematické koncepty a zároveň upozorniť na eticko-spoločenský problém a nebezpečenstvá hazardných hier. GF je téma týkajúca sa súčasného problému prevencie hazardu. Ukazuje sa, že v rôznych krajinách (Austrália, USA) tvoria nezanedbateľnú časť problémových hazardných hráčov práve mladí ľudia.

Otázka užitočnosti GF ako nástroja na rozhodovanie pomáha tiež rozvíjať zručnosť kritického myslenia a taktiež "presného myslenia a formovania argumentácie v rôznych prostrediach". Žiaci majú šancu prekonať predsudky týkajúce sa pravdepodobnosti a vyskúšať si overenie vlastných jednoduchých štatistických hypotéz a predpovedí pomocou experimentovania.

V ŠVP sa nachádzajú aj tieto ciele: "aby žiak získal schopnosť používať matematiku v svojom budúcom živote." "aby študent spoznal v matematike súčasť ľudskej kultúry a silný a nevyhnutný nástroj pre spoločnosť." Otázky rozhodovania sa v prípade neistoty sú súčasťou ľudského života. Matematika ponúka rozumovú alternatívu k spoliehaniu sa na "šťastie" alebo na GF. Príkladmi, ktoré sa týkajú reálneho života, alebo samostatným a vedomým overením si platnosti matematických poznatkov v podmienkach skutočného hádzania kockou či mincou, si môžu žiaci zvnútorniť oprávnenú úlohu matematiky v živote človeka.

Z piatich tematických okruhov ŠVP sa GF týka najmä dvoch: Kombinatorika, pravdepodobnosť, štatistika a Logika, dôvodenie, dôkazy. Ich obsahy sú formulované nasledujúcim spôsobom:

„Ďalšou súčasťou matematického vzdelávania žiakov strednej školy je Kombinatorika, pravdepodobnosť a štatistika, v ktorej sa žiaci naučia používať rôzne stratégie zisťovania počtu možností, riešiť úlohy na pravdepodobnosť. Dôležitá je aj výučba elementov štatistiky, najmä schopnosť správnej interpretácie štatistických dát, porozumenie štatistickým vyjadreniam, realizácia a posudzovanie jednoduchých štatistických prieskumov

Tematický okruh Logika, dôvodenie, dôkazy sa prelína celým matematickým učivom a rozvíja schopnosť žiakov logicky argumentovať, usudzovať, hľadať chyby v usudzovaní a argumentácii, presne sa vyjadrovať a formulovať otázky. žiaci rozumejú podstate dôkazov a vedia ich aplikovať aj v bežnom živote"

Pri skúmaní GF na stredoškolskej úrovni je možné riešiť úlohy na počítanie pravdepodobnosti a takisto získať a vyhodnotiť jednoduché štatistické dáta. Skúsenosť s vlastným experimentom môže pomôcť študentom lepšie porozumieť štatistickým vyjadreniam, s ktorými sa neskôr stretnú.

Či už budú žiaci náchylní veriť GF alebo matematickej pravdepodobnosti, bližší pohľad na konkrétne príklady rozvíja schopnosť a ochotu logicky argumentova a hľadať chyby v argumentácii. Je však dôležité sa sústrediť na skutočné pochopenie a nie len naučenie sa algoritmov dokazovania, ktoré však samotnému žiakovi nič nedokazujú, pretože im nerozumie.

4.2.2 Učivo jednotlivých ročníkov a GF

V prvom ročníku žiaci nadobúdajú dôležité poznatky z hľadiska pravdepodobnosti a štatistiky. V oblastí čísel a počítania s číslami figuruje vypĺňanie formulárov s číselnými údajmi a práca s údajmi uvedenými v percentách. Tieto zručnosti sú neskôr základom pre prácu s počítaním pravdepodobnosti a čitateľný zápis výsledkov štatistických experimentov. Takisto, rozhodovanie o výhodnosti nákupu alebo zľavy, ktoré je súčasťou finančnej matematiky, dáva neskôr základ pre rozhodovanie o výhodnosti jednotlivých stratégii v prípade rôzne pravdepodobných možných výsledkov. Pre porozumenie GF sú potrebné aj základy algebraizácie a modelovania kvantitatívnych vzťahov. V prvom ročníku sa tiež preberá kombinatorika, ktorá umožňuje efektívnejšie skúmať počet róznych možností, ktoré môžu nastať.

V druhom ročníku je na základoch vybudovaných v prvom ročníku možné zaradiť GF priamo do učiva. Na konkrétnych príkladoch hazardných hier je možné precvičiť a prehĺbiť a takpovediac zažiť tematické celky šanca a porovnávanie šancí, pravdepodobnosť a niektoré jej vlastnosti, a takisto pravdepodobnosť okolo nás. Porovnaním matematickej pravdepodobnosti, možného klamu GF a vlastného experimentu s hádzaním mince alebo kocky môžu žiaci viac zapojiť kritické myslenie vyvrátením nesprávneho pohľadu na pravdepodobnosť. Príklady GF môžu byť tiež príležitosťou si uvedomiť odlišné vyjadrovanie v rôznych prostrediach matematiky a bežného života.

V treťom a štvrtom ročníku má štatistika znova svoje zastúpenie v tematických celkoch. GF sa teda aj v týchto ročníkoch dá použiť ako zopakovanie a precvičenie tém druhého ročníka a zaujímavé spestrenie. Hazard je tiež téma, o ktorej je lepšie vzdelávať než o nej v škole mlčať a spôsobiť, že študent bude neskôr niesť následky klamov akým je aj GF.

ŠVP tiež pripomína: *V priebehu celého štúdia je potrebné zaraďovať:*

- *problémové úlohy,*
- *historické poznámky,*
- *rôzne malé projekty podporujúce medzipredmetové vzťahy, napr. Matematika a umenie, Euklides, Matematika a vesmír, Matematika a ťažisko, Matematika a biliard,*
- *informácie dokumentujúce súčasné a historické použitie matematiky.*

Problém GF ponúka problémové úlohy jednotlivých výskytov tohto klamu. Historické poznámky sa môžu týkať samotného výskytu GF alebo matematikov Markova, Čebyševa, Laplaca, Bernoulliho. Tento klam by mohol byť súčasťou projektu podporujúceho medzipredmetové vzťahy Matematika a hazardné hry podobne ako v americkom dokumente Facing the Odds. Po jednoduchom prieskume sa dá nájsť súčasné použitie vstupujúcej matematiky pri novom a novom vyvracaní nesprávnych a pomýlených pohľadov na pravdepodobnosť a na hazardné hry. Zdá sa teda, že GF je z pohľadu duchu a litery ŠVP vítaným doplnením vyučovania pravdepodobnosti a štatistiky na gymnáziách.

4.2.3 Prínos GF k výkonovému štandardu žiaka

Okrem už uvedeného prínosu GF z hľadiska používania a porozumenia matematickej pravdepodobnosti sú aj ďalšie kompetencie, ktoré zavedenie tohto problému do vyučovania môže rozvíjať. Z hľadiska sociálnych komunikačných kompetencii môže umožňuje rozvíjať písomný aj ústny prejav adekvátne situácii, v prípade zapojenia štatistického experimentu nabáda prezentovať výsledky svojej práce na verejnosti a použiteie odborného jazyka. Z hľadiska sociálnych a personálnych kompetencií skúmanie tohto problému môže umožniť lepšie odhadnúť a korigovať dôsledky vlastného konania pri hazardných hrách a tiež navádza žiaka si stanovovať svoje priority v súlade so svojimi reálnymi potrebami a záujmami: pôsobí preventívne voči hazardnému správaniu.

4.2.4 Skúsenosti s prednáškou o GF

Matematickú časť práce som odprednášala na podujatí Klub trojstenu, ktoré organizujú študenti FMFI pre stredoškolákov so záujmom o matematiku, fyziku a informatiku. Prednášky sa zúčastnilo $12 - 15$ prvákov a druhákov na strednej škole. Na prednášku bolo vyhradených 60 minút. Za tento čas sme stihli prebrať základné vlastnosti pravdepodobnosti, potrebné pojmy, vyvrátenie GF a príklad o zdvojovaní stávok. Pre nedostatok času boli ďalšie nerovnosti a vety formulované bez dôkazu s dôrazom na vysvetlenie súvisu jednotlivých viet a neúčinnosti matematických systémov. Zaradená bola tiež jednoduchá prezentácia s portrétmi slávnych matematikov, ktorí sa podieľali na jednotlivých nerovnostiach, s krátkou historickou kuriozitou alebo poznámkou ku každému z nich.

Žiakom pri pochopení prednášky bránili limity, keďže ich v škole ešte nepreberali. Markovova a Čebyševova nerovnosť, ako aj slabý zákon veľkých čísel sú však na týchto pojmoch postavené. Pre žiakov bol najzaujímavejší príklad o zdvojovaní stávok, ktorý si vedeli aj sami prepočítať. Ďalej ich zaujala formulácia vety o neúčinnosti matematických systémov s jednotlivými tvrdeniami preloženými do bežnej reči.

4.2.5 Vyučovanie GF na gymnáziu

Konzultovali sme otázku možného zaradenia GF ako spestrenie vyučovania na gymnáziu s učiteľom matematiky A. Belanom. V zhode s našimi skúsenosťami s prednáškou poukázal na to, že pre pochopenie konceptov pravdepodobnosti sú nenahraditeľné konkrétne, dostatočne zložité príklady. Napríklad vetu o neúčinnosti matematických systémov by sme mohli obmedziť na konkrétny príklad rulety alebo hry s kockami. Otázka limít, ktoré žiaci nepoznajú, by mohla byť nahradená tam, kde je to možné v konkrétnom príklade nekonečným radom, s ktorými už žiaci majú väčšie skúsenosti. Atraktívne z hľadiska oživenia hodiny a overenia si nakoľko sa môžeme spoliehať na matematickú teóriu pravdepodobnosti sa v priebehu rozhovoru ukázali experimenty so zapisovaním výsledkov hádzania kockou alebo mincou. Takéto experimenty môžu byť poňaté aj ako skupinová práca. Zaujímavým javom, ktorý môžu žiaci zapisovať, je napríklad: ako dlho museli čakať, kým padla šestka, ako dopadol ďalší hod mincou, keď už trikrát padla hlava a podobne. Na experiment by malo následne nadväzovať rozobratie experimentu z matematickej stránky, vyrátanie predpovedaného výsledku podľa matematickej pravdepodobnosti. Záverom by bolo zujímavé porovnanie matematickej predpovede, predpovede podľa GF a skutočnosti.

4.2.6 Návrh zapojenia témy GF na strednej škole

Hodina by mohla začať príkladom, napríklad týmto, prebraným z dokumentu Facing the Odds [2]:

Saša má troch bratov. Jej mama čaká ďalšie dieťa. Saša sa s bratmi stavila, že tentokrát to bude dievčatko. Ak predpokladáme, že šanca, že sa narodí chlapec a šanca, že sa narodí dievča, je rovnaká, aká je pravdepodobnosť, že Saša stávku vyhrá?

Pri diskusii o správnom výsledku, že pravdepodobnosť je stále 0.5 aj napriek tomu, že sa mame už narodili traja chlapci, je vhodné poukázať na nezávislosť pohlaví jednotlivých detí.

Nadviažeme príkladom s hádzaním mincí. Ak by sme hodili štyri krát za sebou znak, čo môžeme predpokladať o ďalšom hode? Je to naozaj tak, že pravdepodobnosť je 0.5? Vieme overiť, že matematika pravdepodobnosti súvisí so skutočným svetom? Môžeme študentov rozdeliť do skupín po dvoch alebo po troch a dať im za úlohu stokrát hodiť mincou a zapísať si výsledky hodu. Ďalšia úloha bude spracovať výsledky: Koľkokrát padla hlava a koľkokrát znak? Môžme dať žiakom za úlohu vyplniť nasledujúcu tabuľku:

Predtým	Hlava	Znak	Predtým	Hlava	Znak
H 1x			Z 1x		
H 2x			Z 2x		
H 3x			Z 3x		
H 4x			Z 4x		
H 5x			Z 5x		

Tabuľka 1: experiment s hádzaním mince

Keď sú žiaci hotoví, môžeme dať tabuľky dohromady a spraviť spoločnú tabuľku. Môžeme vidieť, nakoľko sa náš matematický výsledok zhodoval alebo nezhodoval so skutočnými hodmi. Žiaci môžu porovnať, či dáta viac súhlasia s matematickým modelom alebo s *GF*. Môžeme tiež vyrátať pravdepodobnosť, s akou sa dá dosiahnuť najdlhší nameraný reťazec znakov alebo hláv a zistiť, či sa teoretická pravdepodobnosť približuje relatívnej početnosti.

Môže sa zdať jednoduchšie na testovanie našich hypotéz použiť počítačový generátor pseudonáhodných čísel, no hodiť fyzickou mincou je prirodzená náhodnosť a počítačom vygenerované čísla sú len dôsledkom teórie pravdepodobnosti, preto má hádzanie mincou pre žiakov väčšiu výpovednú hodnotu.

Na experimente vieme žiakom priblížiť pojmy absolútnej a relatívnej početnosti, rozdiel medzi očakávanou a nameranou hodnotou, disperziu. To, čo sme overili experimentálne, je možné prepočítať aj viac do detailov. Ak učiteľ vidí, že žiakov problematika zaujala, môže vyskúšať, či nemajú sami žiaci nejaké otázky, prípadne či nie je ešte niečo iné, čo by sme vedeli vypočítať.

Ďalší príklad, ktorý môžeme použiť, je otázka opodstatnenosti nosenia bomby do lietadla, keďže pravdepodobnosť, že v lietadle budú dve bomby naraz, je veľmi malá.

Nadviazať môžeme príkladom o systéme zdvojovania stávok uvedenom v matematickej časti práce (3.9.3), prípadne spomenúť bez dôkazu aj tvrdenie vety o neúčinnosti matematických systémov (3.20).

Záver

Počas písania bakalárskej práce sa ukázalo, že GF je zaujímavý fenomén nielen z hľadiska náročných matematických konceptov, ale aj z hľadiska základných konceptov matematickej pravdepodobnosti. V pedagogickej praxi môže byť použitý na stredoškolskej alebo vysokoškolskej úrovni.

V tejto práci sme priblížili mladým ľuďom základy matematického pohľadu na pravdepodobnosť zameriavajúc sa na zlepšenie ich finančnej gramotnosti za použitia zaujímavého fenoménu GF.

Ponúkli sme motiváciu, prečo sa zaoberať GF, ukázali sme spojitosť medzi GF a problémovým hraním hazardných hier. Poukázali sme na užitočnosť matematického spôsobu uvažovania v otázkach pravdepodobnosti.

Zozbierali sme príklady výskytu GF z rôznych oblastí života, aby sme ukázali pomocou rôznych štúdií, že GF je reálny a relevantný fenomén. Tieto štúdie zároveň ponúkajú materiál pre zadania školských príkladov o GF, vychádzajúcich z empirických poznatkov. GF súvisí aj s finančnými otázkami, či už čo sa týka prehodnotenia svojich výdavkov na hazardné hry alebo výdavkov na iné neisté investície.

Uviedli sme, aké matematické koncepty vstupujú do matematického vyvrátenia GF a toto vyvrátenie sme aj zrealizovali. Sústredili sme sa pritom na vzťah jednotlivých konceptov pravdepodobnosti a štatistiky ku GF. Matematicky sme ukázali, že systémy, založené na GF vedú z dlhodobého hľadiska vždy k prehre. Nie je to teda racionálny spôsob uvažovania. V priebehu písania sa ukázalo, že pre dôkaz vety o neúčinnosti počítacích systémov je kľúčové presne zadefinovať pojem stávka, očakávaná hodnota stávky a odlíšiť náhodné premenné od premenných, o ktorých hodnote rozhoduje hráč.

Venovali sme sa dvom pedagogickým oblastiam: možnosti využitia GF vo vzdelávaní budúcich učiteľov matematiky a vo vyučovaní na gymnáziách. Našli sme konkrétne možnosti, ako GF zapojiť a využiť v oboch prípadoch. Preskúmali sme na základe ŠVP, na ktoré aspekty problému ako napríklad nezávislosť javov, podmienená pravdepodobnosť, limity a zákon veľkých čísel sú alebo nie sú študenti gymnázií pripravení a na základe toho sme pripravili návrh využitia GF vo vyučovaní matematiky. Inšpirovali sme sa pritom prístupom Polyu v knihe How To Solve It [20] a tiež Marešovou knižkou Slova, která se hodí [12]. Spracovali sme skúsenosti a pohľady študentov, ktorým bola látka odprednášaná. Okrem naštudovania literatúry sme využili aj konzultácie s učiteľmi z praxe, ktorí vedeli posúdiť možnosti konkrétnej pedagogickej aplikácie.

Prínosov práce je viacero: Z hľadiska študentov učiteľstva práca ponúka zaujímavú aplikáciu Slabého zákona veľkých čísel a možnosť prepojiť abstraktné nerovnosti zo základov pravdepodobnosti s príkladom z napínavého prostredia hazardných hier, ktorý je možné zadať aj študentom gymnázia.

Pre cvičiacich predmetu Pravdepodobnosť a matematická štatistika sme pripravili konkrétny príklad, ktorý môžu zaradiť do cvičení tohto predmetu a bez veľkých či zásadných úprav predmetu povedať študentom učiteľstva o GF a zároveň aplikovať abstraktné koncepty, ktoré by už inak vo väčšine prípadov priamo nepoužili.

Z hľadiska prínosu pre študentov gymnázia práca ponúka v prvom rade zlepšenie povedomia študentov o iracionálnom rozhodovaní človeka, ktoré vstupuje aj do rozhodovania o financiách. Ďalej sprostredkuje bližšie zoznámenie sa s definíciou pravdepodobnosti a pojmami zo základov pravdepodobnosti, precvičenie doterajších matematických znalostí a pripomenutie si rizík hazardných hier. Pri správnom prevedení nášho návrhu je tiež možné, že si študenti plnšie osvoja koncepty pravdepodobnosti a štatistiky ako nezávislé udalosti a podmienená pravdepodobnosť, pretože si ich prepoja s vlastným experimentovaním s hádzaním kociek a so zaujímavými príkladmi.

Práca môže byť užitočná aj pre vedúcich matematických krúžkov a seminárov z matematiky ako materiál a inšpirácia na jednu alebo viac prednášok o GF, prípadne pre nadšencov pre spojenie matematiky a psychológie ako prehľad zaujímavej literatúry o GF a súvisiacich témach. Mohla by byť prínosná aj pre tých, ktorí si ju prečítajú a rozhodnú sa, že sa nebudú púšťať do „zaručene úspešných“ stratégií výhry v rulete alebo inej hazardnej hre, ktorá je nastavená v prospech kasína.

Prínosom pre autorku práce bolo naštudovanie a hlbšie pochopenie problematiky pravdepodobnosti a jej dôsledkov.

Nadviazaním na túto prácu by mohlo byť spracovanie viacerých ďalších klamov, napríklad *klamu dostupných príkladov*, *klamu tých, ktorí prežili* alebo *ilúzie zhlukov* (podľa zoznamu klamov v bakalárskej práci Polonského [18]). Taktiež je sľubný pohľad na súvis GF a štatistiky času čakania na prvý výskyt, prípadne pohľad na GF z hľadiska rozhodovania sa na základe rizika a použitých úžitkových funkcii.

Zoznam použitej literatúry

[1] Ayton P., Fischer I.: *The hot hand fallacy and the gambler's fallacy: Two faces of subjective randomness?*, Memory & Cognition (2004) 32(8) 1369-1378

[2] Bilt. J.V. and Hall: *Facing the Odds - the Mathematics of Gambling*, The President and Fellows of Harvard College, Harvard, 2000, dostupné na internete (27.1.2013): http://www.louisianaschools.net/LDE/uploads/5924.pdf

[3] Delfabbro, P. and Lambos, Ch.: *Numerical Reasoning Ability and Irrational Beliefs in Problem Gambling*, International Gambling Studies (2007) 7:2 157-171, dostupné na internete (27.1.2013): http://www.tandfonline.com/doi/pdf/10.1080/14459790701387428

[4] Cooper, D., Grinder, B.: *Probability, Gambling and the Origins of Risk Management*, Financial History Winter (2009)

[5] Croson, J., Sundali, J.: *The Gambler's Fallacy and the Hot Hand: Empirical Data from Casinos*, The Journal of Risk and Uncertainty, 30:3; 195–209, 2005, dostupné na internete (30.5.2013): http://cbees.utdallas.edu/~crosonr/research/%5B31%5D.pdf

[6] Hašek, J.: *Osudy dobrého vojáka Švejka za světové války*, A. Synek, Praha, 1923

[7] Janková, K. and Pázman, A.: *Pravdepodobnosť a štatistika*, Univerzita Komenského, Bratislava, 2011

[8] Kahneman, D. and Tversky, A.: *Subjective probability: A judgment of representativeness*, Cognitive Psychology (1972) 3 430-454

[9] Kaul, V.: *Gambler's fallacy: The lesson I learnt last Diwali*, Firstpost.investing (2012),
dostupné na internete (2.2.2013): http://www.firstpost.com/investing/gamblers-fallacy-the-lesson-i-learnt-last-diwali-520333.html

[10] Laplace, P.S.: *A philosophical essay on probabilities*, Dover, New York, 1951 (Original work published 1796)

[11] Machina, M.: *Choice under Uncertainty: Problems Solved and Unsolved*, Journal of Economic Perspectives 1 (1): 121–154(1987),
dostupné na internete (1.12.2012) http://dss.ucsd.edu/~mmachina/papers/Machina_Problems_Paper.pdf

[12] Mareš M.: *Slova, která se hodí aneb Jak si povídat o matematice, kybernetice a informatice*, Academia, Praha, 2006

[13] Mazur, J.: *What's luck to do with it? the history, mathematics and psychology behind gambler's illusion*, Princeton University Press, New Jersey, 2010

[14] Minto, A.: *Early Insurance Mechanisms and Their Mathematical Foundations*, TMME, vol5, nos.2&3, p.345 (2008)

[15] Nickerson, R. S.: *Penney Ante: Counterintuitive probabilities in coin tossing*, The UMAP Journal, 28, p.503-532 (2007)

[16] Packel, E. W.: *The Mathematics of Games and Gambling*, Mathematical Association of America, Washington, 1981

[17] Piquero, A.R., Pogarsky, G.: *Can Punishment Encourage Offending? Investigating The "resetting" Effect*, Journal of Research in Crime and Delinquency February 2003 vol. 40 no. 1, pp. 95-120,
abstrakt dostupný na internete (30.5.2013):
http://jrc.sagepub.com/content/40/1/95.short

[18] Polonský, J.: *Kritické myslenie*, bakalárska práca, Vysoká škola chemicko-technologická v Praze, Katedra společenských věd, Praha, 2010,
dostupné na internete (1.12.2012):
http://cs.scribd.com/doc/82785302/Kriticke-myšleni-\T1\textendash-bakalařska-prace-2-5

[19] Pollock, J.L.: *Nomic Probability and the Foundations of Induction*, Oxford University Press, New York, 1990

[20] Polya, G.: *How To Solve It: A New Aspect of Mathematical Method*, Princeton University Press, Princeton, New Jersey 1945

[21] Proctor, R.: *Chance and luck: a discussion of the laws of luck, coincidences, wagers, lotteries, and the fallacies of gambling; with notes on poker and martingales* , Longmans, Green, and co, London, 1887), dostupné na internete (1.12.2012):
http://ebooks.library.cornell.edu/cgi/t/text/text-idx?c=math;cc=math;q1=probability;idno=00380002;view=toc

[22] Shefrin, H. and Statman, M.: *The Disposition to Sell Winners Too Early and Ride Losers Too Long: Theory and Evidence.*, The Journal of Finance, vol. 40(3), pp. 777-790, 1985

[23] Sun Y., Wang H.: *Gambler's fallacy, hot hand belief, and the time of patterns*, Judgment and Decision Making, vol. 5, no. 2, April 2010, pp. 124-132, dostupné na internete (1.12.2012):
http://journal.sjdm.org/10/91117/jdm91117.html

[24] Univerzita Komenského: *1-UMA-302 Pravdepodobnosť a matematická štatistika (1)*, dostupné na internete (1.12.2012):
http://www.fmph.uniba.sk/fileadmin/user_upload/editors/studium/bc_mgr/IL/1-UMA-302.html

[25] Štátny pedagogický ústav: *Štátny vzdelávací program, Matematika, príloha ISCED3A*, Bratislava 2009, dostupné na internete (1.12.2012):
http://www.statpedu.sk/files/documents/svp/gymnazia/vzdelavacie_oblasti/matematika_isced3a.pdf

[26] Terrell, D.: *A Test of the Gambler's Fallacy: Evidence From Pari-Mutuel Games*, Journal of Risk and Uncertainty, vol. 8(3), pp. 309-317, 1994

[27] Thorp, E.: *Elementary Probability*, Robert E.Krieger Publishing Company, Huntington, New York, 1977, pp. 84-85

[28] Thorp, E.: *The Mathematics of Gambling*, Lyle Stuart, New York, 1985, pp. 113-124

[29] Weusten, P.: *Gambling Biases Applied to Investment Decisions*, bakalárska práca, Tilburg University, Tilburg 2012, dostupné na internete (30.5.2013):
http://arno.uvt.nl/show.cgi?fid=122725