UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY

JEDNOPERIÓDOVÉ MODELY NA SPRÁVU PORTFÓLIA

BAKALÁRSKA PRÁCA

2013 Linda VODISLAVSKÁ

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY

JEDNOPERIÓDOVÉ MODELY NA SPRÁVU PORTFÓLIA

BAKALÁRSKA PRÁCA

Študijný program:	Ekonomická a finančná matematika
Študijný odbor:	1114 Aplikovaná matematika
Školiace pracovisko:	Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky
Vedúci práce:	doc. Mgr. Igor Melicherčík, PhD.

Bratislava 2013

Linda VODISLAVSKÁ

Univerzita Komenského v Bratislave
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

ZADANIE ZÁVEREČNEJ PRÁCE

Meno a priezvisko študenta: Linda Vodislavská
Študijný program: ekonomická a finančná matematika (Jednoodborové štúdium, bakalársky I. st., denná forma)
Študijný odbor: 9.1.9. aplikovaná matematika
Typ záverečnej práce: bakalárska
Jazyk záverečnej práce: slovenský

Názov: Jednoperiódové modely na správu portfólia.

Cieľ: Najznámejším jednoperiódovým modelom na správu portfólia je Markowitzov model. Tento model vedie na úlohu kvadratického programovania. Existujú však aj modely, ktoré sú formulované ako úlohy lineárneho programovania. V práci pôjde o naštudovanie a spracovanie týchto modelov a porovnanie s Markowitzovým modelom.

Vedúci: doc. Mgr. Igor Melicherčík, PhD.
Katedra: FMFI.KAMŠ - Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky
Vedúci katedry: prof. RNDr. Daniel Ševčovič, CSc.

Dátum zadania: 10.10.2012

Dátum schválenia: 03.11.2012 doc. RNDr. Margaréta Halická, CSc.
garant študijného programu

....
študent vedúci práce

Poďakovanie Na tomto mieste by som sa veľmi rada poďakovala doc. Mgr. Igorovi Melicherčíkovi, PhD., svojmu vedúcemu bakalárskej práce, za ochotu, pomoc a všetky cenné rady a pripomienky, ktoré mi pomohli pri písaní tejto práce.
Tiež nemôžem vynechať moju rodinu, ktorá prejavila mimoriadnu trpezlivosť, a priateľa Matúša Metesa, ktorému ďakujem za spríjemnenie času a morálnu podporu v období, kedy sme obaja písali naše bakalárske práce.

Abstrakt

VODISLAVSKÁ, Linda: Jednoperiódové modely na správu portfólia [Bakalárska práca], Univerzita Komenského v Bratislave, Fakulta matematiky, fyziky a informatiky, Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky; školiteľ: doc. Mgr. Igor Melicherčík, PhD., Bratislava, 2013, 44 s.

V tejto práci sa venujeme porovnaniu jednoperiódových modelov na správu portfólia. Keďže Markowitzov Mean Variance model je pravdepodobne najpopulárnejším modelom na optimalizáciu investorovho portfólia, skúmame jeho vlastnosti a kvality. Tie ďalej porovnávame s mladším a menej rozšíreným Mean Absolute Deviation modelom. V analýze sa snažíme zamerať sa na pozitíva i negatíva každého modelu. Naším cieľom je okrem porovnávania v teoretickej rovine aj aplikácia získaných poznatkov na reálne dáta. Naša práca predstavuje súhrn vlastností oboch modelov a ich modifikácií, pre ktoré porovnávame optimálnu skladbu portfólia.

Kľúčové slová: optimalizácia portfólia, Markowitzov Mean Variance model, Mean Absolute Deviation model, zákaz krátkych pozícií, linerárne programovanie

Abstract

VODISLAVSKÁ, Linda: One-period models for portfolio optimization [Bachelor Thesis], Comenius University in Bratislava, Faculty of Mathematics, Physics and Informatics, Department of Applied Mathematics and Statistics; Supervisor: doc. Mgr. Igor Melicherčík, PhD., Bratislava, 2013, 44 p.

In our work we deal with comparison between one-period models for portfolio optimization. Since Markowitz Mean Variance model is presumably the most popular model for investor's portfolio optimization, we investigate its properties and qualities. Hereinafter, we compare those with younger and less known Mean Absolute Deviation model. In analysis we endeavour to study both positives and negatives of each model. In addition to theoretical comparison, our aim is to apply acquired knowledge to real data. Our work summarizes attributes of both models and their modifications, for which we compare optimal portfolio allocation.

Keywords: portfolio optimization, Markowitz Mean Variance model, Mean Absolute Deviation model, short sale restriction, linear programming

Obsah

Zoznam obrázkov

Zoznam tabuliek

Úvod

„Predpokladá sa, že táto akcia bude rásť dobre, pokiaľ budú aj iné akcie na trhu rásť. Musíme tiež brať do úvahy, že bude na tom biedne, pokiaľ aj výnosy iných akcií budú na tom biedne. Dokonca ani ten smer, akým sa bude trh uberať, nie je vôbec jasný. Existujú slabiny, ktoré môžu spôsobiť, že naša akcia bude klesať, aj keď ostatné akcie budú vo všeobecnosti rásť: možnosť nátlaku zo strany odborov alebo nebezpečenstvo zo strany agresívneho konkurenta nemožno ignorovať. Na strane druhej však existuje skrytý potenciál, ktorý môže priniesť ešte väčší zisk, než v aký si manažment spoločnosti vôbec trúfa dúfať. Nový výzor produktu, nová (nie drahá) reklamná kampaň či nárast produkčných možností sa môžu ukázať ako magická kombinácia, spĺňajúca všetky predpoklady k niečomu takému.“

Predchádzajúca veľmi všeobecná a vôbec nie konkrétna výpoveď burzového makléra publikovaná v diele [5] asi nepredstavuje informáciu, akú potenciálny investor pri jeho návšteve očakáva. A práve ju môžeme považovať za hnací motor rozvoja teórie portfólia a výskumu vôbec v tejto oblasti. Investor prichádza za burzovým maklérom s jediným cieľom: znásobiť svoj majetok. Investor vie, aké množstvo peňazí chce preinvestovať. Investor vie, aký minimálny výnos chce dosiahnuť. A správny investor tiež vie, čo potrebuje od burzového makléra počuť: koľko a do čoho investovať.

Odpoveď na túto otázku však vôbec nie je jednoduchá. Laik by možno nášmu investorovi poradil, aby investoval do akcie, ktorá mala doposiaľ najvyšší výnos. Znie to síce pomerne logicky, ale pravda to nie je. Nevyhnutnou a neoddeliteľnou súčasťou investorovej stručnej otázky je totiž aj ďalšia: ako minimalizovať riziko spojené s investovaním do akcií? Akcia síce môže mať najvyšší výnos, ale to so sebou prináša riziko, že jej hodnota bude príliš kolísať. Vôbec prvým, kto prišiel s odpoveďou na investorovu otázku v podobe matematicky riešiteľného problému, bol Harry Markowitz v roku 1952, keď v článku [4] predstavil svoj Mean Variance model. Za merateľ rizika si zvolil varianciu výnosov jednotlivých akcií a ich vzájomnú kovarianciu. Tvrdí sa, že Markowitzov model pravdepodobne poskytol viac otázok ako ich reálne zodpovedal, čím podnietil výskum v tejto oblasti. Od polovice dvadsiateho storočia sa odpovede pokúšalo nájsť niekoľko desiatok ďalších významných matematikov, štatistikov a ekonómov v stovkách najrôznejších publikácií, kde predstavili svoje modely a „svoje“ meratele rizika. Ktorý model je však ideálny? Ktorý rýchlo a presne počíta a je aplikovateľný v reálnom živote?

Táto práca sa zaoberá jednoperiódovými modelmi na správu portfólia, hlavný dôraz je však kladený na porovnanie dvoch, a to modelov Mean Variance modelu autora H. Markowitza a nie až tak všeobecne známeho Mean Absolute Deviation modelu autorov H. Konno-a a H. Yamazaki-ho. Teoretickému porovnávaniu sa venujeme v prvej časti tejto práce, jej druhá časť je venovaná praktickému porovnaniu optimálnej skladby portfólia na základe reálnych dát a výpočtov.

1 O investorovom portfóliu

V tejto časti našej bakalárskej práce si vysvetlíme základné pojmy významné z hľadiska teórie portfólia, s ktorými budeme v tejto práci pracovať a ktoré by mal poznať každý, kto sa raz rozhodne investovať.

Portfólio je akákoľvek kombinácia investičných možností, do ktorej môže investor vložiť svoj kapitál.

Teória portfólia predstavuje mikroekonomickú vednú disciplínu zaoberajúcu sa problematikou optimálnej skladby portfólia, známej aj ako optimalizácia portfólia - kvôli zdôrazneniu využitia optimalizačných metód, predovšetkým kvadratického a lineárneho programovania.

1.1 Investori

Ako prvé sa zameriame na investorov. Tých rozlišujeme na tri skupiny: *rizikovo averzných*, *rizikovo neutrálnych* a *riziko obľubujúcich*. Znamená to, že rôzny investor je ochotný podstúpiť rôzne riziko pre konkrétnu úroveň výnosu. Najlepšie sa to dá vyjadriť pomocou očakávanej strednej hodnoty investície: rizikovo neutrálni investori začínajú investovať pri očakávanej strednej hodnote výnosu investície rovnej výnosu bezrizikovej investície, rizikovo averzní investori začnú investovať len pokiaľ je stredná hodnota väčšia, no a riziko obľubujúci investori budú investovať aj pokiaľ bude stredná hodnota výnosu menšia ako výnos bezrizikovej investície, čiže aj v prípade, že strata je pravdepodobnejšia ako zisk. My sa budeme v našej práci venovať prvému typu.

1.2 Výnos

Cieľom každého investora je zisk, ktorý sa snaží maximalizovať. Predpokladajme, že investorovo portfólio má na začiatku investičného obdobia hodnotu X_0. Investor má predstavu o tom, aký zisk by chcel na konci investičného obdobia dosiahnuť. Je však rozdiel, či bude jeho zisk \$20 z počiatočnej investície \$10 alebo \$1000. Preto je lepšie uvažovať investora, ktorý maximalizuje svoj zisk pomerne ku svojmu vkladu. Rozlišujeme totiž medzi *absolútnym ziskom*, vyjadrený pomerom hodnoty portfólia na začiatku

X_0 a konci investičného obdobia X_1:

$$R = \frac{X_1}{X_0} \tag{1}$$

a *relatívnym ziskom*, ktorý sa dá vyjadriť percentuálne ako výnos, a preto je aj bežnejšie používaný:

$$r = \frac{X_1 - X_0}{X_0}. \tag{2}$$

Zrejmý je vzťah

$$r = R - 1. \tag{3}$$

1.3 Diverzifikácia

Sám Markowitz uvádza vo svojej práci [5]: *„Dobré portfólio je lepšie ako dlhý zoznam vynikajúcich akcií a dlhopisov."* Jeho tvrdenie je síce krátke, ale predchádzalo mu nezanedbateľné množstvo výskumu. Čo za tým tkvie? Ako sme už spomenuli v samotnom úvode, najlepšou voľbou pre investora je nevsadiť všetko na jednu akciu práve z dôvodu možnej prítomnosti priveľkého rizika spojeného s investovaním do nej. Vysoký výnos v predchádzajúcom období je nezriedka spojený s nízkym, v najhoršom prípade záporným výnosom v tom budúcom. Nerozvážni investori nezriedka čelia situácii, v ktorej cena ich akcie nečakane klesne a vidina vysokých výnosov sa rozplynie. Aj preto považujeme za potrebné zdôrazniť, že v našej práci nehovoríme o optimálnych akciách, ale o optimálnej skladbe portfólia.

Predpokladajme, že na trhu je dostupných n akcií, z ktorých možno vytvoriť naše portfólio. Ako najvhodnejšia voľba sa javí *diverzifikácia*, čo vlastne znamená prerozdelenie investovaného majetku do viacerých, navzájom nesúvisiacich akcií z rôznych oblastí. Pre ilustráciu, znamená to napr. že neinvestujem naraz do akcií internetového prehliadača a internetového obchodu, lebo existuje prepojenie týchto dvoch oblastí.

Jednou z možností prerozdelenia investorovho majetku do n akcií je naivne diverzifikovať, čiže rozdeliť investovaný majetok do jednotlivých akcií pomerne. Vyjadrené matematicky to znamená priradenie každej z akcií váhu $w_i = \frac{1}{n}X_0$, resp. $w_i = \frac{1}{n}$ v prípade, že uvažujeme počiatočný majetok investora rovný 1. Nie je to ale ideálna voľba. Práve modely na správu portfólia nám ukazujú, že vhodné je akciám priradiť rôzne váhy w_i. Celkovo tak môžeme chápať investorovo portfólio ako vektor $w = (w_1, w_2, ..., w_n)'$.

Prenásobením tohto vektora konštantou predstavujúcou investorov počiatočný majetok, dostávame tzv. *portfólio v monetárnom ponímaní*, ktoré nám podá presnú informáciu o tom, presne koľko peňazí máme do jednotlivej akcie investovať. Je zrejmé, že požadujeme $\sum_{i=1}^{n} w_i = 1$. Niektoré variácie modelov povoľujú aj krátke pozície (tzv. shortovanie), čo v praxi znamená, že akciám môžeme priradiť aj záporné váhy $w_i < 0$. Táto stratégia je pre investora výhodná v prípade očakávania poklesu cien jeho akcií. V našej práci sa venujeme obom vyššie spomenutým prípadom, s povolením ako aj zákazom krátkych pozícií u oboch nami skúmaných modelov.

1.4 Meratele rizika

V modeloch, ktoré sú predmetom skúmania tejto bakalárskej práce, je riziko reprezentované na jednej strane varianciou, čiže disperziou výnosov jednotlivých akcií a ich vzájomnou kovarianciou v Markowitzovom Mean Variance modeli, na strane druhej tzv. strednou absolútnou odchýlkou v modeli nesúcom anglický ekvivalent tohto názvu. Treba poznamenť, že variancia je síce pravdepodobne najpoužívanejším merateľom rizika, nie však ideálnym. Okrem rizika, že portfólio bude mať na konci nižšiu hodnotu ako očakávanú, riziko zahrňuje aj jeho vyššiu hodnotu, čo nám teória portfólia nedovoľuje označiť za neželaný jav. Na druhej strane, stredná absolútna odchýlka sa javí ako vhodná náhrada, dokonca v prípade normálne rozdelených výnosov sú nami skúmané dve metódy merania rizika v podstate rovnaké (dôkaz uvádzame v časti 4). Ako pridaný bonus môžeme v prípade Mean Absolute Deviation modelu chápať možnosť penalizovať rozlišnými konštantami c_u a c_d odklonenia smerom nadol a nahor od cieľového výnosu $\bar{r_p}$ investora.

1.5 Ako odhadnúť budúci výnos?

Pri výbere akcií investora zaujíma predovšetkým ich budúci výnos. Vynára sa teda otázka, ako vôbec odhadnúť budúci výnos akcií a mať tak možnosť namodelovať príklad. Na jednej strane sa môže investor zamerať na historický výnos akcií. Na strane druhej sa môže orientovať svojimi predpokladmi ohľadom budúcich výnosov. Pokiaľ sú historické výnosy vkladané do jednotlivých modelov ako vstupy, ako výstupy dostaneme tie akcie, ktorým sa v minulosti mimoriadne darilo. Je to však to, čo investor potrebuje? Aké časové obdobie má zvoliť? Pri zvolení pridlhého časového horizontu môžu byť výsledky skreslené a neaktuálne, avšak v prípade, že je sledovaný časový úsek príliš krátky, výsledok môže byť ovplyvnený výraznými krátkodobými vplyvmi. Pokiaľ sa však sústredí výlučne na svoje dojmy a predpoklady a tie vkladá do modelu ako vstupy, ako výstup nedostane nič iné, len mierne upravený obraz svojich myšlienok. Dôležité preto je nezamerať sa len na jeden pohľad, ale skôr ich navzájom vhodne doplniť.

1.6 Moderná teória portfólia

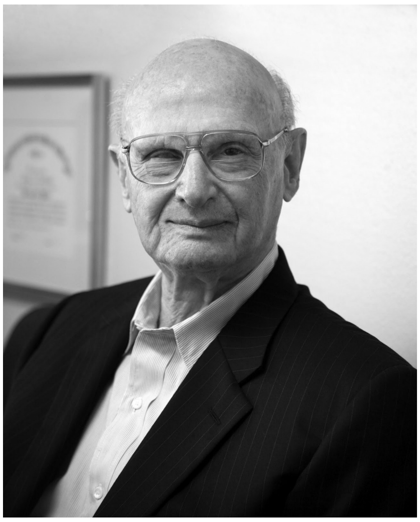
Za jej zakladateľa sa považuje H. Markowitz, autor jedného z dvoch nami skúmaných modelov. Poskytol vôbec prvé systematické riešenie problému, ktorému čelí každý investor, a to navzájom sa vylučujúcich túžieb každého investora: vysokého profitu a nízkeho rizika. Počiatky modernej teórie portfólia teda nesiahajú ďalej ako do päťdesiatych rokov 20. storočia. Ako je uvedené aj v diele [6]: *Pravdepodobne najvýznamnejšou súčasťou modernej teórie portfólia je poznanie, že najlepším portfóliom je práve to najviac diverzifikované.*

1.7 Jednoperiódové modely

Jedná sa o modely, pri ktorých s akciami pracujeme len počas jednej periódy. Na začiatku periódy, čiže investičného obdobia, investor prerozdelí svoj kapitál medzi niekoľko akcií. V reči matematiky to znamená priradenie nenulovej váhy $w_i \neq 0$ jednotlivým premenným reprezentujúcim vybrané akcie. Investor musí vyriešiť príklad reprezentovaný modelom, v ktorom spomínané akcie musia spĺňať určité ohraničenia, medzi inými je aj to, že ich váhy musia v súčte dávať jednotku. Počas investičného obdobia akcie generujú určitý (náhodný) výnos. Investor do tohto procesu nijako nezasahuje, napr. nemôže váhy akcií v portfóliu prispôsobovať aktuálnej situácii na trhu: kupovať či predávať, čo môže pripomínať buy-and-hold stratégiu vo viacperiódovom období. Na konci periódy investor vypočíta celkový výnos svojho portfólia.

2 Mean Variance model

Tento model, možno známejší pod autorským názvom Markowitzov model, je považovaný za východiskový bod modernej teórie portfólia a míľnik vo financiách celkovo. Jeho autorom je americký ekonóm *Harry Markowitz*. Prvýkrát bol publikovaný v článku [4] z roku 1952, no Markowitz sa mu venoval aj v neskôr v článku [5]. Za tento priekopnícky model a výskum v tejto oblasti mu bola v roku 1990 udelená Švédskou kráľovskou akadémiou vied Nobelova cena.



Obr. 1: Harry Markowitz, autor Mean Variance modelu

Bikritériová optimalizácia, pri ktorej na jednej strane váh máme cieľový výnos portfólia $\bar{r_p}$ a na strane druhej varianciu (disperziu, rozptyl) portfólia σ_p^2, predstavuje základ Markowitzovho modelu.

Variancia portfólia σ_p^2 v podstate hovorí o tom, ako široko sú rozložené hodnoty v množine. Definovaná je nasledovne:

$$
\begin{aligned}
\sigma_p^2 &= E[(r_p - E[r_p])^2] \\
&= E[(r_p - \bar{r_p})^2] \\
&= E[\{\sum_{j=1}^{n} r_j w_j - E[\sum_{j=1}^{n} r_j w_j]\}^2],
\end{aligned}
\tag{4}
$$

kde $\bar{r_p}$ investorom očakávaný, chcený výnos celého portfólia a r_p jeho skutočná hodnota. Varianciu portfólia v Markowitzovom Mean Variance modeli minimalizujeme. Za dôležité a potrebné podotknúť považujeme skutočnosť, že variancia celého portfólia nie je jednoduchým súčtom variancií jednotlivých akcií, čo zvyšuje jeho výpočtovú náročnosť. Dá sa matematicky ukázať, napr. v [2], že rovnica pre σ_p^2 označená (4) je ekvivalentá zápisu

$$\sigma_p^2(w) = \sum_{i,j=1}^{n} w_i w_j \sigma_{ij}, \tag{5}$$

kde σ_{ij} reprezenuje kovarianciu výnosov akcií i a j, a σ_{ii} varianciu i-tej akcie. Ekvivalentný je maticový zápis $\sigma_p^2 = w^T V w$, kde matica $V_{n\times n}$ je kovariančná a vektor w je vektor váh jednotlivých akcií v portfóliu dĺžky n.

Variancia má tak za následok formuláciu Markowitzovej úlohy ako problému kvadratického programovania:

$$\begin{gathered} \min_{w} \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} w_i w_j \sigma_{ij} \\ \sum_{i=1}^{n} w_i \bar{r_i} = \bar{r_p} \\ \sum_{i=1}^{n} w_i = 1. \end{gathered} \tag{6}$$

Potrebujeme preto poznať očakávané výnosy n akcií $\bar{r_i}$. Investor si musí v závislosti od svojej averzie k riziku stanoviť cieľový výnos portfólia $\bar{r_p}$. Už z našich predchádzajúcich úvah je totiž zrejmé, že vyšší cieľový výnos $\bar{r_p}$ so sebou nesie aj vyššie riziko kolísania výnosov a z toho vyplývajúcej straty.

2.1 Riešenie Markowitzovho problému

Nespochybiteľnou výhodou Mean Variance modelu oproti iným modelom je fakt, že problém možno vyriešiť exaktne. Dá sa tak učiniť s použitím Lagrangeových multiplikátorov. Presný vzorec je odvodený napr. v [2]. Vzorec na vyriešenie Markowitzovho problému po úpravách vyzerá nasledovne:

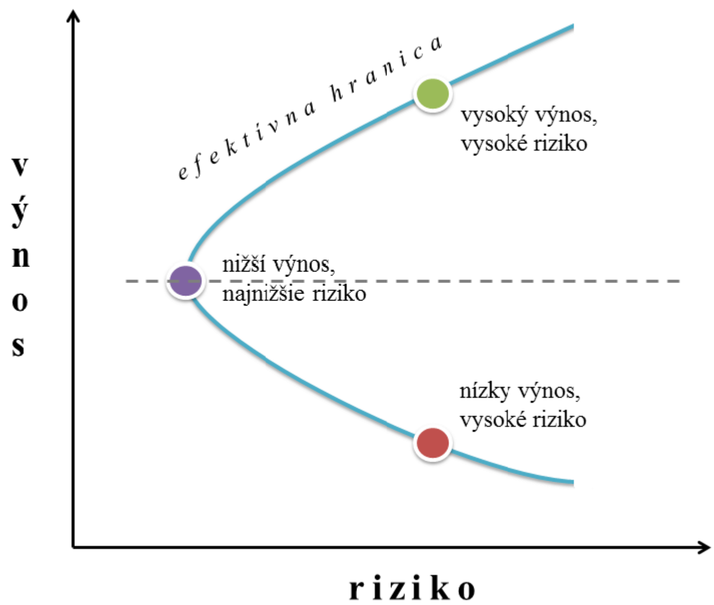
$$w = \frac{\bar{r_p} c - a}{d} V^{-1} \bar{r} + \frac{b - \bar{r_p} a}{d} V^{-1} \mathbf{1}, \tag{7}$$

kde

$$\begin{aligned} a &= \mathbf{1}^T V^{-1} \bar{r} \\ b &= \bar{r}^T V^{-1} \bar{r} \\ c &= \mathbf{1}^T V^{-1} \mathbf{1} \\ d &= bc - a^2 \end{aligned} \tag{8}$$

a $\bar{r}$ je vektor očakávaných (priemerných, na základe historických dát) výnosov akcií v portfóliu dĺžky n.

Medzi základné črty Mean Variance modelu patrí aj *efektívna hranica*. Opticky nám pomáha vyjadriť výsledky získané vyriešením Markowitzovho problému. Veľkou výhodou efektívnej hranice je jej prehľadnosť, ktorá investorovi umožňuje orientovať sa v správaní modelu, a poskytuje tak cenný kľúč pri rozhodovaní sa. Efektívnu hranicu získame ako kombináciu bodov $[\sigma_p^2, r_p]$, reprezentujúcich optimálne kombinácie n akcií s váhami $w_1, w_2, ..., w_n$, v ktorých investorovo portfólio nadobúda minimálne hodnoty rizika, zatiaľ čo výnos je maximalizovaný. Nachádza sa na vrchu množiny všetkých prípustných riešení Markowitzovho modelu, ako je to znázornené na Obrázku 2.



Obr. 2: Efektívna hranica

Mean Variance model tiež poskytol základ pre tzv. asset pricing modely, spomedzi ktorých je najpopulárnejší *Capital Asset Pricing Model* (CAPM).

V našej práci riešime popri formulácii problému (6) aj problém so zákazom krátkych pozícií:

$$
\begin{aligned}
&\min_w \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} w_i w_j \sigma_{ij} \\
&\sum_{i=1}^{n} w_i \bar{r}_i = r_p \\
&\sum_{i=1}^{n} w_i = 1 \\
&w_i \geq 0 \qquad \forall i = 1, 2, ..., n,
\end{aligned} \tag{9}
$$

kde oproti formulácii (6) pribudla posledná nerovnica, v ktorej požadujeme nezáporné hodnoty váh w_i. Tento problém sa však narozdiel od toho predchádzajúceho už vypočítať exaktne nedá.

2.2 Mínusy MV modelu

Ako sme spomínali v úvode, Markowitzov model bol vôbec prvým efektívnym nástrojom na riešenie investičnej dilemy výnos vs. riziko. Od jeho publikovania prešlo už vyše 60 rokov, a za tento nie krátky čas si samotní investori či burzoví makléri uvedomili niektoré jeho nevýhody. Medzi tie najhlavnejšie podľa článku [1] patrí:

- *Výpočtová náročnosť*: Nutné je vypočítať $\frac{n(n+1)}{2}$ konštánt σ_{ij} v kovariančnej matici, z ktorých väčšina je nenulová. Napr. už pre portfólio s 200 akciami, t.j. $n = 200$, je ich nutné vypočítať 20 100, čo je výpočtovo a následne časovo mimoriadne náročné. Podľa manažéra jednej z vedúcich japonských organizácií na správu akcií, problémy s viac ako 200 akciami sú zriedkavo počítané v praxi. Pri väčšom množstve akcií (nad 500) je výpočet optimálneho riešenia veľkého kvadratického programu nezvládnuteľný v reálnom čase, a to aj napriek tomu, že existujú zjednodušenia.

- *Nesymetrické preferencie investora*: Tie sú následkom používania variancie ako merateľa rizika. Je samozrejmé, že investora neteší nižší zisk, ale tomu vyššiemu by sa predsa nikto nebránil. Takisto nie je isté, či nám na presný výpočet stačia len prvé dva momenty (stredná hodnota a disperzia), alebo Markowitzov model máme chápať skôr ako aproximáciu zložitejších optimalizačných problémov.

- Možná existencia *priveľkého množstva nenulových váh* v optimálnom riešení, čo môže spôsobiť, že výsledné portfólio je „prediverzifikované“ a ťažko uskutočniteľné v reálnom svete investícií. Predpokladá sa, že napr. z množstva akcií 1000, t.j. $n = 1000$, bude aspoň 100 – 200 váh nenulových. Tiež netreba zabudnúť na transakčné náklady, ktoré sa pri veľkom množstve akcií, často len s minimálnym podielom na celkovom portfóliu, môžu vyšplhať do neuveriteľných výšin. Správa portfólia s viac ako 100 akciami tiež nie je jednoduchá záležitosť, čo môže viesť investora k eliminácii akcií s váhami veľmi blízkymi nule. To však môže mať za následok skutočnosť, že výsledné portfólio má v reále neporovnateľne vyššiu varianciu ako tú, ktorú vypočítal náš model.

Aj spomínané nevýhody sú dôvodom, prečo sa dnes Markowitzov Mean Variance používa k optimalizácií veľkých portfólií skôr zriedkavo. Stále ho však môžeme považovať za dostatočne bohatý na to, aby poskytol potenciálnemu investorovi hlavný teoretický základ na uvedomenie si významnosti diverzifikácie pri vytváraní portfólia

3 Mean Absolute Deviation model

Tento model je považovaný za jednu z alternatív k Markowitzovmu Mean Variance modelu a použitiu druhých momentov ako merateľov rizika všeobecne. Jeho autormi sú japonskí matematici *Hiroshi Konno* a *Hiroaki Yamazaki*. Tí ho predstavili vo svojom článku [1] z roku 1991, čím nadviazali na Konnovu prácu z predchádzajúceho obdobia.

Riziko sa autori tohto modelu rozhodli merať - ako to už typicky z názvu modelu vyplýva - pomocou tzv. strednej absolútnej odchýlky. Tá je definovaná nasledovne:

$$\begin{aligned}\xi(w) &= E[|r_p - E[r_p]|] \\ &= E[|r_p - \bar{r_p}|] \\ &= E[|\sum_{j=1}^{n} r_j w_j - E[\sum_{j=1}^{n} r_j w_j]|].\end{aligned} \tag{10}$$

Túto funkciu po prvýkrát predstavil Konno ešte v roku 1989 a následne na ňu nadviazal už aj v spolupráci s Yamazaki-m. V nami skúmanom Mean Absolute Deviation modeli je táto funkcia minimalizovaná ako účelová funkcia s obmedzeniami totožnými tým v predchádzajúcom Markowitzovom Mean Variance modeli. Problém teda môžeme sformulovať nasledovne:

$$\begin{aligned} &\min_w E[|\sum_{j=1}^{n} r_j w_j - E[\sum_{j=1}^{n} r_j w_j]|] \\ &\sum_{i=1}^{n} w_i \bar{r_i} = \bar{r_p} \\ &\sum_{i=1}^{n} w_i = 1 \\ &. \end{aligned} \tag{11}$$

Už v časti 1 O investorovom portfóliu sme spomenuli, že nami skúmané dva problémy sú v prípade normálne rozdelených výnosov $(r_1, r_2, \ldots, r_n)$ v podstate rovnaké, a teda za tohto predpokladu môže byť Mean Absolute Deviation metóda tiež použitá na vypočítanie *efektívnej hranice*. Dôkaz uvádzame v časti 4 Konzistencia úloh.

3.1 Mínusy MAD modelu

Za pravdepodobne najväčšiu nevýhodu Mean Absolute Deviation modelu sa považuje *nutná disktretizácia pravdepodobnostného priestoru* z dôvodu zachovania znamienka v účelovej funkcii. Podľa [1] však stačí zobrať do úvahy konečnú množinu historických výnosov , kedy už nemusíme aplikovať akékoľvek distribučné predpoklady, pretože náhodnosť je určená konkrétnym množstvom scenárov. Pokiaľ je ale model použitý na väčšie množstvo akcií, musíme brať do úvahy ekvivalentne väčšie množstvo možných scenárov na správne popísanie distribučnej funkcie - keďže Mean Absolute Deviation model narozdiel od Markowitzovho modelu nevyužíva len prvé dva momenty, ale celú distribučnú funckiu - čo sa javí ako pomerne náročná úloha.

3.2 Riešenie MAD problému

Na základe našich úvah v predchádzajúcej časti 3.1, diskretizácia je podľa [7] reprezentovaná konečnou množinou S možných výnosov $r^s, s \in S$ s pravdpodobnosťami $p^s, s \in S$. Účelovú funckciu vo vyššie uvedenom Mean Absolute Deviation modeli označenom 11 tak môžeme prepísať na: $\min_w \sum_{s \in S} p^s |(r^s - \bar{r})w|$. Následne nám stačí už urobiť len jednoduchú transformáciu, pomocou ktorej dostaneme z vyššie uvedenej formulácie ľahko riešiteľný problém lineárneho programovania.

Označme si $a^s = |(r^s - \bar{r})w|$. Podmienky $a^s - (r^s - \bar{r})w \geq 0$ a $a^s + (r^s - \bar{r})w \geq 0$ sú dôležité z hľadiska zachovania nezápornosti premennej $a^s, s \in S$. V roku 1995 pridal Zenios v diele [9] konštanty c_u a c_d, ktoré penalizujú odchýlky výnosu portfólia smerom nahor a nadol od investorom stanovenej cieľovej hodnoty.

Teraz môžeme Mean Absolute Deviaton model zostaviť nasledovným spôsobom:

$$\begin{aligned} &\min_{w, a^s, s \in S} \sum_{s \in S} p^s a^s \\ &a^s + c_d w^T (r^s - \bar{r}) \geq 0 \qquad \forall s \in S \\ &a^s - c_u w^T (r^s - \bar{r}) \geq 0 \qquad \forall s \in S \\ &\sum_{i=1}^{n} w_i \bar{r_i} = \bar{r_p} \\ &\sum_{i=1}^{n} w_i = 1, \end{aligned} \tag{12}$$

ktorý je už riešiteľný metódami lineárneho programovania.

V prípade zákazu krátkych pozícií riešime problém:

$$\begin{aligned}
&\min_{w,a^s,s\in S} \sum_{s\in S} p^s a^s \\
a^s + c_d w^T(r^s - \bar{r}) &\geq 0 \qquad \forall s \in S \\
a^s - c_u w^T(r^s - \bar{r}) &\geq 0 \qquad \forall s \in S \\
\sum_{i=1}^{n} w_i \bar{r}_i &= \bar{r_p} \\
\sum_{i=1}^{n} w_i &= 1 \\
w_i &\geq 0 \qquad \forall i = 1, 2, ..., n.
\end{aligned} \tag{13}$$

Ten je oproti predchádzajúcej formulácii obohatený o poslednú nerovnicu, ktorá rovnako ako pri Markowitzovom modeli požaduje nezáporné váhy akcií w_i v portfóliu.

Za dôležitú považujeme skutočnosť, že pokiaľ by potenciálny investor pri využití Mean Absolute Deviation optimalizácie použil scenáre aj priemerné ročné výnosy pochádzajúce z rovnakých dát (napr. 12 scenárov možného vývoja cien akcií podľa historických dát z 12 mesiacov a priemerný ročný výnos podľa historických dát tých istých 12 mesiacov), ako následok by penalty c_u a c_d nijako neovplyvnili výsledok optimalizácie, a teda preferencie investora by sme nedokázali namodelovať. Dôvod je jednoduchý: $\min\limits_{w} E[|w^T(r - \bar{r})|]$ sa aproximuje scenármi

$$\min_{w} \sum_{s\in S} p^s |w^T(r - \bar{r})| = \min_{w} \sum^{u} p^s w^T(r - \bar{r}) + \sum^{d} p^s w^T(r - \bar{r}), \tag{14}$$

kde $\sum\limits^{u}$ značí tie scenáre, v ktorých vnútro aboslútnej hodnoty nadobúda nezápornú hodnotu a $\sum\limits^{d}$ ekvivalente tie, v ktorých je vnútro aboslútnej hodnoty záporné. Ďalej platí:

$$\begin{aligned}
\min_{w} \sum^{u} p^s w^T(r - \bar{r}) + \sum^{d} p^s w^T(r - \bar{r}) &= \min_{w} w^T[\sum^{u} p^s(r - \bar{r}) + \sum^{d} p^s(r - \bar{r})] \\
&= \min_{w} w^T[2\sum^{u} p^s(r - \bar{r})],
\end{aligned} \tag{15}$$

pričom platí $E[r - \bar{r}] = 0$. Pokiaľ do rovnice (15) doplníme sankcie c_u a c_d, dostaneme výsledok:

$$\min_{w} w^T[c_u \sum^{u} p^s(r - \bar{r}) + c_d \sum^{d} p^s(r - \bar{r})] = \min_{w} w^T[(c_u + c_d)\sum^{u} p^s(r - \bar{r})], \tag{16}$$

kde sa jedná o tú istú minimalizačnú úlohu, iba vynásobenú konštantou. Na tento fakt sme prihliadli v záverečnej časti 5 Aplikácia na reálne dáta.

3.3 Plusy MAD modelu

Aby sme sa nezameriavali len na nevýhody spojené s riešením investorovej dilemy pomocou Mean Absolute Deviation modelu, považujeme za potrebné postaviť do popredia hlavné plusy, ktoré nám tento model vie poskytnúť.

- *Výpočtová atraktivita* - vieme ho totiž vypočítať metódami lineárneho programovania, čo je značne jednoduchšie ako zdĺhavé rátanie kvadratického programu. Počet obmedzení zostáva konštantný, a teda s pomocou MAD modelu sme schopní vyriešiť aj problém pozostávajúci z viac ako 1000 akcií v reálnom čase.
- Ďalšou nespornou výhodou je, že *nemusíme počítať kovariančnú maticu*, čím sa zjednodušuje "updatovanie" modelu v prípade postupného dodávania nových dát a informácií.
- *Možnosť penalizovať odchýlky* od investorom cieleného výnosu protfólia na konci periódy konštantami c_u a c_d, čo umožňuje lepšie modelovať preferencie rizikovo averzných investorov.

4 Konzistencia úloh

Riešenie Mean Absolute Deviaton problému je podľa [1] konzistentné s riešením Markowitzovo Mean Variance problému, ak sú výnosy $r_1, r_2, ..., r_n$ z normálneho rozdelenia:

Veta 1. *Nech $(r_1, r_2, ..., r_n)$ je n-rozmerný normálne rozdelený náhodný vektor. Potom stredná absolútna odchýlka a variancia sú v nasledovnom vzťahu:*

$$\xi(w) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sigma_p(w). \tag{17}$$

Dôkaz. Nech $(\mu_1, \mu_2, ..., \mu_n)$ je strednou hodnotou vektora $(r_1, r_2, ..., r_n)$. Nech $(\mu_{ij}) \in R_{n\times n}$ je kovariančnou maticou $(r_1, r_2, ..., r_n)$. Potom $\sum_{j=1}^{n} r_j w_j$ je normálne rozdelené (Rao 1965) so strednou hodnotou $\sum_{j=1}^{n} \mu_j w_j$ a štandardnou odchýlkou

$$\sigma_p(w) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sigma_{ij}w_i w_j}. \tag{18}$$

Potom z vlastností normálneho rozdelenia platí:

$$\xi(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_p(w)}\int_{-\infty}^{\infty}|u|exp(-\frac{u^2}{2\sigma_p^2(w)}) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sigma_p(w). \tag{19}$$

□

4.1 Prehľadné porovnanie modelov

V Tabuľke 1 nájdeme zhrnutie najdôležitejších vlastností jednotlivých modelov.

	Mean Variance model	***Mean Absolute Deviation model***
rok	1952	1991
autor	Harry Markowitz	Hiroshi Konno, Hiroaki Yamazaki
merateľ rizika	variancia, kovariancia	stredná absolútna odchýlka
výpočtová metóda	kvadratické programovanie	lineárne programovanie
exaktné riešenie	áno	nie
optimalizácia	menšie portfóliá	aj väčšie portfóliá

Tabuľka 1: Porovnanie modelov Mean Variance a Mean Absolute Deviation

5 Aplikácia na reálne dáta

Za najdôležitejšiu časť našej bakalárskej práce považujeme práve túto poslednú, ktorá spočíva v aplikácii zistených poznatkov a informácií na reálne dáta. V tejto sekcii totiž porovnáme výsledky pre Mean Variance a Mean Absolute Deviation modely využijúc historické dáta 20 akcií, ktoré sú súčasťou amerického indexu $S\&P500$. Práve táto časť nám umožnila pretaviť naše poznatky získané štúdiom rôznej literatúry a článkov venujúcich sa nami skúmaným modelom do praxe, a to hlavne ich naprogramovaním a porovnaním výsledkov.

Pri všetkých našich výpočtoch sme uvažovali kvôli jednoduchosti investora, ktorého počiatočný majetok je rovný 1. Vynásobením výslednej váhy pri individuálnych akciách $\times 100\%$ dostávame percentuálny podiel danej akcie v investorovom portfóliu.

5.1 Výber a príprava dát

5.1.1 Výber akcií do portfólia

Pred začatím investovania a výpočtov ako takých, sme museli uskutočniť výber akcií, ktoré sme do nášho portfólia chceli zahrnúť. Selekcia akcií nepredstavuje jednoduchú úlohu dokonca ani pre skúseného investora. V zmysle Markowitzovej teórie sme chceli dosiahnuť, aby výsledné portfóllio bolo čo najdiverzifikovanejšie, a preto sme snažili vyberať akcie z rôznych odvetví priemyslu. Dôležitou súčasťou výberu bolo tiež určenie obdobia, počas ktorého sme sledovali vývoj cien jednotlivých akcií ako faktor pre určenie budúceho vývoja. Po dôkladných úvahách sme akcie vyberali na základe ich historických výnosov za obdobie posledných 24 mesiacov v prípade Mean Variance a 36 mesiacov v prípade Mean Absolute Deviation modelu, ktoré podľa nás predstavujú dobu zahŕňajúcu síce dlhšie časové obdobie, no umožňujúcu nám lepšie odsledovať trend vývoju ciena a môžeme si byť zároveň takmer istí, že vývoj nie je len odrazom momentálnych a dočasných zmien prebiehajúcich v danej spoločnosti. Tiež sme uvažovali tendencie rastu do budúcnosti, predovšetkým v období jedného nasledujúceho roku, ktoré predstavuje našu jedinú investičnú periódu. Predovšetkým z dôvodu zachovania prehľadnosti výsledkov sme sa rozhodli brať do úvahy investovanie do max. 20 amerických akcií. Z akcií v indexe $S\&P500$, ktorý predstavuje akciový trh s 500 najväčšími americkými firmami, sme zvolili 20 uvedených v Tabuľke 2, kde čitateľ nájde aj odvetvie priemyslu, akému sa tá- ktorá spoločnosť venuje a spraví si obraz o diverzifikovanosti nášho portfólia.

skratka	***spoločnosť***	***oblasť podnikania***	***špecifikácia***
PG	Procter & Gamble Co.	spotrebiteľské výrobky	osobné produkty
MET	MetLife, Inc.	finančníctvo	životné a zdravotné poistenie
NSC	Norfolk Southern Corp.	priemysel	železnice
SBUX	Starbucks Corporation	spotrebiteľské služby	reštaurácie
MSFT	Microsoft Corporation	informačné technológie	systémový softvér
MO	Altria Group Inc.	spotrebiteľské výrobky	tabak
NEM	Newmont Mining Corp.	materiály	zlato
PFE	Pfizer Inc.	zdravotná starostlivosť	farmaceutiká
VLO	Valero Energy Corporation	energia	rafinácia olejov a plynov
RHI	Robert Half International Inc.	priemysel	priemyselné konglomeráty
DIS	The Walt Disney Company	spotrebiteľské služby	vysielanie a káblová televízia
BRK-B	Berkshire Hathaway Inc.	finančníctvo	viacsektorové spoločnosti
GOOG	Google Inc.	informačné technológie	internetový softvér a služby
JNJ	Johnson & Johnson	zdravotná starostlivosť	zariadenia a služby zdravotnej starostlivosti
AMZN	Amazon.com Inc.	spotrebiteľské služby	internetový predaj
F	Ford Motor Co.	spotrebiteľské služby	producent automobilov
ANF	Abercrombie & Fitch Co.	spotrebiteľské výrobky	oblečenie, doplnky a luxusný tovar
OKE	ONEOK, Inc.	nástroje	plynové nástroje
M	Macy's, Inc.	spotrebiteľské služby	obchodné domy
S	Sprint Nextel Corp.	telekomunikačné služby	bezdrôtové telekomunikačné služby

Tabuľka 2: Výber akcií do portfólia

5.1.2 Voľba sledovaného a investičného obdobia

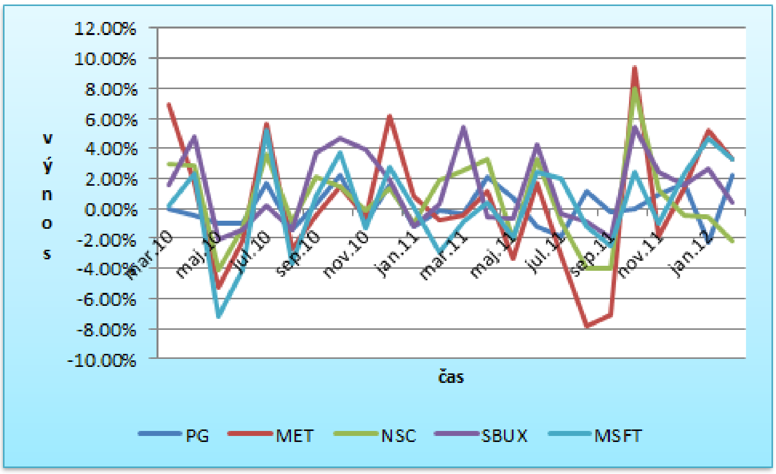
Za časový úsek, počas ktorého sme vývoj akcií sledovali na trhu a od ktorého sa odvíjali výpočty našich modelov, sme zvolili už spomínané obdobie 24 mesiacov, resp. dvoch rokov *od 1. marca 2010 do 29. februára 2012* v prípade Mean Variance modelu a 36 mesiacov, resp. troch rokov v prípade Mean Absolute Deviation modelu *od 1. marca 2009 do 29. februára 2012.* Tieto časové obdobia nie sú rovnaké z dôvodu špecifických vlastností jednotlivých modelov. V prípade Mean Variance modelu nám k výpočtom postačili priemerné ročné výnosy za obdobie dvoch rokov. V prípade Mean Absolute Deviation modelu sme vypočítali priemerné ročné výnosy na základe historických dát 36 mesiacov a zároveň výnosy posledných 24 mesiacov (ktoré sa časovo prekrývali s tými v Mean Variance modeli) predstavovali základ pre 24 scenárov možného vývoju nášho portfólia, ktoré boli nutnou súčasťou tohto modelu. Následne sme na základe týchto výsledkov a výnosov v dátume *1. marca 2012* investovali na jeden rok, ktorý reprezentuje tú jednu investičnú periódu. Odôvodnenie toho, prečo sme investovali ešte v roku 2012 a nie v aktuálnom roku 2013 súvisí s tým, že sme sa rozhodli porovnať nielen výsledky Markowitzovho Mean Variance a Mean Absolute Deviation modelu ako vektorov váh pre jednotlivé výšky cieľového výnosu, ale tiež sme chceli porovnať tieto výsledky v rámci skutočných hodnôt jednotlivých portfólií na konci periódy. Pochopiteľne, modely sú konštruované tak, že nemôžeme stopercentne porovnávať výsledky medzi modelmi s povoleným a zakázaným shortovaním kvôli nejdenotným predpokladom, no dokážeme určiť, ktorému z 36 portfólií sa počas jedného roka najlepšie darilo a prinieslo tak investorovi najväčší výnos. To vlastne znamená, že v dátume *1. marca 2013* sme speňažili všetky akcie z oboch nami vyrátaných portfólií a porovnali výsledné zisky/straty.

5.1.3 Úprava dát

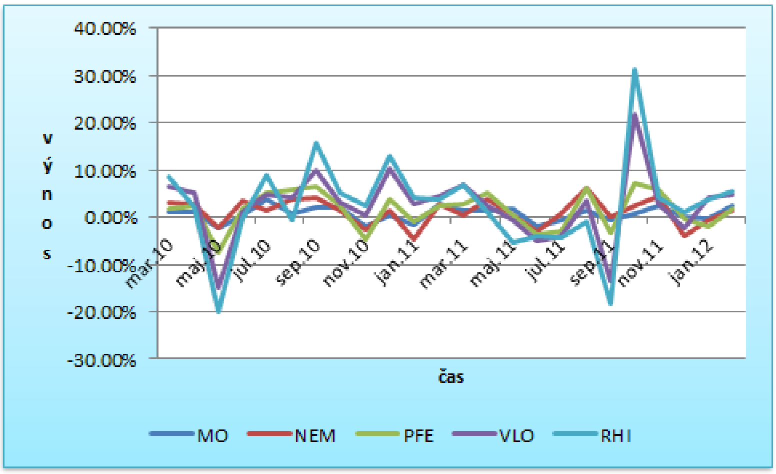
Pri jednotlivých akciách vybratých do nášho portfólia sme určili priemerný ročný výnos. Väčšina akcií disponovala za obdobie dvoch, resp. troch sledovaných rokov kladným priemerným ročným výnosom a u niektorých akcií sa tieto hodnoty šplhali až do výšky 50%. Informácia o priemere priemerného ročného výnosu 20 sledovaných akcií nám umožnila lepšie si stanoviť cieľový ročný výnos nášho portfólia, ktorý sme potom vkladali do oboch modelov ako hodnotu $\bar{r_p}$. Kvôli zjednodušeniu výpočtov sme neuvažovali žiadne transakčné náklady.

Aby sme čitateľovi ešte bližšie priblížili jednotlivé akcie a ich správanie sa na akciovom trhu v sledovanom období, rozhodli sme sa pridať do našej práce aj grafy vývoju cien akcií počas 24 mesiacov, t.j. od 1. marca 2010 do 29. februára 2012. Akcie sme z jediného dôvodu, ktorým je prehľadnosť ich výnosov, rozdelili do 4 skupín po piatich akciách. Kľúč na rozdelenie do skupín nebol nijako špeciálny ani výnimočný - akcie sme postupne zoradili podľa ich poradia v našom výbere uvedenom v Tabuľke 2: prvá skupina obsahuje akcie $PG, MET, NSC, SBUX$ a $MSFT$, druhá skupina akcie MO, NEM, PFE, VLO a RHI, do tretej skupiny sa dostali akcie

$DIS, BRK-B, GOOG, JNJ$ a $AMZN$ a nakoniec do poslednej, štvrtej skupiny sme zaradili akcie F, ANF, OKE, M a S. Tieto výnosy čitateľ nájde postupne v Obrázkoch 3, 4, 5 a 6.

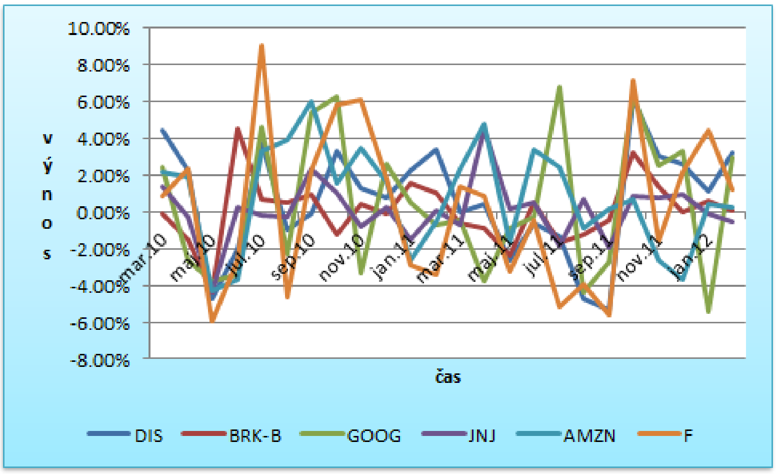


Obr. 3: Vývoj mesačných cien akcií prvej skupiny

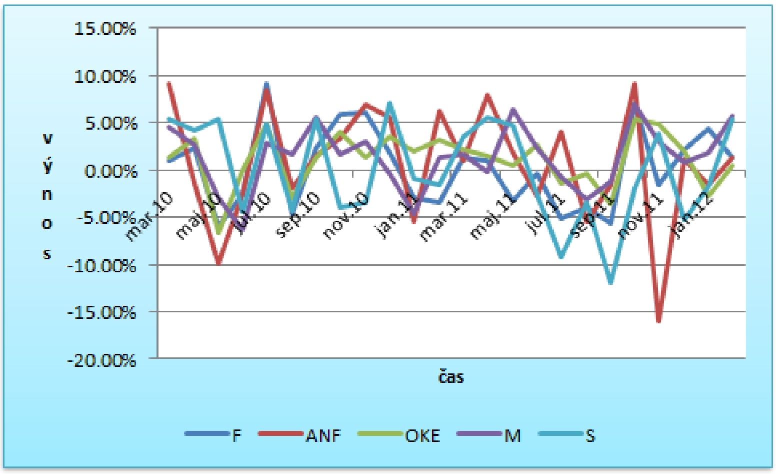


Obr. 4: Vývoj mesačných cien akcií druhej skupiny

Ako sme spomínali aj v predchádzajúcich častiach našej bakalárskej práce, okrem toho, že skúmame dva modely, venujeme sa tiež dvom prístupom k optimalizácii pomocou jednotlivých modelov. Jeden prístup spočíva v zákaze krátkych pozícií, kedy nepovoľujeme tzv. "shortovanie", čo znamená, že nemožeme kupovať akcie v záporných množstvách a so zápornými váhami. Na strane druhej sa tiež venujeme prístupu s povolenými krátkymi pozíciami, kde je dodatočne možné kupovanie akcií aj v záporných množstvách, čo je vhodný prístup v prípade, že investor očakáva pokles cien



Obr. 5: Vývoj mesačných cien akcií tretej skupiny



Obr. 6: Vývoj mesačných cien akcií štvrtej skupiny

shortovaných akcií.

Podstatnou súčasťou našej prípravy bol aj výber vhodných hodnôt sankcií c_u a c_d v Mean Absolute Deviation modeli, ktoré vypovedajú o tom, nakoľko tolerantný je investor k výnosu nižšiemu (konštanta c_d), ale aj vyššiemu (konštanta c_u) ako ním stanovená cieľová hodnota, a pomáhajú nám tak lepšie modelovať jeho preferencie. Nakoniec sme sa rozhodli zvoliť dve varianty prístupu k týmto hodnotám. V oboch prípadoch sme konštantu c_d stanovili na hodnotu 1. Vo variante označenom číslom I sme zvolili prístup investora, ktorému neprekáža, pokiaľ sa výnosy jeho portfólia posunú od stanovenej hodnoty smerom nahor, čiže $c_u = 0$ (Mean Absolute Deviation model so zákazom krátkych pozícií), resp. mu to prekáža minimálne, kedy $c_u = 0.25$ (Mean Absolute Deviation model s povolenými krátkymi pozíciami). Naopak, v druhom variante označenom II, sme výkyvy smerom nahor aj nadol považovali za rovnocenne nechcené, a preto sme im priradili hodnoty $c_u = c_d = 1$.

Oba modely sme naprogramovali v matematickom softvéri Matlab, a práve pomocou neho sme sa dopracovali k výsledkom optimalizácie.

5.2 Porovnanie výsledkov

Naše portfólio sme sa rozhodli optimalizovať pre viac úrovní cieľového výnosu - postupne 10%, 12%, 14%, 16%, 18% a 20%, aby sme tak nám ako aj čitateľovi poskytli ucelenejší obraz o výsledkoch, ktoré investorovi poskytuje jeden alebo druhý model. Tieto hodnoty sme zvolili ako následok toho, že priemerné ročné výnosy akcií sa pohybovali približne v rozmedzí týchto hodnôt. Výsledkom optimalizácie na základe nami spracovaných dát je teda 36 rôznych portfólií (6 pre rôzne hodnoty cieľového výnosu pre Mean Variance model so zákazom shortovania, 6 pre ten istý model s povoleným shortovaním, 12 pre Mean Absolute Deviation model so zákazom shortovania - z toho 6 pre hodnotu penalty $c_u = 1$ a 6 pre $c_u = 0$, no a napokon 12 pre Mean Absolute Deviation model s povoleným shortovaním - z toho opäť 6 pre hodnotu penalty $c_u = 1$ a 6 pre $c_u = 0.25$) s rôznym rozložením váh pre jednotlivé akcie. V prvom rade porovnávame výsledné portfóliá v 2 skupinách - so zákazom krátkych pozícií a s povolenými krátkymi pozíciami v sekcii 5.2.1. V rámci oboch skupín porovnávame Mean Variance optimalizáciu s 12 portfóliami a Mean Absolute Deviation optimalizáciu s 24 výslednými portfóliami v sekcii 5.2.2. Napokon porovnávame výsledky Mean Abbsolute Deviation optimalizácie pre dve úrovne penalty c_u v sekcii 5.2.3. Jednotlivé portfóliá sú prehľadne usporiadané v Tabuľkách 3, 4, 5 a 6. Čitateľa by sme chceli upozorniť na skutočnosť, že výsledných 6 portfólií ako dôsledok Mean Variance optimalizácie v dvojici Tabuliek 3, 4 so zákazom krátkych pozícií, resp. 6 portfólií v dvojici 5 a 6 s povolenými krátkymi pozíciami, je totožných a mení sa len pravá strana, teda výsledky Mean Absolute Deviation optimalizácie. Učinili sme tak kvôli zachovaniu prehľadnosti výsledkov a aj kvôli skutočnosti, že za dôležité považujeme porovnať výsledky získané z Mean Variance a Mean Absolute Deviation modelov navzájom, než výsledky v rámci Mean Absolute Deviaton optimalizácie pre rôzne hodnoty penalty c_u.

5.2.1 Porovnanie výsledkov pre optimalizáciu so zákazom krátkych pozícií a bez zákazu

Začneme s porovnaním, ktorého výsledky sú spomedzi ostatných najzrejmejšie a pravdepodobne aj najľahšie predvidateľné. Pri oboch modeloch je evidentné, že optimalizáciou pri povolení krátkych pozícií (Tabuľky 5, 6) nadobudli kladné hodnoty tie akcie, u ktorých bola pravdepodobnosť rastu najvyššia. Akcie, pri ktorých modely predpokladali tendenciu klesať, vyšli z tejto optimalizácie so zápornými hodnotami. V prípade Markowitzovho Mean Variance modelu môžeme jasne vidieť súvis - záporná, príp. nízka kladná váha pri povolených krátkych pozíciách (hodnoty v Tabuľkách 5, 6)znamená takmer určite nulovú váhu pri optimalizácii so zákazom (Tabuľky 3, 4). Takúto prepojenosť však pri Mean Absolute Deviation modeli nevidieť (pričom porovnávame len variant II, kde sankcie $c_u = c_d = 1$, čiže Tabuľky 4 a 6, nakoľko variant I má odlišné hodnoty c_u v prípade s a bez zákazu krátkych pozícií), teda nejaké pravidlo alebo predpis chovania si netrúfame odvodiť. Pri zákaze krátkych pozícií sme optimalizáciou v oboch prípadoch dostali portfólio s maximálnym množstvom 7 akcií v ňom. Z výsledkov je zrejmé, že najmä v prípade Mean Absolute Deviation modelu sú niektoré akcie silne preferované (napr. pri stanovenom výnose $\bar{r_p} = 10\%$ nadobudla akcia S spoločnosti Sprint Nextel Corp.váhu takmer 97%). V prípade Markowitzovho Mean Variance modelu tiež vidíme, že z optimalizácie s povolenými krátkymi pozíciami vyplýva väčšia diverzifikovanosť portfólia, a tým pádom menšia variancia σ_p^2 portfólia, ktorá dosahuje približne rovnakú hodnotu okolo 12,5% pri optimalizácii so zákazom krátkych pozícií už pri hodnote cieľového výnosu $\bar{r_p} = 10\%$, no pri povolených krátkych pozíciách je to pri hodnote cieľového výnosu $\bar{r_p} = 20\%$, čo je pre potenciálneho investora nepochybne lepšia voľba.

5.2.2 Porovnanie výsledkov pre Mean Variance a Mean Absolute Deviation optimalizáciu

Ako druhé budeme v zmysle účelu tejto bakalárskej práce skúmať výsledky dvoch nami skúmaných modelov. Z výsledkov optimalizácie so zákazom krátkych pozícií možno registrovať, že do výsledných portfólií sa v oboch modeloch dostal približne rovnaký počet akcií. V prípade optimalizácie bez zákazu krátkych pozícií je spomínaný počet tiež rovnaký, no túto informáciu nepovažujeme za významnú, nakoľko do portfólií sa dostalo v každom z troch prípadov všetkých 20 akcií.

Pri optmalizácií so zákazom krátkych pozícií vidíme, že niektoré akcie sa nachádzajú s nenulovými váhami v takmer všetkých osemnástich portfóliách. Sú to akcie PG, NEM a JNJ. Zaujímavé je napr. správanie sa akcie PG, ktorej váha sa pri Mean Variance optimalizácii s rastúcim cieľovým výnosom postupne znižuje, a to v rozmedzí až 20%, no pri optimalizácii pomocou Mean Absolute Deviation modelu váha tejto akcie v oboch variantoch s rôznymi hodnotami c_u postupne narastá, no len v rozmedzí približne 6%. Niektoré akcie, napr. $BRK-B$ sa dostali do výsledných portfólií v oboch variantoch Mean Absolute Deviation optimalizácie, no vo výsledkoch Mean Variance optimalizácie sa nenachádzajú. Šokujúcu, takmer 97%-nú váhu obdržala už v predchádzajúcej časti 5.2.1 spomínaná akcia S pri Mean Absolute Deviation optimalizácii v portfóliu s cieľovým výnosom $\bar{r_p} = 10\%$, no pri ďalších hodnotách cieľového výnosu a ani pri Mean Variance optimalizácii sa do portfólií vôbec nedostala. Z nami získaných výsledkov nemožno posúdiť, či sú si podobnejšie výsledky Mean Variance optimalizácie s variantom I alebo variantom II Mean Absolute Deviation optimalizácie.

Porovnávanie našich dvoch modelov pri povolených krátkych pozíciách je o niečo náročnejšie, a to predovšetkým z dôvodu menšej prehľadnosti. Hlavnou príčinou je "plné"množstvo akcií 20 vo všetkých 18 portfóliách. Vidíme, že aj pokiaľ sme do modelov nevkladali žiadne obmedzenia na váhy, rozdiely vo výškach váh sú celkom zreteľné. Pri Mean Variance optimalizácii sa v žiadnom zo 6 portfólií nenachádza akcia s váhou $w_i \geq 41\%$ v kladných a $w_i \leq -16\%$ v záporných hodnotách, no v prípade Mean Absolute Deviation optimalizácie sa hodnoty pohybujú v omnoho väčšom rozmedzí: $-88.78\% \leq w_i \leq 130.43\%$. Zo začiatku porovnávania, pri akciích PG a MET vyzerajú výsledky optimalizácií podobne, váhy týchto akcií vo všetkých 18 portfóliách majú rovnaké znamienko a tiež rovnakú tendenciu rastu, resp. poklesu. Zaujímavá situácia nastáva napr. pri akcii $SBUX$, ktorej Mean Variance oprimalizáci priradila váhy v rozmedzí $0.21 - 6.34\%$, Mean Absolute Deviation optimalizácia pri variante II s $c_u = c_d = 1$ zas váhy od $36.23 - 52.00\%$ a tá istá optimalizácia vo variante I váhy od $54.02 - 92.34\%$. Signifikantný rozdiel pozornému oku investora neujde ani pri váhach akcií RHI a $BRK - B$, kde z Mean Variance model priradil týmto akciám záporné váhy v rozmedzí od cca -16% až -7%, ale z optimalizácie druhým modelom vyplynuli kladné, a časo výrazne vysoké váhy až do 40%. Nezanedbateľné rozdielne sú aj pri váhach akcií $GOOG$, JNJ či OKE, ktoré sú pri oboch variantoch Mean Absolute Deviation optimalizácie výrazne záporné, no pri optimalizácii Markowitzovým Mean Variance modelom nadobúdajú tieto váhy kladné hodnoty.

5.2.3 Porovnanie výsledkov pre Mean Absolute Deviation optimalizáciu s rôznymi hodnotami sankcie c_u

Naše porovnávania zakončíme porovnaním výsledných portfólií pre rôzne hodnoty sankcie c_u, ktorá hovorí o tom, ako tolerantný je investor k výnosu vyššiemu ako ním cielená hodnota $\bar{r_p}$. V prípade zákazu krátkych pozícií porovnávame výsledné portfólia so sankciami $c_u = 0, c_d = 1$, kde investorovi takpovediac neprekáža, ak cieľový výnos bude vyšší, resp. so sankciami $c_u = c_d = 1$, kde vyšší aj nižší výnos sú rovnako nechcené. Výsledky sú si z veľkej miery podobné, do portfólií sa dostali približne rovnaké akcie aj s relatívne blízkymi percentuálnymi podielmi. Pri hodnote cieľového výnosu $\bar{r_p} = 10\%$ je výsledkom dokonca to isté portfólio s vysokým, až 96.27%-ným podielov v akcii S, ktorá sa v ďaľších prípadoch ani do jedného z 10 portfólií nedostala. Výraznejší rozdiel vidíme pri akciách MO a $AMZN$. Prvá zmienená sa vyskytla v 4 zo 6 portfólií pri nulovom c_u, no v druhom prípade sa do portfólia nedostala vôbec. Druhá akcia je na tom presne opačne, nenulové váhy nadobudla v 3 zo 6 portfólií pre $c_u = c_d = 1$, avšak nedostala sa do žiadneho z portfólií pre $c_u = 0$. Ako povšimnutiahodné správanie sa nám javí správanie váh akcie $BRK - B$, ktorej váha pri zvyšovaní cieľového výnosu v oboch prípadoch najprv rastie, no zlom nastáva pri prechode z hodnoty $\bar{r_p} = 16\%$ na $\bar{r_p} = 18\%$.

O niečo zaujímavješie je to pri portfóliách s povolenými krátkymi pozíciami. Tu porovnávame portfóliá pre hodnoty sankcií $c_u = 0.25, c_d = 1$ a opäť $c_u = c_d = 1$. Pri väčšine portfólií sú prinajmenšom znamienka váh rovnaké, váhy sa podobajú napr. pri akciách PG, RHI, OKE či M. Veľmi výrazný rozdiel zaznamenávame pri akcii MO. Tá pri variante I nadobúda vo všetkých šiestich portfóliách váhy viac ako 100%, no tie isté sa pri variante II pohybujú na úrovni okolo -20%. Tendencia rastu váhy pri akcii NEM je rovnaká, čiže s rastúcim cieľovým výnosom rastie aj váha akcie, no vo variante I so záporným znamienkom, a vo variance II so znamienkom kladným. Celkovo si pri pohľade na váhy možno všimnúť, že váhy pri variante I nadobúdajú omnoho extrémnejšie hodnoty ako pri variante II (rozpätie $-88.78\% \leq w_i \leq 130.43\%$ vs. $-40.59\% \leq w_i \leq 73.71\%$).

Tabuľka 3: Porovnanie výsledkov: Mean variance model vs. Mean Absolute Deviation model I so zákazom krátkych pozícií

	MV model								***MAD model I***					
$\bar{r_p}$	10%	12%	14%	16%	18%	20%		$\bar{r_p}$	10%	12%	14%	16%	18%	20%
								c_u	0	0	0	0	0	0
σ_p	12.69%	12.95%	13.30%	13.71%	14.17%	14.69%		c_d	1	1	1	1	1	1
PG	36.32%	31.94%	28.56%	25.46%	22.36%	16.01%		**PG**		33.18%	30.03%	29.76%	42.25%	39.42%
MET								**MET**						
NSC								**NSC**						
SBUX		0.69%	3.15%	4.81%	6.48%	8.50%		**SBUX**						3.81%
MSFT								**MSFT**						
MO	34.81%	42.76%	47.62%	51.23%	54.84%	58.25%		**MO**			5.37%	6.23%	8.78%	9.27%
NEM	6.79%	7.34%	7.62%	7.81%	7.99%	7.92%		**NEM**		1.79%	9.12%	8.60%	20.60%	17.44%
PFE								**PFE**						
VLO								**VLO**				13.57%	17.42%	16.98%
RHI								**RHI**						
DIS								**DIS**						
BRK-B								**BRK-B**			7.62%	11.33%	8.79%	13.07%
GOOG								**GOOG**						
JNJ	21.14%	15.18%	10.42%	5.76%	1.11%			**JNJ**	3.73%	65.02%	47.86%	30.51%	2.17%	
AMZN	0.95%	2.09%	2.23%	2.22%	2.21%	1.92%		**AMZN**						
F								**F**						
ANF								**ANF**						
OKE			0.40%	2.70%	5.01%	7.41%		**OKE**						
M								**M**						
S								**S**	96.27%					

Tabuľka 4: Porovnanie výsledkov: Mean variance model vs. Mean Absolute Deviation model II so zákazom krátkych pozícií

	MV model								***MAD model II***					
$\bar{r_p}$	10%	12%	14%	16%	18%	20%		$\bar{r_p}$	10%	12%	14%	16%	18%	20%
								c_u	1	1	1	1	1	1
σ_p	12.69%	12.95%	13.30%	13.71%	14.17%	14.69%		c_d	1	1	1	1	1	1
PG	36.32%	31.94%	28.56%	25.46%	22.36%	16.01%		**PG**		29.98%	31.09%	31.74%	33.29%	35.56%
MET								**MET**						
NSC								**NSC**						
SBUX		0.69%	3.15%	4.81%	6.48%	8.50%		**SBUX**						
MSFT								**MSFT**						
MO	34.81%	42.76%	47.62%	51.23%	54.84%	58.25%		**MO**						
NEM	6.79%	7.34%	7.62%	7.81%	7.99%	7.92%		**NEM**			2.35%	8.82%	11.39%	13.98%
PFE								**PFE**						
VLO								**VLO**						
RHI								**RHI**						
DIS								**DIS**						
BRK-B								**BRK-B**		2.82%	23.45%	31.98%	29.02%	26.40%
GOOG								**GOOG**						
JNJ	21.14%	15.18%	10.42%	5.76%	1.11%			**JNJ**	3.73%	67.20%	43.11%	25.47%	18.11%	9.83%
AMZN	0.95%	2.09%	2.23%	2.22%	2.21%	1.92%		**AMZN**				1.99%	8.18%	14.23%
F								**F**						
ANF								**ANF**						
OKE			0.40%	2.70%	5.01%	7.41%		**OKE**						
M								**M**						
S								**S**	96.27%					

Tabuľka 5: Porovnanie výsledkov: Mean variance model vs. Mean Absolute Deviation model I s povolenými krátkymi pozíciami

	MV model								***MAD model I***					
$\bar{r_p}$	10%	12%	14%	16%	18%	20%		$\bar{r_p}$	10%	12%	14%	16%	18%	20%
								c_u	0.25	0.25	0.25	0.25	0.25	0.25
σ_p	11.31%	11.42%	11.58%	11.78%	12.02%	12.29%		c_d	1	1	1	1	1	1
PG	40.82%	39.56%	38.31%	37.05%	35.80%	34.55%		**PG**	97.04%	88.85%	80.66%	72.47%	64.28%	56.10%
MET	-11.12%	-11.11%	-11.11%	-11.10%	-11.10%	-11.10%		**MET**	-13.49%	-14.86%	-16.23%	-17.60%	-18.97%	-20.35%
NSC	3.20%	3.08%	2.97%	2.85%	2.74%	2.63%		**NSC**	29.47%	28.89%	28.31%	27.73%	27.15%	26.57%
SBUX	0.21%	1.44%	2.66%	3.89%	5.11%	6.34%		**SBUX**	54.02%	61.69%	69.35%	77.01%	84.68%	92.34%
MSFT	7.67%	7.34%	7.01%	6.68%	6.35%	6.03%		**MSFT**	8.93%	9.34%	9.75%	10.16%	10.57%	10.98%
MO	27.80%	29.76%	31.73%	33.69%	35.66%	37.62%		**MO**	101.81%	107.53%	113.26%	118.98%	124.70%	130.43%
NEM	6.82%	6.90%	6.98%	7.06%	7.14%	7.22%		**NEM**	-45.08%	-44.100%	-43.13%	-42.15%	-41.18%	-40.20%
PFE	5.03%	5.01%	4.99%	4.98%	4.96%	4.94%		**PFE**	-21.27%	-18.15%	-15.04%	-11.92%	-8.81%	-5.69%
VLO	-2.49%	-2.28%	-2.08%	-1.88%	-1.68%	-1.47%		**VLO**	6.95%	4.79%	2.63%	0.47%	-1.69%	-3.85%
RHI	-7.38%	-8.12%	-8.86%	-9.61%	-10.35%	-11.09%		**RHI**	38.94%	40.11%	41.28%	42.45%	43.62%	44.79%
DIS	0.25%	1.12%	1.99%	2.86%	3.73%	4.60%		**DIS**	30.14%	32.87%	35.59%	38.32%	41.04%	43.77%
BRK-B	-7.13%	-8.88%	-10.63%	-12.37%	-14.12%	-15.87%		**BRK-B**	27.32%	25.87%	24.41%	22.95%	21.50%	20.04%
GOOG	2.91%	2.60%	2.29%	1.97%	1.66%	1.35%		**GOOG**	-46.66%	-48.73%	-50.80%	-52.87%	-54.93%	-57.00%
JNJ	30.41%	28.16%	25.90%	23.65%	21.39%	19.14%		**JNJ**	-72.52%	-75.57%	-78.62%	-81.67%	-84.73%	-87.78%
AMZN	3.40%	3.62%	3.84%	4.07%	4.29%	4.51%		**AMZN**	16.56%	14.48%	12.41%	10.33%	8.26%	6.18%
F	-2.00%	-2.71%	-3.41%	-4.11%	-4.82%	-5.52%		**F**	-69.08%	-71.84%	-74.59%	-77.35%	-80.11%	-82.86%
ANF	-0.38%	-0.54%	-0.70%	-0.86%	-1.02%	-1.18%		**ANF**	10.27%	12.91%	15.54%	18.18%	20.81%	23.45%
OKE	3.55%	5.89%	8.23%	10.57%	12.91%	15.25%		**OKE**	-38.72%	-38.65%	-38.58%	-38.51%	-38.44%	-38.37%
M	-0.46%	0.50%	1.45%	2.41%	3.37%	4.32%		**M**	-11.31%	-13.43%	-15.56%	-17.68%	-19.80%	-21.92%
S	-1.11%	-1.34%	-1.56%	-1.79%	-2.02%	-2.24%		**S**	-3.32%	-1.98%	-0.64%	0.70%	2.04%	3.38%

Tabuľka 6: Porovnanie výsledkov: Mean variance model vs. Mean Absolute Deviation model II s povolenými krátkymi pozíciami

MV model								***MAD model II***						
$\bar{r_p}$	10%	12%	14%	16%	18%	20%		$\bar{r_p}$	10%	12%	14%	16%	18%	20%
								c_u	1	1	1	1	1	1
σ_p	11.31%	11.42%	11.58%	11.78%	12.02%	12.29%		c_d	1	1	1	1	1	1
PG	40.82%	39.56%	38.31%	37.05%	35.80%	34.55%		**PG**	73.71%	69.47%	65.24%	61.00%	56.77%	51.53%
MET	-11.12%	-11.11%	-11.11%	-11.10%	-11.10%	-11.10%		**MET**	-16.85%	-16.06%	-15.27%	-14.48%	-13.68%	-12.56%
NSC	3.20%	3.08%	2.97%	2.85%	2.74%	2.63%		**NSC**	9.46%	6.71%	3.97%	1.22%	-1.53%	-3.94%
SBUX	0.21%	1.44%	2.66%	3.89%	5.11%	6.34%		**SBUX**	36.23%	39.47%	42.71%	45.94%	49.18%	52.00%
MSFT	7.67%	7.34%	7.01%	6.68%	6.35%	6.03%		**MSFT**	23.40%	22.96%	22.52%	22.07%	21.63%	21.46%
MO	27.80%	29.76%	31.73%	33.69%	35.66%	37.62%		**MO**	-22.77%	-21.52%	-20.27%	-19.03%	-17.78%	-15.67%
NEM	6.82%	6.90%	6.98%	7.06%	7.14%	7.22%		**NEM**	5.92%	10.12%	14.32%	18.52%	22.72%	26.52%
PFE	5.03%	5.01%	4.99%	4.98%	4.96%	4.94%		**PFE**	-1.90%	0.31%	2.51%	4.71%	6.91%	9.19%
VLO	-2.49%	-2.28%	-2.08%	-1.88%	-1.68%	-1.47%		**VLO**	4.23%	1.45%	-1.32%	-4.09%	-6.86%	-9.66%
RHI	-7.38%	-8.12%	-8.86%	-9.61%	-10.35%	-11.09%		**RHI**	-3.40%	1.31%	6.03%	10.74%	15.46%	19.18%
DIS	0.25%	1.12%	1.99%	2.86%	3.73%	4.60%		**DIS**	34.04%	37.35%	40.65%	43.95%	47.26%	49.21%
BRK-B	-7.13%	-8.88%	-10.63%	-12.37%	-14.12%	-15.87%		**BRK-B**	41.90%	39.08%	36.25%	33.43%	30.61%	28.13%
GOOG	2.91%	2.60%	2.29%	1.97%	1.66%	1.35%		**GOOG**	-4.78%	-7.28%	-9.77%	-12.27%	-14.77%	-16.70%
JNJ	30.41%	28.16%	25.90%	23.65%	21.39%	19.14%		**JNJ**	-16.09%	-19.69%	-23.30%	-26.90%	-30.50%	-33.33%
AMZN	3.40%	3.62%	3.84%	4.07%	4.29%	4.51%		**AMZN**	4.73%	5.99%	7.25%	8.52%	9.78%	10.32%
F	-2.00%	-2.71%	-3.41%	-4.11%	-4.82%	-5.52%		**F**	-26.87%	-27.34%	-27.80%	-28.26%	-28.73%	-28.99%
ANF	-0.38%	-0.54%	-0.70%	-0.86%	-1.02%	-1.18%		**ANF**	2.66%	3.45%	4.24%	5.03%	5.82%	6.70%
OKE	3.55%	5.89%	8.23%	10.57%	12.91%	15.25%		**OKE**	-40.59%	-39.82%	-39.05%	-38.27%	-37.50%	-36.38%
M	-0.46%	0.50%	1.45%	2.41%	3.37%	4.32%		**M**	-7.47%	-10.03%	-12.60%	-15.17%	-17.73%	-19.69%
S	-1.11%	-1.34%	-1.56%	-1.79%	-2.02%	-2.24%		**S**	4.43%	4.06%	3.70%	3.34%	2.97%	2.67%

5.3 Úspešnosť modelov

V záverečnej časti tejto bakalárskej práce porovnáme výsledky Mean Variance a Mean Absolute Deviation modelu za účelom aplikácie v reálnom živote a reálnom svete investovania. Ako sme už spomenuli v časti 5.1.2, investovali sme predovšetkým podľa historických dát z posledných dvoch, resp. troch rokov, a to v dátume *1. marca 2012.* Váhy akcií do portfólia sme zvolili na základe výsledkov Mean Variance a Mean Absolute Deviation optimalizácie s viacerými obmenami a pre rôznu úroveň cieľového ročného výnosu $\bar{r_p}$. Tieto výsledky nám predstavili 36 rôznych portfólií, ktorých bližšiu špecifikáciu nájde čitateľ v časti 5.2.

Pozornosť by sme radi upriamili na Tabuľky 8, 7. V nich možno nájsť výnos, ktorý jednotlivé portfóliá získali počas investičnej periódy jedného roku. K výsledkom sme sa dopracovali postupom, kedy sme porovnali hodnotu portfólia na začiatku a na konci periódy, t.j. v dátumoch *1. marca 2012* a *1. marca 2013.* V zmysle sekcie 1.2, sme vypočítali relatívny zisk našich portfólií.

$\bar{r_p}$	***MV***	***MAD I***	***MAD II***
10%	12.45%	75.02%	75.02%
12%	13.38%	16.41%	16.74%
14%	13.20%	15.16%	15.61%
16%	12.64%	14.42%	14.88%
18%	12.11%	13.78%	14.74%
20%	11.73%	13.05%	14.73%

Tabuľka 7: Porovnanie výsledkov optimalizácie pre jednotlivé modely a cieľové hodnoty výnosu $\bar{r_p}$ so zákazom krátkych pozícií

Z výsledkov takmer jednoznačne vidno, že pri Mean Variance optimalizácii v prípade zákazu krátkych pozícií bol priemerný ročný výnos menší ako v prípade, že krátke pozície boli povolené. Presný opak možno sledovať pri Mean Absolute Deviation optimalizácii, kde vo výške výnosov vedú portfóliá, pri ktorých boli krátke pozície zakázané. Zaujímavé je, že pri zákaze krátkych pozícií výsledný výnos portfólia s narastajúcim cieľovým výnosom $\bar{r_p}$ klesá. V oboch prípadoch so zákazom aj bez zákazu krátkych pozícií dosahuje pri Mean Aboslute Deviation optimalizácii vyšší výnos variant II, pri ktorom

$\bar{r_p}$	***MV***	***MAD I***	***MAD II***
10%	15.18%	13.52%	64.58%
12%	14.52%	1.39%	11.76%
14%	14.95%	12.75%	15.19%
16%	14.82%	12.18%	14.10%
18%	14.66%	12.82%	14.53%
20%	14.47%	13.05%	14.57%

Tabuľka 8: Porovnanie výsledkov optimalizácie pre jednotlivé modely a cieľové hodnoty výnosu $\bar{r_p}$ s povolenými krátkymi pozíciami

sú odchýlky smerom nahor aj nadol rovnako nechcené ($c_d = c_u = 1$). Jasnými outliermi sú výnosy pri cieľovom ročnom výnose $\bar{r_p} = 10\%$ v prípade oboch variant Mean Absolute Deviation optimalizácie so zákazom krátkych pozícií, kedy výsledné portfólio bolo rovnaké a s mimoriadne vysokým podielom v jednej z akcií. Ročný výnos v tomto prípade dosiahol takmer neuveriteľných 75.02%. Za povšimnutie stojí aj mimoriadne vysoký ročný výnos 64.58% pri povolených krátkych pozíciach pri Mean Absolute Deviation optimalizácii, variant II opäť s cieľovým ročným výnosom $\bar{r_p} = 10\%$. Naopak, mimoriadne nízky výnos, avšak na potešenie stále kladný, zaznamenala portfólio z výsledku Mean Absolute Deviation optimalizácie, variant I, pri povolených krátkych pozíciach, a to slabých 1.39% ročného výnosu.

Na základe výsledkov v tejčo časti si dovolíme skonštatovať, že najlepšou voľbou by bolo investovať so zákazom krátkych pozícii pomocou Mean Absolute Deviation optimalizácie, kde penalty $c_d = c_u = 1$. Aspoň v tomto prípade sa nám to potvrdilo.

Záver

Cieľom našej bakalárskej práce bolo prehľadne spracovať a porovnať dva jednoperiódové modely na správu portfólia. Východiskovým bodom boli pre nás dve práce Harryho Markowitza [4], [5] a takmer o štyridsať rokov mladší článok japonských matematikov Konna a Yamazakiho [1]. Obe metódy, ktoré autori vo svojich prácach predstavili, fungujú ako silné optimalizačné nástroje. Získané znalosti sme využili k naprogramovaniu oboch modelov, čo nám umožnilo porovnanie výsledkov na reálnych dátach. Našou snahou bolo ukázať, že Mean Absolute Deviation model je vhodnou alternatívnou k optimalizácii pomocou Mean Variance modelu, ak nie dokonca lepšou.

Zatiaľ čo prvé štyri kapitoly našej bakalárskej práce sa venujú prevažne teoretickým poznatkom a vlastnostiam jednotlivých modelov, piata kapitola predstavuje uvedenie nadobudnutých poznatkov do praxe. Tejto časti sme venovali najväčšiu pozornosť a taktiež najvic času. V prvom rade sme museli stanoviť časový horizont, počas ktorého sme vývoj akcií sledovali, vybrať akcie do portfólia tak, aby bolo čo najviac diverzifikované, určiť penalizácie v Mean Absolute Deviation modeli.

Potenciálny investor s pevnými základmi v matematike by našu prácu mohol chápať ako opornú pomôcku pri investovaní, ktorá mu umožní lepšie pochopiť fungovanie dvoch nami skúmaných modelov, ich plusy a mínusy, obmedzenia, no v neposlednom rade aj samotnú teóriu portfólia. Veríme, že čas a námaha venovaná príprave tejto bakalárskej práce priniesli svoje ovocie v podobe novonadobutnutých alebo intenzívnejšie prebratých vedomostí.

Sme presvedčení, že zámer tejto práce sme splnili. Modely sme porovnali, v časti 4 sme podľa [1] ukázali, že Markowitzova úloha je konzistentá s tou, ktorú vo svojej práci predstavili Konno a Yamazaki. Pre rôzne modely a ich variácie sme porovnali výsledky optimalizácie pomocou nami vytvoreného programu. Videli sme, že správanie modelov sa predovšetkým v prípade optimalizácie so zákazom krátkych pozícií relatívne podobalo. Niektoré z výhod a významných plusov Mean Absolute Deviation modelu sme nemali príležitosť využiť alebo zaznamenať (napr. výhoda lineárneho programovania oproti kvadratickému), nakoľko naše portfólio nebolo dostatočne veľké. Na základe výsledkov optimalizácie portfólií pozostávajúcich z 20 akcií z indexu $S\&P500$ nedokážeme potvrdiť, či výsledky jednej alebo druhej optimalizácie produkujú vyššie výnosy.

Zoznam použitej literatúry

[1] Konno, H., Yamazaki, H. (1991): *Mean - Absolute Deviation Portfolio Optimization Model and Its Applications to Tokyo Stock Market.* V *Management Science.* [online]. 1991, vol. 37, no. 5, 519-531

[2] Kvandová, S. (2012): *Analýza niekotrých modelov na správu portfólia*: Bakalárska práca. Bratislava: Fakulta matematiky, fyziky a informatiky UK, 2012. 39 s.

[3] Luenberger, G. D.(1988): *Investement Science*, Oxford University Press, Oxford, 1988

[4] Markowitz, H. (1952): *Portfolio Selection.* V *The Journal of Finance.* 1952, no. 7, 77-91

[5] Markowitz, H. (1959): *Portfolio Selection: Efficient Diversification of Investments*, Chapman & Hall, Ltd., Londýn, 1959

[6] Michalowski, W., Ogryczak, W. (1998): *Extending the MAD Portfolio Optimization Model to Incorporate Downside Risk Aversion*: Thesis. Laxenburg: International Institute for Applied Systems Analysis, 1998. 21 s.

[7] Siede, H. (2000): *Multi Period Portfolio Optimization with Emphasis on a Mean Variance Criterion*: Thesis. St. Gällen: Universität St. Gällen, 2000. 195 s.

[8] Steinbach, C. M. (2001): *Markowitz Revisited: Mean-Variance Models in Financial Portfolio Analysis.* V *SIAM Review.* [online]. 2001, vol. 43, no. 1, 31 - 85

[9] Zenios, S. A. (1995): *Asset and liability management under uncertainity for fixed-inocme securities.* V *Annuals of Operations Research.* 1995, vol. 59, 77-97