UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY

Rozdelenia s ťažkými chvostami vo financiách

BAKALÁRSKA PRÁCA

2013 Viktor Pojzl

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY

Rozdelenia s ťažkými chvostami vo financiách

BAKALÁRSKA PRÁCA

Študijný program: Ekonomická a finančná matematika
Študijný odbor: 1114 Aplikovaná matematika
Školiace pracovisko: Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky
Vedúci práce: Mgr. Darina Graczová

Bratislava 2013 **Viktor Pojzl**

83307076

Univerzita Komenského v Bratislave
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

ZADANIE ZÁVEREČNEJ PRÁCE

Meno a priezvisko študenta: Viktor Pojzl
Študijný program: ekonomická a finančná matematika (Jednoodborové štúdium, bakalársky I. st., denná forma)
Študijný odbor: 9.1.9. aplikovaná matematika
Typ záverečnej práce: bakalárska
Jazyk záverečnej práce: slovenský

Názov: Rozdelenia s ťažkými chvostami vo financiách

Cieľ: Naštudovať a prehľadne popísať vlastnosti štatistických rozdelení. Zmapovať ich využiteľnosť vo financiách.

Vedúci: Mgr. Darina Graczová
Katedra: FMFI.KAMŠ - Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky
Vedúci katedry: prof. RNDr. Daniel Ševčovič, CSc.

Dátum zadania: 25.10.2012

Dátum schválenia: 03.11.2012

doc. RNDr. Margaréta Halická, CSc.
garant študijného programu

.... študent

.... vedúci práce

Poďakovanie Ďakujem svojej vedúcej bakalárskej práce Mgr. Darine Graczovej za ochotu, odborné vedenie, pomoc a pripomienky, ktoré mi pomohli pri písaní tejto práce.

Abstrakt

Pojzl, Viktor: Rozdelenia s ťažkými chvostami vo financiách [Bakalárska práca].

Univerzita Komenského v Bratislave, Fakulta matematiky, fyziky a informatiky, Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky.

Školiteľ: Mgr. Darina Graczová, Bratislava, 2013, 42 s.

V našej práci sa zaoberáme modelovaním vývoja cien aktív pomocou ich rozdelení. Cieľom tejto práce je popísať základné rozdelenia, ale aj rozdelenia s ťažkými chvostami, ktoré sú velmi vhodné na modelovanie takýchto nahodných premenných. Popíšeme postup pri hľadaní vhodných rozdelení modelujúcich logaritmické výnosy dvoch konkrétnych aktív.

Kľúčové slová: rozdelenia s ťažkými chvostami, Cauchyho rozdelenie, Studentovo t - rozdelenie, Kolmogorovov - Smirnovov test, logaritmické výnosy.

Abstract

Pojzl, Viktor: Heavy - tailed distributions in finance [Bachelor Thesis].

Comenius University in Bratislava, Faculty of Mathematics, Physics and Informatics, Department of Applied Mathematics and Statistics.

Supervisor: Mgr. Darina Graczová, Bratislava, 2013, 42 s.

In our thesis we deal with modeling the evolution of asset prices through their division. The aim of this thesis is to describe the basic distributions, but also the heavy - tailed distributions, which are very useful for modeling these random variables. We describe a procedure for finding suitable distributions which are simulating logarithmic returns of two specific assets.

Keywords: heavy - tailed distributions, Cauchy distribution, Student's t - distribution, Kolmogorov - Smirnov test, logarithmic returns.

Obsah

Úvod

Pri rôznych meraniach a v rôznych situáciách sú dáta z iného rozdelenia. Najzákladnejším rozdelením je normálne rozdelenie. Ale vo svete financií sa vyskytujú omnoho zložitejšie rozdelenia. Väčšina výpočtov a zisťovaní sa nepochybne vykonávajú práve pre zisk alebo cenotvorbu, či už v poisťovnícvte, pri oceňovaní opcií alebo iných. Nielen vo financiách sa vyskytujú rozdelenia ako sú rozdelenia s ťažkými chvostami, dlhými chvostami a iné.

Jedna z možností bánk, ale aj firiem, ktoré svoje finančné zdroje chcú zhodnocovať je investovať do portfólia aktív. Pri rozhodovaní je pre nich dôležité predpovedať s akým výnosom budú investovať. Toto sa dá odhadovať aj napríklad z historických dát.

V rozdeleniach s ťažkými chvostami sa extrémne hodnoty nadobúdajú častejšie. Tieto rozdelenia môžu mať jeden alebo oba chvosty ťažké. Popisujú ich napríklad práce [4], [10] a [12].

Cieľom tejto bakalárskej práce bolo popísať základné štatistické rozdelenia a rozdelenia s ťažkými chvostami. Následne sme testovali reálne dáta z oblasti financií, v ktorých sme zisťovali, z akého rozdelenia pochádzajú a aké majú momenty. Popísali sme tieto testy a vysvetlili ich interpretáciu a význam.

1 Základné pojmy

Táto kapitola je venovaná vstupu do problematiky teórie pravdepodobnosti. Definujeme základné pojmy, s ktorými sa v práci stretneme. Čerpali sme najmä z [9], [10]. K tejto téme je aj množstvo inej literatúry.

1.1 Distribučná funkcia

Definícia 1.1. *Nech X je náhodná premenná z nejakého rozdelenia. Potom pre ľubovoľné $x \in \mathbb{R}$ pre distribučnú funkciu platí:*

$$F(x) = P[X \leq x] \tag{1}$$

Ak je X spojitá náhodná premenná s hustotou $f(x)$, potom jej distribučná funkcia má tvar:

$$F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(x)dx \tag{2}$$

Distribučná funkcia každému x pridelí pravdepodobnosť s akou náhodná premenná nadobudne hodnotu menšiu než číslo x, čo je slovne popísaný vzťah (1).

Poznámka: Evidentne platí $f(x) = F'(x)$.
A tiež platí $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$, a to práve preto, že $F(x)$ je funkcia z $\mathbb{R} \longmapsto \langle 0, 1\rangle$ a taktiež z vlastnosti hustoty.

1.2 Začiatočný moment

Definícia 1.2. *Nech X je náhodná premenná, potom jej začiatočný moment k-teho rádu má tvar:*

$$\nu_k = \mathbb{E}(X^k), \quad pre \quad k = 1, 2, ... \tag{3}$$

Ak je X spojitá náhodná premenná s hustotou $f(x)$, potom platí:

$$\nu_k = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^k \cdot f(x)dx. \tag{4}$$

Ak je X diskrétna náhodná premenná platí:

$$\nu_k = \sum_{i=1}^{+\infty} x_i^k \cdot p_i, \tag{5}$$

kde s pravdepodobnosťou p_i náhodná premenná X nadobudne hodnotu x_i, $i = 1, 2, \dots$.

Poznámka: Stredná hodnota $\mathbb{E}(X)$ náhodnej premennej X je jej prvý začiatočný moment.

1.3 Centrálny moment

Definícia 1.3. *Nech X je náhodná premenná, potom jej centálny moment k-teho rádu má tvar:*

$$\mu_k = \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^k), \quad pre \quad k = 1, 2, \dots \tag{6}$$

Ak je X spojitá náhodná premenná s hustotou $f(x)$, potom platí:

$$\mu_k = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (x - \mathbb{E}(X))^k \cdot f(x) dx. \tag{7}$$

Ak je X diskrétna náhodná premenná platí:

$$\mu_k = \sum_{i=1}^{+\infty} (x_i - \mathbb{E}(X))^k \cdot p_i, \tag{8}$$

kde s pravdepodobnosťou p_i náhodná premenná X nadobudne hodnotu x_i, $i = 1, 2, \dots$.

1.4 Charakteristická funkcia

Charakteristická funkcia existuje pre každú náhodnú premennú s daným rozdelením. Pre každé rozdelenie existuje práve jedna charakteristická funkcia, ktorá toto rozdelenie jednoznačne určuje.

Definícia 1.4. *Nech X je náhodná premenná, potom jej charakteristická funkcia má tvar:*

$$\varphi_X(t) = \mathbb{E}(e^{itX}) = \mathbb{E}(\cos tX) + i\mathbb{E}(\sin tX), \tag{9}$$

$t \in \mathbb{R}$ a i je imaginárna jednotka.

Ak je X spojitá náhodná premenná s hustotou $f(x)$, potom platí:

$$\varphi_X(t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} \cdot f(x) dx. \tag{10}$$

Ak je X diskrétna náhodná premenná platí:

$$\varphi_X(t) = \sum_k e^{itxk} \cdot p_k, \tag{11}$$

kde s pravdepodobnosťou p_k náhodná premenná X nadobudne hodnotu x_k, $k = 1, 2, \dots$.

1.5 Momentová vytvárajúca funkcia

Derivovaním momentovej vytvárajúcej funkcie v bode 0 dostávame momenty náhodných veličín. Nemusí však existovať pre všetky rozdelenia, existuje pre rozdelenia s ľahkými chvostami naopak pre rozdelenia s ťažkými chvostami neexistuje. Ak je známa, vieme určiť z akého rozdelenia pochádza náhodná veličina.

Definícia 1.5. *Nech X je náhodná premenná, potom jej momentová vytvárajúca funkcia funkcia má tvar:*

$$M_X(t) = \mathbb{E}(e^{tX}), \tag{12}$$

$t \in \mathbb{R}$.

Ak je X spojitá náhodná premenná s hustotou $f(x)$, potom platí:

$$M_X(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx} \cdot f(t)dt. \tag{13}$$

Ak je X diskrétna náhodná premenná platí:

$$M_X(t) = \sum_i e^{itx} \cdot p_i, \tag{14}$$

kde s pravdepodobnosťou p_i náhodná premenná X nadobudne hodnotu x_i, $i = 1, 2, \dots$.

Momenty získame pomocou derivácií podľa t v bode $t = 0$. Potom platí, že prvá derivácia $m_X(t)$ v bode $t = 0$ je stredná hodnota $\mathbb{E}(X)$. Druhá derivacia sa rovná disperzii $\mathbb{D}(X)$. Tretia derivácia sa rovná koeficientu šikmosti a štvrtá derivácia sa rovná koeficientu špicatosti.

1.6 Stredná hodnota

Definícia 1.6. *Ak je X spojitá náhodná premenná s hustotou $f(x)$, potom pre strednú hodnotu platí:*

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x)dx, \tag{15}$$

ak existuje $\int_{-\infty}^{+\infty} |x| \cdot f(x)dx$.

Ak je X *diskrétna náhodná premenná a rad* $\sum_{i=1}^{+\infty} |x_i| \cdot p_i$ *konverguje potom platí:*

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{i=1}^{+\infty} x_i \cdot p_i, \tag{16}$$

kde s pravdepodobnosťou p_i *náhodná premenná* X *nadobudne hodnotu* x_i, $i = 1, 2, \dots$.

Strednú hodnotu vieme dostať aj ako prvú deriváciu momentovej vytvárajúcej funkcie v bode 0. Ak si všimneme vzťahy (3) a (4), tak stredná hodnota je aj prvý začiatočný moment náhodnej premennej.

1.7 Disperzia

Definícia 1.7. *Nech* X *je náhodná premenná, potom jej disperzia má tvar:*

$$\mathbb{D}(X) = \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^2. \tag{17}$$

Ak je X *spojitá integrovateľná náhodná premenná s hustotou* $f(x)$, *potom platí:*

$$\mathbb{D}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mathbb{E}(X))^2 \cdot f(x)dx, \tag{18}$$

ak tento integrál existuje.

Ak je X *diskrétna náhodná premenná platí:*

$$\mathbb{D}(X) = \sum_{i=1}^{+\infty} (x_i - \mathbb{E}(X))^2 \cdot p_i, \tag{19}$$

kde s pravdepodobnosťou p_i *náhodná premenná* X *nadobudne hodnotu* x_i, $i = 1, 2, \dots$.

Na výpočet disperzie sa využíva vzťah $\mathbb{D}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}^2(X)$. Vieme ju dostať aj ako druhú deriváciu momentovej vytvárajúcej funkcie v bode 0. Zo vzťahu (6) vidíme, že disperzia je druhý centrálny moment náhodnej premennej.

1.8 Koeficienty šikmosti a špicatosti

Koeficienty šikmosti a špicatosti sú definované cez tretí centrálny moment μ_3 a štvrtý centrálny moment μ_4.

Definícia 1.8. *Nech X je náhodná premenná, potom jej koeficient šikmosti má tvar:*

$$\gamma_1 = \frac{\mu_3(X)}{(\mathbb{D}(X))^{3/2}}. \tag{20}$$

Nech X je náhodná premenná, potom jej koeficient špicatosti má tvar:

$$\gamma_2 = \frac{\mu_4(X)}{(\mathbb{D}(X))^{2}} - 3. \tag{21}$$

Poznámka: Rovnica (21) je rovnica pre výpočet excess kurtosis (z angličtiny), ktorý udáva, či je rozdelenie viac alebo menej špicaté ako normálne rozdelenie, ktoré má koeficient špicatosti rovný 0.

2 Vlastnosti štatistických rozdelení

V tejto časti sa budeme venovať konkrétnym rozdeleniam. Uvedieme tu ich základné vlastnosti a obrázkom ilustrujeme, ako vyzerajú ich funkcie hustoty s meniacimi sa parametrami, [5], [9], [10].

2.1 Normálne rozdelenie

Normálne rozdelenie je jedno z najpoužívanejších rozdelení nazývané aj Gaussovo. Mnohé náhodné veličiny, s ktorými sa v praxi stretávame, napríklad chyby merania, majú normálne rozdelenie, alebo sa normálnym rozdelením dajú aproximovať.

Definícia 2.1. *Náhodná premenná X má normálne rozdelenie s parametrami μ a σ^2 práve vtedy, ak jej funkcia hustoty má tvar:*

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad x \in \mathbb{R}. \tag{22}$$

Zápis: $X \sim N(\mu, \sigma^2)$.

Veta 2.2. *Náhodná premenná X s normálnym rozdelením $N(\mu, \sigma^2)$ má charakteristickú funkciu:*

$$\varphi(t) = e^{\left(i\mu t - \frac{t^2\sigma^2}{2}\right)} \tag{23}$$

Veta 2.3. *Náhodná premenná X s normálnym rozdelením $N(\mu, \sigma^2)$ má momentovú vytvárajúcu funkciu:*

$$M_X(t) = e^{\left(\mu t + \frac{t^2\sigma^2}{2}\right)} \tag{24}$$

a teda pre náhodnú premennú $X \sim N(\mu, \sigma^2)$:

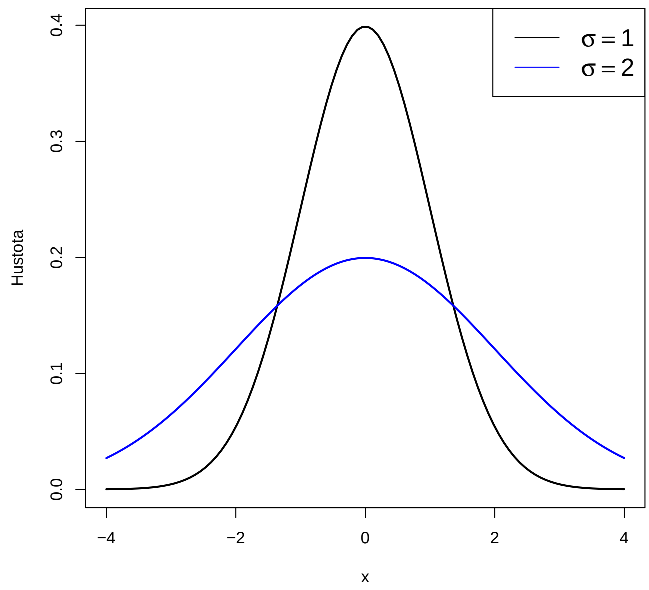
Stredná hodnota je $\mathbb{E}(X) = \mu$.

Disperzia je $\mathbb{D}(X) = \sigma^2$.

Koeficient šikmosti je $\gamma_1 = 0$.

Koeficient špicatosti je $\gamma_2 = 0$.

Obr. 1: Normálne rozdelenie



Na obrázku 1 je graf hustoty normálneho rozdelenia so strednou hodnotou $\mu = 0$. Tento parameter určuje umiestnenie najväčšej hodnoty rozdelenia. Preto zmenou μ by sa graf posúval po osi x. Keď $\sigma = 1$, vidíme základné $N(0,1)$, čím je disperzia väčšia, tým sa graf hustoty sploští, tzv. hodnoty majú väčší rozptyl (graf sa roztiahne).

2.2 Logistické rozdelenie

Logistické rozdelenie sa používa najmä v logistických regresiách, pri umelých neurónových sieťach a iných. Je podobné normálnemu rozdeleniu, líši sa však chvostami, ktoré sú ťažšie, teda hodnota koeficientu špicatosti je vyššia.

Definícia 2.4. *Náhodná premenná X má logistické rozdelenie s parametrami μ, σ, ak jej funkcia hustoty má tvar:*

$$f(x) = \frac{e^{-\frac{x-\mu}{\sigma}}}{\sigma\left(1 + e^{-\frac{x-\mu}{\sigma}}\right)^2} \quad , pre \quad x \in \mathbb{R}. \tag{25}$$

Zápis: $X \sim Logistic(\mu, \sigma)$.

Veta 2.5. *Náhodná premenná X s logistickým rozdelením Logistic(μ, σ) má momentovú vytvárajúcu funkciu:*

$$M_X(t) = \pi\sigma t \frac{e^{\mu t}}{\sin(\pi\sigma t)}, \tag{26}$$

a teda pre náhodnú premennú $X \sim$ Logistic(μ, σ) platí:

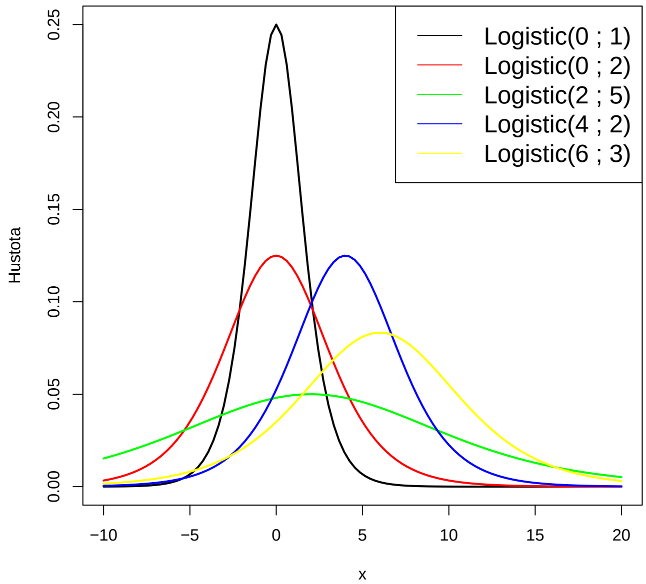
Stredná hodnota je $\mathbb{E}(X) = \mu$.

Disperzia je $\mathbb{D}(X) = \frac{\pi^2\sigma^2}{3}$.

Koeficient šikmosti je $\gamma_1 = 0$.

Koeficient špicatosti je $\gamma_2 = \frac{6}{5}$.

Obr. 2: Logistické rozdelenie



Podobne ako normálne rozdelenie aj logistické rozdelenie má strednú hodnotu μ, ktorá určuje umiestnenie najväčšej hodnoty. Logistické rozdelenie je taktiež symetrické o čom nám hovorí koeficient šikmosti rovný 0. σ je škálovací parameter zodpovedajúci štandardnej odchýlke. Vplyv parametrov na tvar funkcie hustoty je znázornený na obrázku 2.

2.3 Poissonovo rozdelenie

Poissonovo rozdelenie je rozdelením, ktoré modeluje výskyt zriedkavých javov v sérii veľkého počtu n nezávislých pokusov. Používa sa napríklad pri modelovaní príchodu zákazníkov, objednávok a telekomunikáciách.

Definícia 2.6. *Poissonovo rozdelenie s parametrom $\lambda > 0$ je diskrétne rozdelenie na množine celých nezáporných čísel. Pravdepodobnostná funkcia má tvar:*

$$P(X = k) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, ... \tag{27}$$

Zápis: $X \sim Po(\lambda)$.

Veta 2.7. *Náhodná premenná X s poissonovým rozdelením $Po(\lambda)$ má charakteristickú funkciu:*

$$\varphi(t) = e^{\lambda(e^{it}-1)} \tag{28}$$

Veta 2.8. *Náhodná premenná X s poissonovým rozdelením $Po(\lambda)$ má momentovú vytvárajúcu funkciu:*

$$M_X(t) = e^{\lambda(e^t-1)} \tag{29}$$

a teda pre náhodnú premennú $X \sim Po(\lambda)$:

Stredná hodnota je $\mathbb{E}(X) = \lambda$.

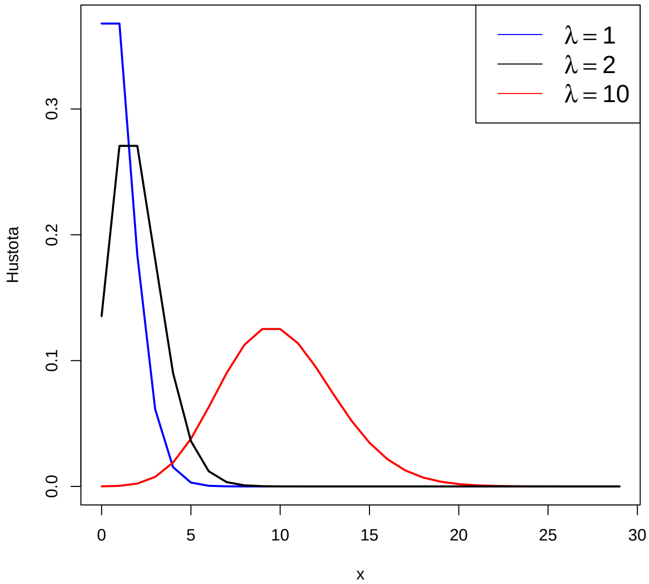
Disperzia je $\mathbb{D}(X) = \lambda$.

Koeficient šikmosti je $\gamma_1 = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}$.

Koeficient špicatosti je $\gamma_2 = \frac{1}{\lambda}$.

Poissonovo rozdelenie má parameter λ, ktorý určuje umiestnenie najväčšej hodnoty rozdelenia ale aj rozptyl. Čím je λ väčšia tým sa koeficienty šikmosti a špicatosti zmenšujú, čo znamená, že pre $\lambda \longrightarrow \infty$ sa rozdelenie stáva symetrickým so špicatosťou rovnakou normálnemu.

Obr. 3: Poissonovo rozdelenie



2.4 Exponenciálne rozdelenie

Exponenciálne rozdelenie je rozdelením, ktoré dobre popisuje rozdelenie doby životnosti zariadení, u ktorých dochádza k poruche vzhľadom na vnútorné príčiny, ale nie v dôsledku opotrebovania.

Niekedy sa označuje ako rozdelenie "bez pamäte". Informácia o tom, že udalosť nenastala k hodín, nemení pravdepodobnosť, že nastane v budúcich x hodinách.

Definícia 2.9. *Náhodná premenná X má exponenciálne rozdelenie s parametrom $\lambda > 0$, ak jej funkcia hustoty má tvar:*

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & ak \quad x > 0 \\ 0, & ak \quad x \leq 0. \end{cases} \tag{30}$$

A jej distribučná funkcia má tvar:

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x}, & ak \quad x > 0 \\ 0, & ak \quad x \leq 0. \end{cases} \tag{31}$$

Zápis: $X \sim E(\lambda)$.

Veta 2.10. *Náhodná premenná X s exponenciálnym rozdelením $E(\lambda)$ má charakteristickú funkciu:*

$$\varphi(t) = \frac{\lambda}{\lambda - it} \tag{32}$$

Veta 2.11. *Náhodná premenná X s exponenciálnym rozdelením $E(\lambda)$ má momentovú vytvárajúcu funkciu:*

$$M_X(t) = \frac{\lambda}{\lambda - t}, \quad t < \lambda. \tag{33}$$

a teda pre náhodnú premennú $X \sim E(\lambda)$:

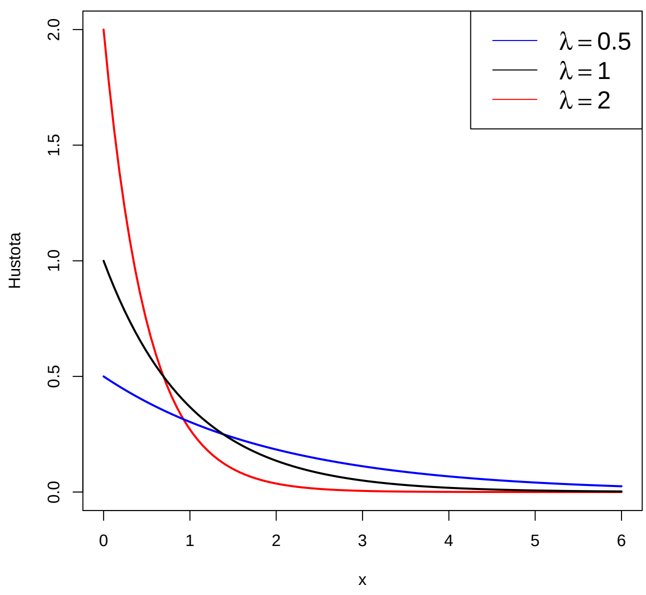
Stredná hodnota je $\mathbb{E}(X) = \frac{1}{\lambda}$.

Disperzia je $\mathbb{D}(X) = \frac{1}{\lambda^2}$.

Koeficient šikmosti je $\gamma_1 = 2$.

Koeficient špicatosti je $\gamma_2 = 6$.

Obr. 4: Exponenciálne rozdelenie



Na obrázku 4 je graf hustoty exponenciálneho rozdelenia s parametrom λ. Tento parameter určuje najvyššiu hodnotu rozdelenia. Z disperzie, ktorá je rovná $\frac{1}{\lambda^2}$ a tiež z obrázka vidíme, že zväčšovaním parametra λ sa rozptyl zmenšuje.

2.5 Beta rozdelenie

Beta rozdelenie je vhodné pre modelovanie veličín, ktorých hodnoty sú ohraničené zhora aj zdola a dá sa predpokladať existencia jediného modusu patriaceho do intervalu možných hodnôt.

Definícia 2.12. *Náhodná premenná X má beta rozdelenie s parametrami $\alpha > 0$, $\beta > 0$, ak jej funkcia hustoty má tvar:*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{B(\alpha,\beta)} x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1}, & \textit{pre} \quad x \in (0,1) \\ 0, & \textit{inde}, \end{cases} \tag{34}$$

kde $B(\alpha,\beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} = \int\limits_0^1 x^{\beta-1}(1-x)^{\alpha-1}dx$ je tzv. beta funkcia s parametrami α, β a Γ je gamma funkcia definovaná vzťahom $\Gamma(\alpha) = \int\limits_0^\infty t^{\alpha-1}e^{-t}dt$.
Zápis: $X \sim B(\alpha,\beta)$.

Veta 2.13. *Náhodná premenná X s beta rozdelením $B(\alpha,\beta)$ má začiatočné momenty:*

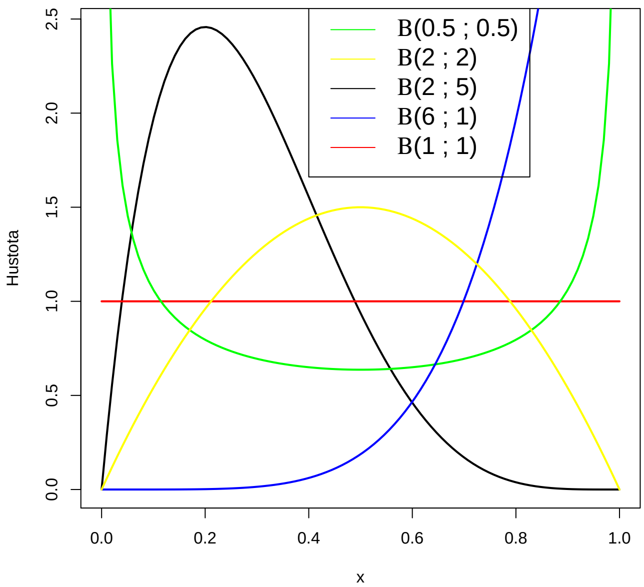
$$\mu_j = \Pi_{i=0}^{j-1} \frac{\alpha+i}{\alpha+\beta+i} = \frac{B(\alpha+j,\beta)}{B(\alpha,\beta)} = \frac{\Gamma(\alpha+j)\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\alpha+\beta+j)} \tag{35}$$

a teda pre náhodnú premennú $X \sim B(\alpha,\beta)$ platí:

Stredná hodnota je $\mathbb{E}(X) = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}$.
Disperzia je $\mathbb{D}(X) = \frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)}$.
Koeficient šikmosti je $\gamma_1 = \frac{2(\beta-\alpha)\sqrt{1+\alpha+\beta}}{\sqrt{\alpha\beta}(2+\alpha+\beta)}$.
Koeficient špicatosti je $\gamma_2 = \frac{6[\alpha^3+\alpha^2(1-2\beta)+\beta^2(1+\beta)-2\alpha\beta(2+\beta)]}{\alpha\beta(\alpha+\beta+2)(\alpha+\beta+3)}$.

Beta rozdelenie je veľmi zaujímavé, je definované iba na intervale $(0,1)$. Má dva parametre α a β, ktoré sú parametre tvaru.

Obr. 5: Beta rozdelenie



2.6 χ^2 - rozdelenie

Náhodné premenné, ktoré majú χ^2 - rozdelenie, sa používajú pri testovaní štatistických hypotéz a pri intervalových odhadoch neznámych parametrov základného súboru.

Definícia 2.14. *Náhodná premenná X má χ^2 - rozdelenie s k stupňami voľnosti ($k \in \mathbb{N}$), ak jej funkcia hustoty má tvar:*

$$f(x) = \begin{cases} 0, & ak \quad x \leq 0 \\ \frac{1}{2^{k/2}\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)} x^{k/2-1} e^{-x/2}, & ak \quad x > 0. \end{cases} \tag{36}$$

kde Γ je gamma funkcia definovaná vzťahom $\Gamma(\alpha) = \int\limits_0^\infty t^{\alpha-1}e^{-t}dt$.
Zápis: $X \sim \chi^2(k)$.

Veta 2.15. *Náhodná premenná X s χ^2 - rozdelením $\chi^2(k)$ má začiatočné momenty:*

$$\mu_j = \frac{2^j\Gamma\left(j + \frac{k}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)} \tag{37}$$

a teda pre náhodnú premennú $X \sim \chi^2(k)$ platí:

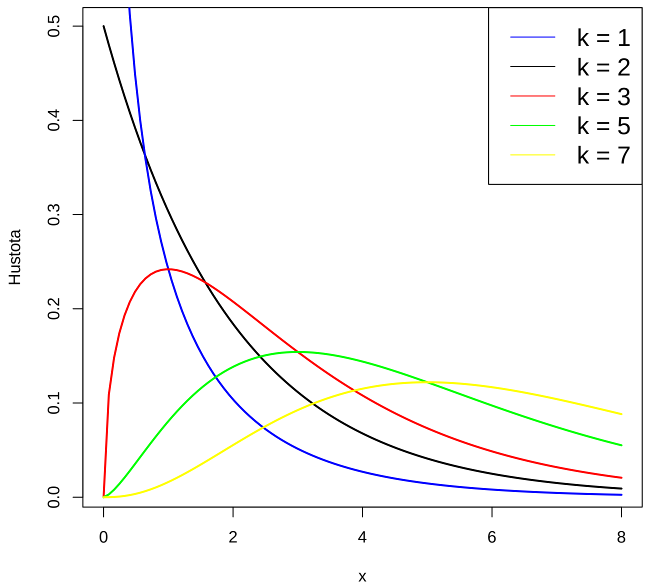
Stredná hodnota je $\mathbb{E}(X) = k$.

Disperzia je $\mathbb{D}(X) = 2k$.

Koeficient šikmosti je $\gamma_1 = \sqrt{\frac{8}{k}}$.

Koeficient špicatosti je $\gamma_2 = \frac{12}{k}$.

Obr. 6: χ^2 - rozdelenie



Na obrázku 6 je graf hustoty χ^2 - rozdelenia s k stupňami voľnosti. Vidíme, že čím viac stupňov voľnosti χ^2 - rozdelenie má, tým väčšie sú stredná hodnota a disperzia a menšie sú koeficienty šikmosti a špicatosti.

3 Rozdelenia s ťazkými chvostami

V predchádzajúcej kapitole sme sa venovali základnejším štatistickým rozdeleniam. V tejto kapitole popíšeme rozdelenia s ťažkými chvostami, ktoré sú stále častejšie používané. Rozdelenia s ťažkými chvostami majú nekonečnú momentovú vytvárajúcu funkciu.

Rozdelenia s ťažkými chvostami sa rozoberajú napríklad v [4], [12], [15], kde nájdeme aj definíciu ťažkého chvostu a iné charakteristiky.

V tejto kapitole sme čerpali hlavne z [1], [5], [6], [10], [16].

3.1 Studentovo t-rozdelenie

Studentovo t-rozdelenie sa používa pri analýze výsledkov regresnej analýzy. Využíva sa aj k testovaniu hypotéz a určovaní intervalových odhadov.

Definícia 3.1. *Náhodná premenná X má studentovo t-rozdelenie s k stupňami voľnosti, ak jej funkcia hustoty má tvar:*

$$f(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\sqrt{k\pi}\,\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)} \left(1 + \frac{x^2}{k}\right)^{-\frac{k+1}{2}} \qquad \text{pre} \quad x \in (-\infty, \infty). \tag{38}$$

kde Γ je gamma funkcia definovaná vzťahom $\Gamma(\alpha) = \int\limits_0^\infty t^{\alpha-1}e^{-t}dt$.
Zápis: $X \sim t(k)$.

Veta 3.2. *Náhodná premenná X so studentovým t-rozdelením $t(k)$ má začiatočné momenty:*

$$\mu_j = \begin{cases} 0 & \text{pre } j \text{ nepárne}, \quad 0 < j < k \\ \frac{\Gamma\left(\frac{j+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{k-j}{2}\right)k^{j/2}}{\sqrt{\Pi}\,\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)} & \text{pre } j \text{ párne}, \quad 0 < j < k \\ \text{nie je definované} & \text{pre } j \text{ nepárne}, \quad 0 < k \leq j \\ \infty & \text{pre } j \text{ párne}, \quad 0 < k \leq j, \end{cases} \tag{39}$$

a teda pre náhodnú premennú $X \sim t(k)$ platí:

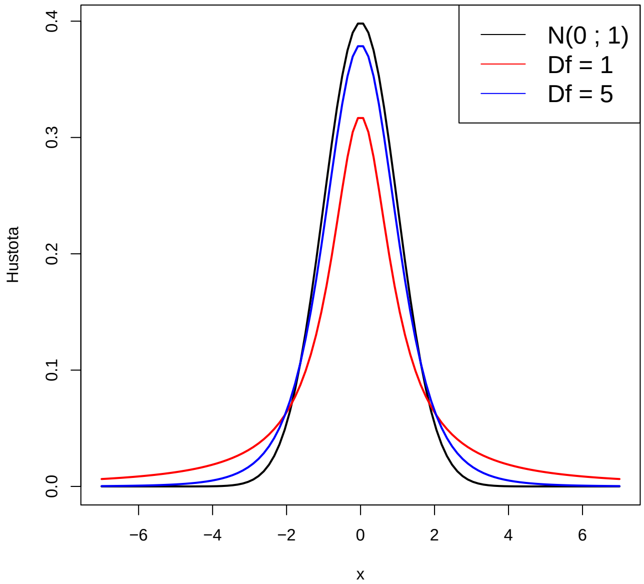
Ak $k > 1$, stredná hodnota je $E(X) = 0$.

Ak $k > 2$, disperzia je $D(X) = \frac{k}{k-2}$.

Koeficient šikmosti je $\gamma_1 = 0$.

Ak $k > 4$, koeficient špicatosti je $\gamma_2 = \frac{6}{k-4}$.

Obr. 7: Studentovo t-rozdelenie



Studentovo t-rozdelenie je symetrické. Čím viac stupňov voľnosti má, tým je menej špicaté a približuje sa normálnemu rozdeleniu pre velké k, viď obrázok 7.

3.2 Lognormálne rozdelenie

Lognormálne rozdelenie sa najčastejšie používa pre jednostranne ohraničené údaje. Náhodná premenná X má lognormálne rozdelenie s parametrami μ a σ^2, ak náhodná premenná $\ln X$ má normálne rozdelenie $N(\mu, \sigma^2)$.

Definícia 3.3. *Náhodná premenná X má lognormálne rozdelenie s parametrami μ, σ^2, ak jej funkcia hustoty má tvar:*

$$f(x) = \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\ln x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad , pre \quad x > 0. \tag{40}$$

Zápis: $X \sim LogN(\mu, \sigma^2)$.

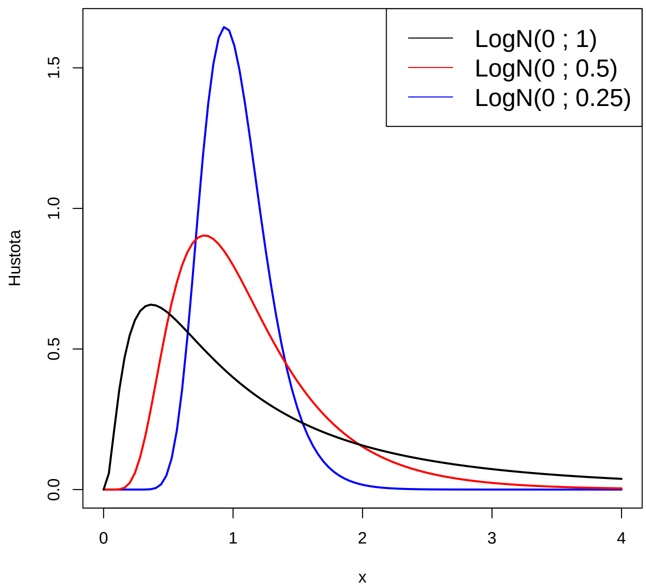
Veta 3.4. *Náhodná premenná X s lognormálnym rozdelením $LogN(\mu, \sigma^2)$ má začiatočné momenty:*

$$\mu_j = e^{n\mu + \frac{n^2\sigma^2}{2}} \tag{41}$$

a teda pre náhodnú premennú $X \sim B(\alpha, \beta)$ platí:

$$\textit{Stredná hodnota je } \mathbb{E}(X) = e^{\mu+\sigma^2/2}.$$
$$\textit{Disperzia je } \mathbb{D}(X) = e^{2\mu+\sigma^2}\left(e^{\sigma^2}-1\right).$$
$$\textit{Substitúcia: } \omega = e^{\sigma^2}$$
$$\textit{Koeficient šikmosti je } \gamma_1 = (\omega+2)\sqrt{\omega-1}.$$
$$\textit{Koeficient špicatosti je } \gamma_2 = \omega^4 + 2\omega^3 + 3\omega^2 - 6.$$

Obr. 8: Lognormálne rozdelenie



Na obrázku 8 sú hustoty lognormálneho rozdelenia s rovnakou hodnotou μ a rozdielnou hodnotou parametra σ.

3.3 Cauchyho rozdelenie

Cauchyho rozdelenie sa používa najmä vo fyzike.

Definícia 3.5. *Náhodná premenná X má cauchyho rozdelenie s parametrami θ, λ, ak jej funkcia hustoty má tvar:*

$$f(x) = \frac{1}{\pi\lambda\left[1+\left(\frac{x-\theta}{\lambda}\right)^2\right]} \quad , pre \quad x \in \mathbb{R}. \tag{42}$$

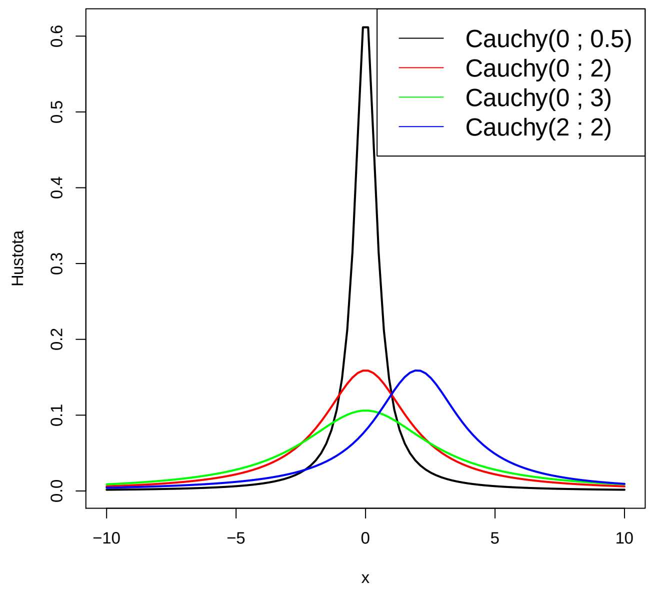
Zápis: $X \sim Cauchy(\theta, \lambda)$.

Veta 3.6. *Štandardným cauchyho rozdelením sa rozumie cauchyho rozdelenie s parametrami* $Cauchy(0,1)$ *a je to prípad studentovho t-rozdelenia s jedným stupňom voľnosti* $t(1)$. *Funkcia hustoty v tomto prípade má tvar:*

$$f(x) = \frac{1}{\pi\left(1+x^2\right)} \quad , pre \quad x \in \mathbb{R}. \tag{43}$$

Veta 3.7. *Náhodná premenná* X *s Cauchyho rozdelením* $Cauchy(\theta, \lambda)$ *nemá konečné momenty čiže stredná hodnota ani disperzia niesu definované a rovnako niesu definované ani šikmosť a špicatosť.*

Obr. 9: Cauchyho rozdelenie



Cauchyho rozdelenie má dva parametre, θ je parameter umiestnenia najväčšej hodnoty rozdelenia λ je parameter škály (určuje rozsah). Je to rozdelenie s oboma ťažkými chvostami.

3.4 Gamma rozdelenie

Gamma rozdelenie sa používa napríklad v poistnej matematike pri modelovaní výšky poistných plnení. Využíva sa aj na modelovanie pravdepodobnosti doby čakania alebo poruchovosti.

Definícia 3.8. *Náhodná premenná X má gamma rozdelenie, ak jej funkcia hustoty má tvar:*

$$f(x) = x^{\alpha-1}\frac{e^{-\beta x}\beta^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)}, \quad pre \quad x > 0, \tag{44}$$

kde Γ je gamma funkcia definovaná vzťahom $\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} t^{\alpha-1}e^{-t}dt$,
pre ľubovoľné komplexné číslo k s kladnou reálnou časťou.
Zápis: $X \sim Gamma(\alpha, \beta)$.

Veta 3.9. *Náhodná premenná X s gamma rozdelením $Gamma(\alpha, \beta)$ má charakteristickú funkciu:*

$$\varphi(t) = \left(1 - \frac{it}{\beta}\right)^{-\alpha} \tag{45}$$

Veta 3.10. *Náhodná premenná X s gamma rozdelením $Gamma(\alpha, \beta)$ má momentovú funkciu:*

$$M_X(t) = \left(1 - \frac{t}{\beta}\right)^{-\alpha}, \quad pre \quad t < \beta. \tag{46}$$

a teda pre náhodnú premennú $X \sim E(\lambda)$:

Stredná hodnota je $\mathbb{E}(X) = \frac{\alpha}{\beta}$.

Disperzia je $\mathbb{D}(X) = \frac{\alpha}{\beta^2}$.

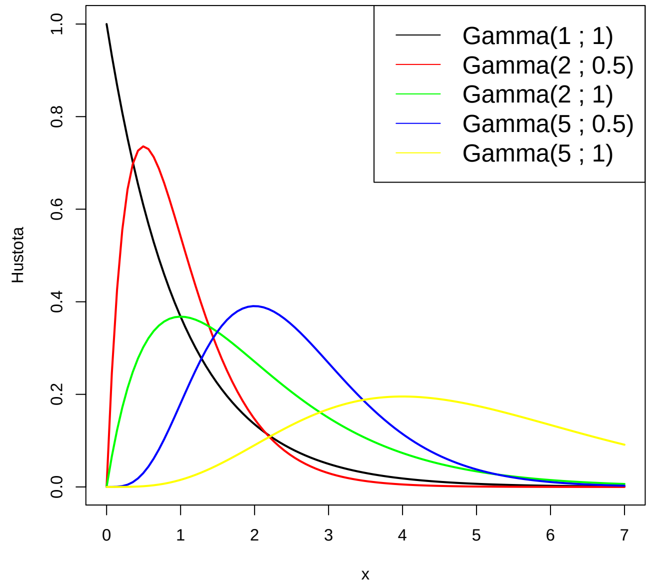
Koeficient šikmosti je $\gamma_1 = \frac{2}{\sqrt{\alpha}}$.

Koeficient špicatosti je $\gamma_2 = \frac{6}{\alpha}$.

Špeciálne ak $\alpha \in \mathbb{Z}$, potom súčet nezávislých náhodných premenných s exponenciálnym rozdelením, ktoré majú parameter β, reprezentuje gamma rozdelenie. Potom ak $\alpha = 1$, gama rozdelenie $Gamma(1, \beta)$ je rovnaké ako rozdelenie $E(\beta)$.

Na obrázku 10 je graf hustoty gamma rozdelenia s parametrami α a β. α je parameter tvaru, čím je väčší, tým je menej zošikmený a špicatý graf (viď koeficient šikmosti a špicatosti). $1/\beta$ je parameter škály (rozsahu), čím je väčší, tým je rozptyl väčší.

Obr. 10: Gamma rozdelenie



3.5 Weibullovo rozdelenie

Weibullovo rozdelenie sa využíva ako teoretický model pre štatistické modelovanie životnosti a bezporuchovosti elektronických systémov alebo komponentov. Využiva sa aj pri modelovaní rôznych javov, ako napríklad starnutí populácie.

Definícia 3.11. *Náhodná premenná X má weibullove rozdelenie s parametrami k, λ, ak jej funkcia hustoty má tvar:*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{k}{\lambda}\left(\frac{x}{\lambda}\right)^{k-1} e^{-(x/\lambda)^k}, & ak \quad x \geq 0 \\ 0, & ak \quad x < 0 \end{cases} \quad pre \quad k > 0, \lambda > 0. \tag{47}$$

Zápis: $X \sim W(\lambda, k)$.

Veta 3.12. *Náhodná premenná X s weibullovím rozdelením $W(\lambda, k)$ má charakteristickú funkciu:*

$$\varphi(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(it)^n \lambda^n}{n!} \Gamma\left(1 + \frac{n}{k}\right). \tag{48}$$

kde Γ je gamma funkcia definovaná vzťahom $\Gamma(\alpha) = \int\limits_0^\infty t^{\alpha-1} e^{-t} dt$.

Veta 3.13. *Náhodná premenná X s weibullovím rozdelením $W(\lambda, k)$ má momentovú vytvárajúcu funkciu:*

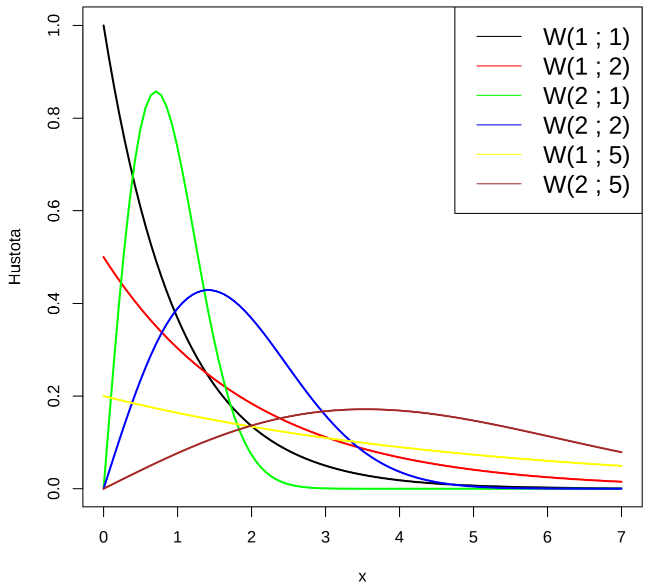
$$M_X(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^n \lambda^n}{n!} \Gamma\left(1 + \frac{n}{k}\right), \tag{49}$$

a teda pre náhodnú premennú $X \sim W(\lambda, k)$ platí:

Stredná hodnota je $\mathbb{E}(X) = \lambda\Gamma\left(1 + \frac{1}{k}\right)$, pre $k > 1$.

Disperzia a koeficienty šikmosti a špicatosti sú popísané napríklad v [13].

Obr. 11: Weibullovo rozdelenie



Weibullovo rozdelenie má dva parametre(existuje aj troj-parametrové). λ je parameter škály a k je parameter tvaru.

4 Testovanie štatistických rodelení

4.1 Testy zhody

V tejto kapitole popíšeme dva testy zhody, pomocou ktorých vieme zistiť, ako "dobré' je naše namodelované rozdelenie z dát, [10].

4.1.1 χ^2 - test dobrej zhody

χ^2 - test dobrej zhody inak nazývaný aj Pearsonov test dobrej zhody, je najstarší neparametrický test. Týmto testom sa testuje zhoda empirického a teoretického rozdelenia.

Definícia 4.1. *Nech testujeme nulovú hypotézu H_0, ktorá ak platí, tak testovacia štatistika má asymptoticky χ^2 - rozdelenie s $k-1-m$ stupňami voľnosti, kde m je počet odhadnutých parametrov a táto štatistika má tvar:*

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(f_{e,i} - f_{o,i})^2}{f_{o,i}}, \tag{50}$$

kde $f_{e,1}$, $f_{e,2}$, ...,$f_{e,k}$ je k tried početností meraní x_1, x_2, ...,x_n. Početnosti $f_{e,i}$ sú empirické. Predpokladajme, že tento súbor má určité teoretické rozdelenie. Početnosti $f_{o,i}$ sú teoretické pričom $f_{o,i} = n \cdot p_i$, kde p_i je pravdepodobnosť hodnoty x_i a n je rozsah výberového súboru. Testovanou hypotézou bude hypotéza o zhode medzi empirickým a teoretickým rozdelením. Testovaciu hypotézu zamietame na hladine významnosti α, ak hodnota štatistiky prekročí kritickú hodnotu $\chi^2_\alpha(k-1-m)$. Tie sú tabelované, napríklad v [10].

Teoretické početnosti $f_{o,i}$ musia splňať podmienku:
$f_{o,i} \leq 5$, pre $i = 1, 2, ..., k$. Niekedy sa dá zlúčiť dve alebo viac tried do jednej, aby túto podmienku splňali.

Tento test je vhodné používať len pri dostatočne veľkom rozsahu výberového súboru, pretože takto definovaná testovacia štatistika má asymptoticky χ^2 - rozdelenie.

4.1.2 Kolmogorovov - Smirnovov jednovýberový test

Tento test umožňuje testovať zhodu empirickej a teoretickej distribučnej funkcie v prípade spojitej teoretickej distribučnej funkcie so známymi parametrami. Je možné ho použiť aj pri menšom rozsahu výberového súboru.

Definícia 4.2. *Nech testujme nulovú hypotézu H_0, že empirické a teoretické pravdepodobnostné rozdelenia sa štatisticky nelíšia oproti alternatívnej hypotéze H_1, že sa líšia. Testovacia štatistika má tvar:*

$$D = \sup |F_n(x) - F(x)|, \tag{51}$$

kde $F_n(x)$ je hodnota empirickej distribučnej funkcie v bode x a $F(x)$ je hodnota teoretickej distribučnej funkcie v bode x postupnosti realizácií náhodného výberu zo základného súboru so spojitým rozdelením. Nech táto postupnosť je usporiadaná vzostupne podľa veľkosti, tzv. $x_{(1)} \leq x_{(2)} \leq ... \leq x_{(n)}$. Teoretická distribučná funkcia F je určená nulovou hypotézou H_0 a empirická distribučná funkcia F_n je funkciou výberu, ktorá má tvar:

$$F_n(x) = \begin{cases} 0, & ak \quad x \leq x_{(1)} \\ \frac{k}{n}, & ak \quad x_{(k)} < x \leq x_{(k+1)}, \quad k = 1, 2, ..., n-1 \\ 1, & ak \quad x \geq x_{(n)} \end{cases} \tag{52}$$

K zamietnutiu nulovej hypotézy H_0 budú viesť vysoké hodnoty testovacieho kritéria. Nulovú hypotézu H_0 zamietame na hladine významnosti α, ak je hodnota testovacieho kritéria D väčšia ako príslušná kritická hodnota $D_n(\alpha)$ Kolmogorovovho-Smirnovovho testu. Ako kritické hodnoty $D_n(\alpha)$ Kolmogorovovho - Smirnovovho testu sa používajú kvantily tohto rozdelenia a tie sú pre malé n ($n \leq 35$) tabelované v [10].

5 Využitie vo financiách

Pri analýzach, vyhodnocovaní a predikovaní rizika je dôležité modelovať reálne dáta, na základe ktorých sa zostavujú očakávania výnosov VaR. Ďalej pri návrhoch skladby portfólia a iných.

Pri modelovaní cien sa využívajú rôzne metódy. V práci sa zaoberáme modelovaním vývoja cien aktív pomocou ich rozdelení. Konkrétne budeme rozoberať problematiku dvoch časových radov a to Euro STOXX 50 Indexu a Austrian Traded Indexu.

Budeme modelovať logaritmické výnosy z historických dát spomínaných indexov. Výpočty boli robené v programe R. Máme dva časové rady, oba po dobu 10 rokov. Pri indexe Euro STOXX 50 máme k dispozícii 2605 dát a pri indexe Austrian Traded je to 2515 dát, [16].

Budeme teda pracovať s logaritmickými výnosmi a teda:

$$r_t = ln\frac{P_t}{P_{t-1}},$$

čo je výhodné z viacerých dôvodov. Napríklad k - periódový logaritmický výnos je rovný súčtu logaritmických výnosov medzi prvou a k - tou periódou a veľmi dobre aproximuje diskrétne výnosy pri krátkych periódach.

Vypočítali sme základné popisné charakteristiky, ktoré sú v tabuľke 1.

	Euro STOXX 50 Index	**Austrian Traded Index**
Priemer	0,000021	0,0003
Smerodajná odchýlka	0,00022	0,00027
Šikmosť	0,0273	-0,2997
Špicatosť	5,8150	6,1434
Minimum	-0,0821	-0,1025
Maximum	0,1044	0,1202
1.kvantil	-0,0066	-0,0066
3.kvantil	0,0072	0,0087

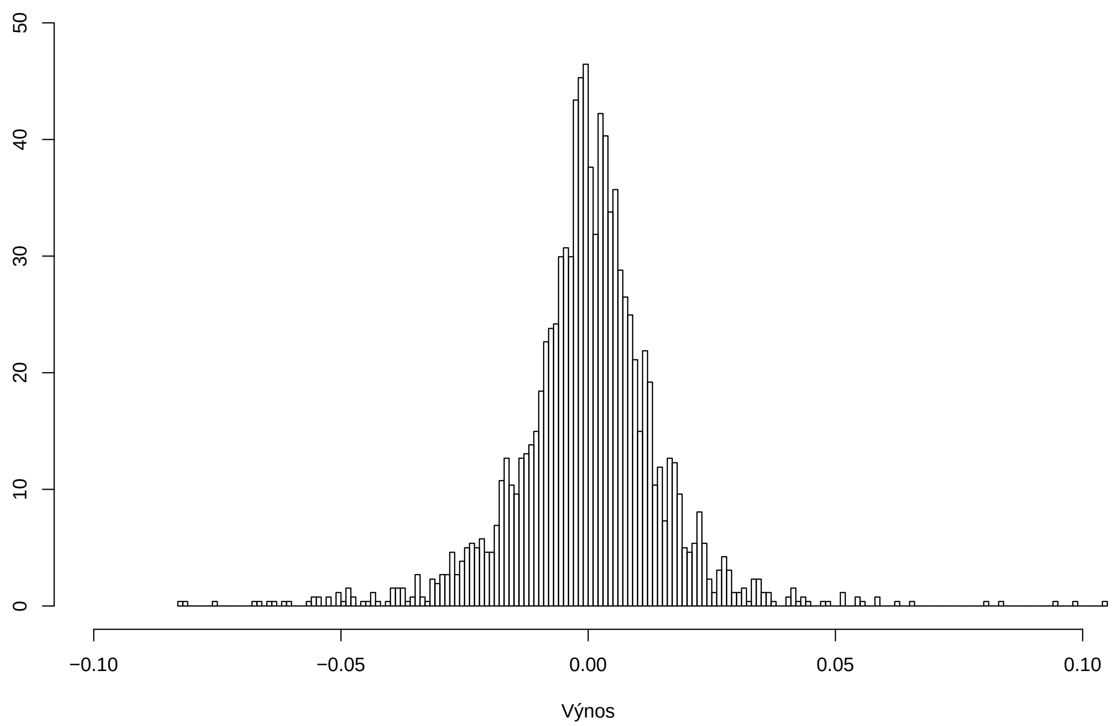
Tabuľka 1: Základné popisné charakteristiky logaritmických výnosov indexov

5.1 Voľba rozdelení a odhad parametrov

Dôležité je vytvoriť si predstavu o dátach. V minulosti bola snaha logaritmické výnosy modelovať normálnym rozdelením, no kríza spôsobuje práve väčšsie výkyvy v stratách a výnosoch, preto sa čoraz častejšie používajú rozdelenia s ťažkými chvostami. Z obrázku 12 vidíme, že to budú rozdelenia s oboma ťažkými chvostami.

Rozhodli sme sa pre tieto rozdelenia: normálne, logistické, Studentovo a Cauchyho.

Obr. 12: Histogram Euro STOXX 50 Index



Teraz potrebujeme odhadnúť parametre týchto rozdelení. Je viac metód, ktorými sa parametre dajú odhadnúť, my sa im však nebudeme v tejto práci venovať, teória k týmto metódam je napríklad v [8], [11], [14].

V R-ku sme použili funkciu na odhad parametrov, ktorá využíva metódu maximálnej vierohodnosti. Napríklad pre normálne rozdelenie sme parametre odhadli takto:

fitdistr(data, "normal"),

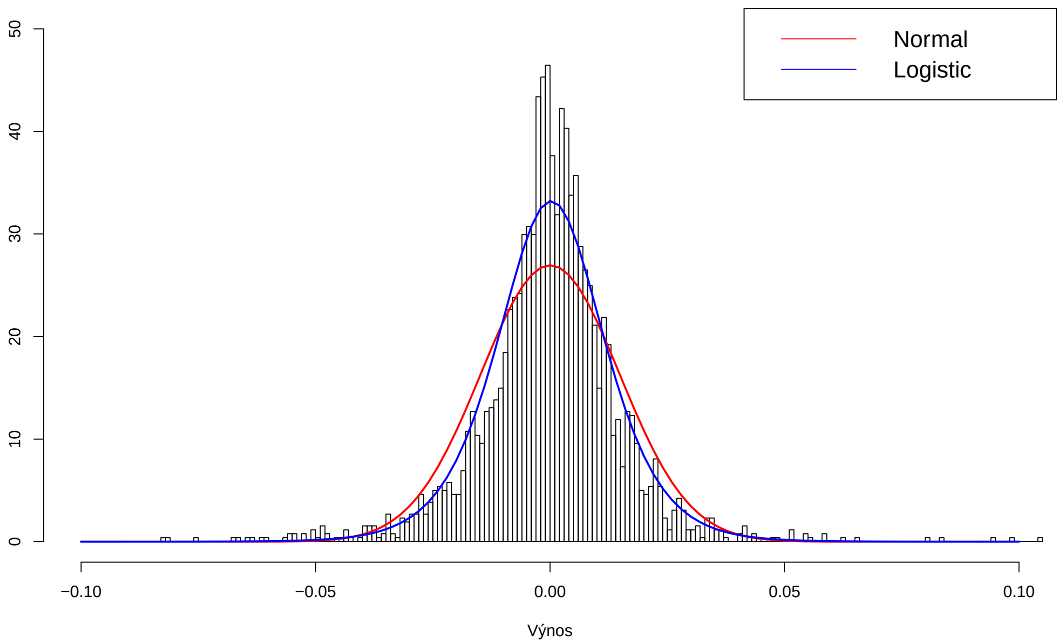
kde data sú naše logaritmické výnosy.
V tabuľke 2 sú odhadnuté parametre rozdelení pre oba indexy.

Rozdelenie	**Odhady pre Euro STOXX 50**	**Odhady pre Austrian Traded**
normálne	$\hat{\mu} = 0,000021$; $\hat{\sigma} = 0,0148$	$\hat{\mu} = 0,000296$; $\hat{\sigma} = 0,0166$
logistické	$\hat{\mu} = 0,000234$; $\hat{\sigma} = 0,0075$	$\hat{\mu} = 0,000843$; $\hat{\sigma} = 0,0083$
Studentovo	$\hat{m} = 0,00036$; $\hat{s} = 0,0094$; $\hat{t} = 3,012$	$\hat{m} = 0,0012$; $\hat{s} = 0,0101$; $\hat{t} = 2,85$
Cauchyho	$\hat{\theta} = 0,00047$; $\hat{\lambda} = 0,0066$	$\hat{\theta} = 0,0015$; $\hat{\lambda} = 0,00732$

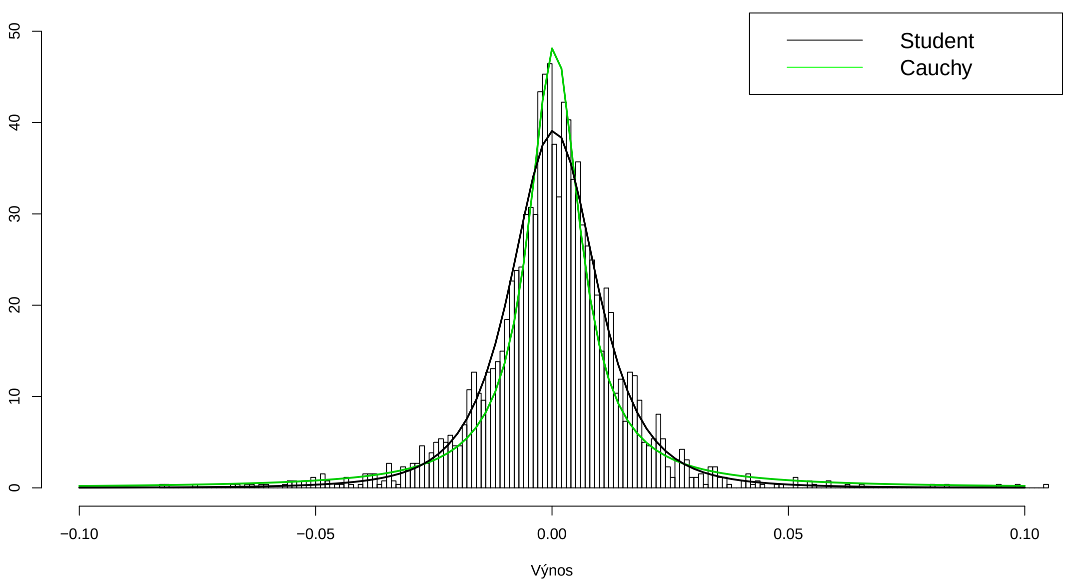
Tabuľka 2: Odhady parametrov

Teraz vykreslíme histogram našich dát a vložíme doň grafy hustôt rozdelení s odhadnutými parametrami. Na obrázkoch 13 a 14 je histogram Euro STOXX 50 Indexu s hustotami nami vybraných rozdelení. V obrázkoch 15 a 16 je histogram Austrian Traded Index s hustotami rozdelení, ktorých parametre sme odhadovali.

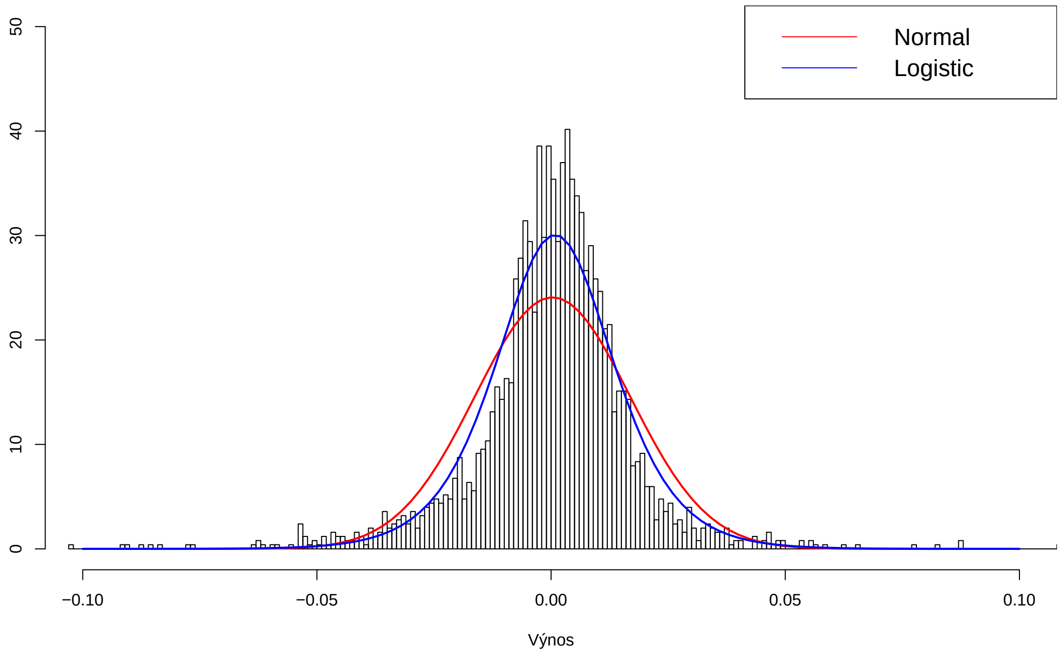
Obr. 13: Histogram Euro STOXX 50 Index



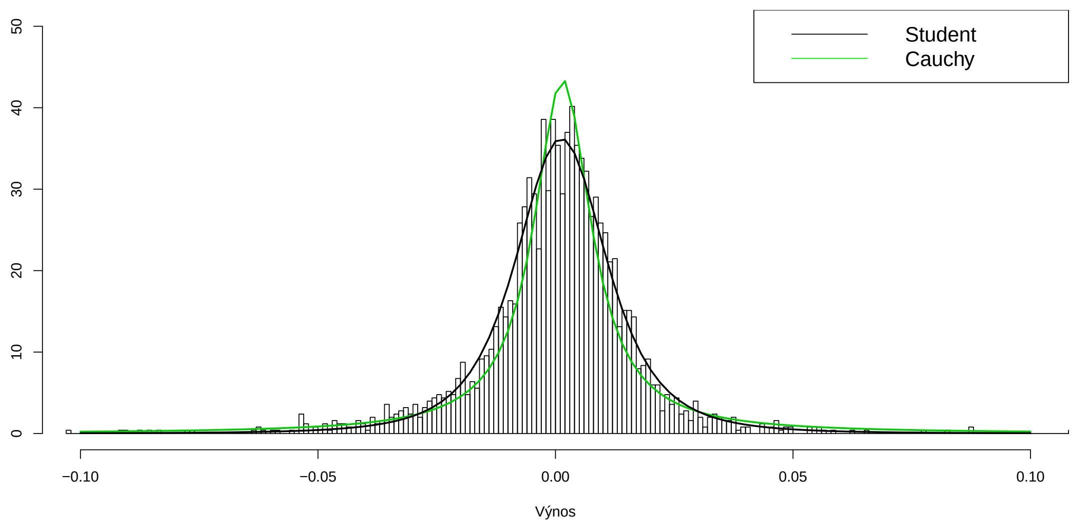
Obr. 14: Histogram Euro STOXX 50 Index



Obr. 15: Histogram Austrian Traded Index



Obr. 16: Histogram Austrian Traded Index



Dáta z oboch indexov sú po dobu 10 rokov od roku 2003 do roku 2013.

Normálne rozdelenie sa neukazuje ako vhodné, lebo nemá ťažké chvosty. Logistické rozdelenie je trochu lepšie, no aj tak nemá dostatočne ťažké chvosty. Na druhej strane Cauchyho rozdelenie a Studentovo t - rozdelenie vystihujú rozdelenie výnosov oveľa lepšie.

5.2 Testy zhody rozdelení

Posledným krokom je otestovať, či naše empirické rozdelenia sa zhodujú s teoretickými. Využijeme na to Kolmogorovov - Smirnovov test, ktorý v R-ku použijeme takto:

ks.test(data, "pnorm", mean, sd),

kde data sú naše logaritmické výnosy a mean a sd sú odhadnuté parametre pre normálne rozdelenie. Výsledky sú v tabuľke 3.

Rozdelenie	**Euro STOXX 50**	**Austrian Traded**
normálne	$D = 0,078$; $p - value = 3,7 * 10^{-14}$	$D = 0,0943$; $p - value < 2,2 * 10^{-16}$
logistické	$D = 0,0395$; $p - value = 0,0006$	$D = 0,043$; $p - value = 0,00019$
Studentovo	$D = 0,0166$; $p - value = 0,4843$	$D = 0,02261$; $p - value = 0,161$
Cauchyho	$D = 0,052$; $p - value = 0,0000017$	$D = 0,0562$; $p - value = 2,548 * 10^{-07}$
Kritické hodnoty	$D(0,05) = 0,0267$	$D(0,05) = 0,027$

Tabuľka 3: Kolmogorovov - Smirnovov test

Vidíme, že v ani jednom prípade testovacia štatistika D nebola nižšia ako kritická hodnota Kolmogorovovho - Smirnovovho testu, alebo inak, $p - hodnota$ nie je ani v jednom prípade väčšia ako 5%, čo znamená, že hypotézu H_0 zamietame a teda ani jedno rozdelenie dobre nepopisuje naše dáta.

5.3 Vyhodnotenie výsledkov

Z výsledkov Kolmogorovovho - Smirnovovho testu vieme povedať, že spomedzi testovaných rozdelení je vhodné iba Studentovo t-rozdelenie v prípade Euro STOXX 50

Indexu, kde p - hodnota vyšla $48,4\%$. Pre index Austrian Traded je vhodné taktiež Studentovo t-rozdelenie s p - hodnotou 16%. Ostatné rozdelenia v oboch prípadoch nie sú vhodné.

Záver

V tejto bakalárskej práci sme rozobrali štatistické rozdelenia a ich využitie vo financiách. Úvod bol venovaný základným pojmom z oblasti pravdepodobnosti. Postupne sme prešli od základných rozdelení po zložitejšie. Popísali sme ich a obrázkami ilustrovali ich funkcie hustoty. Vysvetlili sme aj testovanie týchto rozdelení s empirickými rozdeleniami reálnych dát.

V poslednej kapitole sme využili poznatky z predchádzajúcich kapitol a na konkrétnych dátach sme modelovali logaritmické výnosy a testovali z akého rozdelenia pochádzajú. Doplnili grafmi a vysvetlili akú informáciu nám poskytujú. Aj pri Euro STOXX 50 Indexe aj pri Austrian Traded Indexe sa ako vhodné rozdelenie ukázalo Studentovo t-rozdelenie, aj keď pri Euro STOXX 50 bolo vhodnejšie. Pri analýze sme využívali štatistický program R a program Matlab.

Práca by mala dávať návod na modelovanie logaritmických výnosov a poskytnúť základné znalosti v oblasti pravdepodobnosti a štatistiky.

Zoznam použitej literatúry

[1] Dodson B.: *The Weibull analysis handbook 2nd edition*, Quality Press, Milwaukee, 2006

[2] Feller W. : *An Introduction to Probability Theory and Its Applications Vol. 1. 3rd. edition*, John Wiley and Sons, New York, 1968

[3] Feller W. : *An Introduction to Probability Theory and Its Applications Vol. 2. 2nd. edition*, John Wiley and Sons, New York, 1971

[4] Foss S., Korshunov D., Zachary S.: *An Introduction to Heavy-Tailed and Subexponential Distributions*, Springer Science, New York, 2011

[5] Gentle J. E.: *Random Number Generation and Monte Carlo Methods 2nd edition*, Springer, New York, 2003

[6] Hahn G. J., Meeker W. Q.: *Statistical Intervals: A Guide for Practitioners*, John Wiley and Sons, Hoboken, 1991

[7] Charnes J.: *Financial Modeling with Crystal Ball and Excel 2nd edition*, John Wiley and Sons, Hoboken, 2012

[8] Koch Karl-Rudolf: *Parameter Estimation and Hypothesis Testing in Linear Models 2nd edition*, Springer, Verlag, 1999

[9] Lamoš F., Potocký R.: *Pravdepodobnosť a matematická štatistika*, Vydavateľstvo UK, Bratislava, 1998

[10] Markechová D., Stehlíková B., Tirpáková A. : *Štatistické metódy a ich aplikácie*, Univerzita Konštantína filozofa v Nitre, Nitra, 2011

[11] Penza P.,Bansal V. K.: *Measuring Market Risk with Value at Risk*, Wiley, New York, 2001

[12] Račev S. T.: *Handbook of Heavy Tailed Distributions in Finance*, Elsevier Science, Amsterdam, 2003

[13] Rafter J. A., Rafter J. A., Abell M. L., Braselton J. P.: *Statistics With Maple*, Academic Press, London, 2003

[14] Rao C. R., Helge T.: *Linear models least squares and alternatives 2nd edition*, Springer, Verlag, 1999

[15] Resnick S. I.: *Heavy-Tail Phenomena: Probabilistic and Statistical Modeling*, Springer Science, New York, 2007

[16] Segura J., Braun C. R.: *An Eponymous Dictionary Of Economics: A Guide To Laws And Theorems Named after Economists*, Edward Elgar Publishing, Cheltenham, 2004

[17] Tsay R. S.: *Analysis of Financial Time Series 3rd edition*, John Wiley and Sons, Hoboken, 2010