

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY



POSTUPNOSTI A RADY FUNKCIÍ, PRÍKLADY

BAKALÁRSKA PRÁCA

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY

POSTUPNOSTI A RADY FUNKCIÍ, PŘÍKLADY

BAKALÁRSKA PRÁCA

Študijný program: Ekonomická a finančná matematika
Študijný odbor: 1114 Aplikovaná matematika
Školiace pracovisko: Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky
Vedúci práce: RNDr. Ľubica Kossaczká, CSc.



Univerzita Komenského v Bratislave
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

ZADANIE ZÁVEREČNEJ PRÁCE

Meno a priezvisko študenta: Lukáš Kurinec
Študijný program: ekonomická a finančná matematika (Jednoodborové štúdium, bakalársky I. st., denná forma)
Študijný odbor: 9.1.9. aplikovaná matematika
Typ záverečnej práce: bakalárska
Jazyk záverečnej práce: slovenský

Názov: Postupnosti a rady funkcií, príklady

Cieľ: Cieľom je prehĺbenie poznatkov študenta z rovnomernej konverencie postupností a radov, Arzevalova lema, dôkaz Stone-Weierstrassovej lemy. Tieto poznatky uplatniť pri riešení príkladov z knihy Walter Rudin: Principles of Mathematical Analysis.

Vedúci: RNDr. Ľubica Kossaczká, CSc.

Katedra: FMFI.KAMŠ - Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky

Vedúci katedry: prof. RNDr. Daniel Ševčovič, CSc.

Dátum zadania: 10.10.2012

Dátum schválenia: 03.11.2012

doc. RNDr. Margaréta Halická, CSc.
garant študijného programu

.....
študent

.....
vedúci práce

PodĎakovanie Chcem sa poĎakovať svojej vedúcej bakalárskej práce RNDr. Ľubici Kossaczkej, CSc, za ochotu, pomoc, cenné rady a konzultácie, ktoré mi pomohli pri písaní tejto práce. Osobitné poĎakovanie patrí mojej rodine a priateľom za ich trpezlivosť, podporu a pochopenie.

Abstrakt v štátnom jazyku

KURINEC, Lukáš: Postupnosti a rady funkcií, príklady [Bakalárska práca], Univerzita Komenského v Bratislave, Fakulta matematiky, fyziky a informatiky, Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky; školiteľ: RNDr. Ľubica Kossaczká, CSc., Bratislava, 2013, 46 s.

V našej práci sa zaoberáme rovnomernou konvergenciou radov a postupnosti funkcií v reálnom priestore. Analyzujeme prípady, kedy nesplnenie predpokladov môže viesť k zlým záverom a keď splnenie predpokladov umožňuje prechod medzi operáciami pri rovnomernej konvergencii. Predvedieme si základné vety o zámene poradia limity s deriváciou, integráciou alebo limitou. Rozoberieme si vplyv kompaktnosti množiny na rovnomernú konvergenciu. Predstavíme si triedu rovnomocne spojitých funkcií. Naším cieľom je prehĺbenie poznatkov v oblasti rovnomernej konvergenzie, ktorých hlavná časť prichádza pri Stone - Weierstrassovej vete a Ascoli - Arzevalovej leme o rovnomernej konvergencii pre triedu rovnomocne spojitých funkcií. Čitateľovi to poskytuje iný náhľad k tejto problematike. Aplikovanie všetkých poznatkov využijeme na samostatné riešenie problémov venovaných tejto oblasti.

Kľúčové slová: rovnomerná konvergencia, Weierstrass, Cauchy, rovnomocne spojité

Abstract

KURINEC, Lukáš: Sequences and series of functions, examples [Bachelor Thesis],
Comenius University in Bratislava, Faculty of Mathematics, Physics and Informatics,
Department of Applied Mathematics and Statistics;
Supervisor: RNDr. Ľubica Kossaczká, CSc., Bratislava, 2013, 46 p.

In our work we deal with uniform convergence of sequences and series of functions in real space. We analyze the cases, where failure of assumptions may lead to wrong conclusions and when compliance of assumptions enable interchange between operations at a uniform convergence. We present a basic sentences of confusion of order of limits with the derivation, integration or limits. We discuss the impact on the compact set to uniform convergence. We introduce a class of equicontinuous functions. Our aim is the advancement of knowledge in the field of uniform convergence, whose major part comes with Stone - Weierstrass theorem and Arzelà - Ascoli lemma of uniform convergence for a class of equicontinuous functions. It gives to the reader a different view on this issue. Application of all the knowledge we use to individual troubleshooting devoted to this area.

Keywords: Uniform convergence, Weierstrass, Cauchy, equicontinuous

Obsah

Úvod	8
1 Rovnomerná konvergenca	9
1.1 Základné pojmy	9
1.2 Príklady bez splnených predpokladov	10
1.3 Kritéria rovnomernej konvergenzie	13
2 Zámena poradia matematických operácií	16
2.1 Limitovanie	16
2.2 Integrovaťnosť	18
2.3 Diferencovateľnosť	21
3 Rovnomocná spojitosť	25
3.1 Základné pojmy	25
3.2 Ascoli - Arzevalova lema	27
3.3 Stone - Weierstrassova veta	30
4 Riešenie príkladov	32
Záver	45
Zoznam použitej literatúry	46

Úvod

Cieľom tejto práce je prehĺbenie poznatkov v oblasti rovnomernej konvergenzie. Práca je zameraná na teóriu, príklady a aplikácie spracovaných z knihy [5, kapitola 7].

Na začiatku si vysvetlíme základné pojmy, ktoré budú nevyhnutné počas celej práce. Ukážeme si, ako je to s predpokladmi rovnomernej konvergenzie v závislosti od prechodu medzi limitnými operáciami pri sumovaní, diferencovateľnosti, spojitosti alebo integrovateľnosti. Predvedieme si príklady, na ktorých prechod zlyhá z dôvodu nedodržania stanovených predpokladov a tak isto príklady, kedy zámena poradia bude môcť byť zrealizovateľná. Budeme sa zaoberať aj prípadom kompaktnosti množiny.

Predstavíme triedu rovnomocne spojitých funkcií. Ďalšími dôležitými aspektmi tejto témy bude Stone - Weierstrassova veta a Ascoli - Arzevalova lema, ktoré pojednávajú aproximáciu spojitých funkcií na kompaktnej množine s predpokladom rovnomernej konvergenzie. Prvý uvedený aspekt pracuje navyše s postupnosťou polynómov, pomocou ktorých rovnomerne aproximujeme spojitú funkciu. Druhý uvedený aspekt poskytuje nutné a postačujúce podmienky, či každá postupnosť spojitých funkcií za určitých podmienok konverguje rovnomerne.

Posledná kapitola pojednáva o aplikovaní poznatkov na riešenie príkladov na konci kapitoly. Predpokladá sa však znalosť základov matematickej analýzy, ktoré sú využívané v celej práci.

1 Rovnomerná konvergenca

V tejto kapitole si uvedieme základné pojmy o rovnomernej konvergencii. Na ukážku si predvedieme, ako sa nesprávne riešia príklady prechodu medzi matematickými operáciami pri nesplnených predpokladoch. Dôležité budú vety o Cauchyho konvergencii a Weierstrassovo majorantné kritérium.

1.1 Základné pojmy

Definícia 1. (podľa [5])

Nech $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ je postupnosť funkcií na množine M a konverguje pre všetky $x \in M$. Potom pre funkciu $f(x)$ platí

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \quad (\forall x \in M),$$

kde $f(x)$ nazývame *limitou* alebo *limitnou funkciou postupnosti* $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$, čo znamená, že $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje na množine M . Presnejšia a viac zaužívaná terminológia hovorí, že $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ *bodovo konverguje* k funkcií $f(x)$ na množine M . Zapísané pomocou kvantifikátorov dostávame

$$\forall x \in M : \forall \epsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n > n_0 : |f_n(x) - f(x)| < \epsilon.$$

Definícia 2. (podľa [2])

Nech $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ je postupnosť funkcií na množine M . Symbolom $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ označujeme *rad funkcií* alebo aj *funkcionálny rad*. Funkciu f_s nazývame *s-ty člen* a postupnosť $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ nazývame *postupnosť čiastočných súčtov* alebo *s-ty čiastočný súčet* radu $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$. Ak postupnosť čiastočných súčtov $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje bodovo k funkcií $f(x)$ na množine M , tak hovoríme, že rad funkcií $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ *konverguje bodovo* k funkcií $f(x)$. Označujeme $s_t \rightarrow f$, respektíve $\sum_{n=1}^{\infty} f_n \rightarrow f$.

Tu však nastáva menší problém. Ktoré sú hlavné vlastnosti funkcií, ak pracujeme s limitnými operáciami? Vieme povedať, že ak sú postupnosti $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ spojitý, diferencovateľné alebo integrovateľné, či to platí aj pre limitu postupnosti $f(x)$? Budeme sa

zaoberať vzťahmi medzi f'_n a f' , integrálmi z f_n a f a aj spojitostou medzi f_n a f . Pripomenieme si definíciu spojitosti.

Definícia 3. (podľa [2])

Funkciu $f(x)$ na množine M nazývame spojitou, ak

$$\forall \epsilon \exists \delta \forall x \in \mathcal{D}(f), |x - a| < \delta : |f(x) - f(a)| < \epsilon.$$

Najčastejšie sa používa skrátenejší zápis $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$. V prípade limity postupnosti spojitých funkcií platí rovnosť:

$$\lim_{x \rightarrow a} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{x \rightarrow a} f_n(x),$$

kde poradie vykonávania limít je nepodstatné. Teraz si ukážeme pár príkladov, kde sú vlastností funkcií dôležité a pri ich zanedbávaní vznikajú chyby.

1.2 Príklady bez splnených predpokladov

Príklad 1.

Takzvaná *dvojitá postupnosť* nám bude slúžiť ako príklad, kedy poradie limitovania nemožno brať ako nepodstatné. Nech pre $m = 1, 2, 3, \dots, n = 1, 2, 3, \dots$ máme postupnosť

$$f_{m,n} = \frac{m^2 + 2mn + n}{2m^2 + n^2}.$$

Ako prvú zistíme limitu pre zafixované m pri posielajúcom n -ku do nekonečna. Máme teda

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_{m,n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{m^2 + 2mn + n}{2m^2 + n^2} = 0$$

z dôvodu veľkosti mocniny v menovateli pri premennej n , ktorý prebýja všetky čitateľové mocniny pri n -ku. Tým pádom celkovo platí, že

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} s_{m,n} = \lim_{m \rightarrow \infty} 0 = 0.$$

Ak teraz zafixujeme n a pošleme m -ko do nekonečna, dostávame číselne iný výsledok. Ľahko si ukážeme prvú limitu.

$$\lim_{m \rightarrow \infty} s_{m,n} = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{m^2 + 2mn + n}{2m^2 + n^2} = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{2n}{m} + \frac{n}{m^2}}{2 + \frac{n^2}{m^2}} = \frac{1}{2}.$$

Teraz už len stačí spraviť limitu pre premennú n :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{m \rightarrow \infty} s_{m,n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} = \frac{1}{2},$$

kde vidíme, že

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{m \rightarrow \infty} s_{m,n} \neq \lim_{m \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} s_{m,n} \\ \frac{1}{2} \neq 0.$$

Z toho nám vyplýva, že zámena poradia limitovania nie je možná.

Ďalší príklad ukáže, že rad spojitých funkcií dá nespojitú sumu.

Príklad 2. (podľa [5])

Nech

$$f_n(x) = \frac{x^2}{(1+x^2)^n} \quad (x \in \mathbb{R}, n = 0, 1, 2, \dots)$$

a uvažujme

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^n} \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Teraz sa nám naskytujú dve možnosti. Prvá, ak položíme $x = 0$, tak z toho vyplýva, že $f_n(0) = 0$. Druhá možnosť, $\forall x \neq 0$, nám udáva geometrický rad s kvocientom $\frac{1}{1+x^2}$. Dorátaním toho radu získavame sumu rovnú $1+x^2$ pomocou vzorca pre určovanie sumy geometrického radu s kvocientom q , ktorý je

$$\sum_{n=0}^{\infty} g_n(x) = \frac{1}{1-q},$$

čím dostávame

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) = x^2 \frac{1}{1 - \frac{1}{1+x^2}} = 1 + x^2$$

a naozaj suma geometrického radu je $1+x^2$. Teda

$$f(x) = \begin{cases} 0 & (\text{pre } x = 0), \\ 1 + x^2 & (\text{pre } x \neq 0), \end{cases}$$

kde vidíme, že $f(x)$ je nespojitá v okolí bodu 0.

Nasledujúce dva príklady budú venované nesprávnej zámene poradia limity a derivácie a zámene poradia limity a integrácie.

Príklad 3. (podľa [5])

Položíme

$$f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{\sqrt{n}} \quad (\forall x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}).$$

Označme $f(x)$ bodovou limitou a jej veľkosť je

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin(nx)}{\sqrt{n}} = \frac{1}{\infty} = 0,$$

kde sme použili ohraničenosť funkcie $\sin(nx) \leq 1$. Je samozrejmé, že $f'(x) = 0$. Ostáva nám už len spočítať bodovú limitu pre $f'_n(x)$. Ako prvé zistíme, čomu sa rovná $f'_n(x)$ podľa premennej x .

$$f'_n(x) = \left(\frac{\sin(nx)}{\sqrt{n}} \right)' = n \left(\frac{\cos(nx)}{\sqrt{n}} \right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty,$$

kde vidíme, že neplatí zámena poradia limity a derivácie.

Príklad 4. (podľa [5])

Zoberme postupnosť

$$f_n(x) = n^2 x(1 - x^2)^n \quad (0 \leq x \leq 1, n \in \mathbb{N}).$$

Bodovú limitu získame na základe definície a platí

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 x(1 - x^2)^n = 0,$$

kde uvedená rovnosť platí z dôvodu rýchlejšieho rastu, respektíve klesania exponenciálnej funkcie, čo v našom prípade je funkcia $(1 - x^2)^n$, ktorá z dôvodu, že $0 \leq x \leq 1$ klesá do 0 oveľa rýchlejšie, ako rastie n^2 do nekonečna. Toto tvrdenie dokazuje veta, ktorej znenie je

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^\alpha}{(1 + p)^n} = 0,$$

ktorá popisuje ten istý logický postup.

Teraz vyrátame integrál na $< 0, 1 >$ pre uvedenú postupnosť. Dostávame

$$\int_0^1 n^2 x(1 - x^2)^n dx = \left[-\frac{n^2(1 - x^2)^{n+1}}{2(n+1)} \right]_0^1 = \frac{n^2}{2(n+1)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty.$$

Zároveň ľahko vidíme, že

$$\int_0^1 \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \int_0^1 f(x) = 0.$$

Na základe získaných výpočtov dostávame, že rovnosť

$$\int_0^1 \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x)$$

nie je platná, keďže $0 \neq \infty$ a celkovo vidíme, že limita integrálu nie je rovná integrálu z limity a teda nie je možná zámena poradia limitovania a integrovania.

Tieto príklady nám ukázali, že zámena poradia limitných operácií je veľmi dôležitá vlastnosť, ktorá platí iba pri určitých vlastnostiach, preto si definujeme nový, silnejší typ konverencie, ako je bodová konverencia.

Definícia 4. (podľa [2])

Nech $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ je postupnosť funkcií na množine M . Hovoríme, že postupnosť *rovnomerne konverguje* na množine M k *bodovej limite* f ak:

$$\forall \epsilon \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n > n_0 \forall x \in M : |f_n(x) - f(x)| < \epsilon.$$

Poznámka 1. (podľa [4])

Tak isto platí, že $f_n(x)$ rovnomerne konverguje na M k f platí ak

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in M} |f_n(x) - f(x)| = 0$$

Rovnomernú konverenciu označujeme ako $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$.

Hovoríme, že rad $\sum f_n(x)$ konverguje rovnomerne na množine M k funkcií $f(x)$, ak postupnosť $\{s_n\}$ čiastočných súčtov definovaných ako

$$s_n(x) = \sum_{k=1}^n f_k(x)$$

konverguje rovnomerne na množine M .

1.3 Kritéria rovnomernej konverencie

Veta 1. (Cauchyho kritérium rovnomernej konverencie) (podľa [5])

Nech $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ je postupnosť funkcií definovaných na množine M . Potom $f_n(x)$ *konverguje rovnomerne* na množine M práve vtedy, ak

$$\forall \epsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall m \geq n_0 \forall n \geq n_0 : |f_n(x) - f_m(x)| < \epsilon.$$

Dôkaz: Musíme to ukázať oboma smermi.

smer $\Rightarrow$: Nech $f_n(x)$ konverguje rovnomerne na množine M a $f(x)$ je bodovou limitou, teda $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$. Tým pádom z definície rovnomernej konverencie existuje $n_0 \in \mathbb{N}$, že $\forall n \geq n_0 \forall x \in M$ platí:

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Na základe uvedenej nerovnosti platí:

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f_m(x)| &= |f_n(x) - f(x) - f_m(x) + f(x)| \leq \\ &\leq |f_n(x) - f(x)| + |f(x) - f_m(x)| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon. \end{aligned}$$

Prvý smer sme tým pádom dokázali.

smer $\Leftarrow$: Nech platí Cauchyho kritérium rovnomernej konverencie. Na základe vety 3.11 z [6], ktorá hovorí, že každá Cauchyho postupnosť konverguje, vieme, že $f_n(x)$ konverguje k $f(x)$ na množine M . Ostáva nám ukázať, že konverguje rovnomerne na množine M k funkcii $f(x)$. Nech $\epsilon > 0$. Zvolíme n_0 tak, že platí

$$\forall m, n \geq n_0 : |f_m(x) - f_n(x)| < \epsilon$$

Teraz postupne fixujeme každú premennú, zatiaľ čo zvyšnú pošleme limitne do nekonečna. Najprv fixneme m a n pošleme limitne do nekonečna,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |f_m(x) - f_n(x)| < \epsilon \Rightarrow |f_m(x) - f(x)| < \epsilon$$

Keďže platí, že každá Cauchyho postupnosť konverguje, platí, že $f_n(x) \rightarrow f(x)$ a dostávame

$$\forall \epsilon \exists n_0 \forall m > n_0 \forall x \in M : |f_m(x) - f(x)| < \epsilon,$$

a teda platí rovnomerná konverencia a dôkaz je hotový. ■

Ukážeme si príklad na rovnomernú konvergenciu.

Príklad 5.

Nech

$$f_n(x) = \frac{n+1+x}{n+x} \quad \forall x \geq 0.$$

Bodovú limitu označíme $f(x)$ a jej veľkosť získame ako

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1+x}{n+x} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{n} + \frac{x}{n}}{1 + \frac{x}{n}} = 1.$$

Už nám ostáva zistiť veľkosť suprema na danej množine. Platí

$$\sup_{x \geq 0} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x \geq 0} \left| \frac{n+x+1}{n+x} - 1 \right| = \sup_{x \geq 0} \left| \frac{1}{n+x} \right| = \frac{1}{n}$$

a ľahko sa môžeme presvedčiť o tom, že limita poslednej postupnosti je 0 a na základe platnosti definície dostávame rovnomernú konvergenciu.

Veta 2. (Weierstrassovo majorantné kritérium) (podľa [2])

Nech $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ je postupnosť funkcií definovaných na množine M . Predpokladajme, že existuje postupnosť nezáporných čísel $\{K_n\}_{n=1}^{\infty}$ taká, že platí

$$|f_n(x)| \leq K_n \quad (x \in M).$$

Potom platí, že $\sum f_n$ konverguje rovnomerne ak $\sum K_n$ konverguje.

Dôkaz: Z číselného majorantného kritéria nám jednoducho vyplýva, že $\forall x \in M$ číselný rad $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ konverguje a označíme si $\sum_{n=1}^{\infty} f_n = f(x) \quad \forall x \in M$. Označíme čiastočný

súčet $b_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} M_k$ a s_n ako čiastočný súčet f_n . Pre čiastočný súčet s_n platí

$$|s_n(x) - f(x)| = \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x) \right| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |f_k(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} M_k(x) = b_n \quad \forall x \in M.$$

Preto platí aj $\sup_{x \in M} |s_n(x) - f(x)| \leq b_n$. Na základe konverencie radu $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ platí

$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$. Dostávame, že platí aj $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in M} |s_n(x) - f(x)| = 0$, čím je potvrdená rovnomerná konvergencia. ■

2 Záměna poradia matematických operací

V tejto kapitole si ukážeme správne používanie záměny matematických operací na základe definovania si predpokladov, ktoré nám záměnu povolia. Záměny sa budú týkať limitovania, integrovateľnosti a tak isto aj diferencovateľnosti.

2.1 Limitovanie

Veta 3. (záměna poradia limitovania) (podľa [2])

Nech $f_n(x)$ konverguje rovnomerne na množine M . Nech a je hromadný bod množiny M . Nech pre všetky $n \in \mathbb{N}$ existuje konečná $\lim_{x \rightarrow a} f_n(x) = A_n$. Potom existuje konečná $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n$ a platí $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$. Inak povedané, je dovolená záměna poradia limit:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{x \rightarrow a} f_n(x) = \lim_{x \rightarrow a} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x).$$

Dôkaz: Najprv ukážeme, že A_n je Cauchyovská.

Nech $\epsilon > 0$. Potom existuje n_0 také, že $\forall n > n_0$ platí nasledujúca nerovnosť

$$\sup_{x \in M} |f_n(x) - f(x)| < \frac{\epsilon}{4},$$

ktorá vyplýva z rovnomernej konverencie postupnosti $f_n(x)$. Ďalej nech

$c, d > n_0$. Pre $\frac{\epsilon}{4}$ existuje okolie bodu a , $\mathcal{O}(a)$, kde $\forall x \in \mathcal{O}(a) \cap M$ platí, že

$|f_c(x) - A_c| < \frac{\epsilon}{4}$. Tiež pre $\frac{\epsilon}{4}$ existuje $\mathcal{U}(a)$ také, že pre $\forall x \in \mathcal{U}(a) \cap M$ taktiež platí, že

$|f_d(x) - A_d| < \frac{\epsilon}{4}$.

Zvolíme bod $t \in (\mathcal{O}(a) \cap \mathcal{U}(a) \cap M)$. Teraz môžeme zapísať sériu odhadov ako

$$\begin{aligned} |A_c - A_d| &= |A_c - f_c(t) + f_c(t) - f(t) + f(t) - f_d(t) + f_d(t) - A_d| \leq \\ &\leq |A_c - f_c(t)| + |f_c(t) - f(t)| + |f(t) - f_d(t)| + |f_d(t) - A_d| \\ &< \frac{\epsilon}{4} + \frac{\epsilon}{4} + \frac{\epsilon}{4} + \frac{\epsilon}{4} = \epsilon. \end{aligned}$$

Postupnosť A_n je teda Cauchyovská a vďaka tejto vlastnosti má konečnú $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = A$.

Teraz už nám stačí ukázať, že $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$, teda chceme, aby platilo

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in M, 0 < |x - a| < \delta : |f(x) - A| < \epsilon.$$

Upravíme si výraz, ktorý chceme dokázať na sériu odhadov ako

$$\begin{aligned} |f(x) - A| &= |f(x) - f_n(x) + f_n(x) - A_n + A_n - A| \\ &\leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - A_n| + |A_n - A| < \epsilon. \end{aligned}$$

Prvý výraz $f(x) - f_n(x) < \frac{\epsilon}{3}$ platí z dôvodu rovnomernej konverencie postupnosti $f_n(x)$. Tak isto aj výraz $|A_n - A| < \frac{\epsilon}{3}$ platí na základe rovnomernej konverencie postupnosti. Teraz pre $\frac{\epsilon}{3} > 0$ existuje také $n_1 \in \mathbb{N}$, že $\forall n > n_1 : \sup_{x \in M} |f_n(x) - f(x)| < \frac{\epsilon}{3}$. Ďalej pre $\frac{\epsilon}{3} > 0$ existuje také $n_2 \in \mathbb{N}$, že $\forall n > n_2 : \sup_{x \in M} |A_n - A| < \frac{\epsilon}{3}$. Teraz zvolíme $T > \max\{n_1, n_2\}$. Pre $\frac{\epsilon}{3} > 0$ platí $\lim_{x \rightarrow a} f_T(x) = A_T$, teda existuje $\mathcal{O}(a)$, kde $\forall x \in \mathcal{O}(a) \cap M$ platí, že $|f_T(x) - A_T| < \frac{\epsilon}{3}$. Potom $\forall x \in M \cap \mathcal{O}(a)$ platí

$$|f(x) - A| \leq |f(x) - f_T(x)| + |f_T(x) - A_T| + |A_T - A| < \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon,$$

čím je dôkaz skončený. ■

Dôsledok (zachovanie spojitosti) (podľa [2])

Ak $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ je postupnosť spojitých funkcií na množine M a $f_n \rightarrow f$, tak potom aj bodová limita $f(x)$ je spojitá na množine M .

Veta 4. (rastúca rovnomerná konverencia) (podľa [5])

Nech množina M je kompaktná a $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ je postupnosť spojitých funkcií, ktorá konverguje k spojitaj $f(x)$ na množine M . Ak $f_n(x) \geq f_{n+1}(x)$ pre všetky $n \in \mathbb{N}$ a pre všetky $x \in M$, potom postupnosť f_n konverguje rovnomerne k f na množine M .

Dôkaz: Zoberme postupnosť $g_n(x) = f_n(x) - f(x)$. Je zrejmé, že $g_{n+1}(x) \leq g_n(x)$, pričom $g_n(x)$ je spojitá a bodovo konverguje k 0. Musíme ukázať, že $g_n \rightarrow 0$.

Nech $\epsilon > 0$. Uvažujme teraz len otvorené množiny, kvôli spojitosti a monotónnosti $g_n(x)$, označme ich $P_n = \{x \in M : g_n(x) < \epsilon\}$. Na základe platnosti $g_n(x) \geq g_{n+1}(x)$ nám platí aj, že $P_n \subset P_{n+1}$. Nech $x \in M$, potom existuje n také, že $g_n(x) < \epsilon$, tým pádom $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} P_n = M$. Z dôvodu kompaktnosti množiny M potom existuje konečná množina

$K = \{1, 2, \dots, m\}$ taká, že $\bigcup_{k=1}^m P_{n_k} = M$. Na základe $P_n \subset P_{n+1}$ pre najväčší element z množiny K , označme ho Y platí, že $P_Y = M$. Teda pre $\forall n > Y : g_n(x) < \epsilon$, čím je dokázaná rovnomerná konverencia. ■

Príklad 6. (ukážka vety 6)

Nech $f_n(x) = \frac{1}{1+nx}$, $x > 0$. Postupnosť $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje rovnomerne na intervale $(0, \infty)$, kde $0 < a < \infty$ je pevne zvolené a nekonverguje rovnomerne na intervale $(0, a)$. Riešenie je uvedené v [1, str 287].

2.2 Integrovaťnosť

Veta 5. (zámena poradia limity a integrálu) (podľa [2])

Nech postupnosť f_n konverguje rovnomerne k f na intervale $< a, b >$ a funkcie f_n sú Riemannovsky integrovateľné na $< a, b >$. Potom aj funkcia f je Riemannovsky integrovateľná na $< a, b >$ a platí

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x)dx,$$

teda platí limitný prechod

$$\int_a^b \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x)dx.$$

Dôkaz: Označme $A_n = \int_a^b f_n(x)$. Ukážeme najprv Cauchyovskosť A_n pre všetky $n \in \mathbb{N}$. Nech $\epsilon > 0$. Chceme ukázať, že

$$\forall \epsilon > 0 \exists n_0 \forall l, k > n_0 : |A_l - A_k| < \epsilon.$$

Označme si dĺžku intervalu ako $w = b - a$. Pre $\frac{\epsilon}{4w} > 0$ existuje také $n_0 \in \mathbb{N}$, že z rovnomernej konvergenzie

$$\forall n > n_0 : \sup_{x \in M} |f_n(x) - f(x)| < \frac{\epsilon}{4w}.$$

Potom pre každé delenie $\mathcal{D}$ intervalu $< a, b >$ a pre ľubovoľný výber bodov V , $\forall n > n_0$ v ňom platí

$$|S(f_n, \mathcal{D}, V) - S(f, \mathcal{D}, V)| \leq \frac{\epsilon}{4},$$

kde S označuje Cauchyho (integrálny) súčet funkcie prislúchajúci k deleniu bodov.

Uvedená nerovnosť platí, lebo pri dôkladnom rozpísaní dostávame

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{j=1}^n \left(f_n(p_j)(x_j - x_{j-1}) - f(p_j)(x_j - x_{j-1}) \right) \right| \leq \\ & \sum_{j=1}^n \left| f_n(p_j) - f(p_j) \right| (x_j - x_{j-1}) \leq \sum_{j=1}^n \frac{\epsilon}{4w} (x_j - x_{j-1}) = \frac{\epsilon}{4}. \end{aligned}$$

Nech $l, k > n_0$. Pre $\frac{\epsilon}{4}$ existuje také delenie $\mathcal{D}_m$ na intervale $< a, b >$, že pre všetky $\mathcal{D} \prec \mathcal{D}_m$ a pre ľubovoľný výber bodov V v delení $\mathcal{D}$ platí

$$|S(f_m, \mathcal{D}, V) - A_m| < \frac{\epsilon}{4}.$$

Pre k to platí obdobne, teda pre $\frac{\epsilon}{4}$ existuje delenie $\mathcal{D}_k$ intervalu $\langle a, b \rangle$ také, že pre všetky $\mathcal{D} \prec \mathcal{D}_k$ a pre ľubovoľný výber bodov V v delení $\mathcal{D}$ platí

$$|S(f_k, \mathcal{D}, V) - A_k| < \frac{\epsilon}{4}.$$

Pre spoločné zjemnenie $\mathcal{D}_0 = \mathcal{D}_m \cup \mathcal{D}_k$ a ľubovoľný výber bodov P v delení $\mathcal{D}_0$ platí nerovnosť

$$\begin{aligned} |A_l - A_k| &= |A_l - S(f_m, \mathcal{D}_0, P) + S(f_m, \mathcal{D}_0, P) - S(f, \mathcal{D}_0, P) + S(f, \mathcal{D}_0, P) \\ &\quad - S(f_k, \mathcal{D}_0, P) + S(f_k, \mathcal{D}_0, P) - A_k| \leq |A_l - S(f_m, \mathcal{D}_0, P)| + \\ &\quad |S(f_m, \mathcal{D}_0, P) - S(f, \mathcal{D}_0, P)| + |S(f, \mathcal{D}_0, P) - S(f_k, \mathcal{D}_0, P)| + \\ &\quad |S(f_k, \mathcal{D}_0, P) - A_k| < \frac{\epsilon}{4} + \frac{\epsilon}{4} + \frac{\epsilon}{4} + \frac{\epsilon}{4} = \epsilon. \end{aligned}$$

Na základe Cauchyovskosti má limitu. Nech je tá limita rovná

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = J. \text{ Ukážeme, že } \int_a^b f(x) dx = J.$$

Nech $\epsilon > 0$. Pre $\frac{\epsilon}{3w}$ existuje také $n_1 \in \mathbb{N}$, že pre všetky $n > n_1$ platí

$$\sup_{x \in M} |f_n(x) - f(x)| < \frac{\epsilon}{3w}.$$

Ďalej pre $\frac{\epsilon}{3}$ existuje n_2 také, že pre všetky $n > n_2$ platí $|A_n - J| < \frac{\epsilon}{3}$. Teraz zvolíme jedno pevné prirodzené číslo $p > \max\{n_1, n_2\}$ a tým zaručíme platnosť oboch nerovností zároveň. Potom pre $\frac{\epsilon}{3}$ existuje delenie bodov $\mathcal{D}_p$ intervalu $\langle a, b \rangle$, že pre všetky delenia $\mathcal{D}$, ktoré sú zjemnením delenia $\mathcal{D}_p$, teda

$\mathcal{D} \prec \mathcal{D}_p$ a pre ľubovoľný výber bodov Z v delení $\mathcal{D}$ platí $|S(f_p, \mathcal{D}, Z) - A_p| < \frac{\epsilon}{3}$. Tým pádom pre ľubovoľné delenie $\mathcal{D} \prec \mathcal{D}_p$ a ľubovoľný výber bodov Z v delení $\mathcal{D}$ platí:

$$|S(f, \mathcal{D}, Z) - J| \leq |S(f, \mathcal{D}, Z) - S(f_p, \mathcal{D}, Z)| + |S(f_p, \mathcal{D}, Z) - A_p| + |A_p - J|,$$

kde každý člen je menší ako $\frac{\epsilon}{3}$ a dokopy dostávame požadovanú nerovnosť $|S(f, \mathcal{D}, Z) - J| < \epsilon$. ■

Dôsledok vety 5. (podľa [2])

Nech $f_n(x)$ je postupnosť Riemannovsky integrovateľných funkcií na intervale $\langle a, b \rangle$. Ak rad $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ konverguje rovnomerne na $\langle a, b \rangle$, tak aj funkcia $f(x)$ je Riemannovsky integrovateľná na $\langle a, b \rangle$ a platí

$$\left(\int_a^b f(x) dx = \right) \int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x) dx.$$

Hovoríme, že rad možno integrovať na $\langle a, b \rangle$ člen po člene a je oprávnená zámena sumy a integrálu.

Príklad 7. (ukážka použitia vety 5.) Nech $f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{\sqrt{n}}$ ($0 \leq x \leq 2\pi$). Ukážeme, že platí zámena limity a integrálu.

Najprv vyriešime rovnomernú konvergenciu radu $f_n(x)$, bez ktorej by to nebolo možné ukázať. Označme bodovú limitu ako $f(x)$. Jej hodnota bude $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin(nx)}{\sqrt{n}} = 0$. Teda následne platí

$$\sup_{0 \leq x \leq 2\pi} \left| \frac{\sin(nx)}{\sqrt{n}} \right| = \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Vidíme, že $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$ a postupnosť f_n rovnomerne konverguje. Zámena limity a integrálu je teda oprávnená a dostávame

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} \frac{\sin(nx)}{\sqrt{n}} = \int_0^{2\pi} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin(nx)}{\sqrt{n}} = \int_0^{2\pi} 0 = 0.$$

Pre overenie vypočítame postupne najprv integrál a potom limitu. Dostávame

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin(nx)}{\sqrt{n}} = \left[\frac{-\cos(nx)}{n^{\frac{3}{2}}} \right]_0^{2\pi} = 0$$

a limita už výsledok nezmení a platí zámena limity a integrálu na základe nutných podmienok.

Príklad 8. (ukážka dôsledku vety 5.)

Na základe zámeny poradia ukážeme, že $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x)$ pre všetky $x \in (-1, 1)$.

Pre všetky x z intervalu $(-1, 1)$ definujeme $f_n(s) = s^{n-1}$ pre všetky $s \in \langle -|x|, |x| \rangle$, $n \in \mathbb{N}$. Postupnosť $f_n(s)$ sme zvolili na základe derivácie funkcie vo vnútri sumy. Vyšetříme rovnomernú konvergenciu radu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ pomocou Weierstrassovho pravidla ako

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{s^n}{n} \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x|^n}{n} \leq \sum_{n=1}^{\infty} |x|^n = \frac{|x|}{1-|x|},$$

kde posledná uvedená postupnosť konverguje rovnomerne na $\langle -|x|, |x| \rangle$.

Podľa dôsledku platí

$$\int_{-|x|}^{|x|} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n} \right) dt = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-|x|}^{|x|} \frac{t^n}{n} dt.$$

Pre $x \in (-1, 1)$ platí $\sum_{n=1}^{\infty} t^{n-1} = \frac{1}{1-t}$ a to rovnomerne konverguje na $< -|x|, |x| >$ podľa Weierstrassovho kritéria uvedeného vyššie a teda môžeme použiť Dôsledok 5. Dostávame

$$\begin{aligned} \int_0^x \left(\sum_{n=1}^{\infty} t^{n-1} \right) dt &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^x t^{n-1} dt \\ \int_0^x \frac{1}{1-t} dt &= \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{t^n}{n} \right]_0^x \\ [-\ln(1-t)]_0^x &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} \\ -\ln(1-x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} \end{aligned}$$

čím sme ukázali požadovanú rovnosť.

2.3 Diferencovateľnosť

Veta 6. (zámena poradia limity a derivácie) (podľa [2])

Nech $f_n(x)$ je postupnosť funkcií a nech pre $\forall n \in \mathbb{N}$ má $f_n(x)$ prvú deriváciu na intervale $< a, b > = M$. Ak postupnosť $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje aspoň v jednom bode $x_0 \in M$ a postupnosť $\{f'_n\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje rovnomerne na M , potom $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje rovnomerne na M a platí

$$f'(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(x) \quad x \in M,$$

kde $f(x)$ je bodová limita postupnosti $f_n(x)$ a je teda oprávnená zámena poradia limity a derivovania.

Dôkaz: Nech $\epsilon > 0$. Potom existuje také $n_0 \in \mathbb{N}$, že pre všetky $l, k \geq n_0$

$$|f_l(x_0) - f_k(x_0)| < \frac{\epsilon}{2}$$

a existuje $n_1 \in \mathbb{N}$, že pre všetky $l, k \geq n_1$ a pre dĺžku intervalu $w = b - a$ platí

$$|f'_l(x) - f'_k(x)| < \frac{\epsilon}{2w} \quad (a \leq x \leq b).$$

Položme $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$. Potom pre všetky $l, m > n_0$ platí pre $g(x) = f_l(x) - f_m(x)$ z *Lagrangeovej* vety o strednej hodnote, že existuje p medzi x a x_0 a platí

$$\left| \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \right| = g'(p)$$

Po úprave dostávame

$$\left| \frac{f_m(x) - f_m(x_0) - f_l(x) + f_l(x_0)}{x - x_0} \right| = f'_m(p) - f'_l(p).$$

Keďže $p \in M$, platia odhady

$$|f_l(x) - f_m(x)| \leq |f_l(x_0) - f_m(x_0)| + |x - x_0|(f'_l(p) - f'_m(p)) \leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{(b-a)\epsilon}{2w} = \epsilon$$

a teda pre pevné $x \in M$ je $f_n(x)$ Cauchyovská. Tým pádom je aj konvergentná a existuje limita $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$. Teraz treba ukázať, že $f_n \rightarrow f$.

Nech $\epsilon > 0$. Potom existuje $n_3 \in \mathbb{N}$, že pre všetky $l, k > n_3$ platí

$$|f_l(x) - f_k(x)| < \epsilon \quad x \in M.$$

Aplikovaním operácie limity, ktorá zachováva nerovnosť, platí

$$|f(x) - f_k(x)| = \lim_{l \rightarrow \infty} |f_l(x) - f_k(x)|$$

z Cauchyovskosti, kde si zafixujeme premennú $k > n_3$ a teda rovnomerná konvergencia je ukázaná. Teraz už stačí ukázať, že f je diferencovateľná a platí $f' = \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n (= g)$. Definujeme si funkcie $y_n(x) = \frac{f_n(x) - f_n(c)}{x - c} \quad \forall n \in \mathbb{N}$ a $y(x) = \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \quad \forall x, c \in M, x \neq c$. Vidíme, že $\forall x, c \in M, x \neq c$ platí $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y$. Zvoľme za $c = a$. Podľa predpokladu vety ohľadom diferenciálnosti platí

$$\lim_{x \rightarrow a} y_n(x) = f'_n(a) \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Zoberme $x \in M, x \neq a$. Z *Lagrangeovej* vety o strednej hodnote existuje $d \in [x, a]$ také, že platí

$$y_l(x) - y_k(x) = \frac{f_l(x) - f_k(x) - f_l(a) + f_k(a)}{x - a} = f'_l(d) - f'_k(d).$$

Analogicky sa dokáže, že $y_n \rightarrow y$ na intervale $M - \{a\}$. S použitím vety o zámene limit dostávame

$$g(a) = \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(a) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{x \rightarrow a} y_n(x) = \lim_{x \rightarrow a} \lim_{n \rightarrow \infty} y_n(x) = \lim_{x \rightarrow a} y(x) = f'(a),$$

čím je dôkaz splnený. ■

Príklad 9. (ukážka použitia vety 6.)

Nech $f_n(x) = \frac{1}{x} + \frac{x}{n}$ na množine $[0, 1]$. Bodová limita, označme ju $f(x)$, bude rovná $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x} + \frac{x}{n} = \frac{1}{x}$. To, že f_n konverguje rovnomerne k f platí, lebo

$$\sup_{x \in [0,1]} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x \in [0,1]} \left| \frac{x}{n} \right| = \frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Teraz sa pozrieme na deriváciu f_n a porovnáme $\left(\lim_{n \rightarrow \infty} f_n \right)'$ s $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n'$.

Pre prvý prípad dostávame $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = -\frac{1}{x^2}$.

Pre druhý prípad dostávame $\lim_{n \rightarrow \infty} -\frac{1}{x^2} + \frac{x}{n} = -\frac{1}{x^2}$ a teda $\left(\lim_{n \rightarrow \infty} f_n \right)' = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n'$.

Ukázali sme, že pri splnenom predpoklade rovnomernej konvergenzie je možná zámena poradia limity a derivácie.

Veta 7 (podľa [5])

Existuje reálna spojitá funkcia na reálnej osi, ktorá nie je nikde diferencovateľná.

Dôkaz: Definujme $h(x)$ ako

$$h(x) = \begin{cases} x & x \in [0, 1], \\ 2 - x & x \in [1, 2]. \end{cases}$$

Rozšírime $h(x)$ pre všetky reálne x ako: $h(x+2) = h(x)$. Teraz je $h(x)$ spojitá na $\mathbb{R}^1$, z dôvodu odstránenia problému v bode $x = 0$. Zvolíme $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n h(4^n x)$. Keďže $h(x) \in [0, 1]$, potom podľa Weierstrassovej vety máme rovnomernú konvergenciu nášho radu. Na základe dôsledku vety 3 je $f(x)$ spojitá. Zvolením pevného $x \in \mathbb{R}^1$ a pre $m \in \mathbb{N}$ existuje $k \in \mathbb{N}$ také, že $k \leq 4^m x \leq k+1$. Nech $a_m = 4^{-m}k$ a $b_m = 4^{-m}(k+1)$. Porovnáme čísla $4^n b_m$ s $4^n a_m$. Ak $n > m$, rozdiel týchto čísel je celé číslo, konkrétne 4^{n-m} . Ak $n = m$ tak ich rozdiel bude rovný $4^{n-m} = 4^0 = 1$. Ak $n < m$, tak nie je medzi nimi celé číslo, pretože $4^{n-m} = \frac{1}{4^{m-n}}$. Odtiaľ dostávame

$$|h(4^n b_m) - h(4^n a_m)| = \begin{cases} 0 & n > m \\ 4^{n-m} & n \leq m. \end{cases}$$

Na základe definovania $f(x)$ a vyššie uvedenú rovnosť dostávame, že

$$f(b_m) - f(a_m) = \sum_{n=0}^m \left(\frac{3}{4}\right)^n [h(4^n b_m) - h(4^n a_m)]$$

a z toho máme

$$|f(b_m) - f(a_m)| \geq \left(\frac{3}{4}\right)^m - \sum_{n=0}^{m-1} \left(\frac{3}{4}\right)^n 4^{n-m} > \frac{1}{2} \left(\frac{3}{4}\right)^m$$

alebo

$$\left| \frac{f(b_m) - f(a_m)}{b_m - a_m} \right| > \frac{1}{2} 3^m.$$

Pokým $a_m \leq x \leq b_m$ a $b_m - a_m \rightarrow 0$ pri $m \rightarrow \infty$ vidíme, že f nie je diferencovateľná v x na základe vety 5.19 v [5]. ■

3 Rovnomocná spojitosť

V matematickej analýze je trieda funkcií *rovnomočne spojitá*, ak sú všetky funkcie spojité a majú rovnakú zmenu v určitom okolí. V pravom slova zmysle to je popísané v nasledujúcej kapitole. Pojem sa týka najmä spočítateľných tried a postupnosti funkcií. Táto kapitola je spracovaná podľa [5, str. 154 - 161].

3.1 Základné pojmy

Definícia 5.

Nech $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ je postupnosť funkcií definovaných na množine M . Hovoríme, že postupnosť $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ je *bodovo ohraničená* na množine M , ak postupnosť $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ je ohraničená pre všetky $x \in M$, to je v takom prípade, ak existuje funkcia q s *konečnými hodnotami* na množine M ako

$$|f_n(x)| < q(x) \quad (x \in M, n \in \mathbb{N}).$$

Hovoríme, že $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ je *rovnomerne ohraničená* na množine M , ak existuje číslo L také, že platí

$$|f_n(x)| < L \quad (x \in M, n \in \mathbb{N}).$$

Ak $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ je bodovo ohraničená na množine M a M_1 je spočítateľná podmnožina množiny M , je možné nájsť konvergentnú podpostupnosť $\{f_{n_k}\}_{n_k=1}^{\infty}$ pre všetky $x \in M_1$. Na vytvorenie takejto podpostupnosti vieme použiť diagonálny princíp, ktorý použijeme aj v dôkaze Vety 8.

Akokoľvek, dokonca ani vtedy, keď $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ je rovnomerne ohraničená postupnosť spojitých funkcií na kompaktnej množine M , nemusí existovať podpostupnosť bodovo konvergujúca na M .

Nasledujúci príklad bude obtiažne dokázať pomocou nástrojov, ktoré máme doteraz, ale dôkaz bude celkom jednoduchý ak použijeme vetu z Kapitoly 10 v [5].

Príklad 10.

Nech

$$f_n(x) = \sin(nx) \quad (0 \leq x \leq 2\pi, n \in \mathbb{N}).$$

Predpokladajme, že existuje postupnosť $\{n_k\}$ taká, že $\{\sin n_k x\}$ konverguje pre všetky $x \in [0, 2\pi]$. Z tohoto dôvodu musí platiť, že

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (\sin n_k x - \sin n_{k+1} x) = 0 \quad (0 \leq x \leq 2\pi).$$

Preto dostávame, že

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (\sin n_k x - \sin n_{k+1} x)^2 = 0 \quad (0 \leq x \leq 2\pi).$$

Na základe Lebesgueovej vety týkajúcej sa integrácie ohraničených konvergentných postupností (veta 10.32 v [5]) dostávame

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} (\sin n_k x - \sin n_{k+1} x)^2 = 0.$$

Ale dopočítaním máme

$$\int_0^{2\pi} (\sin n_k x - \sin n_{k+1} x)^2 = 2\pi,$$

čím dostávame spor pri zámene poradia limity a integrálu.

Ďalej budeme skúmať, či každá konvergentná postupnosť obsahuje rovnomerne konvergentnú podpostupnosť. Ako ukážka bude slúžiť nasledujúci príklad.

Príklad 11.

Nech

$$f_n(x) = \frac{x^2}{x^2 + (1 - nx)^2} \quad (0 \leq x \leq 1, n \in \mathbb{N}).$$

Keďže $(1 - nx)^2 \geq 0 \quad \forall x \in [0, 1], \forall n \in \mathbb{N}$, tak potom vidíme, že $|f_n(x)| \leq 1$ a tým pádom $\{f_n\}$ je rovnomerne ohraničená na množine $[0, 1]$. Taktiež

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0 \quad \forall x \in [0, 1],$$

ale pre podpostupnosť

$$f_n\left(\frac{1}{n}\right) = 1 \quad (n \in \mathbb{N})$$

a teda žiadna podpostupnosť nemôže konvergovať rovnomerne na $[0, 1]$.

Nasledujúca definícia slúži pre príklady podobného typu.

Definícia 6.

Trieda $\mathcal{F}$ funkcií f definovanej na množine M v metrickom priestore X sa nazýva *rovnomočne spojitá* na množine M , ak

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall f \in \mathcal{F} : |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon,$$

pričom $x \in M$ a $y \in M$. Je taktiež zrejmé, že každý člen triedy rovnomočne spojitých funkcií je rovnomerne spojitý. V *príklade 11* postupnosť nie je rovnomerne spojitá. Vo vetách 8 a 9 ukážeme, že existuje veľmi blízky vzťah medzi na jednej strane rovnomočnou spojitosťou, a na druhej rovnomernou konvergenciou postupností spojitých funkcií. Najprv si však opíšeme výberový proces, ktorý priamo nesúvisí so spojitosťou.

3.2 Ascoli - Arzevalova lema

Veta 8. (Rovnomočná spojitosť a konvergencia: Ascoli - Arzevalova lema)

Nech M je kompaktná množina. (1.) Ak $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ je rovnomerne konvergentná postupnosť spojitých funkcií na množine M , potom $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ je rovnomočne spojitá na množine M . (2.) Ak $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ je bodovo ohraňovaná a rovnomočne spojitá na množine M , potom $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ obsahuje rovnomerne konvergentnú podpostupnosť a $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ je rovnomerne ohraňovaná na množine M .

Dôkaz: Nech $\epsilon > 0$. Z predpokladov časti (1.) existuje $n_1 \in \mathbb{N}$ a $\delta > 0$ z Cauchyovskosti také, že

$$\forall x \in M \forall n > n_1 : |f_n(x) - f_{n_1}(x)| < \frac{\epsilon}{3}$$

a zo spojitosti máme

$$|f_i(x) - f_i(y)| < \frac{\epsilon}{3} \quad (1 \leq i \leq n_1, d(x, y) < \delta). \quad (1)$$

Použijeme fakt, že spojité funkcie sú rovnomerne spojité na kompaktnej množine. Ak $x \in M, y \in M, d(x, y) < \delta$ a $n > n_1$, máme

$$|f_n(x) - f_n(y)| \leq |f_n(x) - f_{n_1}(x)| + |f_{n_1}(x) - f_{n_1}(y)| + |f_{n_1}(y) - f_n(y)| < \epsilon.$$

Spojením s (1) sme dokázali (1.).

Predpokladajme, že hypotéza (2.) platí.

Najprv vyberieme spočítateľnú podmnožinu M_1 množiny M takú, že M je uzáver množiny M_1 . Aby sme ukázali existenciu množiny M_1 , budeme postupovať následovne: Nech $J(x, r)$ je množina všetkých bodov $y \in M$ takých, že $d(x, y) < r$. Pre každé pevné $r > 0$, kompaktnosť množiny M sa vzťahuje na konečný počet čísel v otvorených množinách $J(x_1, r), \dots, J(x_m, r)$. Ak $r = 1, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \dots$, získavame spočítateľnú bázu množiny K .

Nech $\{x_i\}_{i=1}^\infty$ sú body množiny M_1 zoradené v postupnosti.

Pretože $\{f_n(x_1)\}$ je ohraničená, potom existuje podpostupnosť, ktorú označíme $\{f_{1,k}\}$, že $\{f_{1,k}(x)\}$ konverguje pre $k \rightarrow \infty$.

Teraz porovnáme postupnosti $S_1, S_2, S_3, \dots$, ktoré môžeme poukladať do matice

$$S_1 : f_{1.1} \quad f_{1.2} \quad f_{1.3} \quad \cdots$$

$$S_2 : f_{2.1} \quad f_{2.2} \quad f_{2.3} \quad \cdots$$

$$S_3 : f_{3.1} \quad f_{3.2} \quad f_{3.3} \quad \cdots$$

$$S_4 : f_{4.1} \quad f_{4.2} \quad f_{4.3} \quad \cdots$$

.

.

.

a má nasledujúce vlastnosti:

(a) S_n je podpostupnosť pre S_{n-1} pre $n = 1, 2, 3, \dots$

(b) $\{f_{n,k}(x_n)\}$ konverguje pre $k \rightarrow \infty$

(c) Poradie, v ktorom sú funkcie, je rovnaké v každej postupnosti, teda ak jedna funkcia predchádza inú v S_1 , tak sú v rovnakom vzťahu v každej S_n , až pokiaľ jedna alebo ostatné nie sú vymazané. Teraz porovnáme diagonálne zložky matice a teda budeme porovnávať postupnosti

$$S : f_{1.1} \quad f_{2.2} \quad f_{3.3} \quad f_{4.4} \dots$$

Na základe (c), postupnosť S (okrem jej možných $n - 1$ členov) je podpostupnosť z S_n pre $n = 1, 2, 3, \dots$. Preto b implikuje, že $\{f_{n,n}(x_i)\}$ konverguje, ak $n \rightarrow \infty$ pre všetky $x_i \in M_1$.

Nech $\epsilon > 0$. Pokiaľ $\{f_n\}$ je rovnomocne spojitá, existuje $\delta > 0$ taká, že $d(x, y) < \delta$ nám dáva

$$|f_n(x) - f_n(y)| < \frac{\epsilon}{3} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Nech $J(x, \delta)$ má rovnaký význam ako na začiatku dôkazu. Pokiaľ M_1 je hustá v množine M a M je kompaktná, potom máme konečný počet bodov $x_1, \dots, x_p$ v množine M_1 takých, že

$$M \subset J(x_1, \delta) \cup \dots \cup J(x_p, \delta).$$

Nech n_1 je dané tak, že

$$|f_{n,n}(x_i) - f_{m,m}(x_i)| < \frac{\epsilon}{3} \quad (i = 1, 2, \dots, p)$$

pre $n \geq n_1, m \geq n_1$. Potom pre akékoľvek $x \in M$ existuje bod x_i , kde $1 \leq i \leq p$ je také, že $x \in J(x_i, \delta)$. Preto pre $n \geq n_1, m \geq n_1$ platí

$$\begin{aligned} |f_{n,n}(x) - f_{m,m}(x)| &\leq |f_{n,n}(x) - f_{n,n}(x_i)| + |f_{n,n}(x_i) - f_{m,m}(x_i)| \\ &\quad + |f_{m,m}(x_i) - f_{m,m}(x)| < \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon. \end{aligned}$$

Preto $\{f_{n,n}\}$ konverguje rovnomerne na množine M .

Aby sme ukázali rovnomernú ohraničenosť $\{f_n\}$, na množine M si definujeme

$$\psi(x) = \sup |f_n(x)| \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Nech $\epsilon > 0, \delta > 0$ sú také, že $d(X, y) < \delta$ implikuje

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x, y \in M : |x - y| < \delta \Rightarrow |f_n(x) - f_n(y)| < \epsilon \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Ak zafixujeme dva body x a y , $|x - y| < \delta$. Potom nerovnica

$$|f_n(y)| < |f_n(x)| + \epsilon$$

implikuje

$$\psi(y) \leq \psi(x) + \epsilon,$$

zatiaľ čo

$$|f_n(x)| < |f_n(y)| + \epsilon$$

implikuje

$$\psi(x) \leq \psi(y) + \epsilon.$$

Celkovo teda vidíme, že

$$|\psi(y) - \psi(x)| \leq \epsilon$$

pri $d(x, y) < \delta$, teda ψ je spojitá na množine M . Keďže M je kompaktná, ψ je ohraničená a teda platí zadanie vety. ■

3.3 Stone - Weierstrassova veta

Veta 9. (Stone-Weierstrass)

Ak $f(x)$ je spojitá komplexná funkcia na intervale $[a, b]$, potom existuje postupnosť polynómov P_n , že

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_n(x) = f(x)$$

konverguje rovnomerne na intervale $[a, b]$. Ak f je reálna, P_n by mala byť tiež reálna.

Dôkaz: Predpokladajme, že $[a, b] = [0, 1]$. Taktiež môžeme predpokladať, že $f(0) = f(1) = 0$. Pretože ak je veta dokázaná pre tento prípad, uvažujme

$$g(x) = f(x) - f(0) - x[f(1) - f(0)] \quad (0 \leq x \leq 1).$$

Vidíme, že $g(0) = g(1) = 0$. Ak g vieme získať ako limitu rovnomerne konvergentnej postupnosti polynómov, tak je zrejmé, že to isté platí pre f , na základe, že $f - g$ je polynóm.

Definujeme $f(x) = 0$ mimo intervalu $[0, 1]$. Potom f je rovnomerne spojitá. Zoberme

$$Q_n(x) = c_n(1 - x^2)^n \quad (n \in \mathbb{N}),$$

kde c_n je taká, aby platilo, že

$$\int_{-1}^1 Q_n(x) dx = 1 \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Potrebuje viac informácií ohľadom c_n . Pokiaľ

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 (1 - x^2)^n dx &= 2 \int_0^1 (1 - x^2)^n dx \geq 2 \int_0^{\frac{1}{\sqrt{n}}} (1 - x^2)^n dx \\ &\geq 2 \int_0^{\frac{1}{\sqrt{n}}} (1 - nx^2) dx = \frac{4}{3\sqrt{n}} > \frac{1}{\sqrt{n}}, \end{aligned}$$

kde vidíme, že $c_n < \sqrt{n}$.

Nerovnicu $(1 - x^2)^n \geq 1 - nx^2$, ktorú sme použili, je ľahké odvodiť z rovnice

$$[(1 - x^2)^n - 1 + nx^2]' = 2xn - 2xn(1 - x)^{n-1} \geq 0 \quad (\forall x \in [0, 1]),$$

teda je rastúca a v bode $x = 0$ je nulová, teda úprava platí. Pre akékoľvek $\delta > 0$, z dôvodu $c_n < \sqrt{n}$ dostávame

$$Q_n(x) \leq \sqrt{n}(1 - \delta^2)^n \quad (\delta \leq |x| \leq 1),$$

a teda $Q_n \rightarrow 0$ rovnomerne pre $\delta \leq |x| \leq 1$. Definujme

$$P_n(x) = \int_{-1}^1 f(x+t)Q_n(t)dt \quad (0 \leq x \leq 1).$$

Jednoduchou transformáciou dostaneme

$$P_n(x) = \int_{1-x}^{-x} f(x+t)Q_n(t)dt = \int_0^1 f(t)Q_n(t-x)dt,$$

kde konečný integrál je polynómom v x . Preto P_n je postupnosť polynómov, ktorá je reálna, ak f je reálna.

Nech $\epsilon > 0$. Zoberme takú $\delta > 0$, že $|x - y| < \delta$ a potom

$$|f(y) - f(x)| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Zoberme $K = \sup\{f(x)\}$. Z dôvodu, že $\int_{-1}^1 Q_n(x)dx = 1$, $c_n < \sqrt{n}$ a faktu, že $Q_n(x) \geq 0$, platí pre $0 \leq x \leq 1$,

$$\begin{aligned} |P_n(x) - f(x)| &= \left| \int_{-1}^1 [f(x+t) - f(x)]Q_n(t)dt \right| \leq \int_{-1}^1 |f(x+t) - f(x)|Q_n(t)dt \\ &\leq 2K \int_{-1}^{-\delta} Q_n(t)dt + \frac{\epsilon}{2} \int_{-\delta}^{\delta} Q_n(t)dt + 2K \int_{\delta}^1 Q_n(t)dt \\ &\leq 4K\sqrt{n}(1-\delta^2)^n + \frac{\epsilon}{2} < \epsilon \end{aligned}$$

pre dostatočne veľké n , čím je dôkaz skončený. ■

Dôsledok vety 9.

Pre každý interval $[-a, a]$ existuje postupnosť reálnych polynómov takých, že $P_n(0) = 0$ a zároveň platí, že

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_n(x) = |x|$$

rovnomerne konverguje na $[-a, a]$.

Dôkaz: Na základe vety 9. existuje postupnosť reálnych polynómov $\{P_n^*\}$, ktorá rovnomerne konverguje k $|x|$ na množine $[-a, a]$. Vidíme, že $P_n^*(0) \rightarrow 0$ pre $n \rightarrow \infty$. Pre polynómy tvaru

$$\forall n \in \mathbb{N} : P_n(x) = P_n^*(x) - P_n^*(0)$$

sú splnené vlastnosti potrebné pre platnosť vety 9. ■

4 Riešenie príkladov

Zadanie príkladu 1:

Dokážte, že každá rovnomerne konvergentná postupnosť ohraničených funkcií je rovnomerne ohraničená.

Riešenie:

Označme $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ postupnosťou, ktorá rovnomerne konverguje k f na množine A . Z toho vyplýva, že pre všetky n existuje M_n , že platí $|f_n(x)| \leq M_n, M_n \in \mathbb{R}$ pre všetky $x \in A$. Nech $n_0 \in \mathbb{N}$ také, že

$$\forall n_1, n_2 \geq n_0, \forall x \in A : |f_{n_1}(x) - f_{n_2}(x)| < 1$$

čo platí na základe Cauchyho kritéria rovnomernej konverencie. Zo spojenia predpokladov a trojuholníkovej nerovnosti vyplýva

$$\forall n \geq n_0 : |f_n(x)| = |f_n(x) - f_{n_0}(x) + f_{n_0}(x)| \leq |f_n(x) - f_{n_0}(x)| + |f_{n_0}(x)| < 1 + M_{n_0}.$$

Pre $M = \max\{M_1, \dots, M_{n_0}\}$ tiež platí $|f_n(x)| \leq M$ pre všetky $n \leq n_0, x \in A$.

Spojením oboch prípadov nám vyplýva, že $|f_n(x)| < \max\{1 + M_{n_0}, M\}$ pre všetky $n \in \mathbb{N}, x \in A$ a preto $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ je rovnomerne ohraničená.

Zadanie príkladu 2:

Ak $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ a $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ konvergujú rovnomerne na množine M , dokážte, že $\{f_n + g_n\}_{n=1}^{\infty}$ konvergujú rovnomerne na množine M . Ak navyše $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ sú postupnosti ohraničených funkcií, tak potom dokážte, že $\{f_n g_n\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje rovnomerne na M .

Riešenie:

1. Rovnomerná konvergencia $\{f_n + g_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Za predpokladu, že $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ a $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ konvergujú rovnomerne na M , z definície platí:

$$\begin{aligned}\forall \epsilon > 0, \exists n_0, \forall n_1 \geq n_0 : |f_{n_1}(x) - f(x)| &< \frac{\epsilon}{2} \\ \forall \epsilon > 0, \exists n_0, \forall n_2 \geq n_0 : |g_{n_2}(x) - g(x)| &< \frac{\epsilon}{2}\end{aligned}$$

Zvolíme m tak, že platí $m > \max\{n_1, n_2\}$. Preto $\forall \epsilon > 0 \exists n_0 = \max\{n_1, n_2\} \forall m > n_0$ platí

$$|f_m(x) + g_m(x) - [f(x) + g(x)]| \leq |f_m(x) - f(x)| + |g_m(x) - g(x)| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Ukázali sme, že $\{f_n + g_n\}_{n=1}^{\infty}$ rovnomerne konvergujú na množine M .

2. Rovnomerná konvergencia $\{f_n g_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Podľa príkladu 1 v kapitole 4 vieme, že ak sú postupnosti ohraničené $\Rightarrow$ rovnomerne ohraničené. To znamená, že existuje číslo A také, ktoré spĺňa $|f_n(x)| < A$ a $|g_n(x)| < A$ pre všetky $x \in M$ a $n = 1, 2, 3, \dots$.

Je zrejmé, že ak $|g_n(x)| < A$ a $|f_n(x)| < A$, tak potom je aj bodová limita $|g(x)| \leq A$ a $|f(x)| \leq A$. Za predpokladu rovnomernej konvergenzie platí

$$\begin{aligned}\forall \epsilon > 0 \exists n_0 \forall n > n_0 : |f_n(x) - f(x)| &< \frac{\epsilon}{2A} \\ |g_n(x) - g(x)| &< \frac{\epsilon}{2A}.\end{aligned}$$

Za uvedených stanovených predpokladov dokážeme, že $\{f_n g_n\} < \epsilon$.

$$|f_n(x)g_n(x) - f(x)g(x)| = |f_n(x)(g_n(x) - g(x)) + g(x)(f_n(x) - f(x))|.$$

Použitím trojuholníkovej nerovnosti ďalej dostávame

$$\begin{aligned}\forall \epsilon > 0 \exists n_0 \forall n > n_0 : & |f_n(x)(g_n(x) - g(x)) + g(x)(f_n(x) - f(x))| \leq \\ & |f_n(x)(g_n(x) - g(x))| + |g(x)(f_n(x) - f(x))| \leq \\ & |f_n(x)| \cdot |g_n(x) - g(x)| + |g(x)| \cdot |f_n(x) - f(x)| \leq 2 \frac{\epsilon}{2A} A = \epsilon.\end{aligned}$$

Zadanie príkladu 3:

Zostrojte postupnosti $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ a $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$, ktoré konvergujú rovnomerne na množine M , ale $\{f_n g_n\}_{n=1}^{\infty}$ nekonverguje rovnomerne na M .

Riešenie:

Zoberme postupnosti $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ a $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ definované ako

$$f_n(x) = \frac{1}{x} + \frac{x}{n} \quad g_n(x) = \frac{1}{x-1} + \frac{x-1}{n} \quad M = [0, 1].$$

Bodové limity $f(x)$ a $g(x)$ sú rovné $f(x) = \frac{1}{x}$ a $g(x) = \frac{1}{x+1}$. Obidve postupnosti $f_n(x)$, $g_n(x)$ konvergujú rovnomerne, čo sa dá ľahko ukázať a necháme to ako malé cvičenie. Teraz ideme skúmať rovnomernú konvergenciu $f_n g_n(x)$. Ideme zisťovať, čomu sa rovná

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in M} |f_n(x)g_n(x) - f(x)g(x)|.$$

Najprv si uvedenú funkciu rozpíšeme a pokúsime sa ju rozanalyzovať.

$$f_n(x)g_n(x) = \frac{nx^2 + n(x-1)^2 + x^2(x-1)^2}{n^2(x-1)x} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x(x-1)}.$$

Dosadením bodovej limity do súprema dostávame

$$\sup_{x \in M} |f_n(x)g_n(x) - f(x)g(x)| = \sup_{x \in M} \left| \frac{2nx^2 - 2nx + n + x^2(x-1)^2}{n^2(x-1)x} \right|.$$

Horeuvedená postupnosť nadobúda suprénum v bode $\{1\}, \{0\}$ a teda

$$\sup_{x \in M} \left| \frac{2nx^2 - 2nx + n + x^2(x-1)^2}{n^2(x-1)x} \right| = \infty$$

pre akékoľvek n , dôsledkom čoho je, že $f_n g_n(x)$ nekonverguje rovnomerne.

Zadanie príkladu 4:

Máme rad $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n^2x}$. Pre ktoré hodnoty x je rad absolútne konvergentný? Na akých intervaloch konverguje rovnomerne? Na ktorých intervaloch zlyhá rovnomerná konvergencia? Je f spojitá kdekkoľvek rad konverguje? Je f ohraničená?

Riešenie:

1. Absolútna konvergencia

Ako prvé si treba všimnúť 2 veci. Po prvé, rad nie je definovaný pre hodnotu $-\frac{1}{n^2}$. Po druhé, rad diverguje pre hodnotu $x = 0$ lebo $\sum_{n=1}^{\infty} 1$ je rad samých jednotiek a ten diverguje.

Riešime všetky možné hodnoty x .

Teda ak $x > 0$ platí

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{1}{1+n^2x} \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2x} = \frac{1}{x} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2},$$

kde uvedený rad konverguje $\forall x \in \mathbb{R} - \{0\}$ a kvôli porovnávaciemu kritériu konverguje aj pôvodný rad.

Ak $x < -1$, potom platí

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{1}{1+n^2x} \right| = \frac{1}{|x|} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|n^2 + \frac{1}{x}|} = \frac{1}{|x|} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 - |\frac{1}{x}|}.$$

Ďalej pre $n \geq 2$ platí, že $\frac{1}{n^2 - |\frac{1}{x}|} < \frac{1}{n^2 - 1}$. Keďže rad $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 - 1}$ konverguje, tak na základe porovnávacieho kritéria konverguje aj pôvodný rad.

Pre $0 > x > -1$ existuje $k \in \mathbb{Z}$, že $-\frac{1}{k^2} < x < -\frac{1}{(k+1)^2}$. Potom platí, že

$$\sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{1}{|n^2x + 1|} = \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{1}{n^2|x| - 1}$$

a rovnako ako v predošlom prípade je absolútna konvergencia splnená.

2. Intervaly rovnomernej konverencie:

Zvolíme interval $[a, b]$ s $x \geq a > 0$. Označme

$$M_n = \sup_{x \in [a, b]} |f_n(x)| = f_n(a) = \frac{1}{1 + n^2a}.$$

Na základe Weierstassovho pravidla ukážeme, že M_n konverguje, a tým pádom bude f_n konvergovať rovnomerne.

Teda

$$\sum_{n=1}^{\infty} M_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n^2a} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2a} = \frac{1}{a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2},$$

kde rad $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konverguje a na základe porovnávacieho kritéria konverguje aj rad $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$, tým pádom platí Weierstrassovo pravidlo o rovnomernej konvergencii.

Nech $x \leq b < -1$. Platí, že $\left| \frac{1}{1+n^2x} \right| = \frac{1}{n^2|x|-1} < \frac{1}{n^2|b|-1}$. Podobne na základe Weierstrassovho pravidla o rovnomernej konvergencii rad konverguje rovnomerne na $[a, b]$.

Pre $-1 < x < 0$ je to podobné ako v predchádzajúcom prípade. Ak je interval v tvare $\left(-\frac{1}{k^2}, -\frac{1}{(k+1)^2} \right)$, tak konverguje rovnomerne na intervale $[a, b]$, ktorý je podmnožinou $\left(-\frac{1}{k^2}, -\frac{1}{(k+1)^2} \right)$.

Zhrnutím dostávame, že pre intervaly obsahujúce body $x = 0$ alebo body tvaru $x = -\frac{1}{n^2}$ bude rovnomerná konvergencia zlyhávať na základe divergencie alebo nedefinovania radu.

3. Spojitosť f

Spojitosť priamo vyplýva z vety 7.12.

4. Ohraničenosť f

Na zistenie neohraničenia f stačí ukázať, že $\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{n^2}} f(x) = \infty$, čím dostávame neohraničenie.

Zadanie príkladu 5:

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \left(x < \frac{1}{n+1}\right) \\ \sin^2 \frac{\pi}{x} & \left(\frac{1}{n+1} \leq x \leq \frac{1}{n}\right) \\ 0 & \left(\frac{1}{n} < x\right) \end{cases}$$

Ukážte, že $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje k spojitej funkcii, ale nie rovnomerne. Použite rad $\sum f_n$ aby ste ukázali, že konverguje absolútne a tiež, že pre všetky x neimplikuje rovnomernú konvergenciu.

Riešenie:

Ak $x \leq 0$ alebo $x > 1$, tak $f_n(x) = 0$ pre všetky n a preto je zrejmé, že $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0$. Pre zvyšné x stačí zvoliť $M \in \mathbb{N}$ také, že $M > \frac{1}{x}$. Pre všetky $n > M$ platí $x > \frac{1}{n}$, a preto $f_n(x) = 0$ a tým pádom aj $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0$. To znamená, že $f_n(x)$ konverguje bodovo k spojitej funkcii $f(x) = 0$.

Ešte vyšetříme rovnomernú konvergenciu k $f(x) = 0$. Aby sme ukázali, prečo $f_n(x)$ nekonverguje rovnomerne k $f(x)$, stačí zvoliť $x = \frac{1}{n+\frac{1}{2}}$. Potom dostávame $f_n(x) = \sin^2(\pi n + \frac{\pi}{2})$. Keďže $\sin^2 \pi n = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$, tak potom môžeme povedať, že $\sin^2(\pi n + \frac{\pi}{2}) = \sin^2 \frac{\pi}{2} = 1$. Tento výsledok nám implikuje, že

$$\sup_{x \in [0,1]} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x \in [0,1]} |f_n(x)| = 1,$$

a teda $f_n(x)$ nekonverguje rovnomerne k spojitej funkcii $f(x)$.

Teraz ukážeme, že rad konverguje absolútne ale nekonverguje rovnomerne.

To sa dá ľahko ukázať. Rad $\sum |f_n(x)|$ obsahuje pre pevné x len jednu alebo dve nenulové hodnoty, ktorých súčet je ohraničený hodnotou 2 a naozaj platí, že $\sum |f_n(x)|$ konverguje k $f(x) = \sin^2 \frac{\pi}{x}$ absolútne. Keďže $f_n(x)$ nekonverguje rovnomerne k $f(x) = 0$, tak na základe príkladu 307 v [4, str.102 – 103] platí, že rad nekonverguje rovnomerne.

Zadanie príkladu 6:

Dokážte, že rad

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^2 + n}{n^2}$$

konverguje rovnomerne na každom ohraničenom intervale, ale nekonverguje absolútne pre žiadnu hodnotu x .

Riešenie:

1. Absolútna konvergencia radu $f_n(x)$.

Aplikovaním absolútnej hodnoty nám z radu vypadne člen $(-1)^n$. Ďalej pokračujeme porovnávacím kritériom, čím dostávame

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{x^2 + n}{n^2} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{x^2}{n^2} + \frac{1}{n} \right| \geq \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{1}{n} \right|,$$

kde na konci vidíme harmonický rad, ktorý je známy divergentný rad a tým pádom musí divergovať aj väčší rad.

2. Rovnomerná konvergencia radu $f_n(x)$.

Najprv si zdefinujeme čiastočný súčet radu ako

$$f_{cs} = \sum_{n=1}^{cs} (-1)^n \frac{x^2 + n}{n^2}.$$

Podelením nám vzniknú 2 rady a vyšetříme ich správanie. Dostávame

$$f_{cs} = \sum_{n=1}^{cs} (-1)^n \frac{x^2 + n}{n^2} = \sum_{n=1}^{cs} (-1)^n \frac{1}{n} + x^2 \sum_{n=1}^{cs} (-1)^n \frac{1}{n^2}.$$

Prvý rad konverguje z dôvodu Leibnitzovho kritéria, ktoré hovorí, že ak $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je monotónna postupnosť a má limitu pre n idúce do nekonečna rovnú 0, tak potom rad $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ konverguje. Náš rad spĺňa všetky podmienky a preto konverguje. Druhý

rad konverguje na základy vety, ktorá hovorí, že rad $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ konverguje pre $p > 1$. Keďže máme konvergentné rady, tak sú aj Cauchyovské. Z Cauchyovskosti nám vyplýva

$$\forall \epsilon > 0 \exists n_0 \forall n_1, n_2 > n_0 : \left| \sum_{n_1}^{n_2} (-1)^n \frac{1}{n} \right| < \frac{\epsilon}{2},$$

$$\forall \epsilon > 0 \exists n_0 \forall n_1, n_2 > n_0 : \left| \sum_{n_1}^{n_2} (-1)^n \frac{1}{n^2} \right| < \frac{\epsilon}{2|d|^2},$$

kde $d = \sup\{|a|, |b|\}$ a $[a, b]$ je ohraničený interval.

Zvolíme $n_1, n_2 > \max\{n_0, m_0\}$. Potom $\forall x \in [a, b]$ platí

$$\begin{aligned} |f_{n_1} - f_{n_2}| &= \left| \sum_{n_1}^{n_2} (-1)^n \frac{1}{n} + x^2 \sum_{n_1}^{n_2} (-1)^n \frac{1}{n^2} \right| \\ &\leq \left| \sum_{n_1}^{n_2} (-1)^n \frac{1}{n} \right| + \left| x^2 \sum_{n_1}^{n_2} (-1)^n \frac{1}{n^2} \right| \\ &\leq \frac{\epsilon}{2} + x^2 \frac{\epsilon}{2|d|^2} \\ &\leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon. \end{aligned}$$

Poznámka: Dalo by sa to ukázať aj cez suprénum.

Zadanie príkladu 7:

Pre $n = 1, 2, 3, \dots, x \in \mathbb{R}$ máme

$$f_n(x) = \frac{x}{1 + nx^2}.$$

Ukážte, že $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ konverguje rovnomerne k funkcii $f(x)$ na množine $\mathbb{R}$ a dokážte, že

$$f'(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(x)$$

platí pre $x \neq 0$ a neplatí pre $x = 0$.

Riešenie:

1. Rovnomerná konvergencia.

Najprv ukážeme hodnotu bodovej limity $f(x)$ a potom budeme sledovať, či postupnosť k nej rovnomerne konverguje. Bodová limita $f(x)$ je rovná 0 z dôvodu

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x}{1 + nx^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{x}{n}}{\frac{1}{n} + x^2} = \frac{0}{x^2} = 0.$$

Ukázali sme, že bodová limita $f(x) = 0$.

Teraz musíme zistiť čomu sa rovná

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} \left| \frac{x}{1 + nx^2} \right|,$$

a to zistíme deriváciou, ktorú položíme rovnú 0. Derivovaním dostávame

$$\left(\frac{x}{1 + nx^2} \right)' = \frac{1 + nx^2 - 2nx^2}{(1 + nx^2)^2} = \frac{1 - nx^2}{(1 + nx^2)^2} = 0,$$

kde vidíme, že jediná možnosť, ako dosiahnuť aby rovnica bola rovná 0, je

$$1 - nx^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{n} = x^2.$$

Vidíme, že máme 2 stacionárne body a to $x = \pm \frac{1}{\sqrt{n}}$. Hodnoty v týchto stacionárnych bodoch sú

$$f_n\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = \frac{1}{2\sqrt{n}} \text{ a } f_n\left(-\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = -\frac{1}{2\sqrt{n}}.$$

Tým pádom dostávame hodnotu supréma ako

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f_n(x) - 0| = \frac{1}{2\sqrt{n}}.$$

Nakoniec získavame požadovanú rovnicu

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \sup_{x \in \mathbb{R}} f_n(x) \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2\sqrt{n}} = 0,$$

kde vidíme, že postupnosť je rovnomerne konvergentná.

2. Dôkaz prechodu derivácie.

Postupne si vyčíslime obe strany rovnice a porovnáme ich.

Keďže $f(x) = 0$, tak samozrejmosťou je aj, že $f'(x) = 0$. Teraz nám ostáva vyčísliť limitu derivácie. Dostávame:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - nx^2}{(1 + nx^2)^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - nx^2}{1 + nx^2 + n^2x^4}.$$

Vidíme, že limita je rovná 0 $\forall x \neq 0$ z dôvodu vyššieho exponentu v menovateli pri premennej n . Jediná zmena nastáva v bode $x = 0$, kde $f'_n(0) = 1$ a tým pádom máme

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(0) = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 = 1 \neq 0 = f'(x),$$

a tým sme dokázali požadované zadanie.

Zadanie príkladu 8:

Ak

$$I(x) = \begin{cases} 0 & (x \leq 0), \\ 1 & (x > 0) \end{cases}$$

a $\{x_n\}$ je postupnosť bodov intervalu (a, b) a keď $\sum |c_n|$ konverguje, dokážte, že rad

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n I(x - x_n) \quad (a \leq x \leq b)$$

konverguje rovnomerne a f je spojitá pre všetky $x \neq x_n$.

Riešenie:

1. Rovnomerná konvergencia.

Najprv si zdefinujeme čiastočný súčet radu ako

$$f_{cs} = \sum_{n=1}^{cs} c_n I(x - x_n).$$

Dôkaz rovnomernej konvergenzie ukážeme pomocou Weierstrassovho pravidla. Teda

$$|f_n| = \left| \sum_{n=1}^{cs} c_n I(x - x_n) \right| \leq \sum_{n=1}^{cs} |c_n I(x - x_n)|$$

a keďže vieme, že $I(x - x_n)$ nadobúda maximálnu hodnotu 1, tak uvedená nerovnosť pokračuje ako

$$\sum_{n=1}^{cs} |c_n I(x - x_n)| \leq \sum_{n=1}^{cs} |c_n| < \epsilon,$$

kde koniec nerovnice vyplýva zo zadania, ktoré hovorí, že $\sum c_n$ konverguje a preto vieme na základe Cauchyho kritéria konvergentnosti povedať, že

$$\forall \epsilon > 0 \exists n_0 \forall n_1, n_2 > n_0 : \sum_{n=n_1}^{n_2} |c_n| < \epsilon.$$

Tým pádom platí, že $\{f_n\}$ konverguje rovnomerne.

2. Spojitosť f .

Nech

$$f_m(x) = \sum_{n=1}^m c_n I(x - x_n).$$

Pre $x \neq x_n$ a $\forall n = 1, 2, 3 \dots m$ nech platí, že $\delta < \min |x - x_n|$. Ak $|t - x| < \delta$, máme

$$I(x - x_n) = I(t - x_n). \quad \forall n = 1, 2, \dots, m$$

Teda celkovo dostávame dôkaz spojitosti ako

$$|f_m(x) - f_m(t)| = \left| \sum_{n=1}^m c_n I(x - x_n) - \sum_{n=1}^m c_n I(t - x_n) \right| = 0 < \epsilon.$$

Vidíme, že $f_m(x)$ je spojitá pre všetky $x \neq x_n \forall m = 1, 2, 3, \dots$. Keďže $f_m(x)$ je spojitá $\forall m$, tak potom aj f je spojitá $\forall x \neq x_n$ z dôvodu, že f je rovnomernou limitou hore uvedených funkcií.

Zadanie príkladu 9:

Nech $\{f_n\}$ je postupnosť spojitých funkcií, ktoré konvergujú rovnomerne k funkcii f na množine M . Dokážte, že

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x_n) = f(x)$$

pre všetky postupnosti bodov $x_n \in M$ takých, že $x_n \rightarrow x$ a $x \in M$.

Riešenie:

Zo zadania rovnomernej konvergenencie f_n platí

$$\forall \epsilon \exists n_0 \forall n > n_0 : |f_n(a) - f(a)| < \frac{\epsilon}{2} \quad \forall a \in M.$$

Keďže to platí všeobecne pre bod a , tak to platí aj pre postupnosť bodov x_n , teda

$$\forall \epsilon \exists n_0 \forall n > n_0 : |f_n(x_n) - f(x_n)| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Ďalej z definície spojitosti platí

$$\forall \epsilon \exists \delta > 0 \forall x \in M : |x_n - x| < \delta \Rightarrow |f(x_n) - f(x)| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Spojením oboch definícií a trojuholníkovej nerovnosti dostávame

$$\begin{aligned} |f_n(x_n) - f(x)| &= |f_n(x_n) - f(x_n) + f(x_n) - f(x)| \leq \\ &\leq |f_n(x_n) - f(x_n)| + |f(x_n) - f(x)| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon. \end{aligned}$$

Zadanie príkladu 10:

Nech $\{f_n\}_{n=1}^\infty, \{g_n\}_{n=1}^\infty$ sú definované na množine M a

- (a) $\sum f_n$ má rovnomerne ohraňované čiastočné súčty;
- (b) $g_n \rightarrow 0$ rovnomerne na množine M ;
- (c) $g_1(x) \geq g_2(x) \geq g_3(x) \geq \dots$ pre všetky $x \in M$.

Dokážte, že $\sum f_n(x)g_n(x)$ konverguje rovnomerne na množine M .

Pomôcka: Veta 3.42 v [5].

Riešenie:

Nech $\epsilon > 0$. Keďže podľa predpokladu má $\sum f_n$ rovnomerne ohraňované čiastočné súčty, tak nech K označuje hornú hranicu čiastočných súčtov $|\sum f_n|$. Keďže $g_n \rightarrow 0$ konverguje rovnomerne, vieme nájsť n_0 také, že

$$n > n_0 \rightarrow g_n(x) < \frac{\epsilon}{2K} \quad \forall x \in M.$$

Z dôvodu zachovania značenia s vetou 3.42, nech A_n označuje čiastočný súčet $\sum_{k=1}^n f_k(x)g_k(x)$.

Ukážeme, že A_n spĺňa podmienky Cauchyho kritéria konvergenzie.

Zvolíme $m > h > n_0$. Podľa postupu dôkazu vety 3.42 dostávame

$$\begin{aligned} |A_m - A_{h-1}| &= \left| \sum_{k=h}^m f_k g_k \right| = \left| \sum_{k=m}^{h-1} A_n (g_n - g_{n+1}) + A_m g_m - A_{m-1} g_m \right| \leq \\ &\leq K \left| \sum_{k=h}^{m-1} (g_n - g_{n+1}) + g_m + g_h \right| \leq 2K g_h \leq 2K g_{n_0} = \epsilon. \end{aligned}$$

Záver

V tejto práci sme ukázali dôležitý pohľad na rovnomernú konvergenciu, ktorá v minulosti viedla k rôznym sporom medzi významnými matematikmi. Bez ohľadu na vedomosti čitateľa z oblasti rovnomernej konvergenzie by mal čitateľ po prečítaní zvládnuť problematiku tejto témy a vedieť ju využiť na zadaniach vyskútujúcich sa v práci. Práca je vhodná na prehĺbenie poznatkov z postupnosti radov a funkcií, osvojenie si vedomostí pre štátnicové skúšky alebo využitie pre neskoršie ročníky.

Prínosom práce bolo ukázať, ako efektívne sa dá spracovať oblasť rovnomernej konvergenzie a ukázať jej aplikovanie na riešenie problémov, ale aj dôležitosť predpokladov oproti tomu, ako postupovať pri riešení príkladov.

Prínosom pre autora práce bolo naštudovanie a hlbšie pochopenie problematiky rovnomernej konvergenzie ako aj jej dôsledkov. Nadviazaním tejto práce by mohlo byť pokračovanie danej témy v oblasti komplexného priestoru.

Zoznam použitej literatúry

- [1] Fecenko J., Pinda Ľ.: *Matematika 1*, Iura Editions, Bratislava, 2006
- [2] Kollár M.: *Prednášky z matematickej analýzy 2*, Univerzita Komenského, Bratislava, 2010
- [3] Kossaczká Ľ.: *osobná komunikácia*, Univerzita Komenského, Bratislava, 2013
- [4] Kubáček Z., Valášek J.: *Cvičenia z matematickej analýzy II*, Univerzita Komenského, Bratislava, 1991
- [5] Rudin W.: *Principles of Mathemamtical Analysis - Third Edition*, McGraw - Hill, New York, 1976