

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE  
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY



URČOVANIE CYKLICKEJ ZLOŽKY V EKONOMICKÝCH  
ČASOVÝCH RADOCH

BAKALÁRSKA PRÁCA

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE  
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY

URČOVANIE CYKLICKEJ ZLOŽKY V EKONOMICKÝCH  
ČASOVÝCH RADOCH

BAKALÁRSKA PRÁCA

Študijný program: Ekonomická a finančná matematika  
Študijný odbor: 1114 Aplikovaná matematika  
Školiace pracovisko: Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky  
Vedúci práce: doc. RNDr. Ján Pekár, PhD.



Univerzita Komenského v Bratislave  
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

---

## ZADANIE ZÁVEREČNEJ PRÁCE

**Meno a priezvisko študenta:** Andrej Varhol  
**Študijný program:** ekonomická a finančná matematika (Jednoodborové štúdium, bakalársky I. st., denná forma)  
**Študijný odbor:** 9.1.9. aplikovaná matematika  
**Typ záverečnej práce:** bakalárska  
**Jazyk záverečnej práce:** slovenský

**Názov:** Určovanie cyklickej zložky v ekonomických časových radoch  
**Cieľ:** Opísať teóriu cyklicity v časových radoch a aplikovať ju na ekonomické časové rady

**Vedúci:** doc. RNDr. Ján Pekár, PhD.  
**Katedra:** FMFI.KAMŠ - Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky  
**Vedúci katedry:** prof. RNDr. Daniel Ševčovič, CSc.

**Dátum zadania:** 25.10.2012

**Dátum schválenia:** 03.11.2012 doc. RNDr. Margaréta Halická, CSc.  
garant študijného programu

.....  
študent

.....  
vedúci práce

**Pod'akovanie** Na tomto mieste by som sa rád poďakoval pánovi doc. RNDr. Jánovi Pekárovi, PhD. za pomoc pri písaní tejto práce. Ďalej by som sa chcel poďakovať svojej rodine a priateľom, ktorí mi boli po celú dobu štúdia a pri písaní tejto práce dôležitou oporou.

## Abstrakt

VARHOĽ, Andrej: Určovanie cyklickej zložky v ekonomických časových radoch [Bakalárska práca], Univerzita Komenského v Bratislave, Fakulta matematiky, fyziky a informatiky, Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky; školiteľ: doc. RNDr. Ján Pekár, PhD., Bratislava, 2013, 41 s.

V tejto práci sa zaoberáme Fourierovou analýzou ako metódou na určenie a extrakciu cyklickej zložky z ekonomických časových radov. Úvodná časť práce obsahuje definície a charakteristiky časových radov a taktiež ich dekompozíciu na jednotlivé zložky. Hlavná časť práce popisuje Fourierovú analýzu, kde sú zadané vzťahy Fourierovej transformácie a taktiež algoritmus jej výpočtu. Na základe týchto poznatkov si ukážeme ako aplikovať Fourierovu transformáciu na časové rady. Výstupom tejto aplikácie je časový rad očistený od cyklickej zložky. Dosiahnuté výsledky tvoria len jeden z krokov celkovej analýzy časových radov, avšak samostatne nepodávajú úplnú informáciu o časových radoch.

**Kľúčové slová:** Ekonomické časové rady, Fourierova transformácia, Diskrétna Fourierova transformácia (DFT), Rýchla Fourierova transformácia (FFT), Cyklická zložka

## Abstract

VARHOL, Andrej: Determining the cyclical component of economic time series [Bachelor Thesis], Comenius University in Bratislava, Faculty of Mathematics, Physics and Informatics, Department of Applied Mathematics and Statistics; Supervisor: doc. RNDr. Ján Pekár, PhD., Bratislava, 2013, 41 p.

In this bachelor thesis we are concernig Fourier analysis of economic time series. Introductory section includes characteristics and definitions of time series and their decomposition into individual components. Main section describes Fourier analysis, there are defined Fourier transform relationships and also algorithm of its computation. According to this knowledge, we will show how to apply the Fourier transform on the time series. The output of this application is a time series adjusted from cyclical component. Achieved results are just one step in total time series analysis, but served separately it doesn't give us complete information about time series.

**Keywords:** Economic time series, Fourier transform, Discrete Fourier transform (DFT), Fast Fourier Transform (FFT), Cyclical component

# Obsah

Úvod	9
<b>1 Časové rady</b>	<b>11</b>
1.1 Ekonomické časové rady a ich členenie	11
1.1.1 Časové rady delené podľa periodicity sledovania	11
1.1.2 Časové rady delené podľa časového hľadiska	12
1.1.3 Časové rady delené podľa homogenity	13
1.1.4 Časové rady delené podľa absencie náhodnej zložky	13
1.2 Grafické riešenie časových radov	13
1.2.1 Spojnicový graf	14
1.2.2 Box – whisker graf	14
1.2.3 Graf sezónnych hodnôt	15
1.3 Popisné charakteristiky časových radov	15
1.4 Dekompozícia časových radov	17
1.4.1 Trendová zložka ( $T_t$ )	17
1.4.2 Sezónna zložka ( $S_t$ )	18
1.4.3 Cyklická zložka ( $C_t$ )	18
1.4.4 Náhodná zložka ( $\epsilon_t$ )	19
1.4.5 Aditívny a multiplikatívny model	20
<b>2 Fourierova analýza</b>	<b>21</b>
2.1 Trigonometrický rad	21
2.2 Fourierov rad	22
2.3 Dirichletove podmienky	24
2.4 Fourierov integrál	24
2.4.1 Fourierov integrál v komplexnom tvare	25
2.4.2 Fourierov integrál v reálnom tvare	25
2.5 Fourierova transformácia	25
2.6 Diskrétna Fourierova transformácia (DFT)	28
2.7 Rýchla Fourierova transformácia (FFT)	29

<b>3 Aplikácia na časové rady</b>	<b>31</b>
3.1 Príklad č.1 . . . . .	31
3.2 Príklad č.2 . . . . .	35
<b>Záver</b>	<b>39</b>
<b>Zoznam použitej literatúry</b>	<b>41</b>



# Úvod

Cieľom bakalárskej práce bude ukázať na reálnych ekonomických prípadoch rôzne cykly v časových radoch a oboznámiť sa s postupom extrahovania cyklickej zložky z ekonomických časových radov. Ďalej za pomoci Fourierovej analýzy si vysvetlíme ako možno aproximovať rôzne periodické (aj neperiodické) funkcie zápisom pozostávajúceho z sínusov a kosínusov.

Táto práca sa zaoberá problémom merania ekonomických cyklov v makroekonomických časových radoch. V desaťročí, ktoré nasledovalo po Veľkej depresii (angl. Great Depression), sa ekonómovia začali zaujímať o možnú existenciu (viac či menej systematických) cyklov v ekonomike. Ukázalo sa totiž, že pre identifikáciu ekonomických cyklov, museli odstrániť z radov sezónne výkyvy, spojené s krátkodobým vývojom, a dlhodobým trendom, súvisiacim predovšetkým s technologickým pokrokom. Burns a Mitchell [3] spravili asi prvý pokrok vo výskume, keď štatistické meranie cyklu široko videli ako zachytenie variácie radu v rozsahu frekvencie po tom, čo bol rad očistený od sezónnej a trendovej zložky. (Burns a Mitchell navrhli rozsah frekvencií spojených s cyklami s obdobiím zhruba medzi 2 a 8 rokov.).

Dynamické vlastnosti ekonomických systémov sú všeobecne vyšetrované v časovej doméne na základe analýzy projekcie zaujímavých funkcií času na fázovom priestore. Avšak, informácie získané analýzou časovej domény by mohli byť efektívne doplnené o analýzu frekvenčnej domény, tj spektrálnu analýzu (podľa [6],[10]). Táto metodika bola vyvinutá vo vedeckých oblastiach, ako je digitálne spracovanie signálu, oceánografii, meteorológii, a tak ďalej, a opiera sa o tvrdenie, že najbežnejšie správanie časových radov je periodické. Tak, že periodické zložky analyzovaných radov môžu byť stanovené výpočtom ich periódy, amplitúdy a fázy.

Práca pozostáva z troch kapitol. Prvá kapitola je venovaná definícii časového radu, jeho deleniu a stručným popisovým charakteristikám. Ukážeme si grafickú reprezentáciu časových radov a ich dekompozíciu na zložky.

V druhej kapitole si objasníme Fourierovu analýzu. Kde podľa [11] definujeme pojmy

ako sú : Fourierova transformácia, diskrétna Fourierova transformácia (DFT), algoritmus výpočtu DFT tzv. rýchla Fourierova transformácia (FFT) a ukážeme si jej využitie na reálnom príklade.

Tretia kapitola obsahuje príklady extrakcie cyklickej zložky z časových radov bežne sa vyskytujúcich v prírode okolo nás, a taktiež z ekonomických časových radov.

# 1 Časové rady

Nezanedbateľnou časťou štatistických analýz ekonomických javov je skúmanie dynamiky. Pozorované dáta sú usporiadané do tzv. časových radov. Podľa [7] pod pojmom časové rady rozumieme súbor hodnôt, ktoré sú usporiadané v čase v smere od minulosti do prítomnosti. Takto definované časové rady budeme zapisovať v tvare :

$$y = y_t, \quad t = 1, 2 \dots T \quad (1)$$

## 1.1 Ekonomické časové rady a ich členenie

Základné členenie časových radov je :

- Podľa periodicity sledovania
- Podľa časového hľadiska zisťovania
- Podľa homogenity časových radov
- Podľa absencie náhodnej zložky

### 1.1.1 Časové rady delené podľa periodicity sledovania

Časové rady klasifikujeme podľa dĺžky intervalu sledovania hodnôt. Rozdeľujeme ich na:

- Dlhodobé časové rady - majú hodnoty sledované v časových úsekoch dlhších ako 1 rok. Ako príklad uvedieme výšku hrubého domáceho produktu (HDP) na Slovensku v rokoch 2000-2013
- Krátkodobé časové rady - sledujú hodnoty v úsekoch kratších ako 1 rok. Príkladom môže byť mesačný vývoj miery inflácie v Bratislavskom kraji za obdobie rokov 2010-2013
- Vysokofrekvenčné časové rady - sa zaoberajú úsekmi kratšími ako 1 týždeň (dni, hodiny, minúty sekundy). Typickým príkladom sú hodnoty výmenného kurzu EUR/USD za obdobie 11.5.2013-15.5.2013

### 1.1.2 Časové rady delené podľa časového hľadiska

Ekonomické časové rady môžeme klasifikovať podľa typu ukazovateľa, ktorý ich sleduje, na okamihové a intervalové.

- Intervalové časové rady - sú rady ukazovateľov, ktorých hodnoty závisia na dĺžke časového intervalu sledovania a ich hodnota rastie s dĺžkou intervalu. Príkladom môže byť napríklad objem výroby. Predpokladom pre prácu s intervalovými časovými radmi je rovnaká dĺžka intervalov (ekvidištancia intervalov). Ak tento predpoklad nie je splnený, je nutné spraviť korekciu, ktorá upraví intervaly na rovnakú dĺžku. Nami upravený časový rad má tvar :

$$z_i = y_i \frac{d}{d_i}, \quad i = 1, 2 \dots T \quad (2)$$

kde  $d_i$  je dĺžka  $i$ -teho intervalu a  $d$  je nami požadovaná dĺžka. V spojení s intervalovými časovými radmi je často pre nás potrebné poznať rad kumulatívnych hodnôt. Tento rad obsahuje súhrnné hodnoty od začiatku nami sledovaného obdobia. Rad kumulatívnych hodnôt vyrátame podľa vzťahu :

$$s_i = \sum_{j=1}^i y_j, \quad i = 1, 2 \dots T \quad (3)$$

V prípade, že našou úlohou je porovnanie dvoch období podobného charakteru, používame rad klzavých úhrnov:

$$\epsilon_i = y_{i-k+1} + \dots + y_i, \quad i = k \dots T \quad (4)$$

kde  $k$  je vhodne zvolená konštanta ( väčšinou  $k \in [3, 5]$  )

- Okamihové časové rady - sú rady ukazovateľov, ktorých hodnoty sa viažu na určitý časový okamih. Hodnota takýchto ukazovateľov nezávisí na dĺžke časového intervalu sledovania. Ako príklad môžeme uviesť počet zamestnancov nemenovanej firmy k 1.1. v rokoch 2000 – 2013. Keďže pozorovaná veličina nadobúda hodnoty v istom časovom okamihu, nemá preto zmysel rad sčítavať resp. konštruovať rad kumulatívnych úhrnov. Dané hodnoty spájame pomocou priemerov. Najbežnejšie sa využíva aritmetický priemer, tj. priebeh radu aproximujeme lineárne. Aritmetický priemer na intervale  $[t_i, t_{i+1}]$  vyrátame nasledovne :

$$\bar{y} = \frac{y_i + y_{(i+1)}}{2} \quad (5)$$

### 1.1.3 Časové rady delené podľa homogenity

Ak je podmienka chronologického usporiadania splnená, časové rady musia ešte spĺňať podmienku porovnateľnosti údajov :

- Časové vymedzenie - znamená, že hodnoty premennej sa skúmajú v rovnakej dĺžke časových intervalov. Problém neporovnateľnosti nastáva napr. v mesačných intervaloch, keďže každý mesiac ma rôzny počet dní.
- Priestorové vymedzenie - uskutočňuje sa stanovením rovnakých územných celkov (štátov, krajov, okresov...). Problém neporovnateľnosti môže nastať, ak sa zmení počet subjektov v skúmanom územnom celku.
- Vecné vymedzenie - hovorí o presne definovanom ukazovateli spolu s jeho mernými jednotkami. Ako príklad neporovnateľnosti môžeme uviesť napr. vplyv technického rozvoja (výroba automobilov za dlhé časové obdobie)

### 1.1.4 Časové rady delené podľa absencie náhodnej zložky

Časové rady môžeme taktiež rozdeliť podľa absencie náhodnej zložky na deterministické a stochastické

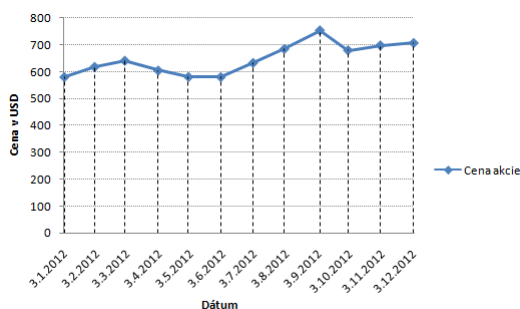
- Deterministické časové rady - neobsahujú náhodnú zložku, a ak poznáme mechanizmus, pomocou ktorého je daný časový rad vytváraný, dokážeme jeho hodnoty s presnosťou odhadovať.
- Stochastické časové rady - obsahujú náhodnú zložku. Znamená to, že mechanizmus a jeho procesy sú náhodne a teda nedokážeme presne odhadovať hodnoty časového radu (napr. ekonomické časové rady).

## 1.2 Grafické riešenie časových radov

Jedným zo základných prostriedkov na reprezentáciu časových radov (dát usporiadaných v čase) je graf. Graf je pre nás pomôckou na odhadovanie premennej (vidíme, či premenná dlhodobo rastie, klesá, aký majú dáta trend atď.)

### 1.2.1 Spojnicový graf

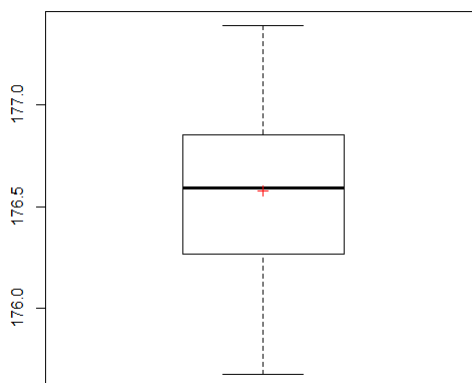
Jedná sa o polygón, ktorý zobrazuje vývoj rady  $y_t$  vzhľadom na časovú premennú  $t = 1, 2 \dots T$ . Jednotlivé hodnoty časovej rady sú zaznačené do súradnicovej sústavy s príslušne označenými osami.



Obr. 1: Vývoj ceny akcií spoločnosti Google v roku 2012

### 1.2.2 Box – whisker graf

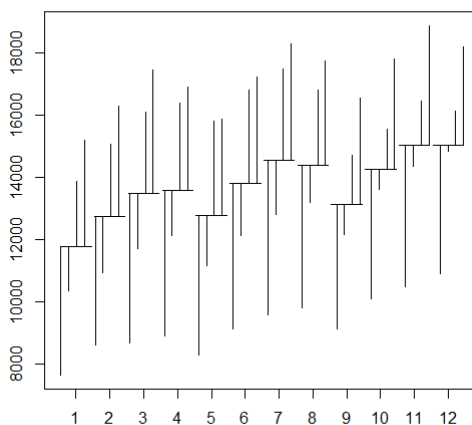
Bližší pohľad na časový rad nám podáva tzv. box - whisker graf (box plot). Obsahuje sumárne charakteristiky skúmaného časového radu. Základom box plotu je krabička, kde dolná hrana predstavuje 25% kvantil a horná hrana predstavuje 75% kvantil. Vo vnútri krabičky je horizontálnou čiarou vyznačený medián (50% kvantil) a znamienkom '+' je označený aritmetický priemer. Z krabičky vychádzajú zvislé čiary, na konci ktorých sa nachádza minimum a maximum.



Obr. 2: Krabičkový graf historických dát výšky hladiny jazera Michigan v rokoch 1860 - 2012

### 1.2.3 Graf sezónnych hodnôt

Tento graf sa používa pri analýze sezónnych časových radov. Zobrazuje hodnoty časového radu usporiadané podľa jednotlivých sezón. Vodorovné čiary predstavujú priemernú úroveň hodnôt v jednotlivých sezónach za všetky roky časového radu. Zvislé čiary znázorňujú odchylku skutočných hodnôt od priemeru pre každú sezónu.



Obr. 3: Vývoj HDP Slovenska v rokoch 2001-2012

### 1.3 Popisné charakteristiky časových radov

V tejto kapitole si popíšeme základné matematické východiská pre prácu s časovými radmi (intervalovým, okamihovým). Základným zistením pri časových radoch je jednoduchý aritmetický priemer, ktorý vyrátame zo vzťahu :

$$\bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^T y_i}{T} \quad (6)$$

kde  $y_t$  je sledovaná hodnota pre  $i = 1, 2 \dots T$ .

Pri okamihových časových radoch sa používa chronologický priemer. Je to priemer, ktorý

zistujeme v danom okamihu. Vyrátame ho podľa vzťahu :

$$y_{CH} = \frac{\sum_{i=1}^{T-i} \frac{y_i + y_{i+1}}{2} (t_{i+1} - t_i)}{\sum_{i=1}^{T-i} (t_{i+1} - t_i)} \quad (7)$$

Za predpokladu, že všetky intervaly sú rovnako dlhé, predchádzajúci vzťah sa redukuje na tvar :

$$y_{CH} = \frac{\sum_{i=1}^{T-i} \frac{y_i + y_{i+1}}{2}}{T - 1} \quad (8)$$

kde  $y_t$  je sledovaná hodnota pre  $i = 2, 3 \dots T$ .

Ďalšia časť tejto kapitoly sa zaoberá jednoduchými mierami dynamiky časových radov, ktoré nám umožnia charakterizovať rysy a pomôžu nám formulovať isté kritéria pre modelovanie časových radov.

Uvažujme časový rad  $y_t$ ,  $t = 1, 2 \dots T$ . Najjednoduchšou mierou dynamiky je absolútny prírastok (prvé diferencie), ktorý sa dá napísať ako :

$$\Delta y = y_t - y_{t-1}, \quad t = 2, 3 \dots T \quad (9)$$

Táto charakteristika nám vyjadruje zmenu hodnoty v čase  $t$  oproti času  $t - 1$ . Taktiež sa často používa priemerný absolútny prírastok :

$$\bar{\Delta} = \frac{\sum_{t=2}^T \Delta y_t}{T - 1} = \frac{y_T - y_1}{T - 1} \quad (10)$$

Poprípade uvažujeme ešte relatívny prírastok :

$$\delta_t = \frac{\Delta y_t}{y_{t-1}} = \frac{y_t}{y_{t-1}} - 1 \quad (11)$$

kde  $\Delta y_t$  je absolútny prírastok pre  $t = 2, 3 \dots T$ .

Ďalšou podstatnou mierou dynamiky časových radov je koeficient rastu (alebo tempo rastu) :

$$k_t = \frac{y_t}{y_{t-1}} \quad (12)$$



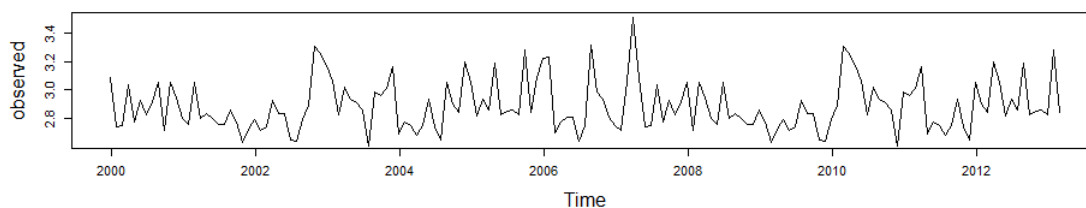
kde  $y_t$  je sledovaná hodnota pre  $t = 2, 3 \dots T$ . Prenásobením koeficientu stami dostávame percentuálny nárast v čase  $y_t$  oproti času  $y_{t-1}$ . Priemerný koeficient rastu sa vypočíta ako geometrický priemer jednotlivých koeficientov rastu :

$$\bar{k}_t = \sqrt[t]{k_2 \cdot k_3 \dots k_T} = \sqrt[t]{\frac{y_2}{y_1} \frac{y_3}{y_2} \dots \frac{y_T}{y_{T-1}}} = \sqrt[t]{\frac{y_T}{y_1}} \quad (13)$$

Kde  $k_T$  je koeficient rastu pre  $t = 2, 3 \dots T$ .

## 1.4 Dekompozícia časových radov

V tejto podkapitole čerpáme z [4], kde základnou metódou pre analýzu ekonomických časových radov je dekompozičná metóda. Základný predpoklad tejto metódy spočíva v rozložení časového radu  $y_t$ , kde  $t = 1, 2, \dots T$  na štyri zložky a to : trendovú zložku ( $T_t$ ), sezónnu zložku ( $S_t$ ), cyklickú zložku ( $C_t$ ) a náhodnú zložku ( $\epsilon_t$ )



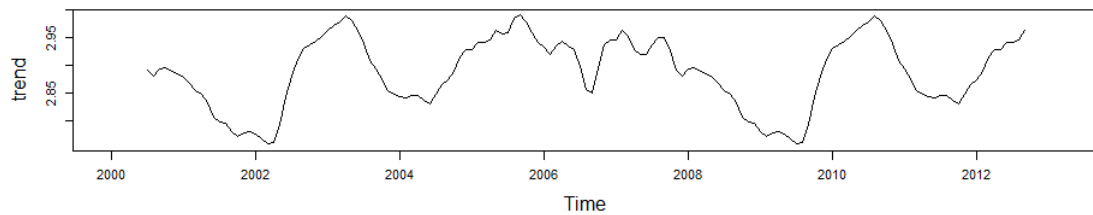
**Obr. 4:** Výška vodnej hladiny počas prílivu v Kings Point, New York v rokoch 2000-2013

### 1.4.1 Trendová zložka ( $T_t$ )

Popisuje dlhodobý priemerný vývoj časového radu, resp. popisuje správanie skúmaného javu v dlhom časovom horizonte. Trend je výsledkom vplyvov, ktoré pôsobia jedným smerom, napr. demografický vývoj, dostupnosť technológie, rôzne smernice, ktoré ovplyvňujú vývoj daného javu.

Trend môže mať rôzny charakter, môže byť rastúci, klesajúci alebo stagnujúci. Jednou z možností ako vyčleniť trend z časových radov je model tzv. Lineárny deterministický trend :

$$X_t = \alpha + \beta t \quad (14)$$

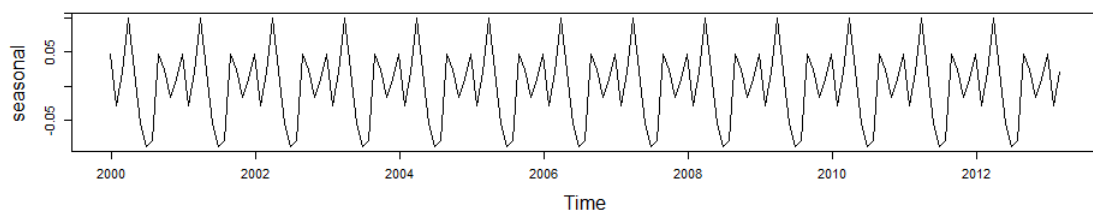


**Obr. 5:** Trendová zložka

Parameter  $\beta$  vyjadruje prírastok radu  $X_t$  pri zmene času  $t$  o jednotku. Na odhad parametra použijeme metódu najmenších štvorcov. Tento odhad bude mať formu aritmetických priemerov prvých diferencií.

#### 1.4.2 Sezónna zložka ( $S_t$ )

Vyjadruje periodické oscilovanie okolo trendu s časovým horizontom kratším ako jeden rok. Toto kolísanie sa objavuje každý rok v rovnakom období a je spôsobené faktormi ako sú ročné obdobia, sviatky, dovolenky alebo pravidelné parlamentné zmeny. Pri očisťovaní radu od sezónnej zložky sa snažime o odstránenie sezónnej zložky od trendu tak, aby sme dokázali porovnať jednotlivé hodnoty radu bez sezónnych výkyvov. Medzi základne metódy patria : metóda exponenciálneho vyrovnávania a metóda založená na výpočte sezónnych odchýlok a indexov.



**Obr. 6:** Sezónna zložka

#### 1.4.3 Cyklická zložka ( $C_t$ )

Podobne ako sezónna zložka vyjadruje kolísanie okolo trendu. Je to spôsobené faktormi, ktoré pôsobia určitú dobu a prichádzajú v určitých periódach. Tieto výkyvy majú periódu dlhšiu ako rok. Ako príklad môžeme uviesť striedanie expanzie a recesie ekonomiky

v istom časovom intervale. Na extrakciu cyklickej zložky využijeme spektrálnu analýzu a poznatky o Fourierovej transformácii. Bližšie sa k tejto téme dostaneme v nasledujúcej kapitole.

#### 1.4.4 Náhodná zložka ( $\epsilon_t$ )

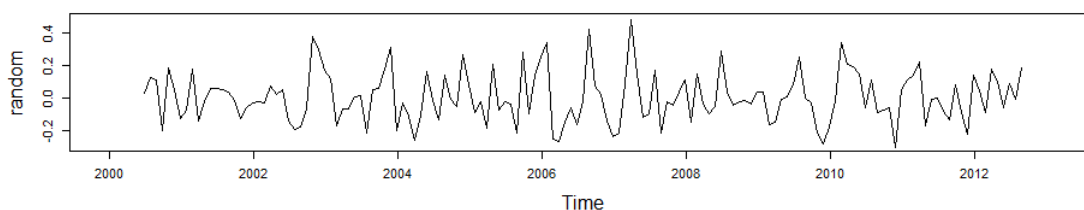
Keďže ide o náhodnú premennú, lebo ju nedokážeme definovať žiadnou funkciou času, popisujeme ju pravdepodobnostne. Dôvody náhodných vplyvov sú pre nás ťažko predvídateľné a neočakávané, preto predpokladáme vzájomnú nezávislosť javov. Náhodná zložka sa v časových radoch nachádza vždy, aj keď nie je prítomná žiadna iná odchýlka. Príkladom náhodnej zložky môže byť napr. odborársky štrajk, výpadok energie, či havária, ktorá zastaví výrobu na istú dobu. Náhodná zložka ako náhodná veličina má normálne rozdelenie :

$$\epsilon_t \sim N(0, \sigma^2) \quad (15)$$

Teda :

- Stredná hodnota v každom pozorovaní je nulová  $E(\epsilon_t) = 0$ ,  $t = 1, 2 \dots T$
- Rozptyl náhodnej zložky je konštantný  $D(\epsilon_t) = \sigma^2$ ,  $t = 1, 2 \dots T$
- A keďže náhodné vplyvy sú vzájomne nezávislé, kovariancia náhodnej zložky bude nulová  $cov(\epsilon_i, \epsilon_j) = 0$ ,  $i \neq j$ ,  $i, j = 1, 2 \dots T$

Ak sú splnené predchádzajúce podmienky, môžeme o náhodnej zložke hovoriť, že tvorí tzv. biely šum.



**Obr. 7:** Náhodná zložka

### 1.4.5 Aditívny a multiplikatívny model

Keď sú nám tieto štyri zložky bližšie známe, môžeme prejsť k dekompozícií časových radov. Rozklad časových radov na jednotlivé zložky popisujeme pomocou dvoch modelov :

- Aditívny model :

$$y_t = T_t + S_t + C_t + \epsilon_t \quad (16)$$

- Multiplikatívny model :

$$y_t = T_t \cdot S_t \cdot C_t \cdot \epsilon_t \quad (17)$$

Zložky  $T_t$ ,  $S_t$ ,  $C_t$  sú tzv. systematickou časťou modelu a  $\epsilon_t$  tvorí tzv. nesystematickú časť. Aditívny model je vhodný, ak sa veľkosť sezónnych výkyvov nemení s úrovňou časového radu. Resp. tento model používame, ak sú jeho zložky navzájom nezávislé. Naopak ak zložky časového radu sú navzájom závislé (napr. pozorujeme závislosť medzi rastúcim trendom a rastom sezónneho výkyvu) použijeme multiplikatívny model. Multiplikatívny model je väčšinou spájaný s ekonomickými časovými radmi, pretože takéto časové rady majú sezónne variácie, ktoré sa zvyšujú s rastúcou úrovňou radu. Multiplikatívny model dokážeme v prípade potreby previesť na aditívny model logaritmovaním.

## 2 Fourierova analýza

Skôr ako prejdeme k Fourierovej transformácii, bude potrebné definovať základné pojmy, medzi ktoré patrí trigonometrický rad, Fourierov rad, Fourierov integrál a Dirichletove podmienky. V poslednej časti definujeme diskretnú Fourierovu transformáciu (DFT) a algoritmus výpočtu tzv. rýchla Fourierova transformácia (FFT).

### 2.1 Trigonometrický rad

Trigonometrický rad definujeme podľa vzťahu :

$$\frac{1}{2}A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n(\theta) \quad (18)$$

kde:

$$A_0(\theta) = a_0;$$

$$A_n(\theta) = a_n \cos(n\theta) + b_n \sin(n\theta) \quad n > 2;$$

Tento rad budeme označovať  $T$ . Čiastkový súčet radu  $T$  (súčet  $n$ -tého stupňa) je výraz definovaný následovne :

$$s_n(\theta) = \frac{1}{2}A_0 + \sum_{m=1}^n A_m(\theta) \quad (19)$$

kde:

$$A_0(\theta) = a_0;$$

$$A_m(\theta) = a_m \cos(m\theta) + b_m \sin(m\theta) \quad m > 2;$$

Koeficienty  $a_n$  ( $a_m$ ) a  $b_n$  ( $b_m$ ) sú pre  $n(m) > 1$ . Teraz si zdefinujeme koeficienty  $a_n$  a  $b_n$  pre ostatné celé hodnoty  $n$  následovne podľa vzťahu:

$$a_{-n} = a_n \quad (n > 0), \quad b_0 = 0, \quad b_n = -b_{-n} \quad (n > 0)$$

Zadefinujme si čísla  $c_n$  takto :

$$c_n = \frac{1}{2}(a_n - ib_n) \quad (20)$$

kde  $a_n$  a  $b_n$  sú koeficienty.

Podľa tohto vzťahu si môžeme prepísať koeficienty  $a_n$  a  $b_n$  ako :

$$a_n = (c_n + c_{-n}) \quad b_n = i(c_n - c_{-n}) \quad (21)$$

kde  $a_n$  a  $b_n$  sú koeficienty a  $c_n$  je hodnota. Čiastočný súčet  $s_n(\theta)$  môžeme zapísať nasledovne :

$$s_n(\theta) = c_0 + \sum_{m=1}^n \{(c_m + c_{-m})\cos(m\theta) + i(c_m - c_{-m})\sin(m\theta)\} = \sum_{-n}^n c_m e^{mi\theta} \quad (22)$$

Teraz môže byť rad  $T(\theta)$  definovaný takto :

$$\sum_{-\infty}^{\infty} c_n(\theta) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{ni\theta} \quad (23)$$

kde  $c_n$  je hodnota a  $e^{ni\theta}$  je exponenciálna funkcia

Vzťah 18 budeme nazývať reálnym trigonometrickým radom a vzťah 23 ako komplexný trigonometrický rad. Nepredpokladáme nič o konvergencii týchto trigonometrických radov pre  $\theta$ . Avšak posledný vzťah chápeme ako istú limitnú formu čiastočného súčtu.

## 2.2 Fourierov rad

Podľa [11] Fourierov rad pre danú funkciu  $x$  (komplexnú) s periódou  $P$ , ( $P > 1$ ), rozumieme ako nekonečný rad daný vzťahom :

$$\zeta(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{\frac{jk2\pi t}{P}} \quad (24)$$

kde  $c_k$  je koeficient a  $e^{\frac{jk2\pi t}{P}}$  je ortogonálna funkcia pre  $t \in [-\infty, \infty]$ . Pre koeficient  $c_k$  zo vzťahu 24 platí :

$$c_k = \frac{1}{P} \int_0^P x(t) e^{-\frac{jk2\pi t}{P}} dt \quad (25)$$

kde  $x(t)$  je funkcia a  $e^{-\frac{jk2\pi t}{P}}$  je ortogonálna funkcia pre  $k \in \mathbb{Z}$ .

Vzhľadom k tomu, že koeficienty  $c_k$  sú určené hodnotami funkcie  $x$  na intervale periodicity  $[0, P]$ , môže byť Fourierov rad zostrojený aj k funkcii, ktorá nie je periodická. Táto funkcia však musí byť definovaná na intervale  $[0, P]$ , alebo taká funkcia, pre ktorú platí  $x_0(t) = 0, t > P, t < 0$ . Ďalej stačí už len periodizovať  $x_0$  tak, že z nej bude vytvorená periodická funkcia jednoduchým predpisom podľa vzťahu 26:

$$x(t) = x_0(t - \nu P) \quad (26)$$

kde  $t \in [\nu P, (\nu + 1)P], \nu \in \mathbb{Z}$ .

Potom koeficienty  $c_k$  pre  $k \in \mathbb{Z}$  môžeme definovať nasledujúcim vzťahom :

$$c_k = \frac{1}{P} \int_0^P x_0(t) e^{-\frac{jk2\pi t}{P}} dt = \frac{1}{P} \int_0^{t_0+P} x(t) e^{-\frac{jk2\pi t}{P}} dt \quad (27)$$

$t_0$  je ľubovoľné.

Ďalšie ekvivalentné vzťahy Fourierovho radu sú uvedené nižšie :

$$\zeta(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left[ a_k \cos\left(\frac{2k\pi t}{p}\right) + b_k \sin\left(\frac{2k\pi t}{p}\right) \right] \quad (28)$$

$$a_0 = \frac{1}{P} \int_0^P x(t) dt \quad (29)$$

$$a_k = \frac{2}{P} \int_0^P x(t) \cos\left(\frac{2k\pi t}{p}\right) dt \quad (30)$$

$$b_k = \frac{2}{P} \int_0^P x(t) \sin\left(\frac{2k\pi t}{p}\right) dt \quad (31)$$

kde  $a_0, a_k$  a  $b_k$  sú koeficienty pre  $k = 1, 2, \dots$ ,  $x(t)$  je funkcia a  $P$  je perióda.

Alebo Fourierov rad taktiež vieme zapísať v tvare :

$$\zeta(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos\left(\frac{2k\pi t}{p} + \varphi_k\right) \quad (32)$$

$$A_0 = a_0, \quad A_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2} \quad (33)$$

$$\cos(\varphi_k) = \frac{a_k}{A_k} \quad \sin(\varphi_k) = \frac{-b_k}{A_k} \quad (34)$$

kde  $a_0, a_k, b_k$  a  $A_0, A_k$  sú koeficienty pre  $k = 1, 2, \dots$   $\varphi_k$  je fáza harmonických zložiek,  $P$  je perióda.

Rovnica 28 nám dovoľuje vyjadriť Fourierov rad pre periodickú funkciu, kde každý reálny periodický priebeh nejakej veličiny môžeme vyjadriť ako superpozíciu nekonečne veľa elementárnych priebehov kosínusového tvaru. Ich frekvencia je daná násobkami základnej frekvencie  $\frac{1}{P}$ . Amplitúdou budú koeficienty  $A_k$  a fázou týchto zložiek je  $\varphi_k$ . Pod pojmom harmonická analýza budeme rozumieť úlohu určovania koeficientov  $A_k$  a fáz  $\varphi_k$ . Opačný proces, pri ktorom sa zo zadaných amplitúd a fáz vytvára funkcia sa nazýva harmonická syntéza. Koeficienty  $A_k$  a  $\varphi_k$  sa potom nazývajú spektrom signálu funkcie  $x$ .

## 2.3 Dirichletove podmienky

Keďže už vieme ako zostrojiť Fourierov rad, je potrebné poznať za akých podmienok, kladených na funkciu  $f(t)$  ho skutočne zostrojiť môžeme. Podľa [7] je dokázané, že Fourierov rad môžeme zostrojiť ak spĺňa tzv. Dirichletove podmienky.

Komplexná funkcia  $f(t)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , je možné písať v tvare  $f(t) = u(t) + iv(t)$ , kde  $i$  je imaginárna zložka a  $u(t)$ ,  $v(t)$  sú reálne funkcie reálnej premennej  $t$ . Potom, ak vyhovujú reálne funkcie  $u(t)$  a  $v(t)$  Dirichletovým podmienkam v reálnom obore, Fourierov rozvoj môže byť zostrojený aj pre komplexnú funkciu  $f(t)$ .

Funkcia  $f(t)$  spĺňa Dirichletove podmienky na intervale ak platí :

- $f(t)$  je periodická, resp. periodicky rozšíriteľná funkcia
- na danom intervale (jednej perióde) je funkcia  $f(t)$  aspoň po častiach spojitá tj. existuje konečný počet bodov nespojitosti 1. druhu
- na danom intervale má funkcia  $f(t)$  konečný počet extrémov (konštantné časti  $f(t)$  sa neuvažujú)
- funkcia  $f(t)$  je definovaná v krajných bodoch (tj. nadobúda v nich konečné hodnoty) alebo existujú príslušné jednostranné limity v týchto bodoch.

## 2.4 Fourierov integrál

V predchádzajúcich podkapitolách sme sa zaoberali podmienkami pre rozvoj funkcie  $f(t)$  do Fourierovho radu, kde nutným predpokladom bola periodicita tejto funkcie. Pokiaľ funkcia nie je periodická, za istých podmienok ju môžeme vyjadriť pomocou Fourierovho integrálu. Zjednodušene si to môžeme predstaviť ako limitný prípad Fourierovho radu funkcie, ktorej perióda rastie veľmi rýchlo.

Neperiodická funkcia definovaná pre  $t \in \mathbb{R}$ , ktorá je absolútne integrovateľná, sa dá chápať ako prípad periodickej funkcie pre  $T \rightarrow \infty$ . Za týchto okolností Fourierov rad prejde na Fourierov integrál. V nasledujúcej podkapitole odvodíme vzťah medzi Fou-



rieroým radom a dvojným Fourierovým integrálom. A to pre integrál v reálnom aj komplexnom tvare.

### 2.4.1 Fourierov integrál v komplexnom tvare

Nech pre periodickú funkciu  $f(t)$  existuje konvergentný Fourierov rad, ktorý v komplexnom obore zapíšeme v tvare podľa vzťahu 24 a vzťahu 25.

Aby nenastal zmätok v značení, zameníme v poslednom integrále premennú  $t$  za  $x$ , tj.  $x \equiv t$  na intervale  $[\alpha - P, \alpha + P]$ . Za predpokladu splnenia krokov odvodenia dostaneme nasledujúci vzťah, ktorý vyjadruje tzv. dvojný Fourierov integrál v komplexnom tvare :

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{i\omega(t-x)} dx \quad (35)$$

kde  $\omega_n = \frac{2\pi n}{T}$  ( $\omega$  je uhlová frekvencia),  $f(x)$  je funkcia a  $e^{\frac{i2\pi n(t-x)}{T}}$  je ortogonálna funkcia.

### 2.4.2 Fourierov integrál v reálnom tvare

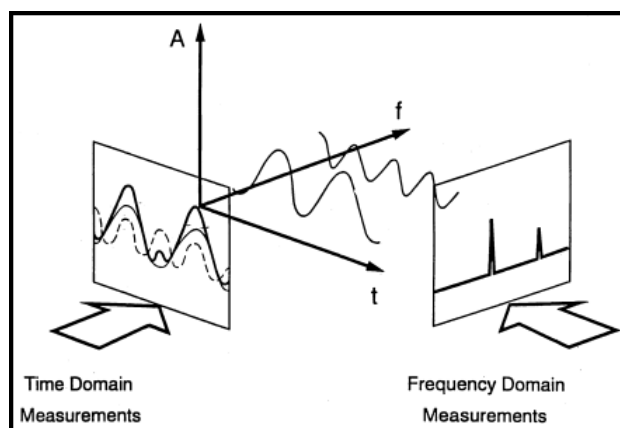
Nech funkcia  $f(t)$  je reálna funkcia. V predchádzajúcom vzťahu, ktorý je platný pre všetky  $t$  a zároveň  $f(t)$  aj  $f'(t)$  sú spojité. Po oddelení imaginárnej časti od reálnej a splnením krokov, ktoré vedú k odvodeniu, dostávame formulu dvojného Fourierovho integrálu v reálnom tvare :

$$f(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx \int_0^{\infty} \cos(\omega(t-x)) d\omega = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos(\omega(t-x)) dx \quad (36)$$

kde  $\omega$  je uhlová frekvencia,  $f(x)$  je funkcia a  $\cos(\omega(t-x))$  je párna funkcia premennej  $\omega$ .

## 2.5 Fourierova transformácia

Fourierova transformácia patrí medzi základné nástroje na spracovanie signálu. Dovoľuje vzájomne jednoznačný prevod signálu z/do časovej reprezentácie  $f(t)$  do/z frekvenčnej reprezentácie  $F(f)$ . Fourierova transformácia nám umožňuje analyzovať spektrum signálu (frekvenčný obsah).



Obr. 8: Vzťah medzi časom, frekvenciou a amplitúdou.(Zdroj:[1])

Podľa [2] fyzikálne procesy a signály môžeme študovať v časovej doméne, kde sú reprezentované obecnou komplexnou funkciou (signálom)  $s(t)$  vyjadrujúcou závislosť nejakej veličiny na čase, pričom  $t$  môže reprezentovať aj inú ako časovú súradnicu (môže to byť napríklad dĺžka atď.). Signály a fyzikálne procesy môžeme tiež sledovať vo frekvenčnej doméne, kde sú reprezentované obecnou komplexnou funkciou  $s(f)$  vyjadrujúcou, ako je signál poskladaný zo sínusov a kosínusov. Analogicky  $f$  môže reprezentovať aj inú ako časovú frekvenciu (typicky dĺžkovú frekvenciu).

V publikácii [8] autor definuje frekvenčné spektrum signálu ako rozloženie amplitúd a počiatočných fáz harmonických zložiek, z ktorých sa signál skladá v závislosti na frekvencii.

Ak označíme vnútorný integrál funkciou  $S(\omega)$ , kde  $\omega \in \mathbb{R}$ , a uvažujme pôvodný zápis premennej  $t$ , tak potom môžeme zapísať integrál nasledovne podľa vzťahu 37 :

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt \quad (37)$$

kde  $\omega_n = \frac{2\pi k}{P}$  ( $\omega$  je uhlová frekvencia),  $f(t)$  je funkcia a  $e^{-j\omega t}$  je ortogonálna funkcia.

Zápis Fourierovho integrálu sa zjednoduší na :

$$S(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega)e^{j\omega t} dt \quad (38)$$

kde  $\omega_n = \frac{2\pi k}{t}$  ( $\omega$  je uhlová frekvencia),  $S(\omega)$  je funkcia a  $e^{-j\omega n}$  je ortogonálna funkcia

Je však pravidlom, že namiesto funkcie  $S(\omega)$  sa používa funkcia  $F(i\omega)$ , ktorá je definovaná na imaginárnej osi. Nech funkcia  $f(t)$  je absolútne integrovateľná a zároveň  $f(t)$  aj  $f'(t)$  sú po častiach spojité na  $\mathbb{R}$ , potom funkcia  $F(i\omega)$  bude definovaná vzťahom :

$$F(i\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt \quad (39)$$

kde  $\omega_n = \frac{2\pi k}{T}$  ( $\omega$  je uhlová frekvencia),  $f(t)$  je funkcia a  $e^{-j\omega n}$  je ortogonálna funkcia. Tento vzťah budeme nazývať komplexný Fourierov obraz funkcie  $f$ . Funkcia  $f(t)$  je teda originálom.

Zobrazenie, ktoré originálu  $f(t)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , priraduje Fourierov obraz  $F(i\omega)$  sa nazýva Fourierová transformácia a značíme ju  $FT$ . Fourierov obraz  $F(i\omega)$  sa nazýva taktiež spektrálna funkcia alebo spektrálna hustota originálu  $f$  a charakterizuje spojité spektrum funkcie  $f(t)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ :

- hodnota  $|F(i\omega)|$  tvorí amplitúdovú spektrálnu hustotu
- $\varphi = \arg(F(i\omega))$  ( resp.  $-\arg(F(i\omega))$ ) je fázová spektrálna hustota,  $\varphi \in [-\pi, \pi]$

Za podmienky, že existuje konvergentný dvojný Fourierov integrál, je spätná Fourierová transformácia realizovaná týmto vzťahom 40:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(i\omega)e^{j\omega t} d\omega \quad (40)$$

kde  $\omega_n = \frac{2\pi k}{T}$  ( $\omega$  je uhlová frekvencia),  $F(i\omega)$  je funkcia a  $e^{-j\omega n}$  je ortogonálna funkcia.

Pri porovnaní vzťahov pre priamu a pre spätnú Fourierovu transformáciu je vidieť, že sa líši konštantou, ktorá nemá vplyv na konvergenciu integrálu. Ďalej sa líši ešte znamienkom v exponente jadra transformácie. Ak zdefinujeme Fourierov obraz nasledovne :

$$S(\omega) = F(i\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt \quad (41)$$

tak spätná transformácia bude vyzeráť :

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(i\omega)e^{j\omega t} d\omega \quad (42)$$

kde  $\omega_n = \frac{2\pi k}{T}$  ( $\omega$  je uhlová frekvencia),  $f(t)$ ,  $F(i\omega)$  sú funkcie a  $e^{-j\omega n}$  je ortogonálna funkcia.

Je zrejmé, že vo vyššie uvedených vzťahoch existuje istá symetria medzi originálom a jeho obrazom. Ak  $S(\omega) = F(i\omega)$  je obraz funkcie  $f(t)$ , tak  $f(-\omega)$  je Fourierovou transformáciou  $S(t)$ .

Fourierovou transformáciou v reálnom tvare vyjadríme vzorcom :

$$f(t) = \int_0^{\infty} A(\omega) \cos[\omega t - \varphi(\omega)] d\omega \quad (43)$$

kde  $A(\omega)$  je amplitúda  $A(\omega) = \sqrt{a^2(\omega) + b^2(\omega)}$  a

$\varphi(\omega)$  je fáza ( $\varphi(\omega) = \arctan(\frac{b(\omega)}{a(\omega)}) = -\arg(F(i\omega))$ ,  $\varphi(\omega) \in [-\pi, \pi]$ ).

Avšak pri Fourierovej transformácii je potrebné zohľadniť fakt, že ide o reláciu neurčitosti. To znamená, že presná znalosť frekvencie a jej časovej lokalizácie sú vzájomne nezlúčiteľné požiadavky. Ak je určené spektrum signálu, získame maximum informácií o obsiahnutých frekvenciách, ale nezískame žiadnu informáciu o tom, kedy sa tieto frekvencie vyskytli. Opačne, aplikáciou krátkodobej Fourierovej transformácie, bude získaná informácia o lokalizácii, ale na úkor toho stratíme informácie o frekvencii.

Na základe týchto tvrdení vyplýva to, že Fourierova spektrálna analýza je vhodná pre stacionárne signály, ktorých charakter je časovo invariantný. Pre nestacionárne signály je vhodné použiť metódu waveletovej (vlnkovej) analýzy.

## 2.6 Diskrétna Fourierova transformácia (DFT)

DFT je transformácia konečných postupností komplexných alebo reálnych čísel. Výsledkom tejto transformácie je opäť konečná postupnosť vo všeobecnosti komplexných čísel. Keďže nie vždy máme k dispozícii spojitú funkciu, ale iba jej hodnoty v diskretných časových okamihoch, definujeme DFT ako diskretizáciu signálu. Nasledujúce vzťahy pochádzajú z publikácie [11].

- **Priama diskretna Fourierova transformácia**

Nech  $x_i, i = 0, 1 \dots N - 1$  je postupnosť  $N$  konečných komplexných čísel, potom

postupnosť hodnôt  $X_k$  je jej priama DFT daná vzťahom :

$$X_k = \sum_{i=0}^{N-1} x_i e^{-\frac{ijk2\pi}{N}} \quad (44)$$

kde  $X_k$  je obrazom postupnosti  $x_i$  pre  $k = 0, 1 \dots N - 1$ .

- **Spätná diskretná Fourierova transformácia**

Nech  $X_k$ ,  $k = 0, 1 \dots N - 1$  je postupnosť  $N$  konečných komplexných čísel, potom postupnosť  $N$  čísel je spätnou DFT daná vzťahom :

$$x_i = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X_k e^{\frac{ijk2\pi}{N}} \quad (45)$$

kde  $X_k$  je obrazom postupnosti  $x_i$  pre  $i = 0, 1 \dots N - 1$ .

## 2.7 Rýchla Fourierova transformácia (FFT)

Pod pojmom rýchla Fourierova transformácia (FFT z angl. Fast Fourier Transform) rozumieme algoritmus výpočtu DFT. FFT sa využíva vo viacerých oblastiach, od digitálneho spracovania signálu a riešenie parciálnych diferenciálnych rovníc až po násobenie veľkých celých čísel. Pomocou FFT získame rovnaké výsledky ako u DFT, avšak omnoho rýchlejšie. Klasická metóda DFT potrebuje  $O(N^2)$  operácií, zatiaľ čo FFT  $O(N \log(N))$ .

Najčastejšie používaným algoritmom je James Cooley a John Tukey algoritmus [5], ktorý publikovali roku 1965. V klasickej podobe ju môžeme využiť pre signály, u ktorých bolo pozorovaných  $2^P$  vzoriek, v súčasnej dobe už existujú aj sofistikovanejšie algoritmy, ktoré umožňujú použiť rýchlu transformáciu pre ľubovoľný počet vzoriek. V nasledujúcich riadkoch si stručne vysvetlíme postup klasickej metódy.

$$F_i = \sum_{k=0}^{N-1} f_k e^{-\frac{ijk2\pi}{N}} \quad i = 1, 2 \dots N - 1 \quad (46)$$

Teraz si rozdelíme vzorky na 2 skupiny, na párne vzorky a na nepárne vzorky :

$$e_i = f_{2i}, \quad o_i = f_{2i+1} \quad i = 1, 2 \dots \frac{N}{2} - 1 \quad (47)$$

Potom môžeme zapísať transformáciu v tvare :

$$F_i = \sum_{k=0}^{\frac{N}{2}-1} e_i e^{-\frac{ij2\pi 2k}{N}} + o_i e^{-\frac{ij2\pi 2(k+1)}{N}} = \sum_{k=0}^{\frac{N}{2}-1} e_i e^{-\frac{ij2\pi 2k}{N}} + e^{-\frac{ij2\pi}{N}} \sum_{k=0}^{\frac{N}{2}-1} o_i e^{-\frac{ij2\pi 2k}{N}} \quad (48)$$

pre  $i = 0, 1 \dots \frac{N}{2} - 1$ .

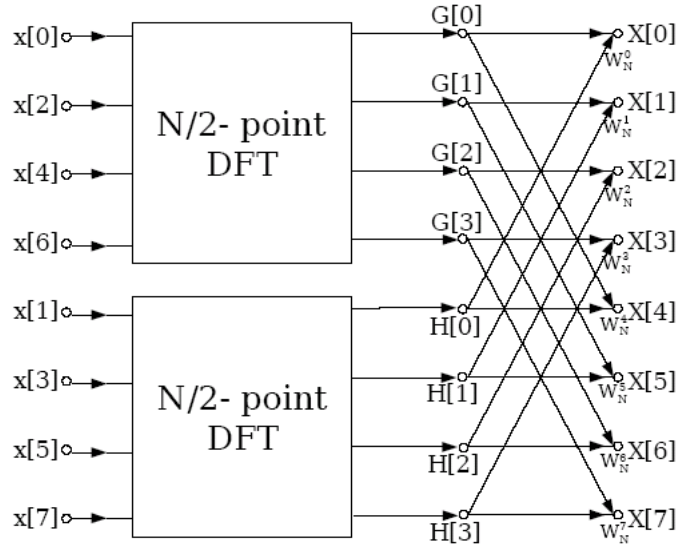
Teraz pre zjednodušenie výrazu si označme:

$$E_i = \sum_{k=0}^{\frac{N}{2}-1} e_i e^{-\frac{ij2\pi 2k}{N}} \quad O_i = \sum_{k=0}^{\frac{N}{2}-1} o_i e^{-\frac{ij2\pi 2k}{N}} \quad (49)$$

Rovnakým spôsob by sme získali členy pre  $i \geq \frac{N}{2}$ . Vzhľadom k periodicite platí  $E_{i+\frac{N}{2}} = E_i$  a  $O_{i+\frac{N}{2}} = O_i$ . Pomocou výrazov  $E_i$  a  $O_i$  je potom výsledná transformácia daná v tvare :

$$F_i = \begin{cases} E_i + e^{-\frac{ij2\pi}{N}} O_i & \text{pre } i < \frac{N}{2} \\ E_{i-\frac{N}{2}} - e^{-\frac{j2\pi}{N}(i-\frac{N}{2})} O_{i-\frac{N}{2}} & \text{pre } i \geq \frac{N}{2} \end{cases} \quad (50)$$

Týmto sme transformáciu skladajúcu sa z  $N$  bodov rozdelili na dve transformácie zložených z  $\frac{N}{2}$  bodov. Rovnakým postupom delenia budeme pokračovať až do doby, pokiaľ výsledná postupnosť nebude mať len dva prvky. Počet operácií kompletnej transformácie sa tak zmenší z  $O(N^2)$  na  $O(N \log(N))$ .



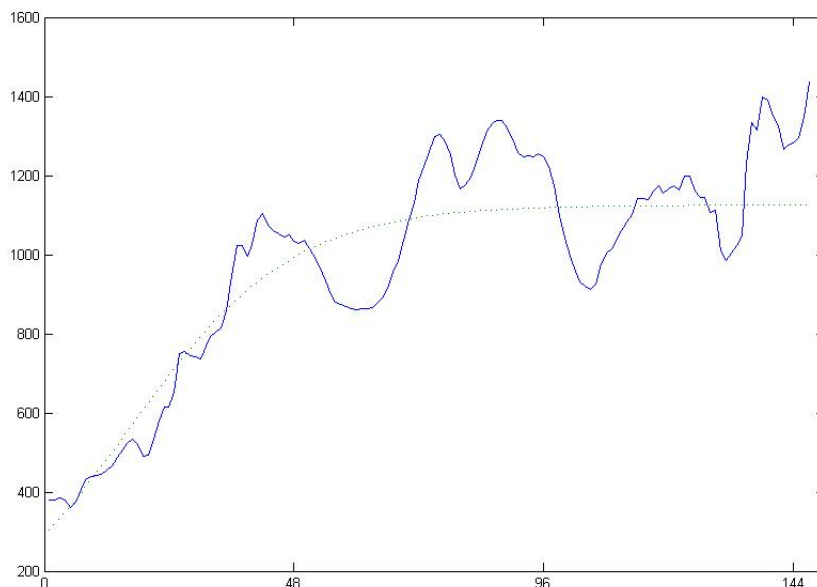
**Obr. 9:** Delenie transformácie zloženej z  $N$  bodov na transformáciu s  $\frac{N}{2}$  bodmi. (Zdroj: [9])

### 3 Aplikácia na časové rady

Táto kapitola obsahuje aplikáciu Fourierovej analýzy na dva časové rady. V prvom príklade sa zameráme na ekonomické časové rady a cyklickú zložku v nich. V druhom príklade analyzujeme dáta pochádzajúce z prírody okolo nás, kde si ukážeme prírodné cykly.

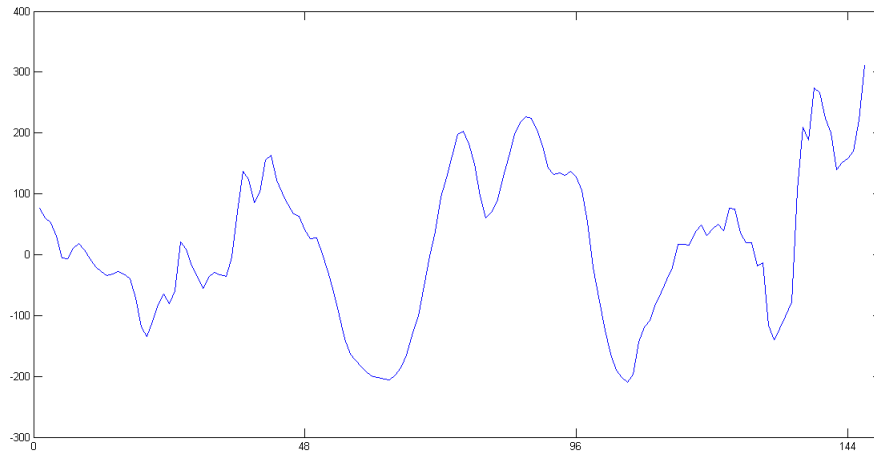
#### 3.1 Príklad č.1

Majme časový rad reprezentujúci kvartálnu nezamestnanosť mužov vo Francúzsku v rokoch 1974-2011 v tis. (Zdroj:[12]). Je to 147 zložkový vektor. Tieto data sú znázornené v nasledujúcom obrázku, kde modrá čiara reprezentuje náš časový rad a prerušovaná čiara reprezentuje trendovú zložku. Túto trendovú zložku sme dostali lineárnou regresiou, ktorá nieje popísaná v tejto práci.



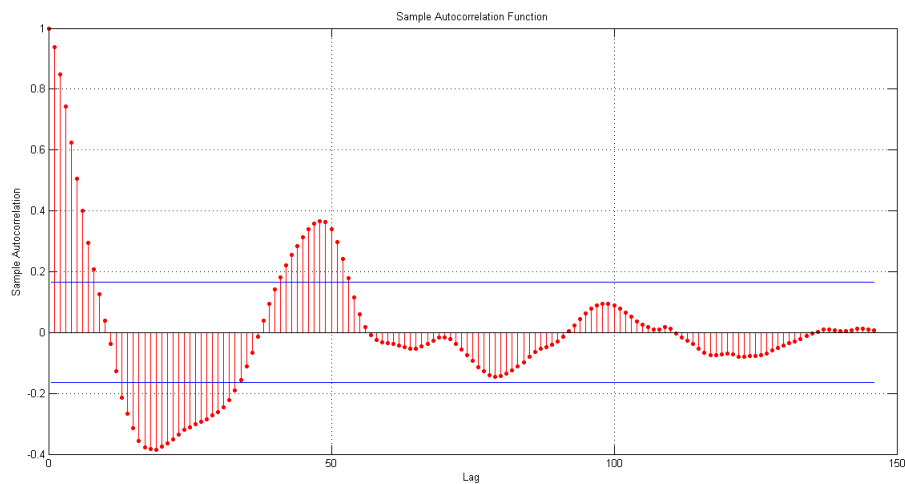
**Obr. 10:** Nezamestnanosť mužov vo Francúzsku (kvartálne od roku 1974-2011)

Po očistení časového radu od trendovej zložky dostávame rad zložený z cyklickej, sezónnej a náhodnej zložky.



**Obr. 11:** Časový rad očistený od trendovej zložky

Ďalšou fázou bude zisťovanie periódy. Obrázok 12 zobrazuje autokorelačnú funkciu (ACF) pre náš časový rad. Z priebehu tejto funkcie odhadneme periódu pre náš časový rad. Dĺžku opozdenia (Lag) si môžeme predstaviť ako jednotlivé vzorky. Teda ak poznáme vzorkovaciu frekvenciu a počet vzoriek daného časového radu, je možné určiť dobu periódy. Naša perióda je 48, a keďže máme kvartálne data prislúcha to 12 rokom.

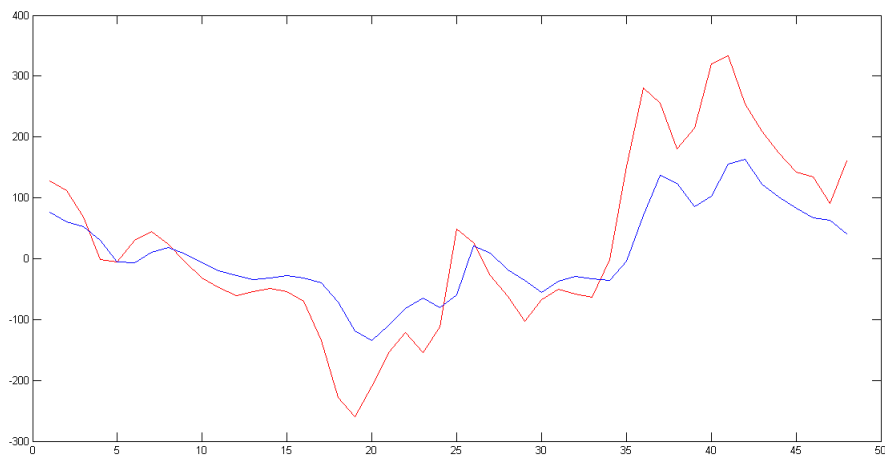


**Obr. 12:** ACF pre náš časový rad

Ďalej budeme pracovať s časovým radom na jeho jednej perióde, t.j. z našich dát si vyberieme prvých 48 hodnôt. Náš nový skrátený časový rad aproximujeme Fourierovým rozvojom podľa vzťahov 28 - 31, kde integrály nahradíme sumami, keďže náš

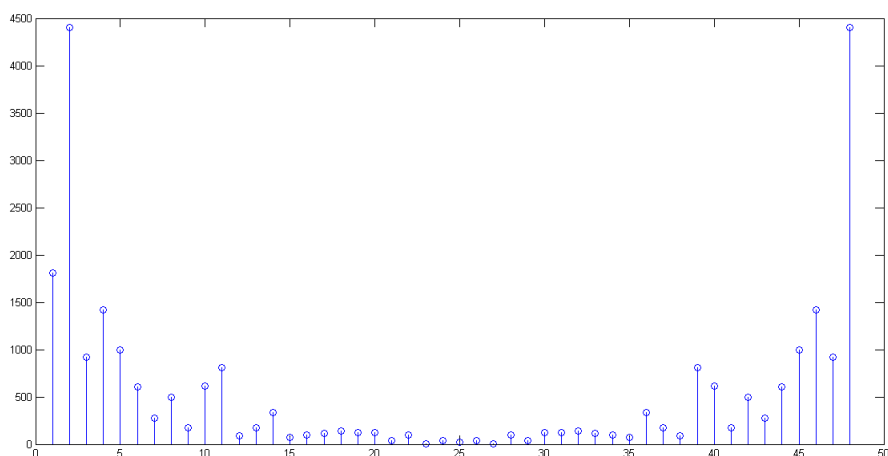


časový rad je definovaný v diskretných časových okamihoch. Nasledujúci graf ukazuje aproximáciu Fourierovým rozvojom červenou farbou a náš časový rad modrou farbou.



**Obr. 13:** Aproximácia časového radu Fourierovým rozvojom

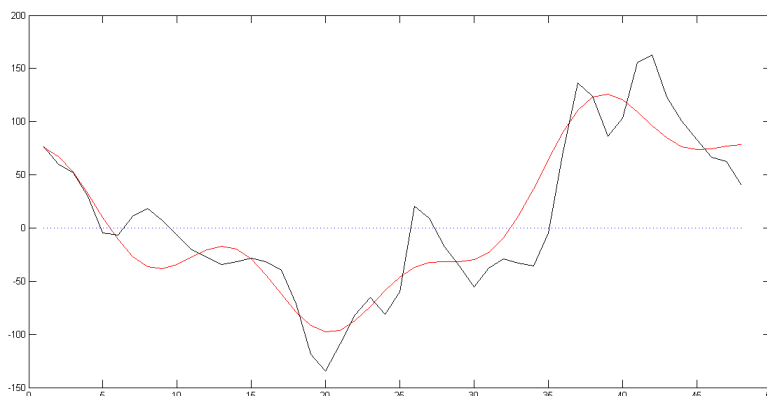
Využitím rýchlej Fourierovej transformácie prechádzame z časovej domény do frekvenčnej a vytvoríme periodogram. Periodogram sa používa na identifikáciu dominantných periód (alebo frekvencií) z časového radu. Je užitočným nástrojom pre identifikáciu cyklického správania v časových radoch, obzvlášť keď cykly nie sú spojené s bežne sa vyskytujúcou sezónosťou (mesačné alebo štvrťročné).



**Obr. 14:** Časový rad po aplikácii Fourierovej Transformácie

Z obrázka 14 vidíme, že obsahuje viacero vrcholov (peakov), ktoré hovoria o dominantných frekvenciách. Našou úlohou je extrahovať tieto členy z postupnosti Fourier-

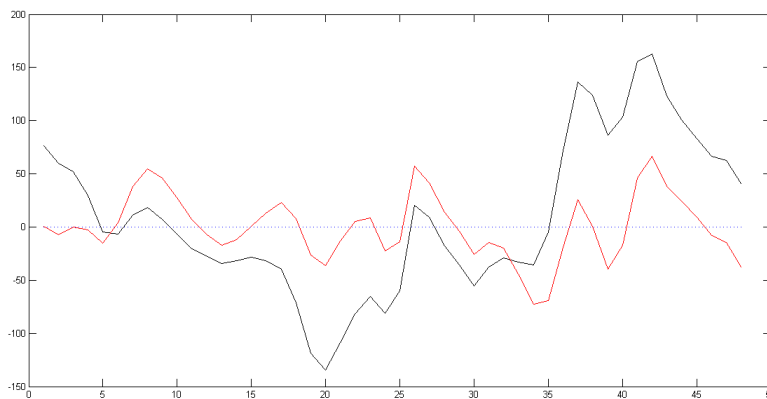
rovho rozvoja. V našom prípade to budú členy  $a_1, a_2, a_4$  a  $b_1, b_2, b_4$ .



**Obr. 15:** Cyklická zložka znázornená spolu s časovým radom

Na obrázku 15 je znázornený pôvodný časový rad čiernou farbou a cyklická zložka je znázornená červenou farbou, ktorá má predpis :

$$\zeta(t) = a_0 + a_1 \cos\left(\frac{2\pi t}{P}\right) + b_1 \cos\left(\frac{2\pi t}{P}\right) + a_2 \cos\left(\frac{4\pi t}{P}\right) + b_2 \cos\left(\frac{4\pi t}{P}\right) + a_4 \cos\left(\frac{8\pi t}{P}\right) + b_4 \cos\left(\frac{8\pi t}{P}\right)$$

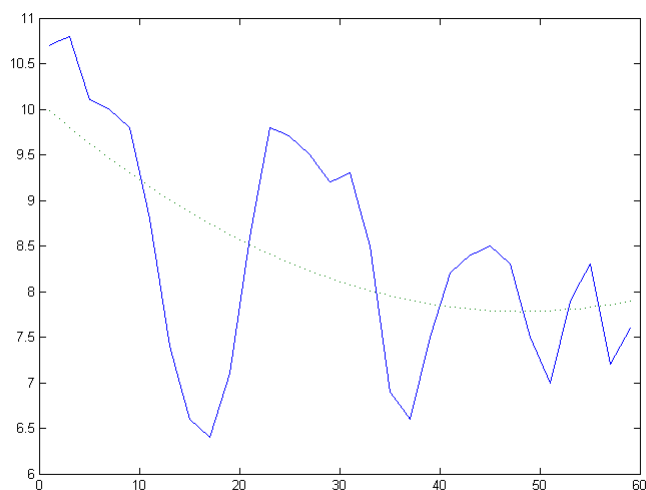


**Obr. 16:** Časový rad očistený od cyklickej zložky

Keď už poznáme cyklickú zložku, môžeme prejsť k očisteniu časového radu. Po tomto očistení nám ostáva časový rad zložený zo sezónnej a náhodnej zložky. Na nasledujúcom grafe je znázornený pôvodný časový rad čiernou farbou a očistený časový rad červenou farbou.

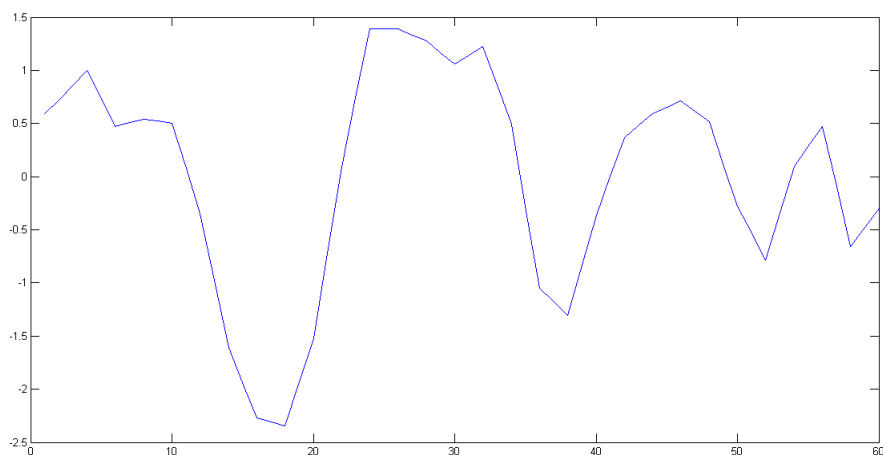
### 3.2 Príklad č.2

V tomto príklade sa zameráme na časový rad tvorený z údajov o jazere Urmia v Iráne. Ide o polročné dáta obsahujúce priemernú výšku hladiny v rokoch(1970-2000). Obrázok 17 zachytáva náš časový rad a naznačenú trendovú funkciu.



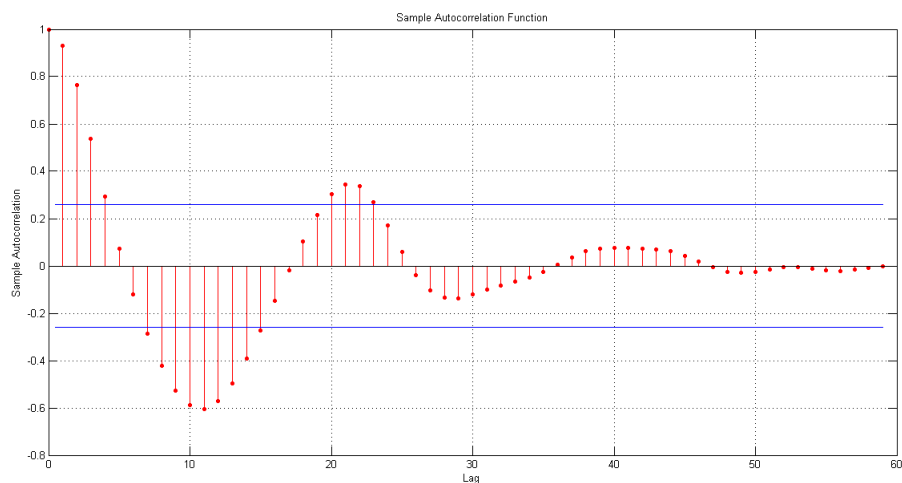
**Obr. 17:** Priemerná výška hladiny jazera Urmia v rokoch 1970-2000

Po očistení časového radu od trendu dostávame rad pripravený na analýzu cyklickej zložky.



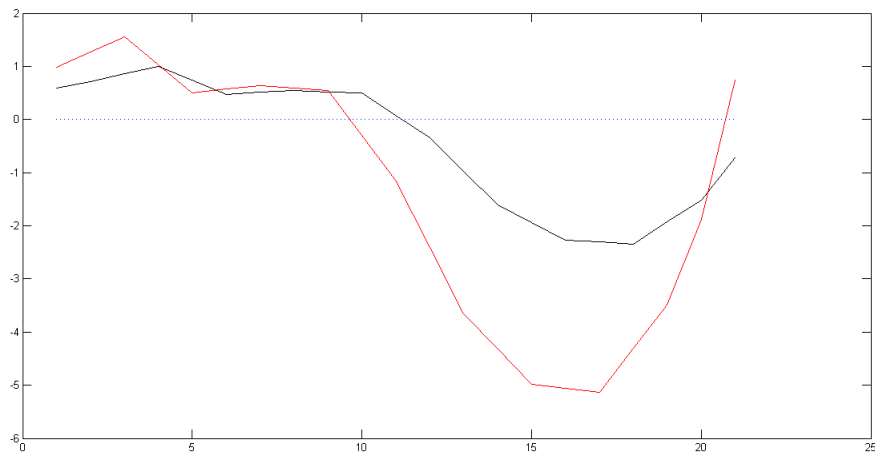
**Obr. 18:** Časový rad očistený od trendovej zložky

Pomocou autokorelačnej funkcie z obrázka 19 odhadneme periódu. V našom prípade je perióda rovná 21, čo reprezentuje 10,5 roka.



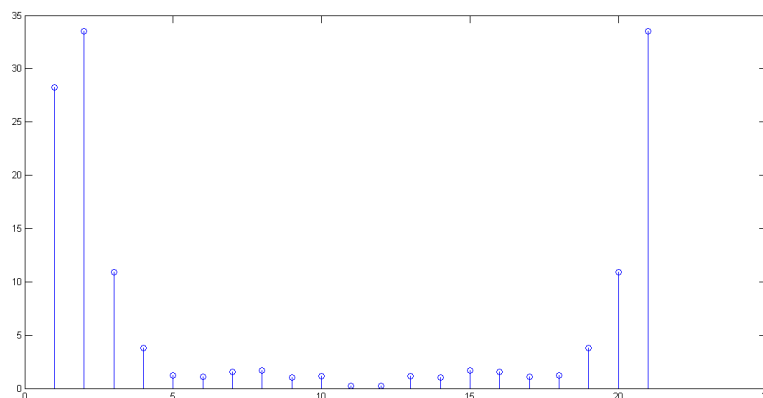
**Obr. 19:** ACF pre náš časový rad

Keď už poznáme periódu, spravíme Fourierov rozvoj funkcie pre túto periódu. Čiernou farbou je vykreslený časový rad a červenou aproximácia.



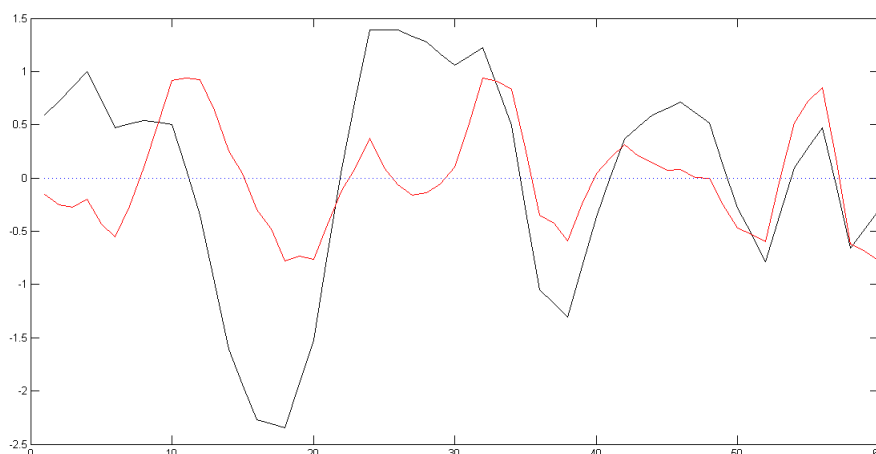
**Obr. 20:** Aproximácia časového radu Fourierovým rozvojom

Ako ďalší krok spravíme Fourierovu transformáciu a pozrieme sa na časový rad závislý od frekvencie, kde zistíme, ktoré z nich sú významné. Podľa obrázka 21 vidíme, že naše dominantné frekvencie sa vzťahujú pre členy  $a_1, a_2, a_3$  a  $b_1, b_2, b_3$



**Obr. 21:** Časový rad po aplikácii Fourierovej Transformácie

Po extrakcii týchto členov z Fourierovho rozvoja dostávame časový rad očistený od cyklickej zložky, čo je v obrázku 22 vyznačené červenou farbou

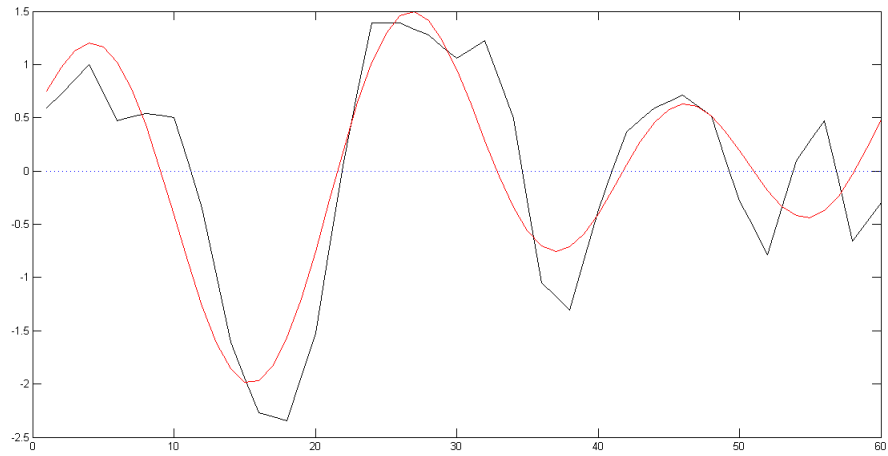


**Obr. 22:** Časový rad očistený od cyklickej zložky

A teda naša cyklická zložka je reprezentovaná vzťahom :

$$\zeta(t) = a_0 + a_1 \cos\left(\frac{2\pi t}{P}\right) + b_1 \cos\left(\frac{2\pi t}{P}\right) + a_2 \cos\left(\frac{4\pi t}{P}\right) + b_2 \cos\left(\frac{4\pi t}{P}\right) + a_3 \cos\left(\frac{6\pi t}{P}\right) + b_3 \cos\left(\frac{6\pi t}{P}\right)$$

V obrázku 23 je cyklická zložka vyznačená červenou farbou a pôvodný časový rad čiernou farbou.



**Obr. 23:** Cyklická zložka znázornená spolu s časovým radom

## Záver

Hlavným cieľom mojej bakalárskej práce bolo opísať teóriu cyklicity v časových radoch a následne ju aplikovať na reálne dáta. Výsledkom aplikácie bola extrakcia cyklickej zložky z časových radov za pomoci Fourierovej analýzy. V jednotlivých kapitolách sme si postupne popísali potrebnú teóriu, ktorú sme v ďalších kapitolách použili na konkrétne príklady za účelom naplnenia cieľa.

V prvej kapitole sme si definovali a charakterizovali časové rady podľa rôznych kritérií. Ukázali sme si grafickú reprezentáciu časových radov. Opísali sme dokompozíciu časových radov a jej zložky (trend, sezónnosť, cyklicita a náhodná zložka).

Druhá kapitola je venovaná Fourierovej analýze. Ako prvé definujeme trigonometrický rad a vzťahy s ním spojené. Ďalej opisujeme teóriu Fourierovho rozvoja, pomocou ktorého sme boli schopní aproximovať daný časový rad za použitia sínusov a kosínusov. Uviedli sme podmienky aproximácie tzv. Dirichletové podmienky. Následne definujeme Fourierovu transformáciu (FT) a Diskrétnu Fourierovu transformáciu (DFT), ktorá nám umožňuje analyzovať časové rady vo frekvenčnej doméne. Vzťahy pre výpočet FT a DFT uvádzame vo viacerých formách. V závere kapitoly sa venujeme algoritmu výpočtu Fourierovej transformácie tzv. rýchla Fourierova transformácia (FFT)

V poslednej kapitole sme teoretické znalosti aplikovali na dva časové rady. V príklade 1 sme extrahovali cyklickú zložku z časového radu, ktorý reprezentuje nezamestnanosť mužov vo Francúzsku. Využitím autokorelačnej funkcie sme odhadli periódu a následne sme approximovali tento rad Fourierovým rozvojom. Po analýze frekvencií v spektre sme extrahovali dominantné frekvencie a tým sme rad očistili od cyklickej zložky. V príklade 2 sa venujeme analýze cyklickej zložky v časových radoch vyskytujúcich sa v prírode. Ako podklad sme si zobrali priemernú výšku vodnej hladiny jazera Urmia. Postupovali sme podobne ako v príklade 1, kde sme pomocou Fourierovej analýzy extrahovali cyklickú zložku.

Výsledok mojej práce je len krok v celkovej analýze časových radov. Takto očistené

časové rady sú pripravené na ďalšiu analýzu. Ukázali sme, že Fourierovu analýzu môžeme použiť ako na ekonomické časové rady tak aj na bežné časové rady. Ako vhodný doplnok mojej práce by som čitateľom odporučil literatúru týkajú sa lineárnej regresie a Box-Jenkinsovej metodológie.



## Zoznam použitej literatúry

- [1] BECHARD, P.: *Advanced Spectral Analysis*, PMA Corpration - NETA World, 2003, dostupné na internete (26.05.2013): [http://www.netaworld.org/files/neta-journals/NWsu04FeaBechard\\_0.pdf](http://www.netaworld.org/files/neta-journals/NWsu04FeaBechard_0.pdf)
- [2] BRYJOVÁ, I.: *Principy a metody moderní medicínské diagnostiky*, Opava, 2007.
- [3] BURNS, A. F., Mitchell, W. C.: *Measuring Business Cycles*, New York: National Bureau of Economic Research, New York, 1946.
- [4] CIPRA T.: *Analýza časových řad s aplikacemi v ekonomii*, SNTL, Praha, 1986.
- [5] COOLEY, J. W., TUKEY, J. W.: *An algorithm for the Machine Calculation of Complex Fourier Series*, Mathematics of Computation Journal 19 (1965), 297-301, dostupné na internete (27.05.2013):  
<http://www.cs.jhu.edu/~misha/ReadingSeminar/Papers/Cooley65.pdf>
- [6] GRANGER, C. W. J.: *Spectral analysis of economic time series*, Princeton University Press, California, 1964.
- [7] HAMILTON, J. D.: *Time Series Analysis*, Princeton University Press, 1994
- [8] HOLČÍK, J.: *Signály a lineární systémy*, Masarykova univerzita, Brno, 2011, dostupné na internete (26.05.2013):  
<http://www.iba.muni.cz/res/file/ucebnice/holcik-signaly-casove-rady-linearni-systemy.pdf>
- [9] JONES, D. L.: *The DFT, FFT, and Practical Spectral Analysis*, University of Illinois at Urbana-Champaign, 1992, dostupné na internete (26.05.2013):  
<http://cnx.org/content/m12016/latest/>
- [10] SELLA L.: *Old and new spectral techniques for economic time series*, Turín, 2008.
- [11] WALKER, J. S.: *Fourier Analysis*, Oxford University Press, New York, 1988
- [12] <http://epp.eurostat.ec.europa.eu/portal/page/portal/eurostat/home/>