

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY



REVERZNÉ STRESOVÉ TESTOVANIE

BAKALÁRSKA PRÁCA

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY

REVERZNÉ STRESOVÉ TESTOVANIE

BAKALÁRSKA PRÁCA

Študijný program: Ekonomická a finančná matematika
Študijný odbor: 1114 Aplikovaná matematika
Školiace pracovisko: Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky
Vedúci práce: Mgr. Ing. Pavol JURČA, PhD.



Univerzita Komenského v Bratislave
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

ZADANIE ZÁVEREČNEJ PRÁCE

Meno a priezvisko študenta: Michal Jurčo
Študijný program: ekonomická a finančná matematika (Jednoodborové štúdium, bakalársky I. st., denná forma)
Študijný odbor: 9.1.9. aplikovaná matematika
Typ záverečnej práce: bakalárska
Jazyk záverečnej práce: slovenský

Názov: Reverzné stresové testovanie
Cieľ: Cieľom práce by malo byť popísanie možných metód využiteľných v rámci reverzného stresového testovania a ich implementácia.

Vedúci: Mgr. Ing. Pavol Jurča, PhD.
Katedra: FMFI.KAMŠ - Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky
Vedúci katedry: prof. RNDr. Daniel Ševčovič, CSc.
Dátum zadania: 10.10.2012

Dátum schválenia: 03.11.2012
doc. RNDr. Margaréta Halická, CSc.
garant študijného programu

.....
študent

.....
vedúci práce

PodĎakovanie Touto cestou sa chcem poďakovať svojmu vedúcemu bakalárskej práce Mgr. Ing. Pavlovi Jurčovi, PhD. za ochotu, pomoc, flexibilitu, odborné rady a podnetné pripomienky, ktoré mi pomohli pri písaní tejto práce. Ďakujem aj svojej rodine, priateľom a kolegom za ich trpezlivosť a podporu.

Abstrakt v štátnom jazyku

JURČO, Michal: Reverzné stresové testovanie [Bakalárska práca], Univerzita Komenského v Bratislave, Fakulta matematiky, fyziky a informatiky, Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky; školiteľ: Mgr. Ing. Pavol Jurča, PhD., Bratislava, 2013, 39 s.

Reverzné stresové testovanie získava v poslednom období čoraz väčšiu dôležitosť. Z tohto dôvodu je cieľom bakalárskej práce štúdium možných metód aplikovateľných v tejto oblasti a ich implementácia. V práci uvedieme základné aspekty stresového testovania a motiváciu na jeho rozšírenie o reverzné stresové testovanie. Ďalej sa venujeme metóde na nájdenie najpravdepodobnejšieho scenára a jeho intervalu spoľahlivosti za predpokladu stacionarity štatistického rozdelenia údajov, ktorú potom ilustrujeme na simulovaných údajoch. Ďalej odvodíme vlastnú metódu reverzného stresového testovania, ktorá tento predpoklad nevyužíva. Táto metóda je založená na kopulách, t.j. na funkciách popisujúcich vzťah medzi marginálnymi rozdeleniami. Práca obsahuje aj prípadovú štúdiu, v ktorej ilustrujeme spôsob začlenenia navrhnutej metodológie reverzného stresového testovania do makrostresového testovania slovenského finančného sektora, ktoré vykonáva na pravidelnej báze Národná banka Slovenska.

Kľúčové slová: Reverzné stresové testovanie, stresové testovanie, kopuly, devízové pozície

Abstract

JURCO, Michal: Reverse stress testing [Bachelor thesis], Comenius University in Bratislava, Faculty of Mathematics, Physics and Informatics, Department of Applied Mathematics and Statistics; Supervisor: Mgr. Ing. Pavol Jurca, PhD., Bratislava, 2013, 39 p.

Reverse stress testing has recently gained a significant importance. Therefore, the aim of the thesis is to study possible methods applicable in this area and their implementation. We introduce the basic aspects of stress testing and the motivation for its extension to reverse stress testing. Furthermore, we describe how to find the most likely scenario and its confidence regions assuming stationarity of the statistical distribution of data, which we then illustrate on simulated data. After that, we derive our own method of reverse stress testing, which does not use this assumption. This method is based on copulas, i.e. functions which describe the dependency structure between marginal distributions. The thesis also contains a case study which illustrates the integration of the proposed methodology of reverse stress testing to macro stress testing of Slovak financial sector, that is carried out on regular basis by the National Bank of Slovakia.

Keywords: Reverse stress testing, stress testing, copula, foreign exchange positions

Obsah

Úvod	10
1 Stresové testovanie	12
1.1 Čo vlastne stresové testovanie je?	12
1.2 Motivácia pre aplikáciu reverzného stresového testovania	12
2 Reverzné stresové testovanie	14
2.1 Riešenie RST za predpokladu normality	15
2.2 Odhad najpravdepodobnejšieho scenára pre eliptické rozdelenia	17
2.3 Ilustrácia teoretických poznatkov na simulovaných údajoch	19
3 Najpravdepodobnejší scenár	22
3.1 Kopule	23
3.1.1 Klasifikácia kopula funkcií	24
3.2 Návrh najpravdepodobnejšieho scenára pomocou kopúl	28
4 Reverzné stresové testovanie pre devízové pozície podielových fondov a fondov DDS	31
Záver	36

Zoznam obrázkov

1	Simulované údaje z normálneho rozdelenia s vyznačenou hranicou kritick- kej straty a s vyznačenými scenármi nájdenými pomocou podmienenej strednej hodnoty a výpočtom podľa vzťahu (4)	17
2	Generované údaje z normálneho rozdelenia $N(0,1)$ (vľavo) a Studentovho t-rozdelenia, $\nu = 7$ (vpravo) spolu s vyznačenou podmienenou strednou hodnotou a najpravdepodobnejším scenárom dosahujúcim kritickú stratu. 20	
3	Intervaly spoľahlivosti pre podmienenú strednú hodnotu a najpravdepo- dobnejší kritický scenár. Generované body sú zo Studentovho t-rozdelenia s počtom stupňov voľnosti $\nu = 5$	21
4	Priblížená ilustrácia intervalov spoľahlivosti z Obr. 3	21
5	Distribučná funkcia a hustota Gaussovej kopuly.	25
6	Generované údaje z Gaussovej kopuly, $\hat{\rho} = 0.3631$	25
7	Distribučná funkcia a hustota Studentovej t-kopuly.	26
8	Vygenerované údaje zo Studentovej t-kopuly, $\hat{\nu} = 5.6475$, $\hat{\rho} = 0.4833$	26
9	Distribučná funkcia, hustota a vygenerované údaje pre Gumbelovu ko- pulu, parameter $\hat{\alpha} = 1.4484$	27
10	Distribučná funkcia, hustota a vygenerované údaje pre Claytonovu ko- pulu, parameter $\hat{\alpha} = 0.6675$	27
11	Distribučná funkcia, hustota a vygenerované údaje pre Frankovu kopulu, parameter $\hat{\alpha} = 3.1684$	28

Zoznam tabuliek

1	Porovnanie vypočítanej škálovacej konštanty podľa Tvrdenia 2.2 a škálovacej konštanty pozorovanej zo simulácií	20
2	Najpravdepodobnejšie scenáre nájdené pomocou odhadu Gumbelovej kopuly	30
3	Precentuálne podiely devízových pozícií v podielových a DDS fondoch pre jednotlivé zahraničné meny	32
4	Váhy (v percentách) jednotlivých mien na celom portfóliu (vyjadrené ako percento z čistej hodnoty aktív) podielových a DDS fondov	32
5	Výsledok RST nami navrhnutou metódou pre podielové fondy , kde z_l je vopred určený kritický scenár, z_L^* je scenár vedúci k najväčšej strate s rovnakou pravdepodobnosťou a z_P^* je scenár s najväčšou pravdepodobnosťou presahujúci kritickú stratu.	34
6	Výsledok RST nami navrhnutou metódou pre fondy DDS , kde z_l je vopred určený kritický scenár, z_L^* je scenár vedúci k väčšej strate a z_P^* je scenár s väčšou pravdepodobnosťou.	35

Úvod

Stresové testovanie je už dlhý čas jeden z nástrojov pre riadenie rizík a pravidelne sa využíva vo všetkých veľkých finančných inštitúciách. Veľkou výzvou stresového testovania je samotný výber scenára, ktorý sa bude testovať. Je totiž potrebné určiť taký scenár, ktorý je dostatočne extrémny v zmysle straty, ku ktorej by viedol, ale zároveň je stále dostatočne pravdepodobný. Tieto scenáre sa často určujú na základe historických poznatkov (t.j. podobný scenár sa v minulosti už zrealizoval), alebo sa určujú hypotetické scenáre, ktoré sú extrémne, ale stále možné (tento postup pri stresových testovaniach volí aj Národná banka Slovenska). Za slabú stránku stresového testovania preto možno považovať jeho zameranie sa na relatívne malý počet scenárov, pričom pri ich návrhu sa často uplatňuje vysoká miera subjektívnosti. Reverzné stresové testovanie je možné považovať za rozšírenie stresového testovania, ktorého zámerom je prekonať uvedenú nevýhodu. Hlavným cieľom reverzného stresového testovania je identifikovať najpravdepodobnejší scenár z tých, ktoré vedú k vopred určenej strate (prípadne scenár vedúci k najväčšej strate z tých, ktoré sa realizujú s vopred určenou pravdepodobnosťou).

V poslednom období je reverzné stresové testovanie dokonca explicitne vyžadované niektorými regulátormi, ako napríklad FSA (Financial Services Authority), ktorý je zodpovedný za regulovanie finančného odvetvia vo Veľkej Británii. Požiadavku na jeho zavedenie do stresového testovania zdôvodňujú v konzultačnom dokumente [6]. Napriek jeho významu a požiadavkám regulátorov na jeho vykonávanie je poznatkov dostupných v teoretickej literatúre veľmi málo. Z toho dôvodu bolo motiváciou na vytvorenie tejto práce lepšie porozumenie tejto metódy riadenia rizík.

Cieľom tejto bakalárskej práce je štúdium možných metód využiteľných v rámci reverzného stresového testovania a ich následná implementácia. V prvej kapitole sa zameriame na stručné vysvetlenie podstaty stresového testovania a uvedieme aj motiváciu pre aplikovanie reverzného stresového testovania. V druhej kapitole predstavíme metódu, ktorú odvodili autori [8]. Pôjde o hľadanie najpravdepodobnejšieho scenára, ktorý presahuje vopred určenú kritickú stratu. Spomínaný scenár najprv hľadajú za predpokladu normality realizovateľných scenárov. Následne tento predpoklad čiastočne oslabia. Metódu následne ilustrujeme na simulovaných údajoch.

V ďalšej kapitole odvodíme vlastnú metódu na nájdenie najpravdepodobnejšieho

kritického scenára. Vychádzame v ňom z teórie popisujúcej tzv. kopule, ktoré budú tvoriť základ nami navrhnutej metódy. Samotný algoritmus hľadania tohto scenára popíšeme na jednoduchom príklade pre portfólio zložené z dvoch akcií obchodovaných na burze.

V poslednej kapitole tejto práce sa zameriame na aplikovanie nami navrhnutej metódy na devízové pozície podielových fondov a fondov DDS v procese makrostresového testovania slovenského finančného trhu, ktoré vykonáva NBS. Budeme vychádzať z analýzy [2], kde NBS v rámci stresového testovania určila konkrétny stresový scenár pre hodnotu výmenných kurzov a ten následne testovala. My k nemu nájdeme dva scenáre, z ktorých jeden môže nastať s väčšou pravdepodobnosťou (vedúci k rovnakej strate) a druhý vedie k väčšej strate (a môže nastať s rovnakou pravdepodobnosťou).

K tejto bakalárskej práci prikladáme aj CD médium, na ktorom je možné nájsť nami naprogramované skripty v programe Matlab, ktoré sme vytvorili za účelom písania tejto práce.

1 Stresové testovanie

Pojem stresové testovanie vo všeobecnom význame je testovanie, ktorého úlohou je zistiť, či daný subjekt alebo systém dokáže vydržať podmienky nastavené v teste (napríklad v zdravotníctve sa používajú záťažové testy pri vyšetrení srdca). V tejto kapitole sa zameriame konkrétne na stresové testovanie v prípade bánk resp. iných finančných inštitúcií a stručne zhrnieme, prečo sa využíva a aké sú jeho nevýhody.

1.1 Čo vlastne stresové testovanie je?

Podľa [8] je stresové testovanie už dlho jednou z metód riadenia rizík. Novú pozornosť však získalo v čase súčasnej finančnej krízy. Abdymomunov, Blei a Ergashev v [1] uvádzajú, že toto testovanie umožňuje risk manažérom odhadnúť dôsledky nežiadúcich účinkov na finančnú situáciu ich inštitúcie a dopad na ich obchodný model. Ďalej tiež tvrdia, že poskytnutím informácie o stratách, ktoré môžu nastať za určitých nežiadúcich okolností, stresové testovanie dovoľuje posúdiť citlivosť testovaného portfólia a vyhodnotiť tak množstvo kapitálu potrebného na zaistenie životaschopnosti inštitúcie.

Vychádzajúc z [4, 8] klasické stresové testy vyhodnocujú straty portfólia v extrémnych, no stále pravdepodobných scenároch. Veľká výzva pri tvorení efektívnych stresových testov je výber scenára, ktorý je dostatočne extrémny a stále dostatočne pravdepodobný natoľko, aby dané stresové testovanie malo stále výpovednú hodnotu. Informácie o vplyve konkrétnych stresových scenárov by mali smerovať k opatreniam, ktoré budú znižovať dané riziko, ak je to žiadúce. Pri stresovom testovaní je taktiež dôležité uvedomiť si riziká vyplývajúce z použitia konkrétnych oceňovacích funkcií, na základe ktorých vyhodnocujeme dopad testovaného scenára na portfólio, keďže tieto oceňovacie funkcie môže obsahovať isté zjednodušenia.

1.2 Motivácia pre aplikáciu reverzného stresového testovania

Ako sme spomínali, stresové testovanie vyhodnocuje dôsledky nepriaznivých scenárov na inštitúciu. Podľa Breuera a Csiszára [4] sú však scenáre, ktoré sa následne testujú, určované na základe subjektívneho výberu autorov daného stresového testu. Označujú to za umenie a ako pri každom umení, výsledky nie sú objektívne. Nevhodný výber

stresového scenára môže viesť k nesprávnej interpretácii rizika z dôvodu, že skutočne rizikové scenáre neboli zahrnuté v analýze, alebo z dôvodu, že vybrané scenáre neboli dostatočne pravdepodobné. Podľa [4] teda subjektivita môže byť vítaná v umení, ale nie v riadení rizík. Síce existujú rôzne techniky, ako vybrať vhodné scenáre, ktoré sú z hľadiska straty extrémne a stále dostatočne pravdepodobné, vždy tu je riziko, že sa podstatný scenár vynechá.

Breuer a kol. v [5] sa tiež zaoberajú problematikou výberu vhodného nepriaznivého scenára. Tvrdia, že čím extrémnejší (z hľadiska straty) je scenár, tým je pravdepodobnosť jeho realizácie menšia. Je preto potrebné nájsť kompromis medzi extrémnosťou scenára a jeho pravdepodobnosťou. Pri tvorení takýchto kompromisov si musíme dávať pozor, aby sme nevynechali podstatný scenár. Ak, z rôznych dôvodov, tvorcovia stresového testu nezahrnú do testovania nejaký relevantný scenár vedúci k veľkej strate, ale vyberú niekoľko scenárov, ktoré síce zahŕňajú veľké riziko, no majú menší dopad na portfólio, môže to navodiť falošný pocit bezpečia.

Prirodzene teda z toho vyplynula potreba tieto nevýhody eliminovať. Vznikli teda rôzne metódy popisujúce výber vhodných scenárov (popísané napríklad v [4, 5]), no nimi sa ďalej nebudeme zaoberať. Budeme sa zameriavať na postup, ktorý tento problém eliminuje úplne a to tak, že berie do úvahy všetky scenáre, ktoré môžu nastať. Vopred si určíme len kritickú stratu, resp. úroveň pravdepodobnosti. Takýto druh stresového testovania sa nazýva **reverzné stresové testovanie**.

2 Reverzné stresové testovanie

Podľa [12] je jeden z prístupov definovania reverzného stresového testovania nasledovný:

Reverzné stresové testovanie je proces identifikovania momentu, v ktorom finančná inštitúcia už nie je ďalej životaschopná, ako aj identifikovanie scenára respektíve scenárov, ktoré k tomu vedú.

Problém popísaný v časti 1.2 je teda eliminovaný, keďže stresový scenár je až výsledkom tohto procesu a nemusíme ho identifikovať na začiatku. Postup, ktorý budeme popisovať v tejto kapitole, je nasledovný:

- určíme úroveň straty, ktorá je pre testované portfólio kritická, resp. určíme úroveň pravdepodobnosti,
- následne budeme hľadať najpravdepodobnejší scenár, ktorý k takejto strate vedie, resp. hľadáme scenáre, ktoré sú najextrémnejšie z hľadiska výšky straty.

V celej kapitole budeme vychádzať z [8]. Ich hlavný zámer je identifikovať scenár, ktorý vedie k strate daného portfólia alebo firmy, dosahujúcej určenú kritickú hranicu l . Problém je, že v realite existuje viacero scenárov, ktoré vedú k rovnakej alebo podobnej strate. V danom článku teda formulujú cieľ reverzného stresového testovania ako identifikovanie najpravdepodobnejšieho scenára alebo scenárov z kombinácie scenárov, ktoré môžu nastať. Tento scenár označíme ako $z^*(l)$.

Tento problém riešia v dvoch krokoch. V prvom kroku odhadujú podmienenú strednú hodnotu základných trhových faktorov, za podmienky, že ich hodnota vedie k strate presahujúcej danú kritickú hranicu (hľadajú $\bar{z}(l) = \mathbb{E}[Z \mid L(Z) \geq l]$). Presahujúcej preto, lebo keby uvažovali len scenáre so stratou rovnou určenej kritickej hodnote, tak by ich mali veľmi málo. Nastal by problém nedostatočnej robustnosti, teda odhad by bol veľmi nepresný. Na odhad spomínanej podmienenej strednej hodnoty používajú empirický pravdepodobnostný odhad, popísaný v [11]. Metóda empirickej vierohodnosti (EL - *Empirical Likelihood*) je neparametrický proces odhadu, pomocou ktorého je možné získať intervaly spoľahlivosti pre podmienenú strednú hodnotu. Intervaly spoľahlivosti poskytujú viac informácií ako jeden bod na odhad scenára vedúceho ku kritickej strate.

V druhom kroku sa zameriavajú na odvodenie multiplikátora, ktorým škálujú nájdenú podmienenú strednú hodnotu. Nájdený scenár $\bar{z}(l)$ totiž nadhodocuje hľadný scenár $z^*(l)$ z hľadiska celkovej straty a spomínaným multiplikátorom sa tento fakt snažia eliminovať. Multiplikátor hľadajú za predpokladu, že funkcia, ktorá popisuje stratu daného portfólia, je lineárna. Uvažujú o viacrozmernom normálnom rozdelení, viacrozmernom Laplaceovom a viacrozmernom Studentovom t-rozdelení trhových faktoroch, keďže každé rozdelenie popisuje iné správanie sa na okrajoch daného rozdelenia - na takzvaných chvostoch. V simuláciách uvedených v tejto práci budeme uvažovať normálne a Studentovo t-rozdelenie. V závislosti od rozdelenia bude mať multiplikátor inú hodnotu.

2.1 Riešenie RST za predpokladu normality

Autori dokumentu [8] v kapitole 2 začínajú metódu hľadania najpravdepodobnejšieho scenára s vopred určenou stratou tak, že v prvom kroku za predpokladu normality odvodí analytický postup na jeho nájdenie. Postupujú nasledovne: Nech Z je náhodný vektor reprezentujúci zmeny trhových faktorov dimenzie d . Nech Z má hustotu $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$. Nech $L(z)$ je funkcia straty, ktorú nadobudne portfólio po zrealizovaní scenára $Z = z$. Ak kritická hranica straty pre sledované portfólio je l , tak riešením reverzného stresového testovania je scenár s najväčšou pravdepodobnosťou, ktorý vedie k strate rovnakej alebo väčšej ako je l . Na nájdenie takého scenára je potrebné vyriešiť nasledovnú úlohu:

$$\begin{aligned} \max_{z \in \mathbb{R}^d} f(z) \\ L(z) \geq l \end{aligned} \tag{1}$$

V prípade hľadania riešenia za predpokladu, že trhové faktory majú normálne rozdelenie, autori [8] sformulovali túto vetu:

Tvrdenie 2.1. *Nech Z má viacrozmerné normálne rozdelenie $N(\mu, \Sigma)$, $\Sigma \succ 0$. Ďalej nech funkcia straty je lineárna, teda $L(z) = c^T z$. Potom sa problém (1) redukuje na:*

$$\begin{aligned} \min_{z \in \mathbb{R}^d} (z - \mu)^T \Sigma^{-1} (z - \mu) \\ c^T z \geq l. \end{aligned} \tag{2}$$

Dôkaz. Keďže Z má normálne rozdelenie, poznáme jeho hustotu, ktorá je $f(z) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^d |\Sigma|}} e^{\frac{1}{2}(z-\mu)^T \Sigma^{-1}(z-\mu)}$. Taktiež platí, že maximalizovať funkciu $f(z)$ je ekvivalentné s minimalizovaním funkcie $\ln f(z) = -\frac{1}{2} \ln((2\pi)^d |\Sigma|) + \frac{1}{2}(z-\mu)^T \Sigma^{-1}(z-\mu)$. To je ekvivalentné s (2). $\square$

Úloha (2) sa dá ľahko riešiť a podľa [8] je riešenie nasledovné:

$$z^*(l) = \mu + \left(\frac{l - c^T \mu}{c^T \Sigma c} \right) \Sigma c. \quad (3)$$

Daný výraz môžeme napísať aj v tvare

$$z^*(l) = \mu + b^*(l - c^T \mu), \quad (4)$$

kde $b^* = \frac{\Sigma c}{c^T \Sigma c}$. V prípade, že máme historické údaje k sledovanému portfóliu, vieme pomocou nich odhadnúť b^* a následne vypočítať riešenie problému (1).

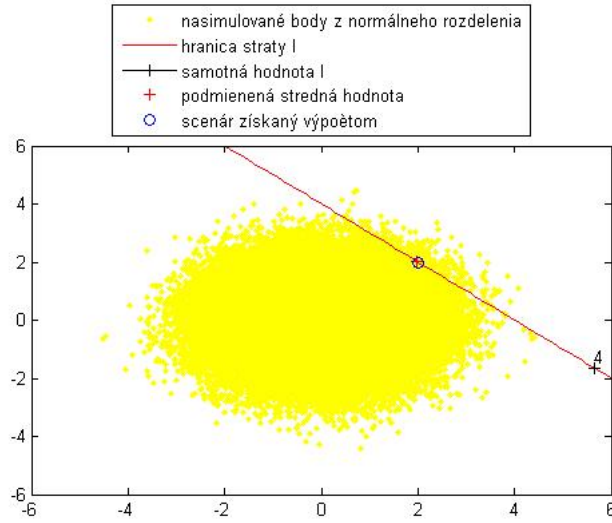
Môžeme si taktiež uvedomiť, že v prípade normálne rozdelených rizikových faktorov a lineárnej funkcie straty, je úloha nájsť najpravdepodobnejší scenár so stratou aspoň l ekvivalentná úlohe nájsť podmienenú strednú hodnotu.

$$\mathbb{E}[Z | c^T Z = l] \quad (5)$$

ako uvádzajú v [8]. Platnosť tohto tvrdenia vyplýva z toho, že stredná hodnota normálneho rozdelenia má najväčšiu hustotu a teda je aj najpravdepodobnejšia. Podmienku $c^T Z = l$ môžeme použiť z dôvodu, že pre normálne rozdelenie majú body za hranicou straty rovnakej l menšiu pravdepodobnosť, ako body na hranici a v jej tesnom okolí.

Na praktické overenie spomenutého faktu sme naprogramovali simuláciu v programe Matlab. Samotný skript je uvedený na CD médiu priloženom k tejto práci. Na Obr. 1 môžeme pozorovať, že podmienená stredná hodnota $\mathbb{E}[Z | c^T Z = l]$ a z^* definované podľa vzťahu (4) sú skutočne totožné. Žlté body sú nasimulované údaje z normálneho rozdelenia. Vyznačená hranica popisuje lineárnu funkciu straty $c^T z = 4$, kde $c = (1, 1)^T$. Vyznačené body na hranici popisujú podmienenú strednú hodnotu a bod vypočítaný vzťahom (4).

V skutočnosti sa ale trh v extrémnych situáciách nespráva podľa normálneho rozdelenia. Preto je tento predpoklad veľmi obmedzujúci a nie celkom použiteľný v praxi. Preto sa autori [8] rozhodli vo svojej práci odvodiť metódu, ktorá nebude závislá od konkrétného štatistického rozdelenia dát. Danú metódu popíšeme v ďalšej sekcii.



Obr. 1: Simulované údaje z normálneho rozdelenia s vyznačenou hranicou kritickej straty a s vyznačenými scenármi nájdenými pomocou podmienenej strednej hodnoty a výpočtom podľa vzťahu (4)

2.2 Odhad najpravdepodobnejšieho scenára pre eliptické rozdelenia

Ako prvý krok sa Glasserman a kol. v [8] rozhodli odhadnúť podmienenú strednú hodnotu $\bar{z}(l) = \mathbb{E}[Z \mid L(Z) \geq l]$. Ako sme spomínali, takýto odhad môže z hľadiska celkovej straty nahodnocovať odhad nájdený pomocou (5) a preto ho násobia škálovacou konštantou, ktorej hodnota sa odvíja od chvostov náhodného vektora Z (konkrétnejšie od toho, aké sú ťažké).

Samotný odhad podmienenej strednej hodnoty $\bar{z}(l)$ hľadajú nasledovne. Nech z_i pre $i = 1, 2, \dots, n$ sú jednotlivé pozorovania správania sa trhových faktorov (napríklad zmena ceny akcie) a nech $L(z_i)$ sú prislúchajúce straty. Zo všetkých týchto pozorovaní odstránia tie, pre ktoré platí $L(z_i) < l$ a zostávajúce pozorovania preindexujú. Pôvodný problém odhadu podmienenej strednej hodnoty sa teda redukuje na odhad nepodmienenej strednej hodnoty. Hľadajú ho metódou empirickej vierohodnosti podľa [11]. Uvádza sa tam, že kandidátmi na strednú hodnotu sú konvexné kombinácie pozo-

rovaní

$$w_1 z_1 + w_2 z_2 + \cdots + w_n z_n,$$

$$\sum_{i=1}^n w_i = 1, w_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, n.$$

Nech sú pozorovania nezávislé a rovnako rozdelené so strednou hodnotou μ_0 a nech konvexná množina pozorovaní obsahuje μ_0 s pravdepodobnosťou blížiacou sa k 1 s narastajúcim počtom pozorovaní. Ďalej definujeme funkciu

$$\mathcal{R}(x) = \max \left\{ \prod_{i=1}^n n w_i : \sum_{i=1}^n w_i z_i = x, \sum_{i=1}^n w_i = 1, w_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, n \right\}. \quad (6)$$

Potom Veta 3.2 v [11] tvrdí, že $-2 \ln \mathcal{R}(\mu_0)$ má asymptoticky χ_d^2 rozdelenie pre veľké n , kde d je dimenzia Z . To autorom v [8] umožňuje určiť $100(1-\alpha)\%$ interval spoľahlivosti pre μ_0 . Tvorí ho množina

$$\mathcal{C}_{1-\alpha, n} = \{x : \mathcal{R}(x) \geq e^{-x_\alpha/2}\}, \quad (7)$$

kde x_α je kvantil, pre ktorý platí, že $P[\chi_d^2 \geq x_\alpha] = \alpha$. Ďalej tvrdia, že maximalizácia v (6) sa podľa Owena [11] dá preformulovať na ľahko riešiteľnú úlohu

$$\max_{w_1 \dots w_n} \sum_{i=1}^n \ln(w_i) \text{ za predpokladu } \sum_{i=1}^n w_i = 1, \sum_{i=1}^n w_i z_i = x, w_i \geq 0.$$

K nájdeniu riešenia RST, bez predpokladu normality, je už len potrebné nájsť závislosť medzi nájdenými intervalmi spoľahlivosti a riešením $z^*(l)$ v (5). Autori [8] odhadujú závislosť medzi z^* a $\bar{z}$ za predpokladu, že hranica kritickej straty l je veľká a že funkcia straty $L(z)$ je lineárna. Spomínanú závislosť popisujú škálovacou konštantou, ktorú odvádzajú za predpokladu, že faktory sú z normálneho, Laplaceovho alebo Studentovho t-rozdelenia. Všetky tri rozdelenia sú eliptické s elipsami ako úrovňovými krivkami hustoty a preto riešenie v (5) môžeme aplikovať aj na Laplaceovo a Studentovo t-rozdelenie. Odhad samotnej škálovacej konštanty uvádzajú v Tvrdení 1, ktoré znie takto:

Tvrdenie 2.2. *Nech $z^*(l) \in \mathbb{R}^d$ je riešenie (1) pre lineárnu funkciu straty a nech $\bar{z}(l)$ je podmienená stredná hodnota $\mathbb{E}[Z \mid L(Z) \geq l]$. Nech Z je z normálneho, Laplaceovho*

resp. Studentovho t -rozdelenia, so stupňami voľnosti $\nu > 1$. Potom existuje kladná postupnosť κ_l taká, že

$$z^*(l) = \kappa_l \bar{z}(l), \kappa_l \rightarrow \kappa \text{ pre } l \rightarrow \infty, \quad (8)$$

kde

- $\kappa = 1$, ak Z je z normálneho alebo Laplaceovho rozdelenia,
- $\kappa = \frac{\nu-1}{\nu}$, ak Z je zo Studentovho t -rozdelenia s ν stupňami voľnosti.

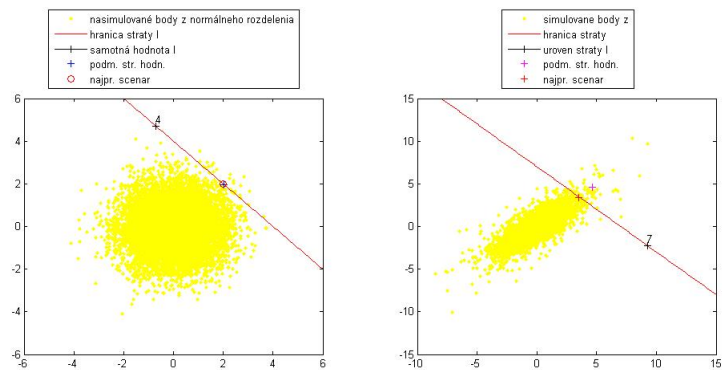
Vďaka tomuto tvrdeniu môžeme hľadať najpravdepodobnejší scenár tak, že odhadneme podmienenú strednú hodnotu $\bar{z}(l)$ a následne ju prenásobíme škálovacou konštantou κ . Ako vidíme, konštanta je potrebná len v prípade Studentovho t -rozdelenia. Taktiež platí, že $\kappa_l \mathcal{C}_{1-\alpha, n}$ je asymptotický $100(1-\alpha)\%$ interval spoľahlivosti pre scenár $z^*(l)$. Nájsť riešenie RST a teda najpravdepodobnejší scenár, ktorý presahuje kritickú stratu, sa zjednodušuje na nasledovný postup:

1. Z dostupných pozorovaní resp. historických dát vyberieme len tie, ktoré presahujú kritickú stratu, teda platí, že $L(z_i) \geq l$.
2. Odhadneme podmienenú strednú hodnotu $\bar{z}(l)$ a jej interval spoľahlivosti.
3. Preškálujeme získaný interval faktorom κ a získame tak interval spoľahlivosti pre hľadaný najpravdepodobnejší scenár.

2.3 Ilustrácia teoretických poznatkov na simulovaných údajoch

Predtým, ako budeme ilustrovať poznatky získané z Tvrdenia 2.2, zobrazíme na Obr. 2 nájdenu podmienenú strednú hodnotu $\bar{z}$ ako aj najpravdepodobnejší scenár z^* vypočítaný vzťahom (5). Vidíme, že pre údaje z normálneho rozdelenia sú z^* aj $\bar{z}$ takmer totožné, zatiaľ čo pre Studentovo t -rozdelenie to neplatí.

Tvrdenie 2.2 ilustrujeme na simulovaných údajoch tak, že pre vygenerované údaje zo Studentovho t -rozdelenia nájdeme $z^*(l)$ aj $\bar{z}(l)$ pre konkrétnu hodnotu l , určenú vopred. Potom nájdeme hodnotu výrazu $\frac{z^*(l)}{\bar{z}(l)}$, ktorá predstavuje teoretickú hodnotu škálovacej konštanty, ktorou treba prenásobiť $\bar{z}$, aby sme získali hľadaný scenár. Keďže daná konštanta vychádza pre každé pozorovanie odlišne, tak do tabuľky nižšie uvedieme



Obr. 2: Generované údaje z normálneho rozdelenia $N(0,1)$ (vľavo) a Studentovho t -rozdelenia, $\nu = 7$ (vpravo) spolu s vyznačenou podmienenou strednou hodnotou a najpravdepodobnejším scenárom dosahujúcim kritickú stratu.

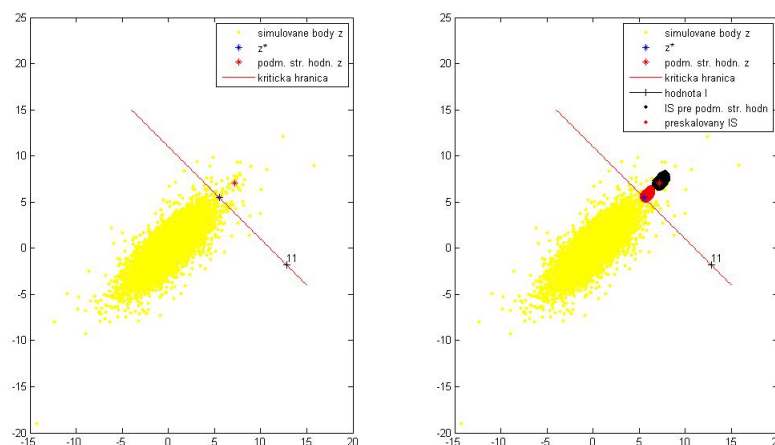
priemer zo zistených hodnôt. Túto hodnotu potom porovnáme s hodnotou κ uvedenou v Tvrdení 2.2. Postup zopakujeme pre rôzne hodnoty ν a rôzne hodnoty l , čo znamená rôzne počty pozorovaní (čím je uvedený počet pozorovaní menší, tým je hranica straty l väčšia), ktoré vedú k väčšej strate ako dané l (taktiež budeme uvádzať priemernú hodnotu, keďže pre každú simuláciu sa toto číslo mení). V Tabuľke 1 môžeme pozorovať,

Tabuľka 1: Porovnanie vypočítanej škálovacej konštanty podľa Tvrdenia 2.2 a škálovacej konštanty pozorovanej zo simulácií

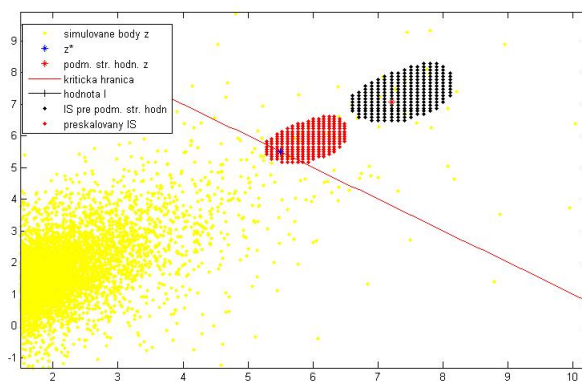
hranica l	počet pozorovaní za hranicou	ν	κ - teoretická	κ - odhad	rozdiel
16	92	5	0,7847	0,8	0.0153
20	31	5	0,7997	0,8	0.0003
14	76	6	0,8183	0,833	0.0147
17.5	13	6	0,8344	0,833	0.0014
12.5	73	7	0,8406	0,857	0.0164
14	32	7	0,8543	0,857	0.0027

že čím je väčšia hranica straty, tak je odhad škálovacej konštanty lepší. Toto pozorovanie potvrdzuje fakt, že κ_l môžeme v Tvrdení 2.2 nahradiť konštantou κ pre $l \rightarrow \infty$, čo je ekvivalentné s tým, že počet pozorovaní za hranicou straty klesá.

V ďalšom kroku nájdeme podľa (7) interval spoľahlivosti pre podmienenú strednú hodnotu, ktorý potom preškalujeme. Pozrieme sa na to, či takto získaný $100(1 - \alpha)\%$ IS obsahuje aj najpravdepodobnejší scenár z^* nájdený podľa (5). Obidva intervaly spoľahlivosti sú vykreslené na Obr. 3.



Obr. 3: Intervaly spoľahlivosti pre podmienenú strednú hodnotu a najpravdepodobnejší kritický scenár. Generované body sú zo Studentovho t-rozdelenia s počtom stupňov voľnosti $\nu = 5$



Obr. 4: Priblížená ilustrácia intervalov spoľahlivosti z Obr. 3

Ako vidíme, obidva intervaly prekrývajú nájdené hodnoty z^* aj $\bar{z}$. Ako sme spomínali, informácia o IS je pre nás ďaleko hodnotnejšia, keďže nám dáva lepšiu predstavu o najpravdepodobnejšom scenári, ktorý presahuje určenú kritickú hodnotu straty.

3 Najpravdepodobnejší scenár

V tejto kapitole odvodíme vlastný metódu, ako nájsť najpravdepodobnejší scenár vedúci ku kritickej strate. Najprv zvolíme rizikové faktory, ktoré vplývajú na testované portfólio. Hlavná myšlienka metódy je taká, že určíme scenár z_l , ktorý je pre nás kritickej a následne vygenerujeme veľké množstvo scenárov $z \in \mathbb{R}^d$, ktoré môžu nastať. Pomocou oceňovacej funkcie $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, vypočítame stratu, ku ktorej vedú scenáre z . Oceňovacia funkcia je zvyčajne naviazaná na testované portfólio. Ďalej budeme postupovať tak, že z množiny všetkých nami vygenerovaných scenárov nájdeme také scenáre z_P^* a z_L^* , ktoré spĺňajú podmienky (9) (pre z_P^*) a (10) (pre z_L^*), kde $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ je združená hustota rozdelenia, z ktorého sme generovali scenáre z .

$$\begin{aligned} z_P^* &= \arg \max_z f(z) \\ L(z_P^*) &\geq L(z_l) \end{aligned} \tag{9}$$

$$\begin{aligned} z_L^* &= \arg \max_z L(z) \\ f(z_L^*) &\geq f(z_l) \end{aligned} \tag{10}$$

Pre takto nájdene scenáre platí:

- Scenár z_P^* je zo scenárov vedúcich k rovnakej alebo väčšej strate ako z_l najpravdepodobnejší.
- Scenár z_L^* vedie k najväčšej strate zo scenárov s pravdepodobnosťou rovnakou prípadne väčšou ako z_l .

Na vygenerovanie potenciálnych scenárov z potrebujeme určiť rozdelenie, z ktorého ich vygenerujeme. Normálne rozdelenie na to nie je vhodné, lebo trh a teda ani naše vybrané rizikové faktory sa nesprávajú podľa tohto rozdelenia. Trhové scenáre majú ťažšie chvosty ako normálne rozdelenie a nás zaujíma práve správanie sa na chvostoch. Vhodnejšie rozdelenie je Studentovo t-rozdelenie, ktoré simuluje rôzne správanie sa chvostov rozdelenia (na základe stupňov voľnosti). Každý rizikový faktor (napríklad cena jednotlivých akcií portfólia) môže mať iný stupeň voľnosti, ktorý vieme odhadnúť z historických dát. Na základe tohto odhadu poznáme marginálne hustoty rozdelenia. Nemôžeme predpokladať, že trhové faktory sú medzi sebou nezávislé a teda na výpočet

pravdepodobnosti výskytu vygenerovaného scenára potrebujeme poznať aj vzťah medzi jednotlivými marginálnymi hustotami (združenú hustotu). Na popísanie tohto vzťahu použijeme takzvané **kopule**. Ich výhodou je, že umožňujú modelovanie pomerne širokej triedy štruktúry vzájomných závislostí marginálnych rozdelení. Nami vytvorenú metódu odhadovania kopuly a následné generovanie údajov popíšeme v ďalších častiach. V nasledujúcej časti stručne uvedieme najdôležitejšie teoretické poznatky týkajúce sa kopúl.

3.1 Kopule

Podľa [7] je definícia kopuly nasledovná:

Definícia 3.1. *n -rozmerná kopula je funkcia $C : [0, 1]^n \rightarrow [0, 1]$, ktorá má nasledovné vlastnosti:*

1. $C(\mathbf{u})$ je rastúca v každej zložke vektora $\mathbf{u}_k$, $k=1, 2, \dots, n$.
2. Pre každý vektor $\mathbf{u} \in [0, 1]^n$, $C(\mathbf{u}) = 0$ ak aspoň jedna zložka $\mathbf{u}$ je nulová a $C(\mathbf{u}) = \mathbf{u}_k$, ak všetky zložky $\mathbf{u}$ okrem k -tej sú rovné 1.
3. Pre každé $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in [0, 1]^n$, $\mathbf{a} \leq \mathbf{b}$ a n -rozmernú kocku $\mathbf{B}=[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \dots \times [a_n, b_n]$, ktorej vrcholy ležia v definičnom obore C , platí, že objem kocky $V_C(\mathbf{B}) \geq 0$.

Z definície 3.1 vidíme, že kopula C je vlastne združená distribučná funkcia s rovnomerne rozdelenými marginálnymi rozdeleniami na intervale $[0, 1]$. Pre lepšie pochopenie tejto funkcie ešte uvedieme aj známu Sklarovu vetu:

Veta 3.2 (Sklar). *Nech G je n -rozmerná združená distribučná funkcia s marginálnymi distribučnými funkciami $F_1, F_2, \dots, F_n$. Potom existuje n -rozmerná kopula C taká, že platí:*

$$G(u_1, u_2, \dots, u_n) = C(F_1(u_1), F_2(u_2), \dots, F_n(u_n)).$$

Zo Sklarovej vety teda vidíme, že kopula vlastne popisuje závislosť medzi marginálnymi rozdeleniami. Keďže kopula je v podstate distribučná funkcia, vieme následne počítať aj pravdepodobnosti združených javov (aj tu totiž platí, že derivovaním kopuly získame hustotu rozdelenia).

3.1.1 Klasifikácia kopula funkcií

Päť najčastejšie používaných kopúl môžeme rozdeliť do 2 skupín, a to:

1. Eliptické kopuly:

- Gaussova (normálna) kopula
- Studentova t-kopula

2. Archimedovské kopuly:

- Claytonova kopula
- Gumbelova kopula
- Frankova kopula

V krátkosti ich opíšeme a ilustrujeme dvojrozmerné kopuly. Všetky ilustrované kopuly boli odhadnuté zo zmeny cien akcií spoločností Microsoft a Accenture za obdobie od 20.7.2001 do 8.3.2013. Na obrázkoch bude možné uviesť si fakt, že extrémne scenáre sa môžu vyskytovať s väčšou pravdepodobnosťou, ako pri použití klasických viacrozmerných distribučných funkcií. Tento poznatok bude užitočný aj z toho dôvodu, že extrémne scenáre nás špecificky zaujímajú. V nasledujúcej časti budeme vychádzať z článku [7].

Gaussova kopula

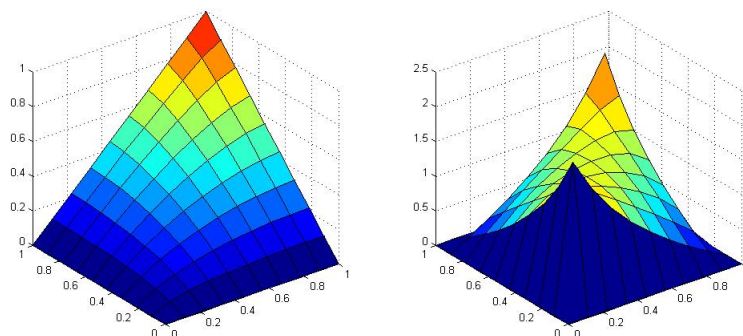
Ako už je z názvu jasné, tento typ kopuly je odvodený od normálneho rozdelenia, a to nasledovne:

Definícia 3.3. *Nech Φ_R je štandardizované viacrozmerné normálne rozdelenie s korelačnou maticou R , pre ktorú platí $\text{diag}(R) = 1$. Potom je Gaussova kopula definovaná vzťahom*

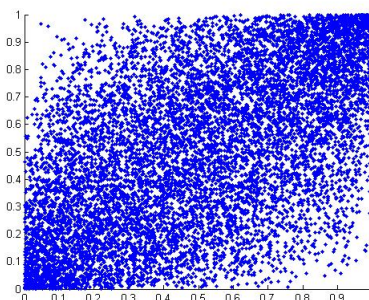
$$C(u_1, u_2, \dots, u_n; R) = \Phi_R(\Phi^{-1}(u_1), \Phi^{-1}(u_2), \dots, \Phi^{-1}(u_n)), \quad (11)$$

kde $\Phi^{-1}(u)$ je inverzná funkcia k distribučnej funkcii jednorozmerného normálneho rozdelenia.

Na Obr. 5 môžeme vidieť distribučnú funkciu aj hustotu Gaussovej kopuly. Ako vidíme, extrémne pozorovania majú rovnaké pravdepodobnosti na oboch koncoch. Na Obr. 6 vidíme 10 000 vygenerovaných dát z Gaussovej kopuly.



Obr. 5: Distribučná funkcia a hustota Gaussovej kopuly.

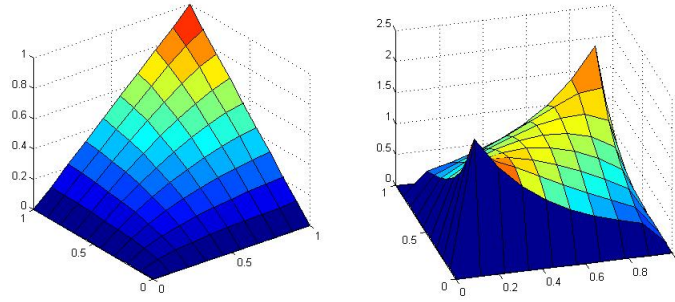


Obr. 6: Generované údaje z Gaussovej kopuly, $\hat{\rho} = 0.3631$.

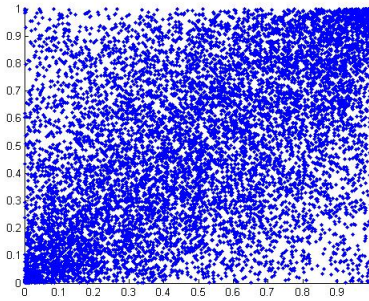
Studentova t-kopula

Táto kopula sa zakladá na analogickom prístupe ako Gaussova kopula, no marginálne rozdelenia sú Studentove t-rozdelenia s ν stupňami voľnosti. Na obrázkoch nižšie opäť môžeme vidieť distribučnú funkciu, hustotu a aj generované údaje zo Studentovej t-kopuly.

Ako vidíme, medzi týmito dvoma kopulami nie je veľký rozdiel, obidve vychádzajú z eliptických rozdelení.



Obr. 7: Distribučná funkcia a hustota Studentovej t-kopuly.



Obr. 8: Vygenerované údaje zo Studentovej t-kopuly, $\hat{\nu} = 5.6475$, $\hat{\rho} = 0.4833$.

Archimedove kopuly

Podľa [10] sú kopuly z tejto triedy definované nasledovne. Uvažujme funkciu $\varphi : [0, 1] \rightarrow [0, \infty]$ pre ktorú platí:

- φ je spojitá.
- $\varphi'(u) < 0$ pre všetky $u \in [0, 1]$.
- $\varphi(1) = 0$.

Potom definujeme pseudoinverznú funkciu k $\varphi^{[-1]}$ ako funkciu $\varphi^{-1} : [0, \infty] \rightarrow [0, 1]$ tak, že:

$$\varphi^{[-1]}(t) = \begin{cases} \varphi^{-1}(t) & \text{pre } 0 \leq t \leq \varphi(0) \\ 0 & \text{pre } \varphi(0) \leq t \leq \infty \end{cases}$$

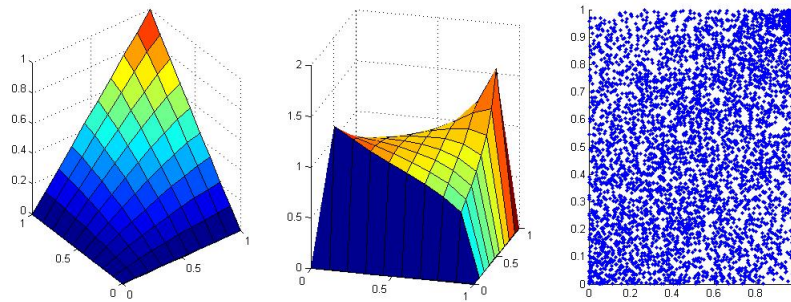
Teda ak je φ konvexná, potom funkcia $C : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ definovaná ako:

$$C(u, v) = \varphi^{[-1]}[\varphi(u) + \varphi(v)] \quad (12)$$

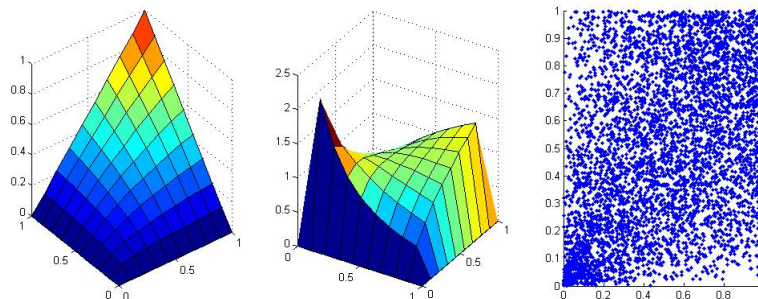
je Archimedova kopula a φ sa nazýva generátor kopuly. Všetky tri spomenuté Archimedove kopuly sa líšia použitím iného generátora a to nasledovne:

- Gumbelova: $\varphi(t) = (-\ln(t))^\theta$, kde $\theta \geq 1$.
- Claytonova: $\varphi(t) = \frac{t^{-\theta}-1}{\theta}$, kde $\theta \in [-1, \infty) \setminus \{0\}$.
- Frankova: $\varphi(t) = -\ln \frac{e^{-\theta t}-1}{e^{-\theta}-1}$, kde $\theta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

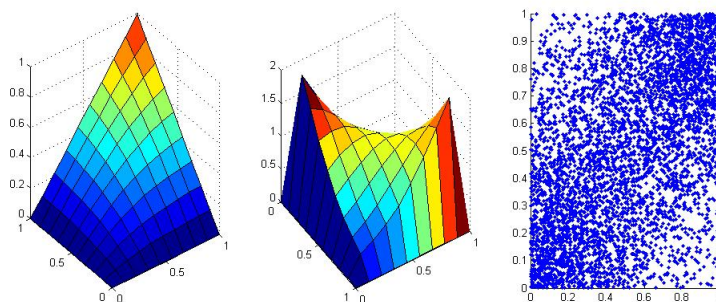
Na Obr. 9, 10, a 11 môžeme vidieť ilustrácie jednotlivých kopúl a taktiež aj aké údaje následne generujú. Je dobré si všimnúť, že Gumbelova kopula generuje častejšie údaje okolo extrému $[1, 1]$ a Claytonova kopula okolo extrému $[0, 0]$. Z tohto dôvodu si aj my neskôr vyberieme Gumbelovu kopulu, keďže nás práve zaujímajú scenáre s extrémnou stratou.



Obr. 9: Distribučná funkcia, hustota a vygenerované údaje pre Gumbelovu kopulu, parameter $\hat{\alpha} = 1.4484$.



Obr. 10: Distribučná funkcia, hustota a vygenerované údaje pre Claytonovu kopulu, parameter $\hat{\alpha} = 0.6675$.



Obr. 11: Distribučná funkcia, hustota a vygenerované údaje pre Frankovu kopulu, parameter $\hat{\alpha} = 3.1684$.

3.2 Návrh najpravdepodobnejšieho scenára pomocou kopúl

V tejto časti pristúpime k odvodeniu vlastnej metódy hľadania najpravdepodobnejšieho scenára, ktorý je pre naše portfólio už kritický. Predpokladáme, že portfólio budú tvoriť akcie dvoch spoločností obchodovaných na burze (Microsoft a Accenture), ktorých ceny označíme ako x^1 a x^2), a rizikový faktor bude percentuálna zmena ceny akcie. Cieľom je identifikovať scenáre spĺňajúce (9) a (10). Z dôvodov, ktoré sme uviedli na začiatku Kapitoly 3, údaje nebudeme generovať zo známeho štatistického rozdelenia, ale z empirického rozdelenia na základe historického správania sa vybraných akcií. Spomínané rozdelenie bude tvoriť kopula odhadnutá na základe historických pozorovaní percentuálnych zmien cien akcií Microsoft a Accenture za obdobie od 2.1.2001 do 8.3.2013.

Náša metóda hľadania najpravdepodobnejšieho scenára je nasledovná:

1. Určíme si scenár z_t , ktorý vedie ku kritickej strate. Ďalej predpokladáme, že oceňovacia funkcia je lineárna s vektorom váh $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.
2. Vypočítame percentuálne zmeny cien akcií (ďalej budeme nazývať údaje), pričom straty budú mať kladné znamienko.

$$r_i = -\frac{x_i - x_{i-1}}{x_i} \quad (13)$$

3. Kopula je distribučná funkcia s rovnomerne rozdelenými marginálnymi rozdeleniami. Keďže údaje r_i túto vlastnosť nespĺňajú, je potrebné ich transformovať. Na

transformáciu použijeme štandardné Studentovo t-rozdelenie. Dáta r_i je predtým potrebné štandardizovať. Použijeme na to vzťah

$$s_i^j = \frac{r_i^j - \mu^j}{\sigma_i^j}, j = 1, 2, \quad (14)$$

kde:

- μ^j je nepodmienená stredná hodnota,
- σ_i^j je podmienená variancia vypočítaná pomocou metódy exponenciálne vážených kľzavých priemerov pomocou vzťahu

$$\begin{aligned} (\sigma_1^j)^2 &= \text{var}(r^j) \\ \varepsilon_i^j &= r_i^j - \mu^j \\ (\sigma_i^j)^2 &= 0,94 \times (\sigma_{i-1}^j)^2 + 0,06 \times (\varepsilon_{i-1}^j)^2 \end{aligned} \quad (15)$$

- Počet stupňov voľnosti ν^j pre štandardizované relatívne straty s^j odhadneme metódou maximálnej vierohodnosti (napríklad v matlabe príkazom *mle*).
4. Predpokladáme, že údaje s^j sú zo štandardného Studentovho t-rozdelenia s počtom stupňov voľnosti ν^j . Preto ich transformujeme na údaje z rovnomerného rozdelenia pomocou vzťahu $u^j = F(s^j)$, kde F je distribučná funkcia štandardného Studentovho t-rozdelenia.
 5. Odhadneme samotnú kopulu. Na jej odhad použijeme matematický softvér matlab a príkaz *copulafit*, ktorý metódou maximálnej vierohodnosti odhaduje parametre θ potrebné pre konštrukciu kopuly. Pre eliptickú triedu kopúl je to parameter ρ (Gaussova kopula), prípadne ρ, ν_t (Studentova t-kopula). Pre Archimédovské kopuly je to parameter α . V našom konkrétnom príklade sme zvolili Gumbelovu kopulu, lebo má tendenciu častejšie generovať údaje, ktoré zodpovedajú extrémnym scenárom okolo bodu $[1, 1]$ - teda scenára vedúce k veľkým stratám.
 6. V ďalšom kroku vygenerujeme $N = 10000$ scenárov z dvojrozmerného rozdelenia, ktoré zodpovedá odhadnutým jednorozmerným rozdeleniam a kopule $C_{\hat{\rho}, \hat{\nu}_t}$.

Scenáre generujeme nasledujúcim vzťahom:

$$\begin{aligned} (\bar{z}_i^1, \bar{z}_i^2) &\sim C_{\hat{\rho}, \hat{\nu}_t} \\ z_i^j &= F^{-1}(\bar{z}_i^j | \hat{\nu}^j) \times \sigma_i^j + \mu^j, j = 1, 2, i = 1, 2, \dots, N \end{aligned} \quad (16)$$

7. Každému scenáru z pridáme jeho pravdepodobnosť pomocou vzťahu (17)

$$P[z_i] = c(z) \times f_{z_1}(z_i^1) \times f_{z_2}(z_i^2), \quad (17)$$

kde $c(z)$ je združená hustota získaná z kopuly a f_{z_1} a f_{z_2} sú marginálne hustoty Studentových t-rozdelení, so stupňami voľnosti $\hat{\nu}^j$.

8. Podľa (9) a (10) nájdeme scenáre z_P^* a z_L^* .

Tabuľka 2: Najpravdepodobnejšie scenáre nájsené pomocou odhadu Gumbelovej kopuly

scenár	perc. strata cien akcií	pravdepodobnosť	strata portfólia
z_l	(0.5%, 0.7%)	11.8%	0.6%
z_P^*	(0.63%, 0.58%)	12.3%	0.6%
z_L^*	(0.65%, 0.62%)	11.9%	0.63%

Ako vidíme v Tabuľke 2, uvedená metóda nás priviedla ku scenárom, ktoré buď vedú k síce rovnako kritickej strate, ale sú pravdepodobnejšie, alebo ktoré sú rovnako pravdepodobné, no vedú k väčšej strate.

4 Reverzné stresové testovanie pre devízové pozície podielových fondov a fondov DDS

Obsahom tejto kapitoly je prípadová štúdia, kde ilustrujeme použitie vyššie uvedených metód RST v prípade stresového testovania slovenského finančného sektora používanú v Národnej banke Slovenska. NBS v rámci tohto stresového testovania mimo iného testuje aj riziko vyplývajúce z devízových pozícií v sektore tým, že analytici určia kritický scenár zmeny výmenných kurzov a analyzujú následky tejto zmeny na daný sektor. My ukážeme, ako nájsť scenáre s vyššou pravdepodobnosťou alebo vedúce k väčšej strate. Tento prístup umožňuje rozšírenie metodológie stresového testovania aplikovanej v NBS. Použijeme metódu odvodenú v časti 3 na nájdenie kritických scenárov. Zameriame sa na devízové pozície **podielových fondov a fondov DDS** (tzn. doplnkové dôchodkové spoločnosti), keďže v týchto sektoroch je čistý podiel devízových pozícií najväčší. Čisté devízové pozície sú aktíva mínus pasíva, ktoré má daný sektor umiestnené v cudzích menách a teda zmena výmenného kurzu medzi cudzou a domácou menou predstavuje jedno z rizík pre daný sektor. Výmenný kurz budeme vždy uvažovať ako pomer cudzej meny k domácej mene (tzn. pár USD/EUR a nie EUR/USD). Rizikový faktor bude predstavovať zmena výmenného kurzu. Rast kurzu USD/EUR totiž znamená, že za 1 euro dostaneme viac dolárov, teda dolár oslabuje. Tento stav vedie k strate portfólia (aktíva, ktoré máme v dolároch majú menšiu hodnotu).

Sledovanú časť portfólia budú tvoriť aktíva fondov v cudzích menách (iba určitá percentuálna časť celého portfólia daného fondu je totiž tvorená devízovými pozíciami, nie celé portfólio). V Tabuľke 3 môžeme vidieť jednak percentuálny podiel devízových pozícií v danom fonde a taktiež aj rozloženie devízových pozícií na jednotlivé meny (taktiež percentuálne). Údaje sme získali z Tabuľky 8 Analýzy slovenského finančného sektora za rok 2009 [2] (analýza Národnej banky Slovenska).

Podľa Tabuľky 3 môžeme vypočítavať váhy (podiel devízových pozícií v jednotlivých menách na celkových aktívach), ktorými vplývajú zmeny jednotlivých výmenných kurzov na celé portfólio sektora. Vypočítame ich tak, že percentuálny podiel devízových pozícií v konkrétnej mene vynásobíme celkovým podielom objemu devízových pozícií na celkových aktívach daného fondu. Váhy môžeme vidieť v Tabuľke 4.

4 REVERZNÉ STRESOVÉ TESTOVANIE PRE DEVÍZOVÉ POZÍCIE PODIELOVÝCH FONDOV A FONDOV DDS

Tabuľka 3: Percentuálne podiely devízových pozícií v podielových a DDS fondoch pre jednotlivé zahraničné meny

mena	podielové fondy	fondy DDS
USD	67	51
CZK	10	6
PLN	11	4
GBP	3	0
HUF	4	1
CHF	1	19
JPY	2	2
RON	0	11
TRY	6	1
celkový podiel v sektore	12,5	4,9

Tabuľka 4: Váhy (v percentách) jednotlivých mien na celom portfóliu (vyjadrené ako percento z čistej hodnoty aktív) podielových a DDS fondov

mena	podielové fondy	fondy DDS
USD	3,28	2,50
CZK	0,49	0,29
PLN	0,54	0,20
GBP	0,15	0
HUF	0,20	0,05
CHF	0,05	0,93
JPY	0,10	0,10
RON	0	0,54
TRY	0,05	0,29

Pomocou týchto váh môžeme vypočítať stratu (prípadne zisk), ku ktorej bude viesť zmena jednotlivých kurzov. Využijeme údaje za obdobie od 2.1.2009 do 8.5.2013 získané z kurzového lístka umiestneného na webovej stránke Národnej banky Slovenska. Samotné kritické scenáre budeme hľadať podľa metódy, ktorú sme uviedli v časti 3.2.

Budeme odhadovať Studentovu t-kopulu (Archimedovské kopuly v tomto prípade nepoužijeme z dôvodu, že funkcia *copulafit* v Matlabe pracuje len s dvojrozmernými údajmi pre túto triedu kopúl). Kritický scenár z_l zvolíme tak, ako ho zvolili v [2], Tabuľka 10, no s menšími úpravami. Autori danej analýzy pracovali s ročnými údajmi výmenného kurzu, my však budeme pracovať s dennými údajmi. Ročné zmeny výmenných kurzov predelíme číslom $\sqrt{250}$. Ide o štandardný postup, číslo 250 predstavuje počet obchodovacích dní. Získame tak denné zmeny. Scenár zvolili nasledovný:

- Medziročná zmena kurzov USD, CHF, JPY, GBP voči EUR je rovná -7% (čo predstavuje dennú zmenu $-0,44\%$)
- Medziročná zmena ostatných kurzov voči EUR je rovná 7% (čo predstavuje dennú zmenu $0,44\%$)

Takýto scenár však vedie k dennému zisku $0,010\%$ pre podielové fondy a $0,009\%$ pre DDS fondy (nás zaujímajú straty). Je to z toho dôvodu, že v spomínanej analýze bol scenár zasadený do kontextu makro stresového testovania, kde sa v stresových scenároch predpokladalo oslabenie rastu v eurozóne resp. oslabenie eura. Netestoval sa teda len dopad zmeny výmenného kurzu na portfólio týchto dvoch fondov. My teda scenár z_l odvodíme tak, že scenár použitý v analýze NBS iba prenásobíme číslom -1 . Takto odvodený scenár vedie k strate. Scenár z_l je nasledovný:

- Medziročná zmena kurzov USD, CHF, JPY, GBP voči EUR je rovná 7% (čo predstavuje dennú zmenu $0,44\%$)
- Medziročná zmena ostatných kurzov voči EUR je rovná -7% (čo predstavuje dennú zmenu $-0,44\%$)

V Tabuľke 5 môžeme sledovať výsledok metódy pre podielové fondy a v Tabuľke 6 pre fondy DDS.

V obidvoch tabuľkách je možné pozorovať, že sa potvrdilo to, že scenáre z_L^* prinášajú väčšiu stratu a že scenáre z_P^* nastávajú s rádovo väčšou pravdepodobnosťou ako vopred určený kritický scenár z_l . Na tomto príklade sme ukázali, že je možné touto metódou rozšíriť spomínanú analýzu slovenského finančného sektora. Scenár v analýze NBS bol však zasadený do širšieho kontextu, zatiaľ čo pri hľadanom scenári pomocou

Tabuľka 5: Výsledok RST nami navrhnutou metódou pre **podielové fondy**, kde z_l je vopred určený kritický scenár, z_L^* je scenár vedúci k najväčšej strate s rovnakou pravdepodobnosťou a z_P^* je scenár s najväčšou pravdepodobnosťou presahujúci kritickú stratu.

mena	z_l	z_L^*	z_P^*
USD	0,44%	0,74%	0,37%
CZK	-0,44%	0,09%	-0,07%
PLN	-0,44%	0,17%	-0,18%
GBP	0,44%	0,39%	0,21%
HUF	-0,44%	-0,05%	-0,34%
CHF	0,44%	0,15%	0,17%
JPY	0,44%	0,59%	0,30%
RON	-0,44%	0,11%	-0,06%
TRY	-0,44%	0,71%	0,27%
pravdepodobnosť	0,020%	0,021%	0,170%
strata	0,010%	0,027%	0,010%

RST už tento kontext nezohľadňujeme. Z toho dôvodu sme museli pristúpiť k miernej zmene kritického scenára. Na uvedenej štúdii môžeme pozorovať nevýhodu reverzného stresového testovania, ktorou je ťažšia interpretovateľnosť nájdených scenárov.

Tabuľka 6: Výsledok RST nami navrhnutou metódou pre **fondy DDS**, kde z_l je vopred určený kritický scenár, z_L^* je scenár vedúci k väčšej strate a z_P^* je scenár s väčšou pravdepodobnosťou.

mena	z_l	z_L^*	z_P^*
USD	0,44%	0,80%	0,31%
CZK	-0,44%	-0,29%	-0,14%
PLN	-0,44%	-0,21%	-0,16%
GBP	0,44%	0,39%	0,05%
HUF	-0,44%	-0,13%	-0,11%
CHF	0,44%	0,40%	0,13%
JPY	0,44%	0,75%	0,21%
RON	-0,44%	0,12%	0,05%
TRY	-0,44%	0,59%	0,29%
pravdepodobnosť	0,019%	0,020%	0,210%
strata	0,009%	0,025%	0,009%

Záver

Cieľom tejto bakalárskej práce bolo štúdium možných metód využiteľných v rámci reverzného stresového testovania a ich implementácia. Cieľ práce sa nám podarilo naplniť. Blížšie sme sa zaoberali jednou metódou odvodenou autormi práce [8], ktorú sme tu uviedli a následne aj na simulovaných údajoch ilustrovali. Hlavnou myšlienkou uvedenej metódy bolo aplikovanie metódy empirickej vierohodnosti na odhad intervalu spoľahlivosti, ktorého prenásobením odvodeným multiplikátorom sme získali interval spoľahlivosti pre hľadaný najpravdepodobnejší scenár. Táto metóda však predpokladá stacionaritu rozdelení analyzovaných dát.

Následne, sme navrhli vlastnú metódu využiteľnú v reverznom stresovom testovaní, ktorá upúšťa od predpokladu stacionarity rozdelení. Uviedli sme základné teoretické poznatky kopúl, čo sú funkcie popisujúce vzťah medzi marginálnymi rozdeleniami. Zamerali sme sa na dve triedy kopúl: Eliptické a Archimedovské triedy. Tieto triedy kopúl sme podrobnejšie popísali z teoretického hľadiska a taktiež sme ilustrovali ich distribučnú funkciu a hustotu na obrázkoch. Z daných ilustrácií bola pozorovateľná jedna z vlastností kopúl a to pridelovanie vyšších pravdepodobností kombináciám extrémnych scenárov. Táto vlastnosť je vhodná pre reverzné stresové testovanie, ktoré analyzuje práve extrémne správanie sa trhových faktorov. V časti 3.2 sme aplikovali myšlienku našej metódy na portfólio akcií Microsoft a Accenture a na tomto konkrétnom prípade sme ilustrovali nami navrhnutú metódu. K vopred vybranému kritickému scenáru sme našli také dva scenáre, ktoré buď viedli k väčšej strate alebo mohli nastať s väčšou pravdepodobnosťou. Výsledok sme ilustrovali v Tabuľke 2.

Následne sme uviedli prípadovú štúdiu, kde sme nami odvodenú metódu aplikovali v kontexte Analýzy slovenského finančného sektora, ktorú zverejňuje Národná banka Slovenska. Zamerali sme sa na devízové pozície podielových fondov a fondov DDS, kde sme našli scenáre realizovateľné s väčšou pravdepodobnosťou a vedúce k väčšej strate, ako zvolený kritický scenár. Ukázali sme teda, že použitím reverzného stresového testovania by sa mohla táto analýza rozšíriť, keďže NBS ju vykonáva na pravidelnej báze. Nevýhodou je však ťažšia interpretovateľnosť nájdených scenárov ako v prípade stresových scenárov v rámci stresového testovania NBS.

V prípade záujmu o túto problematiku by sa dala práca rozšíriť o aplikáciu na iný

druh rizika, ako je trhové riziko, ktoré sme analyzovali my. Taktiež zaujímavý smer pokračovania tejto práce je odstránenie predpokladu linearity funkcie straty, prípadne rozšírenie prípadovej štúdie na širší kontext makro stresového testovania ako sme použili my.

Zoznam použitej literatúry

- [1] Abdymomunov, A., Blei, S. and Ergashev, B.: *Worst-case scenarios as a stress testing tool for risk models*, working paper series, Federal Reserve Bank of Richmond, June 2011, dostupné na internete (17.4.2013):
http://papers.ssrn.com/sol3/papers.cfm?abstract_id=1867365
- [2] *Analýza slovenského finančného sektora za rok 2009*, Národná banka Slovenska, Bratislava, 2010, dostupné na internete (24.5.2013):
http://www.nbs.sk/_img/Documents/_Dohlad/ORM/Analyzy/2009-2.pdf
- [3] Borio, C., Drehmann, M. and Tsatsaronis, K.: *Stress-Testing Macro Stress Testing: Does it Live up to Expectations?*, BIS Working Paper 369, Bank for International Settlements, Basel, Switzerland, 2012, dostupné na internete (4.12.2012):
<http://www.bis.org/publ/work369.htm>
- [4] Breuer, T. and Csiszár, I.: *Stress Tests: From Arts to Science*, working paper series, Hungarian Academy of Sciences (HAS) - Alfréd Rényi Institute of Mathematics, September 2010, dostupné na internete (17.4.2013):
http://papers.ssrn.com/sol3/papers.cfm?abstract_id=1328022
- [5] Breuer, T. et al.: *A systematic approach to multi-period stress testing of portfolio credit risk*, working paper series, Bank of Spain, June 2010, dostupné na internete (17.4.2013):
http://papers.ssrn.com/sol3/papers.cfm?abstract_id=1626759
- [6] Financial Services Authority: *Stress and scenario testing*, Consultation paper 8/24, December 2008, dostupné na internete (26.5.2013):
http://www.fsa.gov.uk/pubs/cp/cp08_24.pdf
- [7] Galiani, S.: *Copula Functions and their Application in Pricing and Risk Managing Multiname Credit Derivative Products*, woking paper, Department of Mathematics, King's College, London, September 2003
- [8] Glasserman, P., Kang, Ch. and Kang, W.: *Stress Scenario Selection by Empirical Likelihood*, working paper series, Columbia Business School - Decision Risk and

Operations, 2012, dostupné na internete (4.12.2012):

http://papers.ssrn.com/sol3/papers.cfm?abstract_id=2101465

- [9] Grundke, P.: *Reverse stress tests with bottom-up approaches*, The Journal of Risk Model Validation, Volume5/Number1, 2011, 71-90
- [10] Nelsen, R.: *An introduction to Copulas*, Springer, New York, 1999
- [11] Owen, A.B.: *Empirical Likelihood*, Chapman&Hall/CRC Press, Boca, Raton, London, New York, Washington D.C., 2001
- [12] Thun, C., Licari, J.M., Zandi, M.: *Reverse Stress Testing: Challenges&Benefits*, prezentácia, Moody's Analytics, November 2010, dostupné na internete (29.5.2013):
<http://www.moodyanalytics.com/~media/Insight/Regulatory/Stress-Testing/2011/10-23-11-Reverse-Stress-Testing.ashx>