

**UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY**



**VÝPOČET FOURIEROVÝCH RADOV POMOCOU DISKRÉTNEJ
FOURIEROVEJ TRANSFORMÁCIE**

BAKALÁRSKA PRÁCA

2013

Andrej ZUBAL'

**UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY**

**VÝPOČET FOURIEROVÝCH RADOV POMOCOU DISKRÉTNEJ
FOURIEROVEJ TRANSFORMÁCIE**

BAKALÁRSKA PRÁCA

Študijný program: Ekonomická a finančná matematika
Študijný odbor: 9.1.9. Aplikovaná matematika (1114)
Školiace pracovisko: Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky
Vedúci práce: Mgr. Pavol Bokes, PhD.

Bratislava 2013

Andrej ZUBAL'



Univerzita Komenského v Bratislave
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

ZADANIE ZÁVEREČNEJ PRÁCE

Meno a priezvisko študenta: Andrej Zubaľ
Študijný program: ekonomická a finančná matematika (Jednoodborové štúdium, bakalársky I. st., denná forma)
Študijný odbor: 9.1.9. aplikovaná matematika
Typ záverečnej práce: bakalárska
Jazyk záverečnej práce: slovenský

Názov: Výpočet Fourierových radov pomocou diskkrétnej Fourierovej transformácie
Cieľ: Cieľom práce je popísať vlastnosti a implementáciu diskkrétnej Fourierovej transformácie a použiť ju k výpočtu Fourierových radov.

Vedúci: Mgr. Pavol Bokes, PhD.
Katedra: FMFI.KAMŠ - Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky
Vedúci katedry: prof. RNDr. Daniel Ševčovič, CSc.
Dátum zadania: 10.10.2012

Dátum schválenia: 03.11.2012
doc. RNDr. Margaréta Halická, CSc.
garant študijného programu

.....
študent

.....
vedúci práce

Abstrakt v štátnom jazyku

ZUBAL', Andrej: Výpočet Fourierových radov pomocou diskretnéj Fourierovej transformácie [Bakalárska práca], Univerzita Komenského v Bratislave, Fakulta matematiky, fyziky a informatiky, Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky; školiteľ: Mgr. Pavol Bokes, PhD., Bratislava, 2013, 46 s.

V našej práci sa zaoberáme diskretnou Fourierovou transformáciou a jej aplikáciou pre výpočet koeficientov Fourierových radov. Cieľom práce je popísať základné teoretické vlastnosti diskretnéj Fourierovej transformácie v súvislosti s odhadovaním koeficientov Fourierových radov a následne získané poznatky využiť pri rôznorodých aplikáciach. Značná pozornosť je venovaná chybe aproximácie Fourierových radov pomocou diskretnéj Fourierovej transformácie. Výsledkom práce sú aplikácie diskretnéj Fourierovej transformácie pri riešení rovnice vedenia tepla so zadanou počiatočnou podmienkou ako aj pri analýze zvukového signálu.

Kľúčové slová: diskretná Fourierova transformácia, Fourierove rady

Abstract

ZUBAL', Andrej: Computation of Fourier Series using the Discrete Fourier Transform [Bachelor Thesis], Comenius University in Bratislava, Faculty of Mathematics, Physics and Computer Science, Department of Applied Mathematics and Statistics; Supervisor: Mgr. Pavol Bokes, PhD., Bratislava, 2013, 46 p.

In our work we deal with the Discrete Fourier transform and its application in the computation of Fourier series. The aim of our work is to describe basic theoretical properties of the Discrete Fourier transform as related to the approximation of Fourier coefficients and subsequently use the attained knowledge in various applications. Substantial amount of attention is paid to the analysis of error in estimating Fourier coefficients with the Discrete Fourier transform. The result of our work is the application of the Discrete Fourier transform in solving the heat equation with given initial condition as well as the analysis of acoustic signal.

Keywords: Discrete Fourier transform, Fourier series

Obsah

Úvod	7
1 Fourierove rady a Fourierova transformácia	8
1.1 Komplexná reprezentácia Fourierovho radu	11
2 Diskrétna Fourierova Transformácia	13
2.1 Motivácia a definícia DFT	13
2.2 Inverzná diskrétna Fourierova transformácia (IDFT)	15
2.3 Súvis medzi DFT a koeficientami Fourierových radov	17
2.3.1 Intuitívna úvaha o súvise medzi DFT a Fourierovými koeficientami	17
2.3.2 Body nespojitosti a lichobežníkové pravidlo	19
2.4 Chyba pri aproximácii Fourierových koeficientov pomocou DFT .	24
3 Aplikácie	32
3.1 Aproximácia Fourierových koeficientov pre typové funkcie	32
3.1.1 Funkcia s ohraničeným spektrom	32
3.1.2 Schodovitá funkcia	32
3.1.3 Lineárna funkcia	34
3.1.4 Periodická spojitá funkcia	34
3.1.5 Periodické C^∞ funkcie	35
3.2 Vedenie tepla v tenkej tyči	36
3.3 Analýza zvukového signálu (brnknutie na gitaru)	41
Záver	45
Zoznam použitej literatúry	46

Úvod

Konvenčný postup pri štúdiu Fourierových radov a Fourierovej transformácie je práca s funkciami definovanými na kontinuu. Z teoretického hľadiska sa takýto postup javí ako prirodzený a opodstatnený. Vo výpočtovej praxi je ale práca s kontinuumom nemožná. Pri rôznych meraniach a experimentoch sa väčšinou zaznamenávajú diskrétné hodnoty namiesto spojitých funkcií. I moderné počítače sú schopné spracovávať len konečné množstvo dát. Preto je rozumné zaoberať sa transformáciami analogickými Fourierovým radom a Fourierovej transformácii, no definovanými pre konečné postupnosti. Takáto transformácia existuje a nazýva sa diskretná Fourierova transformácia (odteraz len DFT).

DFT má širokú škálu využitia v najrôznorodjších oblastiach. Mnoho aplikácií ako aj teoretických vlastností DFT je prezentovaných v práci [1]. Jedno z možných využití DFT je aproximácia koeficientov Fourierovho radu pôvodnej funkcie zadanej na kontinuu. Teoretický súvis medzi DFT a Fourierovými radmi je objasnený v [3].

V roku 1965, známi americkí matematici J.W. Cooley a J.W. Tukey publikovali v článku [4] efektívny algoritmus na výpočet DFT, tzv. FFT (Fast Fourier transform). Tento algoritmus výrazne znížil počet operácií potrebných na výpočet DFT a rozšíril tým, skrz modernú výpočtovú techniku, aplikovateľnosť DFT.

Cieľom tejto práce je opísať DFT ako aj ilustrovať aplikovateľnosť DFT na príklade výpočtu koeficientov Fourierových radov a iných príkladoch. V prvej kapitole si zopakujeme základné pojmy a definície z teórie Fourierových radov. Druhá kapitola sa bude venovať DFT. Postupne prejdeme od definície DFT k súvisu medzi DFT a Fourierovými radmi až k chybe pri aproximácii Fourierových koeficientov pomocou DFT. V tretej kapitole sa budeme venovať konkrétnym aplikáciám DFT. Uvedieme výpočet Fourierových koeficientov pre niekoľko bežných funkcií. Vyriešime rovnicu vedenia tepla a zanalyzujeme zvukový signál. Príklady budú bohaté graficky ilustrované.

1 Fourierove rady a Fourierova transformácia

Z lineárnej algebry vieme, že v každom konečnorozmernom vektorovom priestore so skalárnym súčinom existuje ortonormálna báza. Je preto prirodzené skúmať existenciu ortonormálnych báz i v nekonečnorozmerných vektorových priestoroch. Z istého uhla pohľadu, teória Fourierových radov je podnietená práve snahou nájsť ortonormálne bázy (s nekonečným počtom prvkov) v priestoroch integrovateľných periodických funkcií.¹ Prv než sa pustíme do odvodzovania teoretických poznatkov, je dobré si uvedomiť, že existencia ortonormálnej bázy nám umožňuje vyjadriť ľubovoľný prvok priestoru (v našom prípade funkciu) ako súčet báзовých elementov násobených príslušnými koeficientami. V dôsledku ortonormality bázy sú tieto koeficienty pomerne jednoducho spočítateľné. Takáto možnosť sa javí ako mimoriadne užitočná.

V prvom rade je potrebné zaviesť skalárny súčin pre vektorové priestory funkcií, pretože bez skalárneho súčinu nie je možné hovoriť o ortogonalite. Ukazuje sa, že vhodný skalárny súčin je definovaný nasledovne.

Definícia 1.1. *Nech $C([a,b],\mathbb{R})$ je priestor všetkých spojitých funkcií f na intervale $[a,b]$.²*

$$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$$

Majme $g, h \in C([a, b], \mathbb{R})$. Pod skalárnym súčinom funkcií g a h rozumieme nasledujúci výraz

$$\langle g, h \rangle = \int_a^b g(x)h(x)dx \quad .$$

Funkcia $g.h$ bude tiež spojitá, takže $\langle g, h \rangle$ je dobre definovaný. Nie je ťažké overiť, že daný výraz spĺňa axiómy skalárneho súčinu, koniec koncov je to prirodzené zovšeobecnenie skalárneho súčinu v priestoroch $\mathbb{R}^n$.

Teraz už môžeme pristúpiť k samotnému pojmu Fourierovho radu.

¹V nekonečnorozmerných priestoroch funkcií je situácia komplikovanejšia než v konečnorozmerných priestoroch a hovoriť o ortonormálnych bázach v priamom slova zmysle treba s opatnosťou, i keď formálna aj ideová podoba s konečnorozmerným prípadom tu je.

²Overiť, že to je vektorový priestor je triviálne.

Definícia 1.2. *Nech $l > 0$ a $f : [-l, l] \rightarrow \mathbb{R}$ je Riemannovsky integrovateľná. Fourierov rad funkcie f definujeme ako nasledujúci rad*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \quad .$$

Koeficienty a_0, a_n, b_n sa nazývajú Fourierove koeficienty funkcie f a sú definované ako

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) dx \quad , \\ a_n &= \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx \quad , \\ b_n &= \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx \quad . \end{aligned}$$

Funkcie $1, \cos \frac{n\pi x}{l}$ a $\sin \frac{n\pi x}{l}$ v určitom zmysle zohrávajú úlohu ortogonálnej bázy. V tomto ponímaní je Fourierov rad len vyjadrením daného vektoru f pomocou lineárnej kombinácie báзовých vektorov.

Ortogonalita v zmysle skalárneho súčinu z Definície 1.1 sa dá overiť bezprostredným integrovaním s využitím trigonometrických vzorcov. Z ortogonalít je jasné, že dané koeficienty sa získavajú ako skalárny súčin báзовých prvkov s danou funkciou f ,³ čo aj objasňuje vzorce pre Fourierove koeficienty.

Samotná báзовosť je problematickejšia. Totiž medzi funkciou a jej Fourierovým radom platí rovnosť len za istých predpokladov. Často sa vzťah medzi funkciou a jej Fourierovým radom značí nasledovne:

$$f(x) \approx \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \quad .$$

Presný zmysel tohoto vzťahu je komplikovaný a nie je predmetom tejto práce.⁴ Pre ilustráciu uvedieme aspoň jednu podmienku pre bodovú konvergenciu Fourierovho radu k pôvodnej funkcii.

³Tento fakt je známy zo základného kurzu lin. algebry. V danom prípade ešte násobíme normalizačnou konštantou $\frac{1}{l}$.

⁴Pre podrobnejší výklad pozri [5].

Veta 1.3. *Nech f je $2l$ -periodická funkcia⁵ $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, na intervale $[-l, l]$ Riemannovsky integrovateľná a po častiach spojitá, t.j. existujú čísla*

$$-l = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = l$$

také, že f je spojitá na každom z intervalov (x_j, x_{j+1}) a navyše existujú konečné limity

$$f(x_j \pm 0) = \lim_{t \rightarrow 0^+} f(x_j \pm t) \quad .$$

Predpokladajme navyše, že f je po častiach diferencovateľná na $[-l, l]$ a v deliacich bodoch x_j existujú konečné limity

$$f'(x_j \pm 0) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(x_j \pm t) - f(x_j \pm 0)}{t} \quad .$$

Potom Fourierov rad funkcie f konverguje v každom reálnom čísle x k hodnote

$$s_n(x) \rightarrow \frac{1}{2}[f(x+0) + f(x-0)] \quad .$$

Dôkaz Dôkaz je pomerne komplikovaný a vyžaduje rozsiahle znalosti, preto ho tu neuvádzame.⁶

Na záver je nutné podotknúť, že výber $2l$ -periodickej funkcie a konkrétneho intervalu $[-l, l]$ nie je podstatný. Takisto by sa všetky definície a vety dali formulovať pre ľubovoľnú periodickú funkciu s periódou T a ľubovoľný interval dĺžky T .⁷ V tomto prípade (s intervalom $[a, b]$, kde $T = b - a$) by sa nám vzorce pre Fourierove koeficienty zmenili na

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{T} \int_a^b f(x) dx, \\ a_n &= \frac{2}{T} \int_a^b f(x) \cos \frac{2n\pi x}{T} dx, \\ b_n &= \frac{2}{T} \int_a^b f(x) \sin \frac{2n\pi x}{T} dx, \end{aligned}$$

⁵Môže vzniknúť napr. periodickým rozšírením pôvodnej funkcie definovanej len na intervale $[-l, l]$.

⁶Dá sa nájsť v [5, str. 55].

⁷Značenie pomocou $[-l, l]$ je motivované fyzikálnymi úlohami (dĺžka tyče, struny). Na druhej strane značenie pomocou T sa používa pri spracovávaní signálu, akustike atď.

a samotný Fourierov rad by mal podobu

$$f(x) \approx \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{2n\pi x}{T} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{2n\pi x}{T}.$$

1.1 Komplexná reprezentácia Fourierovho radu

Fourierov rad vo svojej klasickej podobe (uvedenej vyššie) má pomerne zložitý zápis. Ukážeme ako je možné vyjadriť Fourierov rad v kompaktnejšej forme. Použijeme pri tom známe Eulerove vzorce.

$$\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \quad \sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

Platia nasledovné rovnosti:

$$\begin{aligned} \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \right) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \frac{e^{\frac{in\pi x}{l}} + e^{\frac{-in\pi x}{l}}}{2} + b_n \frac{e^{\frac{in\pi x}{l}} - e^{\frac{-in\pi x}{l}}}{2i} \right) = \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\left(\frac{a_n - ib_n}{2} \right) e^{\frac{in\pi x}{l}} + \left(\frac{a_n + ib_n}{2} \right) e^{\frac{-in\pi x}{l}} \right) \end{aligned}$$

Toto je inšpiráciou pre nasledovný zápis Fourierovho radu

$$f(x) \approx \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{\frac{in\pi x}{l}},$$

kde

$$c_0 = \frac{a_0}{2}, \quad c_n = \frac{a_n - ib_n}{2}, \quad c_{-n} = \frac{a_n + ib_n}{2}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Dosadením pôvodných výrazov za a_0, a_n, b_n a opätovným použitím Eulerových vzorcov dostávame nasledujúce vyjadrenie komplexných koeficientov.

$$c_n = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(x) e^{\frac{-in\pi x}{l}} dx, \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Takáto komplexná reprezentácia Fourierovho radu je zjavne jednoduchšia. Ďalšou výhodou je, že sa ňou dá prirodzene rozšíriť pojem Fourierovho radu aj pre funkcie z $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$.

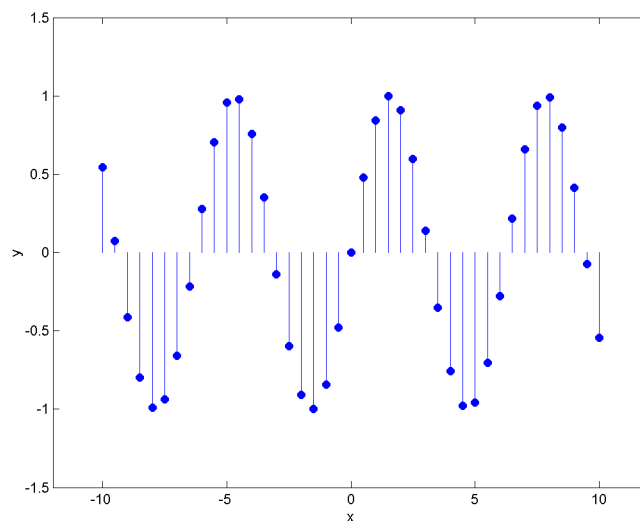
Je vhodné poznamenať, že v prípade $2l$ -periodickej reálnej funkcie f je irelevantné či počítame Fourierove koeficienty ako integrál na intervale $[-l, l]$ alebo na akomkoľvek inom intervale dĺžky $2l$. Totiž podintegrálová funkcia bude vždy $2l$ -periodická, čo nám aj zaručuje invariantnosť hodnoty integrálu od voľby intervalu. Takisto nie je podstatná $2l$ -periodickosť, ale iba periodickosť s periódou T ako bolo spomenuté v predchádzajúcom odstavci.

Teda pri Fourierových radoch vo všeobecnosti pracujeme s periodickými funkciami s periódou T a ľubovoľným intervalom $[a, b]$, kde $T = b - a$.

2 Diskrétna Fourierova Transformácia

2.1 Motivácia a definícia DFT

Ako už bolo spomínané v úvode, vo výpočtovej praxi nie je možné narábať so spojitými (nekonečnými) veličinami, pretože sme obmedzení časom aj úložnými kapacitami. Moderné počítače nie sú schopné pracovať s funkciami ako celistvými matematickými objektami, funkcie sa v pamäti ukladajú ako konečné postupnosti hodnôt. Tieto hodnoty sa nazývajú vzorky a proces zaznamenávania dát v takejto forme je vzorkovanie. Hovorí sa aj, že pôvodnú funkciu takýmto spôsobom diskretizujeme.



Obr. 1: Navzorkovaná funkcia $\sin x$ na intervale $[-10, 10]$ s frekvenciou 2 Hz. Z pôvodnej funkcie sa ukladajú iba súradnice modrých bodov.

Ako vidíme diskretizácia periodickej funkcie nám dáva konečnú postupnosť reálnych čísel. Ako ale z takejto postupnosti vypočítať Fourierov rad pôvodnej funkcie?

Daná otázka je pomerne dôležitá, pretože bez vhodnej metódy nie je možné pre výpočet Fourierových radov využívať modernú výpočtovú techniku. Ukazuje sa, že existujú vhodné postupy, pri ktorých je možné dostať pomerne dobré aprox-

imácie Fourierových radov iba z konečného počtu hodnôt získaných diskretizáciou pôvodných funkcií. Ústredné postavenie v týchto postupoch patrí operácii nazývanej diskretná Fourierova transformácia (DFT).

Definícia 2.1. *Nech $\vec{f} = (f_0, f_1, \dots, f_{N-1})$ je postupnosť zložená z N komplexných čísel f_k . Pod diskretnou Fourierovou transformáciou tejto postupnosti rozumieme N -ticu komplexných čísel $\vec{F} = (F_0, F_1, \dots, F_{N-1})$ definovanú nasledovným predpisom⁸*

$$F_k = \sum_{n=0}^{N-1} f_n e^{-2\pi i \frac{kn}{N}}.$$

Pre zjednodušenie zápisu je vhodné zaviesť nasledujúce označenie

$$w_N = e^{\frac{2\pi i}{N}}.$$

Potom sa nám zápis DFT zredukuje na

$$F_k = \sum_{n=0}^{N-1} f_n w_N^{-kn}.$$

Niekedy je užitočné reprezentovať DFT prostredníctvom matíc. Nie je ťažké si uvedomiť, že maticovo vieme DFT zapísať nasledovne

$$\begin{pmatrix} F_0 \\ F_1 \\ F_2 \\ \vdots \\ F_{N-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & w_N^{-1} & w_N^{-2} & \cdots & w_N^{-(N-1)} \\ 1 & w_N^{-2} & w_N^{-4} & \cdots & w_N^{-2(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & w_N^{-(N-1)} & w_N^{-2(N-1)} & \cdots & w_N^{-(N-1)^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_{N-1} \end{pmatrix}.$$

⁸V definícii DFT môžu byť drobné, ale nepodstatné rozdiely. Napríklad sa stretávame aj s definíciami v podobe $F_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f_n e^{-2\pi i \frac{kn}{N}}$ alebo $F_k = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} f_n e^{-2\pi i \frac{kn}{N}}$.

Teda DFT ako lineárna transformácia z $\mathbb{C}^N \rightarrow \mathbb{C}^N$ je úplne charakterizovaná $N \times N$ maticou $\mathbf{F}$.

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & w_N^{-1} & w_N^{-2} & \cdots & w_N^{-(N-1)} \\ 1 & w_N^{-2} & w_N^{-4} & \cdots & w_N^{-2(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & w_N^{-(N-1)} & w_N^{-2(N-1)} & \cdots & w_N^{-(N-1)^2} \end{pmatrix}$$

alebo ekvivalentne

$$\mathbf{F}_{ij} = w_N^{-(i-1)(j-1)}.$$

V zmysle tejto notácie sa dá DFT zapísať ako jednoduché násobenie maticou $\mathbf{F}$.

$$\vec{\mathbf{F}} = \mathbf{F} \vec{\mathbf{f}}$$

2.2 Inverzná diskretná Fourierova transformácia (IDFT)

Pri diskretnéj Fourierovej transformácii má zmysel hľadať inverznú transformáciu. Teda takú, ktorá transformovanú postupnosť premení na pôvodnú. V zmysle notácie z predošlej sekcie, chceme nájsť taký predpis, ktorý nám postupnosť $\vec{\mathbf{F}}$ pretransformuje naspäť do postupnosti $\vec{\mathbf{f}}$. Avšak z maticového zápisu DFT je ihneď zrejmé, že inverzná diskretná Fourierova transformácia (IDFT) bude reprezentovaná inverznou maticou k matici $\mathbf{F}$. Platí totiž

$$\mathbf{F}^{-1} \vec{\mathbf{F}} = \mathbf{F}^{-1} (\mathbf{F} \vec{\mathbf{f}}) = (\mathbf{F}^{-1} \mathbf{F}) \vec{\mathbf{f}} = \mathbf{I} \vec{\mathbf{f}} = \vec{\mathbf{f}}.$$

Teda problém sa redukuje na nájdenie $\mathbf{F}^{-1}$.

Inverzná matica sa hľadá pomerne ľahko. Stačí si uvedomiť platnosť dvoch vzťahov. V prvom rade aj pre komplexné čísla platí vzťah o čiastočnom súčte geometrického radu

$$1 + z + z^2 + z^3 + \cdots + z^{N-1} = \begin{cases} \frac{1-z^N}{1-z} & z \neq 1 \\ N & z = 1 \end{cases}. \quad (1)$$

Druhý vzťah je ešte jednoduchší

$$w_N^{kN} = e^{2\pi i \frac{kN}{N}} = e^{2\pi i k} = 1 \quad \forall k \in \mathbb{Z}. \quad (2)$$

Dosadením do (1) za $z = w_N^k$ a následným využitím vzťahu (2) dostávame nasledujúci výsledok

$$1 + w_N^k + w_N^{k2} + w_N^{k3} + \dots + w_N^{k(N-1)} = \begin{cases} \frac{1-w_N^{kN}}{1-w_N^k} = \frac{1-1}{1-w_N^k} = 0 & k \neq 0 \\ N & k = 0 \end{cases}. \quad (3)$$

Zadefinujme si teraz maticu $\overline{\mathbf{F}}$, ktorá bude hermitovsky združená k matici $\mathbf{F}$

$$\overline{\mathbf{F}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & w_N^1 & w_N^2 & \dots & w_N^{(N-1)} \\ 1 & w_N^2 & w_N^4 & \dots & w_N^{2(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & w_N^{(N-1)} & w_N^{2(N-1)} & \dots & w_N^{(N-1)^2} \end{pmatrix}. \quad (4)$$

Pomocou vzťahu (3) nie je ťažké overiť platnosť nasledujúcej rovnosti

$$\overline{\mathbf{F}}\mathbf{F} = N \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}. \quad (5)$$

Zo vzťahu (5) ďalej vyplýva, že matica $\frac{1}{N}\overline{\mathbf{F}}$ je inverznou maticou matice $\mathbf{F}$. Teda

$$\mathbf{F}^{-1} = \frac{1}{N}\overline{\mathbf{F}}. \quad (6)$$

Zo vzťahu (6) vyplýva definícia IDFT.

Definícia 2.2. *Nech $\vec{\mathbf{f}} = (f_0, f_1, \dots, f_{N-1})$ je postupnosť zložená z N komplexných čísel f_k . Pod inverznou diskretnou Fourierovou transformáciou tejto postupnosti rozumieme N -ticu komplexných čísel $\vec{\mathbf{F}} = (\mathbf{F}_0, \mathbf{F}_1, \dots, \mathbf{F}_{N-1})$ definovanú nasledovným predpisom*

$$\mathbf{F}_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f_n e^{2\pi i \frac{kn}{N}}$$

alebo skrátený zápis

$$\mathbf{F}_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f_n w_N^{kn} \quad .$$

2.3 Súvis medzi DFT a koeficientami Fourierových radov

V predchádzajúcich odstavcoch bolo naznačené, že DFT môže byť použité pri výpočte Fourierových radov. Na prvý pohľad nemusí byť súvis medzi DFT a Fourierovými radmi vôbec jasný. V nasledujúcich riadkoch sa pokúsime tento súvis ozrejmiť. Ukazuje sa, že DFT je v istom zmysle aproximáciou Fourierových koeficientov, čo je jedným z dôvodov prečo je DFT natoľko užitočnou operáciou.

2.3.1 Intuitívna úvaha o súvise medzi DFT a Fourierovými koeficientami

Začneme jednoduchou intuitívnou úvahou. Predstavme si, že máme periodickú funkciu $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ s periódou T , ktorá má dostatočne dobré vlastnosti v zmysle počítania Fourierových radov.⁹ Vezmime si interval $[0, T]$ a zdiskretizujeme si funkciu f na tomto intervale. Za týmto účelom rozdelíme interval $[0, T]$ na N rovnakých častí, kde každá bude dĺžky $\frac{T}{N}$. Berúc ľavé krajné body získaných podintervalov dostávame N bodov na x-ovej osi v tvare

$$x_k = k \frac{T}{N}, \quad k \in \{0, 1, 2, \dots, N-1\}.$$

Ďalej počítame príslušné funkčné hodnoty v týchto bodoch čím získavame N -ticu

$$f(x_k) = f\left(k \frac{T}{N}\right), \quad k \in \{0, 1, 2, \dots, N-1\}.$$

Túto N -ticu si uchováme a prejdeme k výpočtu Fourierových koeficientov tejto funkcie, kde za interval, cez ktorý sa integruje použijeme $[0, T]$. Podľa vzorca pre Fourierove koeficienty

$$c_n = \frac{1}{T} \int_0^T f(x) e^{-\frac{2\pi i n x}{T}} dx, \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

⁹napr. spĺňa podmienky z Vety 1.3

Keďže pre prípad reálnych funkcií sú Fourierove koeficienty komplexne združené ($c_n = \bar{c}_{-n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$) je úplne postačujúce počítať len koeficienty pre nezáporné n . Substitúciou dostávame nasledujúce vyjadrenie pre Fourierove koeficienty

$$c_n = \frac{1}{T} \int_0^T f(x) e^{\frac{-2\pi i n x}{T}} dx \quad \left| \quad \begin{array}{l} \frac{x}{T} = u \\ dx = T du \end{array} \right. = \int_0^1 f(Tu) e^{-2\pi i n u} du \quad .$$

Pri dostatočne veľkom počte deliacich bodov N relatívne voči n sa dá integrál $\int_0^1 f(Tu) e^{-2\pi i n u} du$ dobre odhadnúť pomocou čiastočného súčtu

$$c_n = \int_0^1 f(Tu) e^{-2\pi i n u} du \approx \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f\left(k \frac{T}{N}\right) e^{-2\pi i \frac{kn}{N}} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f(x_k) e^{-2\pi i \frac{kn}{N}} \quad .$$

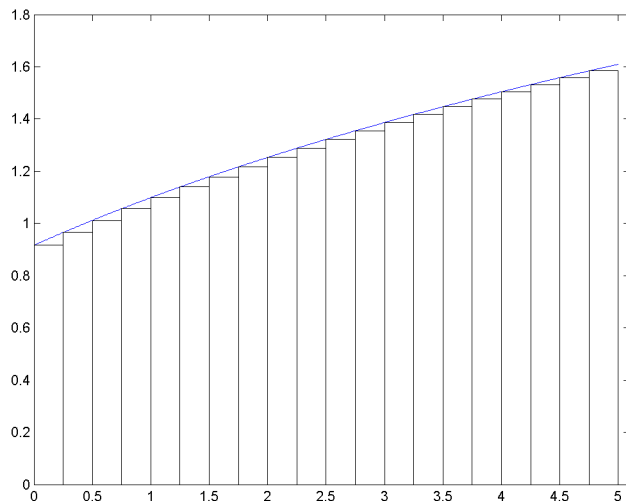
Lenže posledný výraz nie je nič iné ako DFT aplikované na našu N -ticu funkčných hodnôt $f(x_k)$ získanú diskretizáciou pôvodnej funkcie. Navyše je daný výraz (DFT) násobený konštantou $\frac{1}{N}$.

Je vhodné si uvedomiť, že číslo N skutočne musí byť veľké voči číslu n . V opačnom prípade by podintegrálová funkcia, obecné vzaté, príliš oscilovala (miera oscilácie je vo všeobecnosti určená číslom n) vzhľadom na jemnosť delenia (určenú číslom N). Inak povedané, naše delenie by bolo málo jemné na to, aby 'rozoznalo' príliš rýchlu osciláciu podintegrálvej funkcie. Takáto aproximácia pomocou čiastočného súčtu by bola pravdepodobne skreslená alebo úplne nepresná.

Recept na aproximáciu n -tého Fourierovho koeficientu vyzerá teda pomerne jednoducho. Stačí dostatočne jemne (voľbou vysokého N relatívne voči n) navzorkovať pôvodnú funkciu f , následne navzorkované hodnoty pretransformovať pomocou DFT, vybrať n -tý člen získanej N -tice a nakoniec získané číslo predeliť konštantou N . Takýto spôsob aproximácie integrálu je načrtnutý na obr. 2. Je vlastne ekvivalentný s aproximáciou pomocou ľavých krajných bodov deliacich intervalov.¹⁰

S týmto zistením by sa bolo možné uspokojiť. Avšak ostáva ešte viacero nezodpovedaných otázok napr. aká je chyba, ktorej sa dopúšťame pri spomenutej aproximácii Fourierových koeficientov? Alebo čo je to "dostatočne veľké N relatívne voči n "? Nehovoriac o tom, že uvedená úvaha nebola celkom rigorózna a obsahuje isté 'trhliny'. V ďalších odstavcoch rozvineme uvedenú úvahu hlbšie a zároveň sa budeme snažiť kvantifikovať chybu aproximácie.

¹⁰Až na drobný detail, že pracujeme s komplexnými funkciami. To však nezohráva veľkú rolu pretože každú funkciu $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ vieme rozložiť na dve funkcie $f_{Re} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ a $f_{Im} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, kde $f = f_{Re} + i f_{Im}$. Potom aproximácia pre komplexnú funkciu pozostáva z dvoch aproximácií pre reálne funkcie.



Obr. 2: *Odhad integrálu pomocou ľavých krajných bodov. V tomto prípade $T=[0,5]$ a $N=20$.*

2.3.2 Body nespojitosti a lichobežníkové pravidlo

Jeden z problémov, na ktorý môžeme naraziť pri aproximáciach Fourierových koeficientov pomocou diskrétnych metód sú body nespojitosti. Koreň problému spočíva v tom, že hodnota integrálu

$$c_n = \frac{1}{T} \int_0^T f(x) e^{-\frac{2\pi i n x}{T}} dx, \quad \forall n \in \mathbb{Z} \quad .$$

nijak nezávisí od hodnôt v bodoch nespojitosti¹¹ funkcie f na intervale $[0, T]$. Na druhej strane, hodnota diskrétnej aproximácie takéhoto integrálu môže byť týmito nespojitosťami značne ovplyvnená. Tento dôležitý fakt si ilustrujeme na jednoduchom príklade.

¹¹Podotýkame, že ak je funkcia f po častiach spojitá, tak bodov nespojitosti je konečne veľa, čo nám aj zaručuje nezávislosť integrálu od bodov nespojitosti.

Príklad Funkcia f bude definovaná nasledovne

$$f(x) = \begin{cases} 10^{100} & \forall x \in \mathbb{Z} \\ 0 & \forall x \in \mathbb{R}/\mathbb{Z} \end{cases}.$$

Ako vidíme funkcia f je periodická s periódou 1. Navyše je nespojitá v každom bode $x \in \mathbb{Z}$, kde nadobúda extrémne vysokú hodnotu 10^{100} . Pod'me teraz počítať jej Fourierove koeficienty. Keďže hodnota integrálu nezávisí od konečného počtu funkčných hodnôt bude platiť

$$c_n = \int_0^1 f(x)e^{-2\pi inx} dx = \int_0^1 0 \cdot e^{-2\pi inx} dx = \int_0^1 0 dx = 0, \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

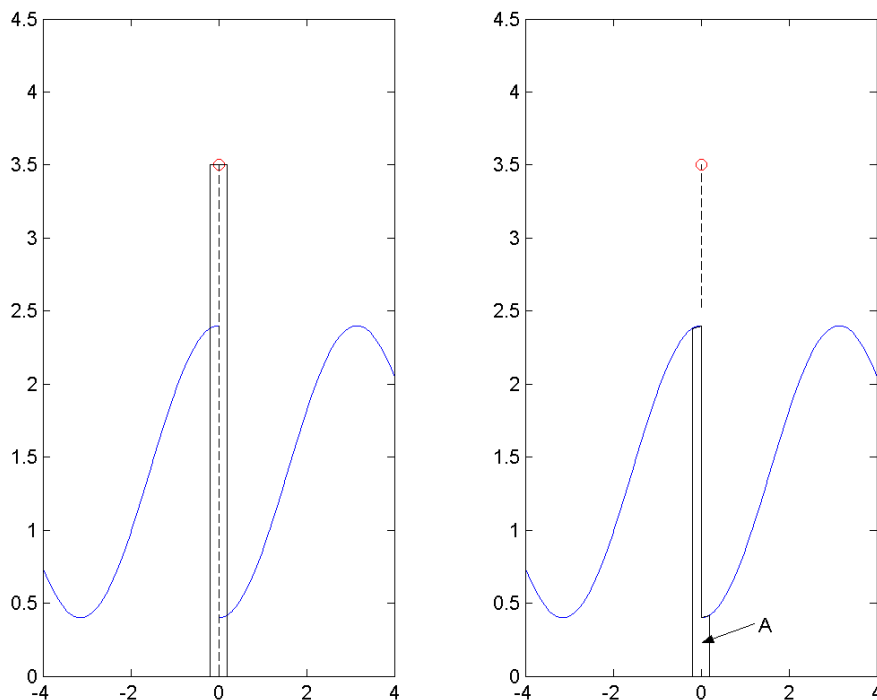
Pod'me teraz aproximovať Fourierove koeficienty pomocou DFT ako to bolo ukázané v predchádzajúcej časti. Naším intervalom bude prirodzene interval $[0,1]$ a aproximácia teda bude

$$c_n = \int_0^1 f(x)e^{-2\pi inx} dx \approx \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f\left(k \frac{1}{N}\right) e^{-2\pi i \frac{kn}{N}} = \frac{10^{100}}{N} + 0 + 0 + \dots + 0 = \frac{10^{100}}{N}.$$

Výsledné číslo $\frac{10^{100}}{N}$ má byť aproximáciou čísla 0. I keď je pravda, že tento výraz limitne konverguje k nule, je jasné, že pre 'rozumné' hodnoty čísla N bude naša aproximácia veľmi nepresná.

Na predchádzajúcom príklade sme videli ako môže DFT zlyhať pri odhade Fourierových koeficientov. Ako ale môžeme zlyhaniam tohto typu predísť? Koreňom problému bolo to, že hodnota funkcie v bode nespojitosti bola 'príliš' veľká oproti hodnotám v okolí bodu nespojitosti. Tým pádom náš odhad integrálu funkcie na malom okolí bodu nespojitosti bol mimoriadne zlý. Situácia je znázornená na obrázku č. 3.¹²

¹²Pre jednoduchosť predpokladáme iba jeden bod nespojitosti v bode 0, tzv. 'skok'. Ďalej predpokladáme, že jednostranné limity v bode 0 v zmysle Vety 1.3 $f(0 \pm 0) = \lim_{t \rightarrow 0^+} f(0 \pm t)$ existujú.



Obr. 3: Vľavo máme zobrazenú našu nepresnú aproximáciu integrálu v malom okolí bodu nula pomocou 'príliš veľkej' funkčnej hodnoty (červený krúžok). Vpravo zasa skutočnú hodnotu integrálu A , ktorú chceme odhadnúť.

Čo keby sme túto "príliš veľkú" hodnotu nahradili nejakým rozumnejším číslom? Potrebujeme teda zvoliť také číslo (a nahradiť ním hodnotu v bode nespojitosti), ktoré by nám zaručilo dobrý odhad integrálu v malom okolí bodu nespojitosti (pravá časť obr. 3). Z existencie jednostranných limít (poznámka 9) máme zaručené, že pre dostatočne malý interval $[-t, t]$ už budú funkčné hodnoty dostatočne blízko hodnote

$$f(-t) \approx \lim_{t \rightarrow 0^+} f(0 - t),$$

resp.

$$f(t) \approx \lim_{t \rightarrow 0^+} f(0 + t)$$

a daný integrál A môžeme dobre odhadnúť súčtom dvoch obdĺžnikov

$$A \approx t \lim_{t \rightarrow 0^+} f(0 - t) + t \lim_{t \rightarrow 0^+} f(0 + t) = t \left[\lim_{t \rightarrow 0^+} f(0 - t) + \lim_{t \rightarrow 0^+} f(0 + t) \right].$$

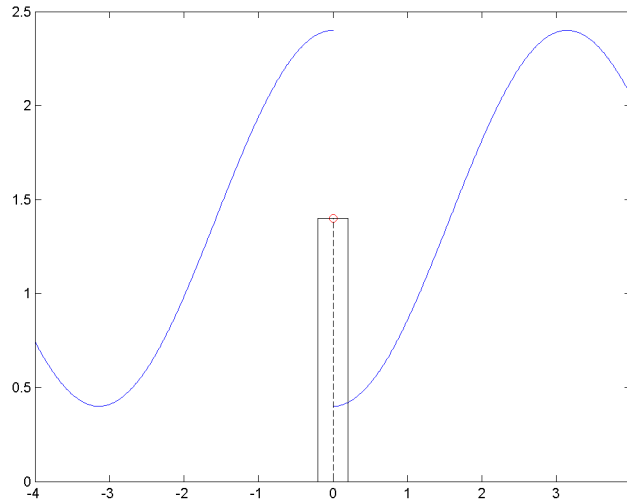
označíme si $\Delta x = 2t$ a použijeme notáciu z Vety 1.3, potom dostávame

$$A \approx \Delta x \frac{[f(0-0) + f(0+0)]}{2}.$$

Z toho nám vyplýva, že vhodná hodnota v bode 0 z hľadiska odhadu integrálu je

$$\frac{[\lim_{t \rightarrow 0^+} f(0-t) + \lim_{t \rightarrow 0^+} f(0+t)]}{2} = \frac{[f(0-0) + f(0+0)]}{2},$$

teda priemer z jednostranných limit v bode 0. Toto je hodnota, ktorú treba zadávať do DFT.



Obr. 4: Správna hodnota pre DFT algoritmus je priemer jednostranných limit (červený krúžok). Takáto hodnota nám zaručí dobrý odhad integrálu.

Iked' sme doteraz hovorili iba o jednom bode nespojitosti, je jasné, že pre ľubovoľný bod nespojitosti po častiach spojitej funkcie bude tento argument platný.

Teda predstavme si, že máme periodickú funkciu $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, ktorá spĺňa predpoklady Vety 1.3. Predtým než túto funkciu navzorkujeme pre DFT musíme túto funkciu transformovať nasledovne

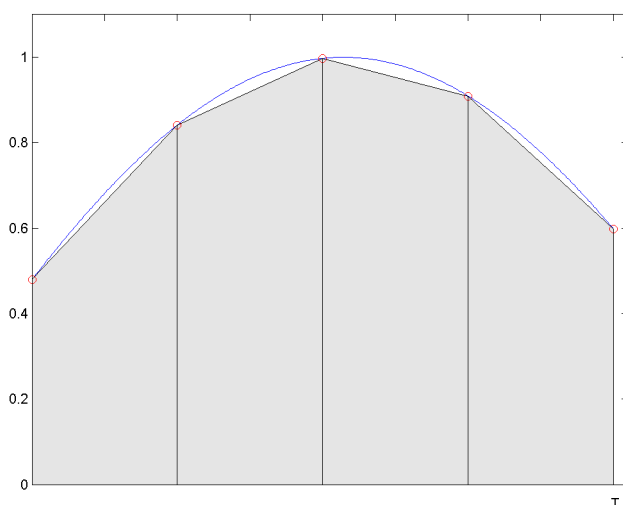
$$f \rightarrow f^* = \frac{1}{2}[f(x+0) + f(x-0)], \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Táto transformovaná funkcia bude v spojitých bodoch rovná pôvodnej funkcii, a zároveň v nespojitých bodoch bude rovná priemeru jednostranných limit.

Nový postup pri odhade Fourierových koeficientov je nasledovný. Funkciu f pretransformujeme na funkciu f^* . Potom funkciu f^* vhodne navzorkujeme, transformujeme získané hodnoty pomocou DFT a predelíme číslom $\frac{1}{N}$.

Môžeme si všimnúť zaujímavú skutočnosť. Totiž funkcia f^* je podľa Vety 1.3 presne tá funkcia, ku ktorej konverguje Fourierov rad pôvodnej funkcie f . V istom zmysle to má 'svoju logiku'. Pri odhade koeficientov Fourierovho radu odhadujeme pomocou samotného Fourierovho radu (reprezentovaného funkciou f^*) a nie pomocou pôvodnej funkcie.

Ďalšou zaujímavosťou je, že aproximácia Fourierových koeficientov pomocou DFT je ekvivalentná aproximácii pomocou tzv. **lichobežníkového pravidla**. Ide vlastne o odhad integrálu prostredníctvom lineárneho splajnu. Pod lineárnym splajnom rozumieme aproximáciu pôvodnej funkcie len pomocou funkcií tvaru $s(x) = ax + b$. Intuitívne, lineárny splajn získame 'pospájaním' funkčných hodnôt pôvodnej funkcie. Situácia je zobrazená na obr. 5.



Obr. 5: Odhad integrálu pomocou lichobežníkového pravidla. Získame ho 'pospájaním' funkčných hodnôt (červené krúžky) a výpočtom plochy získaného mnohoholníka (sivá plocha).

Počítaním plochy mnohoholníka po blokoch (obr. 5) zistíme, že odhad inte-

grálu pomocou lichobežníkového pravidla (pri rovnomernom delení intervalu na N častí) bude mať tvar

$$\int_a^b f(x) dx \approx \Delta x \sum_{k=1}^N \frac{(f(x_{k+1}) + f(x_k))}{2} = \frac{\Delta x}{2} \sum_{k=1}^N (f(x_{k+1}) + f(x_k)) \quad .$$

Aplikujúc tento vzorček na našu vstupnú funkciu $g(x) = f^*(x)e^{-\frac{2\pi i n x}{T}}$, a zároveň si uvedomujúc, že $g(0) = g(T)$ dostávame

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{T} \int_0^T g(x) dx \approx \frac{\Delta x}{2T} \left\{ g(0) + 2 \sum_{k=1}^{N-1} g\left(k \frac{T}{N}\right) + g(T) \right\} = \\ &= \frac{2T}{N2T} \sum_{k=0}^{N-1} g\left(k \frac{T}{N}\right) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f^*(x_k) e^{-2\pi i \frac{k n}{N}} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f^*(x_k) w^{-kn} \quad . \end{aligned}$$

Posledný výraz je opäť len DFT aplikované na navzorkované hodnoty $f^*(x_k)$, predelené konštantou $\frac{1}{N}$. Teda vidíme, že v prípade aproximácie Fourierových koeficientov sú aj metóda ľavých krajných bodov (sekcia 2.3.1), aj lichobežníkové pravidlo, ekvivalentné s DFT. Teda sú i navzájom ekvivalentné.¹³

2.4 Chyba pri aproximácii Fourierových koeficientov pomocou DFT

Naše doterajšie úvahy pri skúmaní vzťahov medzi DFT a Fourierovými koeficientami boli prevažne kvalitatívneho charakteru. Ukázalo sa, že DFT je ekvivalentné s odhadom Fourierových koeficientov pomocou metódy 'ľavých krajných bodov' resp. lichobežníkového pravidla.

Z praktického hľadiska je ale zaujímavejšie skúmať otázky kvantitatívne. Napríklad, jedna zásadná otázka tohto typu je problém ako zvoliť vzorkovaciu frekvenciu N tak, aby získané odhady boli dostatočne presné. To nás prirodzene vedie ku skúmaniu rýchlosti konvergenzie DFT-aproximácie k príslušným koeficientom resp. odhadovaniu chýb, ktorých sa dopúšťame pri tejto aproximácii. Podobnými otázkami sa budeme zaoberať v tejto časti. Začneme s nasledujúcou úvahou, ktorá nás privedie k veľmi užitočnému a inštruktívnemu zisteniu.¹⁴

¹³Toto platí všeobecne ak $f(a)=f(b)$.

¹⁴Úvaha je prevzatá zo zdroja [3].

Predpokladajme opäť, že pracujeme s T -periodickou funkciou f , ktorá spĺňa predpoklady Vety 1.3 a zároveň je totožná s funkciou f^* z predošlej časti. Teda funkcia f má z pohľadu Fourierových radov ideálne vlastnosti a platí rovnosť medzi funkciou f a jej Fourierovým radom

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{2\pi i \frac{nx}{T}}, \quad (7)$$

kde koeficienty c_n majú formu

$$c_n = \frac{1}{T} \int_0^T f(x) e^{-2\pi i \frac{nx}{T}} dx, \quad \forall n \in \mathbb{Z}. \quad (8)$$

Takisto ako v časti 2.3.1, si danú funkciu zdiskretizujeme na N častí

$$f(x_k) = f\left(k \frac{T}{N}\right), \quad (9)$$

Použijúc vzťah (7) získavame

$$f(x_k) = f\left(k \frac{T}{N}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{2\pi i \frac{nk}{N}}, \quad k \in \{0, 1, 2, \dots, N-1\}. \quad (10)$$

Teraz si stačí uvedomiť, že pre pevné k platí

$$j \equiv n \pmod{N} \Rightarrow e^{2\pi i \frac{nk}{N}} = e^{2\pi i \frac{jk}{N}}. \quad (11)$$

S využitím vzorca (11) už môžeme vzťah (10) prepísať na

$$f(x_k) = f\left(k \frac{T}{N}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{2\pi i \frac{nk}{N}} = \sum_{n=0}^{N-1} \left\{ \sum_{l=-\infty}^{\infty} c_{(n+Nl)} \right\} e^{2\pi i \frac{nk}{N}}. \quad (12)$$

Alebo zjednodušené

$$f(x_k) = \sum_{n=0}^{N-1} c_p(n) e^{2\pi i \frac{nk}{N}}, \quad k \in \{0, 1, 2, \dots, N-1\}. \quad (13)$$

Výraz $c_p(n)$ v tomto vzorci definujeme ako

$$c_p(n) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} c_{(n+Nl)}.$$

Prenásobením oboch strán N rovníc obsiahnutých v (13) číslom $\frac{1}{N}$ dostávame na pravej strane IDFT postupnosti $c_p(n)$, $n \in \{0, 1, 2, \dots, N-1\}$, teda schematicky

$$\frac{1}{N}f(x_k) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} c_p(n)e^{2\pi i \frac{nk}{N}} = IDFT[c_p(n)]. \quad (14)$$

Aplikujúc DFT na obe strany rovníc (14) dostávame

$$\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f(x_k)e^{-2\pi i \frac{kn}{N}} = c_p(n) \quad , \forall n \in \{0, 1, 2, \dots, N-1\}. \quad (15)$$

Lenže ľavá strana vo vzťahu (15) nie je nič iné ako náš odhad n -tého Fourierovho koeficientu pomocou DFT. Tieto poznatky môžeme kompaktne sformulovať do vety.

Veta 2.3. *Pre funkciu f spĺňajúcu horeuvedené predpoklady, odhad n -tého Fourierovho koeficientu pomocou DFT (s N vstupmi) možno vyjadriť ako nekonečný rad Fourierových koeficientov funkcie f*

$$\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f(x_k)e^{-2\pi i \frac{kn}{N}} = \sum_{l=-\infty}^{\infty} c_{(n+NL)} \quad ,$$

alebo zapísané inak

$$\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f(x_k)e^{-2\pi i \frac{kn}{N}} = c_n + \sum_{l=1}^{\infty} (c_{(n+LN)} + c_{(n-LN)}) \quad , \forall n \in \{0, 1, 2, \dots, N-1\}.$$

Z Vety 2.3 okamžite vyplýva, že chyba, ktorej sa dopúšťame pri aproximácii n -tého Fourierovho koeficientu pomocou DFT je rovná zvyškovému členu

$$chyba = \sum_{l=1}^{\infty} (c_{(n+LN)} + c_{(n-LN)}). \quad (16)$$

Teda skúmanie chyby aproximácie sa nám redukuje na skúmanie vlastností radu (16).

Uvedieme ďalší zaujímavý dôsledok Vety 2.3.¹⁵

¹⁵Tento dôsledok sa dá jednoducho dokázať aj priamo.

Dôsledok 2.4. Uvažujme reálne čísla $\mathbf{f} = (f_0, f_1, \dots, f_{N-1})$, ktoré sú vstupmi do DFT. Majme ľubovoľné prirodzené čísla a, b , také, že $a + b = N$. Potom pre výstupy DFT platí

$$\mathbf{F}_a = \bar{\mathbf{F}}_b.$$

Dôkaz Cez čísla $\mathbf{f} = (f_0, f_1, \dots, f_{N-1})$ si vždy vieme preložiť funkciu (napr. interpolačný polynóm), tak, aby boli splnené predpoklady Vety 2.3. Z Vety 2.3 vyplývajú nasledovné rovnosti

$$\mathbf{F}_a = \sum_{k=0}^{N-1} f(x_k) e^{-2\pi i \frac{ka}{N}} = N \sum_{l=-\infty}^{\infty} c_{(a+Nl)} = N \sum_{l=-\infty}^{\infty} c_{(-b+N(l+1))}.$$

Teraz položíme $l + 1 = j$ a využijeme, že pre reálne funkcie $c_{-b} = \bar{c}_b$. Dostávame

$$\mathbf{F}_a = N \sum_{l=-\infty}^{\infty} c_{(-b+N(l+1))} = N \sum_{j=-\infty}^{\infty} c_{(-b+Nj)} = N \sum_{j=-\infty}^{\infty} \overline{c_{(b+Nj)}} = \bar{\mathbf{F}}_b.$$

□

Z praktického hľadiska nám Dôsledok 2.4 hovorí, že všetka užitočná informácia získaná pomocou DFT (v prípade reálnych vstupov) je obsiahnutá v prvej polovici výstupov.

Toto zistenie so sebou prináša praktické dôsledky aj pre aproximáciu Fourierových koeficientov pomocou DFT. Totiž z Dôsledku 2.4 vyplýva, že pri práci s N reálnymi vstupmi dostaneme zmysluplné odhady rádovo len pre prvých $\frac{N}{2}$ koeficientov.¹⁶ Inak povedané, ak chceme pomocou DFT získať zmysluplný odhad pre n -tý Fourierov koeficient reálnej funkcie f , tak číslo N musí byť určite vyššie ako $2n$.

Teraz už môžeme pristúpiť ku skúmaniu chyby pomocou vzťahu (16). Samozrejme, budeme predpokladať, že pracujeme s funkciou f spĺňajúcou predpoklady Vety 2.3.

Predstavme si najskôr, že funkcia f má ohraničené spektrum. To znamená, že existuje index $i \in \mathbb{N}$, pre ktorý platí

$$\forall n > i, \quad c_n = c_{-n} = 0.$$

¹⁶Presnejšie povedané, ak N je párne, tak zmysluplné odhady c_n dostávame pre $n \in \{0, 1, 2, \dots, \frac{N}{2}\}$. Ak je N nepárne, tak pre $n \in \{0, 1, 2, \dots, \frac{N-1}{2}\}$. Zvyšné čísla už budú len komplexne združené k pôvodným, a teda neposkytnú nám žiadnu novú informáciu.

Potom z Vety 2.3 a zo vzťahu (16) ľahko vyplýva, že pri odhade n -tého Fourierovho koeficientu funkcie f pomocou DFT stačí zvoliť $N > n+i$ a odhad bude absolútne presný. Totiž v tomto prípade všetky členy v (16) budú nulové.

Vo všeobecnosti funkcie nemajú ohraňované spektrum, preto je potrebné podrobnejšie skúmať rad (16). V tomto nekonečnom rade vystupujú len Fourierove koeficienty funkcie f .

Zo základného kurzu analýzy vieme, že platí¹⁷

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 0 \quad .$$

Kľúčovou otázkou je rýchlosť klesania koeficientov c_n . Chceli by sme zistiť, či je táto rýchlosť dostatočná na to, aby rad (16) konvergoval resp. ako sa správa rad (16) s narastajúcim N . O rýchlosti poklesu Fourierových koeficientov nám hovorí nasledujúca veta.¹⁸

Veta 2.5. *Predpokladajme, že funkcia f a jej prvých $p - 1$ derivácií ($p \geq 1$) sú T -periodické funkcie, spojité na intervale $[0, T]$. Ďalej predpokladajme, že p -ta derivácia $f^{(p)}$ je ohraňovaná a má konečný počet bodov nespojitosti na $[0, T]$. Potom pre Fourierove koeficienty funkcie f platí*

$$|c_n| \leq \frac{C}{|n|^p} \quad \forall n \in \mathbb{Z},$$

kde C je nezávislá konštanta.

Dôkaz Idea dôkazu spočíva v rozložení Fourierovho integrálu pomocou integračného pravidla *per partes*.

$$Tc_n = \int_0^T f(x) e^{-2\pi i \frac{nx}{T}} dx = f(x) T \frac{e^{-2\pi i \frac{nx}{T}}}{-i2\pi n} \Big|_0^T + \frac{T}{2\pi i n} \int_0^T f'(x) e^{-2\pi i \frac{nx}{T}} dx$$

Prvý člen získanej sumy bude v dôsledku T -periodickosti rovný nule. Oстане nám

$$Tc_n = \frac{T}{2\pi i n} \int_0^T f'(x) e^{-2\pi i \frac{nx}{T}} dx.$$

Získaný integrál môžeme opäť rovnakým spôsobom integrovať pomocou pravidla *per partes*. Tento postup môžeme opakovať celkovo p -krát a na konci dostaneme

$$Tc_n = \left(\frac{T}{2\pi i n}\right)^p \int_0^T f^{(p)}(x) e^{-2\pi i \frac{nx}{T}} dx.$$

¹⁷Vyšplýva to z Besselovej nerovnosti.

¹⁸Možno ju nájsť v [1].

Ak si označíme $M = \sup_{[0,T]} |f^{(p)}(x)|$, tak daný výraz sa dá ohraničiť nasledovne

$$|c_n| = \frac{1}{T} \left(\frac{T}{2\pi|n|} \right)^p \left| \int_0^T f^{(p)}(x) e^{-2\pi i \frac{nx}{T}} dx \right| \leq \frac{1}{T} \left(\frac{T}{2\pi|n|} \right)^p TM \equiv \frac{C}{|n|^p}.$$

□

Pomocou Vety 2.5 by už bolo možné odhadnúť chybu aproximácie pomocou DFT, no oplatí sa túto vetu ešte zosilniť. V poslednom riadku dôkazu Vety 2.5 sme výraz

$$\left| \int_0^T f^{(p)}(x) e^{-2\pi i \frac{nx}{T}} dx \right| \quad (17)$$

vedeli zhora ohraničiť iba konštantou. Ukazuje sa, že za pozmenených predpokladov kladených na funkciu $f^{(p)}$ je možné výraz (17) ohraničiť číslom $\frac{K}{n}$, kde K je nezávislá konštanta. Práve tento fakt nám umožňuje zosilniť Vetu 2.5.

Veta 2.6. *Predpokladajme, že funkcia f a jej prvých $p - 1$ derivácií ($p \geq 0$)¹⁹ sú T -periodické funkcie, spojité na intervale $[0, T]$. Ďalej predpokladajme, že p -ta derivácia $f^{(p)}$ je ohraničená a **po častiach monotónna**²⁰ na $[0, T]$. Potom pre Fourierove koeficienty funkcie f platí*

$$|c_n| \leq \frac{D}{|n|^{(p+1)}} \quad \forall n \in \mathbb{Z},$$

kde D je nezávislá konštanta.

Idea dôkazu Ako už bolo načrtnuté, dôkaz je obdobný ako pri Vete 2.5. Monotónnosť po častiach funkcie $f^{(p)}$ nám ale umožňuje použiť tzv. Druhú vetu o strednej hodnote integrálneho počtu.²¹ Pomocou tejto vety a nerovností

$$\left| \int_a^b \sin(nx) dx \right| \leq \frac{2}{n} \quad \text{resp.} \quad \left| \int_a^b \cos(nx) dx \right| \leq \frac{2}{n}$$

sa Veta 2.6 ľahko dokáže. Úplný dôkaz je uvedený v [2, str. 248].

□

¹⁹Pre prípad $p = 0$ sa predpoklady redukujú na to, že samotná funkcia f je ohraničená a po častiach monotónna.

²⁰Funkcia f je po častiach monotónna na intervale $[0, T]$ práve vtedy, keď sa tento interval dá rozdeliť na konečný počet otvorených podintervalov, na ktorých je funkcia f monotónna.

²¹Je formulovaná a dokázaná v [6].

Veta 2.5 a Veta 2.6 nám už umožňujú priamo odhadnúť chybu aproximácie dosadením do nekonečného radu (16). Takýto postup je možný vďaka tomu, že pre $p \geq 1$ sú predpoklady oboch viet silnejšie než predpoklady Vety 2.3.

Veta 2.7. *Predpokladajme, že funkcia f a jej prvých $p - 1$ derivácií ($p \geq 1$) sú T -periodické funkcie, spojité na intervale $[0, T]$. Ďalej predpokladajme, že p -ta derivácia $f^{(p)}$ je ohraničená a po častiach monotónna na $[0, T]$. Potom pre chybu aproximácie Fourierových koeficientov pomocou N -vstupového DFT platí*

$$\text{chyba} = |F_n - c_n| \leq \frac{E}{N^{(p+1)}} \quad \forall n \in \{0, 1, \dots, \lfloor \frac{N}{2} \rfloor\},$$

kde E je nezávislá konštanta.

Dôkaz Z predpokladov vyplýva, že funkcia f spĺňa aj predpoklady Vety 2.3 a teda pre vyjadrenie chyby môžeme použiť výraz (16).

$$\text{chyba} = |F_n - c_n| = \left| \sum_{l=1}^{\infty} (c_{(n+lN)} + c_{(n-lN)}) \right| \quad \forall n \in \{0, 1, \dots, \lfloor \frac{N}{2} \rfloor\}.$$

Zároveň funkcia f spĺňa aj predpoklady Vety 2.6 a teda pre jej Fourierove koeficienty platí nerovnosť

$$|c_n| \leq \frac{D}{|n|^{(p+1)}} \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Teda chybu môžeme zhora ohraničiť nasledovne

$$\begin{aligned} |F_n - c_n| &= \left| \sum_{l=1}^{\infty} (c_{(n+lN)} + c_{(n-lN)}) \right| \leq \sum_{l=1}^{\infty} (|c_{(n+lN)}| + |c_{(n-lN)}|) \leq \\ &\leq \sum_{l=1}^{\infty} \frac{D}{|n+lN|^{(p+1)}} + \frac{D}{|n-lN|^{(p+1)}} = \frac{D}{N^{(p+1)}} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{|l + \frac{n}{N}|^{(p+1)}} + \frac{1}{|l - \frac{n}{N}|^{(p+1)}}. \end{aligned}$$

Číslo $\frac{n}{N} < 1$ a tiež $p + 1 \geq 2$. Teda nekonečný rad v poslednom výraze sa rádovo správa ako rad $\sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{l^{(p+1)}}$ a teda pre všetky $n \in \{0, 1, \dots, \lfloor \frac{N}{2} \rfloor\}$ je konvergentný a môže byť zhora odhadnutý konštantou D' .²² Označíme si $DD' = E$. Platí teda

$$|F_n - c_n| \leq \frac{DD'}{N^{(p+1)}} = \frac{E}{N^{(p+1)}} \quad \forall n \in \{0, 1, \dots, \lfloor \frac{N}{2} \rfloor\},$$

²²Napríklad súčtom radu $\sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{l^{(p+1)}} + \frac{1}{(l-0,75)^{(p+1)}}$.

kde konštanta E je nezávislá od n aj od N .

□

Veta 2.7 nám poskytuje zdanlivo veľmi efektívny odhad pre chybu aproximácie pomocou DFT. Trieda funkcií spĺňajúcich predpoklady Vety 2.7 však nemusí byť dostatočne široká z praktického hľadiska. Predsalen sa od funkcie f vyžaduje T -periodickosť, spojitosť na $[0, T]$ (teda aj $f(0) = f(T)$) a diferencovateľnosť. V praxi sa však často stretávame aj s nespojitými periodickými funkciami, napríklad často sa stáva, že $f(0) \neq f(T)$.

V práci [7, Veta 3.7, str. 50] je ukázané ako sa dá Veta 2.7 rozšíriť na širšiu triedu funkcií. Ukazuje sa, že ak je funkcia f po častiach spojitá, po častiach diferencovateľná resp. ak sa 'dobré' správa vzhľadom k teórii Fourierových radov,²³ tak naozaj možno očakávať, že Veta 2.7 ostane v platnosti pre $p = 0$, teda s odhadom chyby $\frac{E}{N}$.

Na záver tejto časti je vhodné spomenúť, že počítanie DFT je pomerne výpočtovo nenáročné, a preto veľmi výhodné z praktického hľadiska. Zásahu na tom majú známi americkí matematici J. Cooley a J. Tukey, ktorí vo svojej práci [4] prezentovali algoritmus na výpočet DFT (tzv. Rýchla Fourierova Transformácia), ktorý zredukoval počet potrebných operácií z rádovo N^2 na rádovo $N \log_2 N$.

²³Ked' spĺňa tzv. *Dirichletove podmienky*.

3 Aplikácie

V tejto kapitole si ukážeme pár príkladov využitia DFT v praxi. Začneme aproximáciou Fourierových koeficientov bežných funkcií. Pokračovať budeme jednoduchým modelom vedenia tepla v tenkej tyči. Na záver uvedieme príklad spracovania zvukového signálu.

3.1 Aproximácia Fourierových koeficientov pre typové funkcie

Budeme aproximovať Fourierove koeficienty pomocou DFT pre niekoľko jednoduchých funkcií, pre ktoré vieme spočítať presné hodnoty ich Fourierových koeficientov. Cieľom je overiť si a osvojiť si teoretické poznatky získané v druhej kapitole.

3.1.1 Funkcia s ohraničeným spektrom

Pre funkciu s ohraničeným spektrom očakávame (pre dostatočne veľké N) absolútnu presnosť DFT aproximácie Fourierových koeficientov. Ako príklad si vezmeme funkciu $f(x) = \sin(x) + 2\cos(2x) + 7\sin(10x)$ na intervale $[0, 2\pi]$. Očividne jej koeficienty budú nulové okrem koeficientov $b_1 = 1$, $a_2 = 2$ a $b_{10} = 7$, teda je to funkcia s ohraničeným spektrom. Zvolíme si $N = 30$ a aproximujeme koeficienty pomocou DFT. Výstup (MATLAB) prevedený do reálnych koeficientov je nasledovný.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
a_n	0	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
b_n	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	7	0	0	0	0

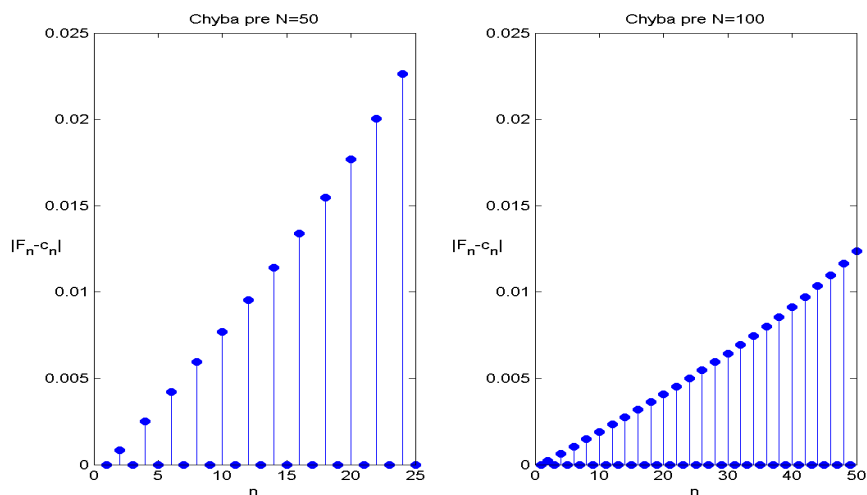
Teda dostávame to, čo sme očakávali, úplne presný odhad Fourierových koeficientov pomocou DFT.

3.1.2 Schodovitá funkcia

Za najjednoduchšiu funkciu vôbec môže byť považovaná konštantná funkcia. Táto funkcia má však ohraničené spektrum a spadá do predchádzajúceho odseku. Preto si uvedieme príklad po častiach konštantnej resp. schodovitej funkcie. Definujeme si funkciu

$$f(x) = \begin{cases} -1 & x \in [-\pi, 0) \\ 0 & x = 0 \\ 1 & x \in (0, \pi] \end{cases}.$$

Fourierove koeficienty tejto funkcie sa ľahko spočítajú priamo z definície a sú rovné $a_n = 0$ a $b_n = \frac{2(-1+(-1)^n)}{\pi n}$. Všimnime si, že v tomto prípade je periodické rozšírenie funkcie f nespojité v koncových bodoch a v stredoch intervalov, preto príslušný vstup do DFT algoritmu treba najprv vhodne upraviť (odsek 2.3.2). Keďže poznáme presné hodnoty Fourierových koeficientov, vieme chybu odhadu kvantifikovať úplne presne. Podľa dovetku k Vete 2.7 môžeme očakávať, že chyba odhadu sa bude celoplošne správať ako $\frac{E}{N}$, kde E je nezávislá konštanta a N je počet vstupov. Teda pri zdvojnásobení vstupov očakávame polovičné chyby odhadu. Takéto správanie je jasne zreteľné na obr. 6.

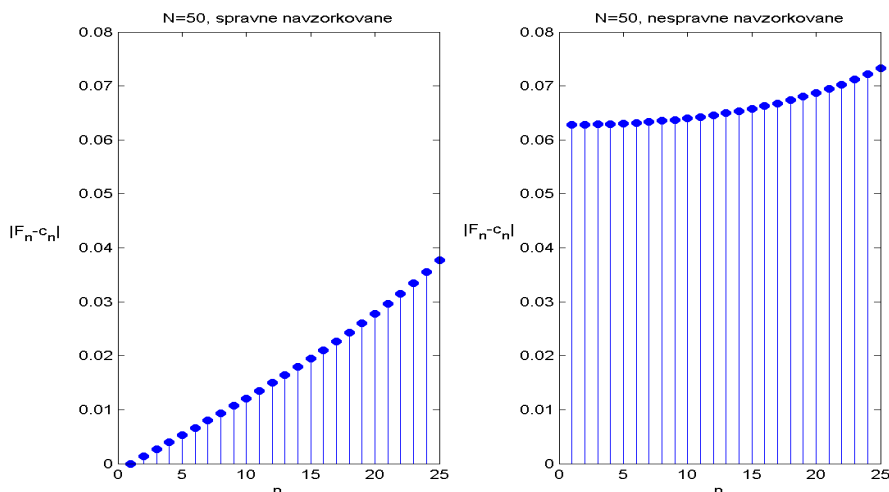


Obr. 6: Na ľavom grafe máme znázornené chyby pri odhade Fourierových koeficientov pomocou DFT pre $N=50$. Na pravom grafe sme počet vstupov zdvojnásobili a chyba nám celoplošne klesla na polovicu.

Z obr. 6 si môžeme všimnúť, že s rastúcim n sa chyba odhadu zväčšuje. Takéto správanie je typické pre nespojitú funkciu z dovetku Vety 2.7, preto je v takomto prípade často presnejšie aproximovať chybu pomocou výrazu $|F_n - c_n| \sim \frac{nE}{N^2}$, $\forall n \in \{0, 1, \dots, \lfloor \frac{N}{2} \rfloor\}$. Ďalej vidíme, že pre niektoré koeficienty je chyba nulová. V týchto prípadoch sú diskretnými metódami aproximované integrály nepárnych funkcií, a preto aj samotné integrály aj ich aproximácie sú nulové.

3.1.3 Lineárna funkcia

Ďalším príkladom je lineárna funkcia, konkrétne si vezmeme funkciu $f(x) = x$ na intervale $[0, 2\pi]$. Jej Fourierove koeficienty sú $a_0 = 2\pi$, $a_n = 0$ a $b_n = \frac{-2}{n}$ ($\forall n \in \mathbb{N}$). Opäť sa jedná o funkciu s bodmi nespojitosti, tentoraz iba na krajných bodoch intervalov, preto správanie sa chyby bude analogické ako v predošlom prípade. Ukážeme si však rozdiel v odhadoch koeficientov, keď je vstup do DFT správne navzorkovaný (tzn. priemerné hodnoty v bodoch nespojitosti) a keď je nesprávne navzorkovaný. Pre ilustráciu sme zvolili $N = 50$ a výsledok je znázornený na obr. 7.



Obr. 7: Na ľavom grafe máme znázornené chyby pri odhade Fourierových koeficientov pomocou DFT pre $N=50$ so správne navzorkovanými dátami. V tomto prípade to znamená, že hodnota prvého vstupu $x(1)$ bola správne zvolená ako priemerná hodnota v bode nespojitosti, teda $x(1) = \frac{0+2\pi}{2} = \pi$. Na pravom grafe bola hodnota zvolená nesprávne, $x(1) = 0$.

Z obrázka 7 je jasné, že správnosť navzorkovania dát je dosť podstatná. Pre prvých 8 koeficientov je chyba pre nesprávne dáta oproti správnym dátam viac než 6-násobná!

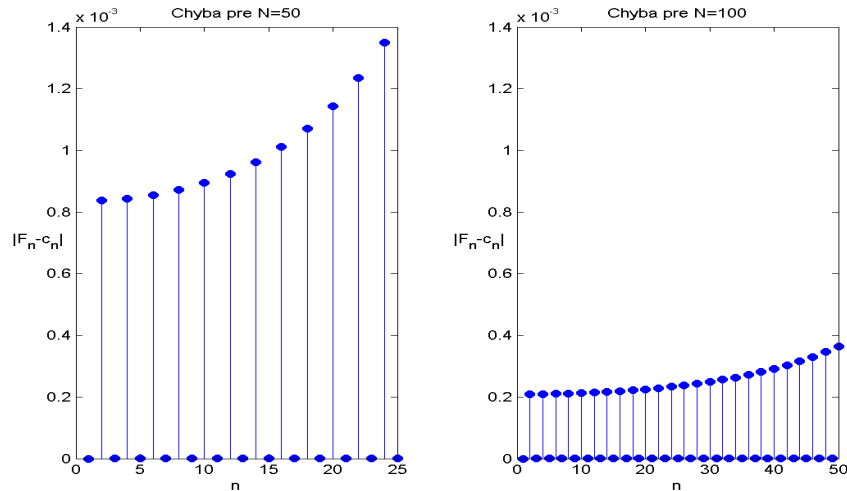
3.1.4 Periodická spojitá funkcia

Posledné dva príklady sa zaoberali funkciami s bodmi nespojitosti. Pre ilustráciu uvedieme aspoň jeden príklad funkcie, ktorej periodické rozšírenie je spojitou

funkciou. Funkciu $f(x)$ definujeme nasledovne

$$f(x) = \begin{cases} -x & x \in [-\pi, 0) \\ 0 & x = 0 \\ x & x \in (0, \pi] \end{cases}.$$

Funkcia f je vlastne primitívnou funkciou k funkcii z časti 3.1.2. Jej koeficienty sa, okrem iného, ľahko získajú integráciou Fourierovho radu schodovitej funkcie z časti 3.1.2 a sú rovné $a_0 = \pi$, $a_n = \frac{2(1+(-1)^{n+1})}{\pi n^2}$ a $b_n = 0$. Funkcia f spĺňa predpoklady Vety 2.7 pre $p = 1$, preto možno predpokladať chybu rádovo okolo $\frac{1}{N^2}$. Čiže pri zdvojnásobení počtu vstupov by sa mala chyba odhadu globálne zmenšiť na štvrtinu. Situácia je zobrazená na obr. 8.



Obr. 8: Na ľavom grafe máme znázornené chyby pri odhade Fourierových koeficientov pomocou DFT pre $N=50$. Na pravom grafe sme počet vstupov zdvojnásobili a chyba nám v globále klesla na štvrtinu.

3.1.5 Periodické C^∞ funkcie

Zaujímavú triedu funkcií z hľadiska chyby odhadu Fourierových koeficientov tvoria periodické funkcie nekonečnekrát spojitely diferencovateľné, ktoré nemajú konečné spektrum (napr. funkcia $e^{\cos x}$). Z Vety 2.7 vyplýva, že pre takéto funkcie je chyba odhadu rádovo menšia ako $\frac{1}{N^p}$ pre všetky $p \in \mathbb{N}$. Bohužiaľ, pre takéto funkcie si analytický výpočet Fourierových koeficientov obvykle vyžaduje pokročilé metódy matematickej analýzy, ak je takýto výpočet vôbec možný. Preto je pomerne náročné

presne spočítať chyby odhadov Fourierových koeficientov pomocou DFT. V našom prípade sa obmedzíme na konštatovanie, že v práci [8] je ukázaných niekoľko zaujímavých príkladov C^∞ funkcií ako aj ohraničenia pre chyby odhadov Fourierových koeficientov.

3.2 Vedenie tepla v tenkej tyči

V tejto časti si opíšeme pomerne jednoduchý model vedenia tepla v tenkej tyči. Vopred upozorňujeme, že dôraz nebude kladený na formálnu presnosť, ale na osvetlenie základných myšlienok a využiteľnosť DFT. Formálne presný výklad je možné nájsť napr. v [5].

Predstavme si, že máme tenkú (povedzme kovovú) tyč s dĺžkou L . Túto tyč si na začiatok nahrejeme (počiatočný stav), pričom teplota v rôznych bodoch tyče môže byť rôzna. Vo všeobecnosti by sme chceli zistiť ako sa teplota v jednotlivých bodoch tyče bude meniť s časom. Teda chceli by sme sa dopátrať k funkcii

$$u(t, x) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R},$$

kde $t \in [0, \infty)$ je časová premenná a $x \in [0, L]$ nám určuje polohu na tyči. Funkcia $u(t, x)$ nám udáva teplotu tyče v bode x v čase t .

Z fyzikálnych princípov je možné odvodiť,²⁴ že funkcia $u(t, x)$ musí v každom bode vnútra oblasti, na ktorej je definovaná spĺňať tzv. rovnicu vedenia tepla

$$\frac{\partial u(t, x)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial x^2},$$

alebo zapísané skráteno

$$\dot{u} = u''. \quad (18)$$

Počiatočný stav bude definovaný pomocou funkcie $U_0(x) : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$, kde

$$U_0(x) = u(0, x). \quad (19)$$

Ďalej budeme v našom modeli predpokladať tzv. *nulovú Dirichletovu podmienku*

$$u(t, 0) = u(t, L) = 0 \quad \forall t \in [0, \infty). \quad (20)$$

Dirichletova podmienka nám hovorí, že v koncových bodoch tyče bude teplota konštantne udržiavaná na nule. Napríklad si môžeme predstaviť, že konce tyče sú zapichnuté v ľadových kockách.

²⁴Pozri napr. [5, str. 124].

Vzťahy (18), (19) a (20) nám definujú náš model. Našou úlohou je nájsť funkciu $u(t, x)$, tak, aby boli tieto tri vzťahy splnené.

Metódou separácie premenných²⁵ dostávame postupnosť riešení splňajúcich vzťahy (18) a (20) vo forme

$$u_n(t, x) = e^{-\frac{n^2\pi^2}{L^2}t} \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right), \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (21)$$

Na tomto mieste vstupujú do úvah Fourierove rady. Totiž potrebujeme riešenia (21) nakombinovať tak, aby bola splnená aj podmienka (19). Riešenie nášho modelu bude vo forme

$$u(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e^{-\frac{n^2\pi^2}{L^2}t} \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right). \quad (22)$$

Koeficienty α_n chceme zvoliť tak, aby bolo splnené

$$U_0(x) = u(0, x) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right). \quad (23)$$

To však nie je problém, pretože vzťah (23) môžeme interpretovať ako Fourierov rad nepárneho rozšírenia funkcie $U_0(x)$

$$\bar{U}_0(x) : [-L, L] \rightarrow \mathbb{R}, \quad \bar{U}_0(x) = \begin{cases} U_0(x) & x \geq 0 \\ -U_0(-x) & x < 0. \end{cases}$$

Keďže funkcia $\bar{U}_0(x)$ je nepárna, jej Fourierov rad bude obsahovať len sínusové členy a bude mať podobu nekonečného radu vo vzťahu (23). Koeficienty α_n budú Fourierove koeficienty funkcie $\bar{U}_0(x)$

$$\alpha_n = \frac{2}{L} \int_0^L U_0(x) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx. \quad (24)$$

Za predpokladu, že môžeme písať rovnosť medzi funkciou $\bar{U}_0(x)$ a jej Fourierovým radom, je splnený aj vzťah (23). Teda riešenie nášho modelu má tvar (22) s koeficientami definovanými v (24).²⁶

Samozrejme, keď chceme riešenie (22) prakticky vyčíslit', tak aplikujeme DFT. Praktický postup je nasledovný. Zostrojíme si nepárne rozšírenie funkcie $U_0(x)$ a navzorkujeme ho. Pomocou DFT odhadneme koeficienty α_n navzorkovanej

²⁵Podrobnosti je možné nájsť v [5, str. 129].

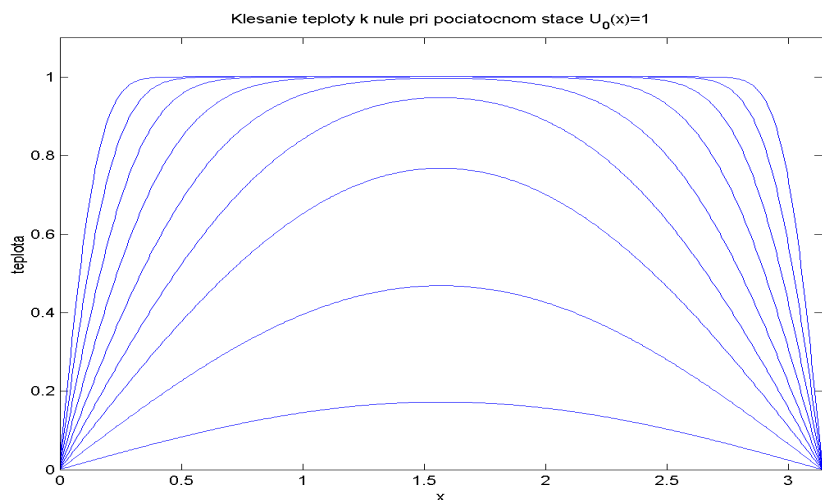
²⁶Samozrejme predpokladáme, že $U_0(x)$ je integrovateľná a má dobré vlastnosti z hľadiska Fourierových radov.

funkcie. Zvolíme si nejaký konkrétny čas t , pre ktorý chceme teplotu v tyči vyčíslit'. Koeficienty α_n pretransformujeme

$$\alpha_n \rightarrow \beta_n = \alpha_n e^{-\frac{n^2 \pi^2}{L^2} t}.$$

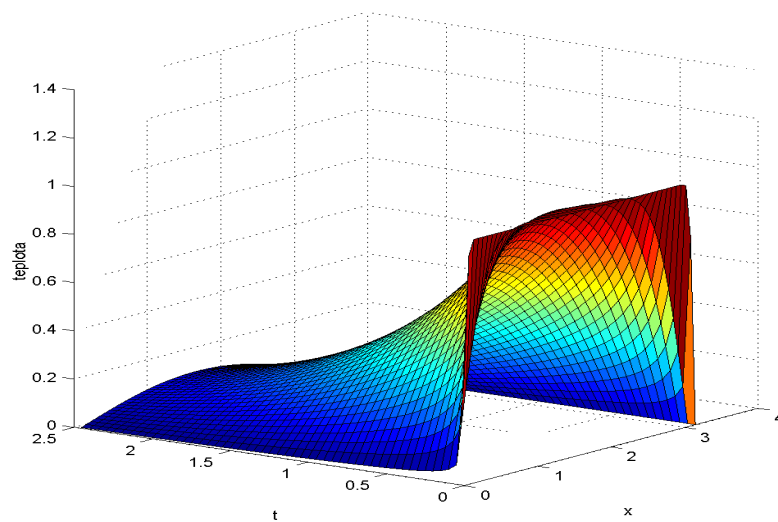
Získané koeficienty β_n si pomocou IDFT pretransformujeme nazad do priestoru funkcií. Týmto získavame diskretnú aproximáciu funkcie $u(t, x)$ v konkrétnom čase t .

Ukážeme si pár grafických príkladov pre rôzne počiatočné stavy $U_0(x)$.

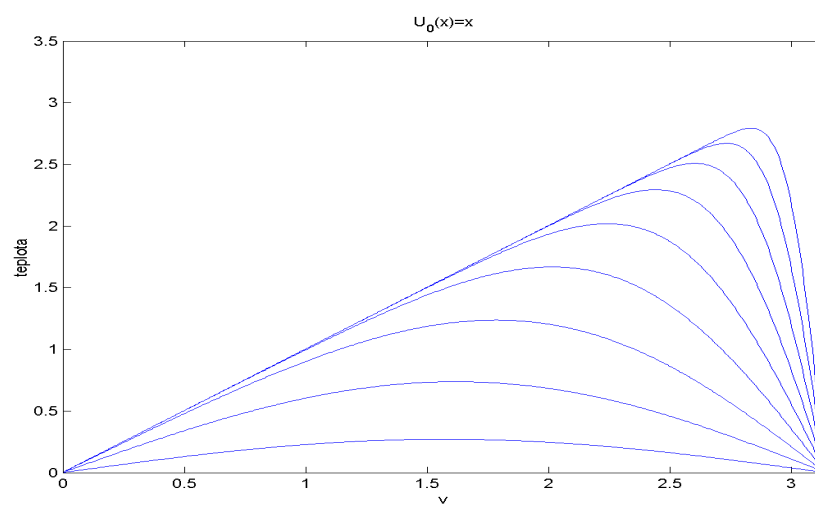


Obr. 9: Vývoj teploty tyče v čase pre počiatočný stav $U_0(x) = 1$ (rovnomerne nahriata tyč dĺhá $L = \pi$). Časové okamžiky boli zvolené ako $t = \frac{1}{2^k}$, pre $k = -1 : 7$.

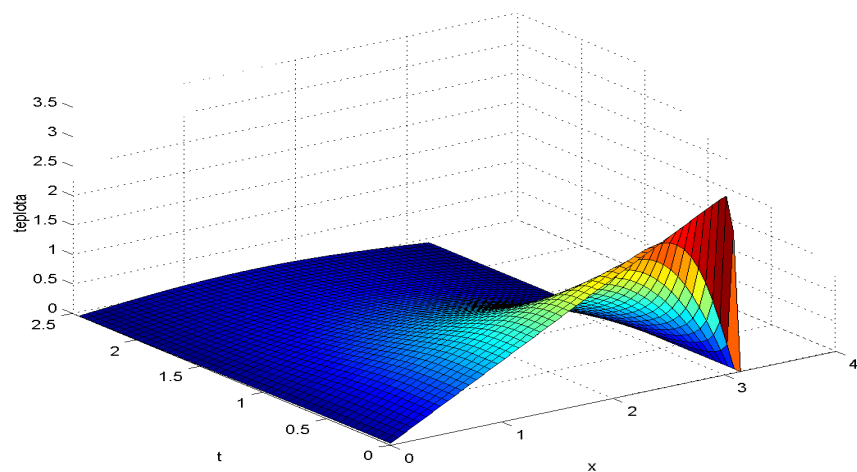
Obrázok 9 nám zobrazuje funkcie $u(t, x)$ pre rôzne fixné hodnoty premennej t . Na obrázku 10 máme funkciu $u(t, x)$ zobrazenú v celistvosti.



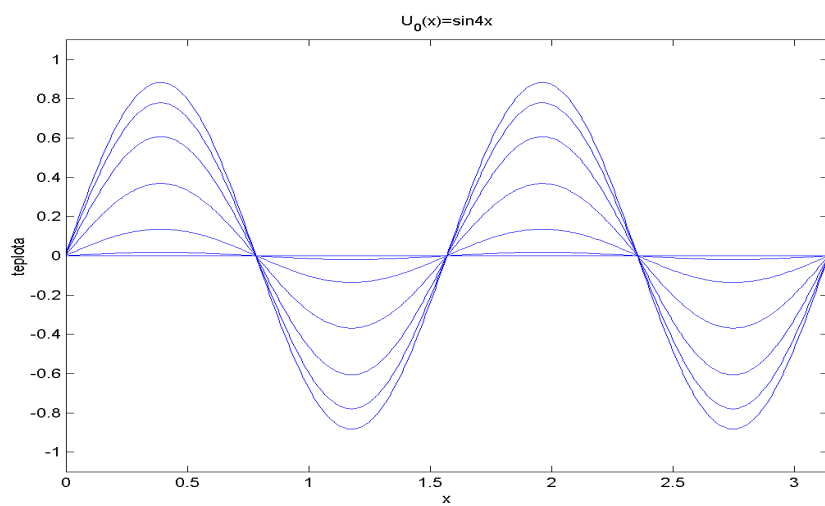
Obr. 10: 3D graf vývoja teploty $u(t, x)$ v tenkej tyči pre počiatočný stav $U_0(x) = 1$.



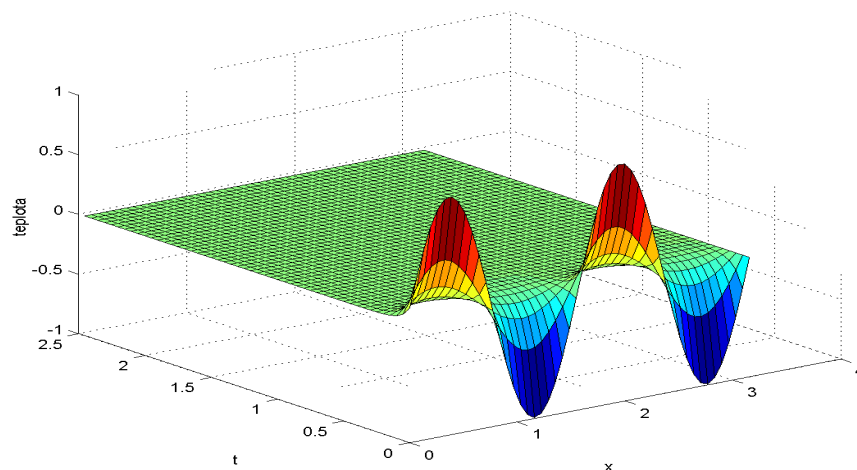
Obr. 11: Vývoj teploty tyče dĺžky π pre počiatočný stav $U_0(x) = x$.



Obr. 12: 3D graf vývoja teploty $u(t, x)$ v tenkej tyči pre počiatočný stav $U_0(x) = x$.



Obr. 13: Vývoj teploty tyče dĺžky π v čase pre počiatočný stav $U_0(x) = \sin(4x)$.



Obr. 14: 3D graf vývoja teploty $u(t, x)$ v tenkej tyči pre počiatočný stav $U_0(x) = \sin(4x)$.

Na obrázkoch 13 a 14 si môžeme všimnúť, že teplota tyče sa ustáli na nule omnoho rýchlejšie ako v predchádzajúcich prípadoch. Je to dané počiatočným stavom, v dôsledku ktorého silná tepelná výmena prebieha nielen na koncoch tyče, ale aj vo vnútri tyče.

Podobné grafy by bolo možné zostrojiť pre ľubovoľnú 'dobré' sa správajúcu funkciu.

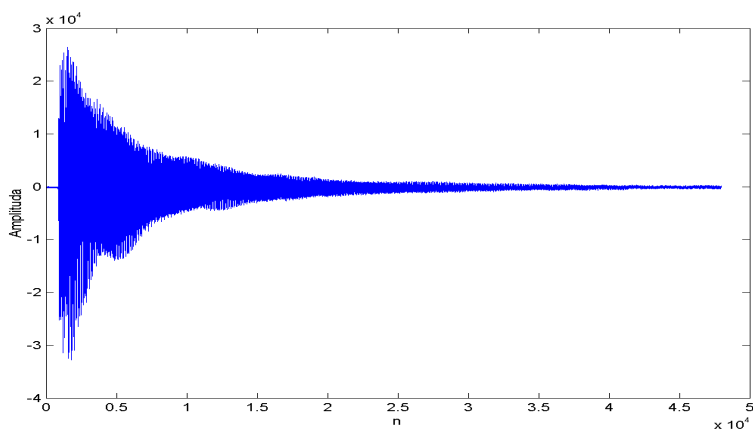
3.3 Analýza zvukového signálu (brnknutie na gitaru)

Predstavme si, že zaznamenávame zvuk, napríklad brnknutie na strunu gitary. Dáta, ktoré zaznamenáme majú podobu ako na obrázku 15.

Našou úlohou je analyzovať tento signál. To znamená chceme zistiť akú periódu (tzv. nosná perióda/nosná frekvencia) daný zvuk má a na základe toho zistiť o aký tón ide. Zároveň chceme zistiť zastúpenie tzv. vyšších harmonických tónov v danom zvuku, sú to tóny s frekvenciou, ktorá je násobkom nosnej frekvencie. Vyššie harmonické tóny nám určujú tzv. farbu tónu, to je to podľa čoho odlíšime napr. zvuk tónu zahraného na gitare od zvuku zahraného na klavíri.

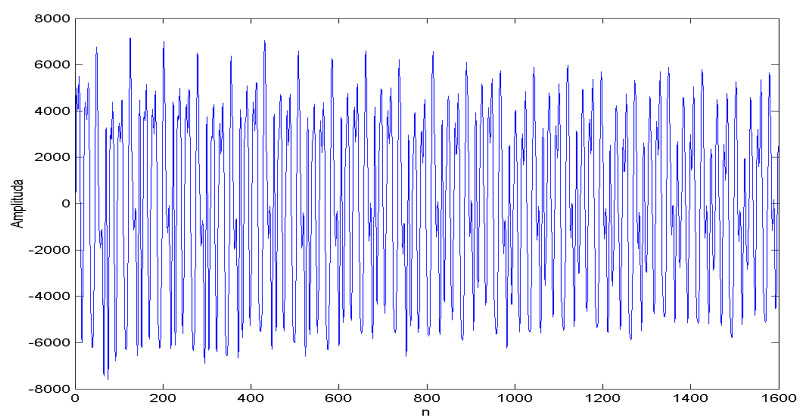
V reči matematiky to znamená, že chceme zistiť periódu T daného signálu a na nej odhadnúť Fourierove koeficienty (komplexné) pomocou DFT. Pričom prvý koeficient bude prislúchať nosnej frekvencii a ostatné budú prislúchať vyšším har-

monickým frekvenciám.



Obr. 15: Dvojsekundový záznam brnknutia na strunu gitary pri vzorkovacej frekvencii 24 kHz. To znamená 48000 dát.

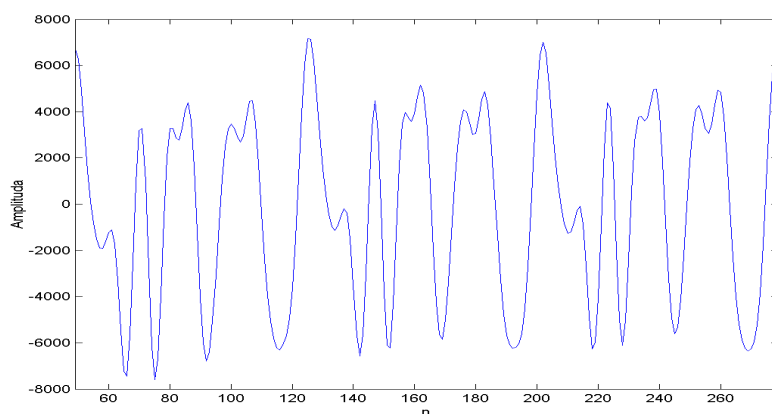
Signál z obrázka 15 je príliš dlhý a nepodobá sa na periodický (zvuk časom tichne), preto v prvom rade vyberieme kratší časový úsek (1/15 s), na ktorom budeme náš signál skúmať.



Obr. 16: Záznam brnknutia na strunu gitary (1/15 s) pri vzorkovacej frekvencii 24 kHz. To znamená 1600 dát.

Z obrázka 16 už je jasne citeľná približná periodicita nášho zvuku. Vidíme, že

extrémne vysoké hodnoty sa opakujú zhruba pravidelne. Pri bližšom skúmaní dát zistíme, že dáta sa opakujú v cykloch po približne sedemdesiatich siedmich. Toto je viditeľné z obrázka 17.

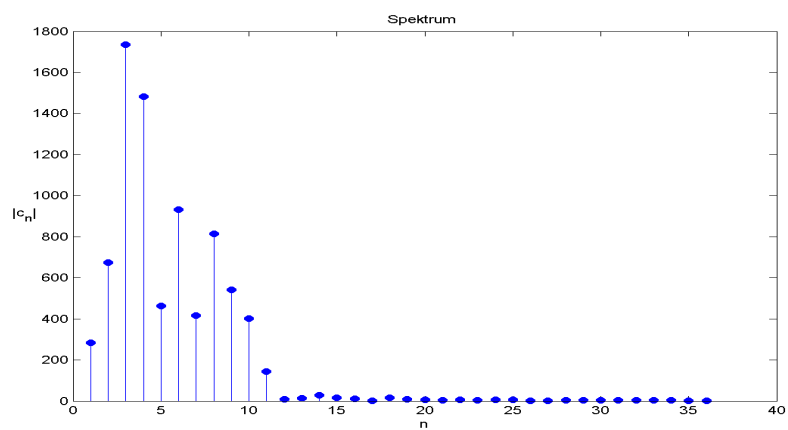


Obr. 17: *Dáta od 49tej nameranej hodnoty až po 279tu. Periodickosť je jasne viditeľná.*

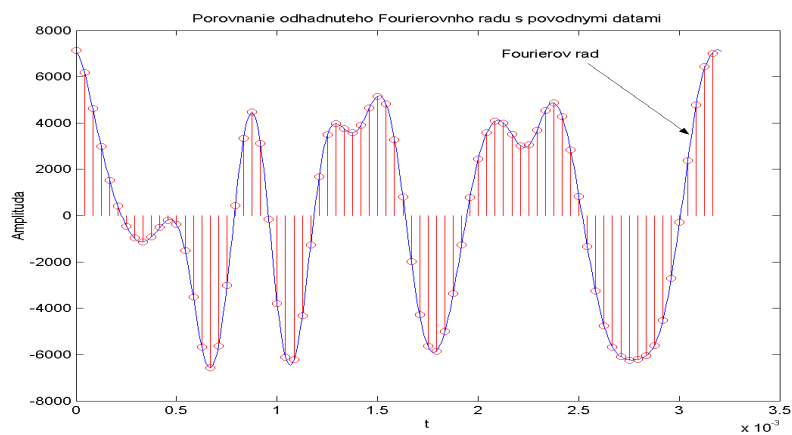
Preto budeme aproximovať Fourierove koeficienty pomocou DFT so sedemdesiatimi siedmimi dátami (126-202). Sedemdesiat sedem dát zodpovedá frekvencii $\frac{24000}{77} = 311,68Hz$, čo je náš odhad nosnej frekvencie. Takáto frekvencia prislúcha tónu D#, čo je pravdepodobne tón, ktorý bol zahráný na gitare.

Zo sedemdesiatich siedmich dát urobíme pomocou DFT odhad Fourierových koeficientov (komplexných) a vykreslíme si ich absolútne hodnoty (spektrum obr. 18). Z obrázka 18 môžeme vyčítať, že najsilnejšie sú zastúpené tretie a štvrté harmonické tóny. Na druhej strane nosná frekvencia (prvý koeficient) sa pomerne slabo podieľa na našom signále.

Na záver si z prvých pätnástich odhadnutých koeficientov skonštruujeme Fourierov rad a graficky ho porovnáme s našimi dátami (obr. 19). Vidíme, že i pri relatívne nízkom počte dát dostávame veľmi presný odhad. Je to azda spôsobené tým, že zvuk sa správajú spojitě a dostatočne hladko, čo nám podľa Vety 2.7 zaručuje malú chybu pri odhade Fourierových koeficientov pomocou DFT.



Obr. 18: Absolútne hodnoty odhadov Fourierových koeficientov. Udávajú nám relatívne zastúpenie nosnej frekvencie a vyšších harmonických frekvencií na celkovom zvuku.



Obr. 19: Pôvodné diskkrétne dáta porovnané s odhadnutým Fourierovým radom.

Záver

V našej práci sme plynule prešli od teórie Fourierových radov funkcií definovaných na kontinuu k teórii diskretnej Fourierovej transformácie definovanej pre konečné postupnosti. Ukázalo sa, že DFT aplikované na reálnu n -ticu čísel je vlastne ekvivalentné aproximácii Fourierových koeficientov pomocou zloženého lichobežníkového pravidla. Boli odvodené niektoré poznatky, na ktoré treba dbať pri praktických aplikáciach DFT. Takisto sme zanalyzovali chybu aproximácie Fourierových koeficientov pomocou DFT. Vysvitlo, že pre širokú škálu (z praktického hľadiska) funkcií nám DFT zaručuje pomerne dobrý odhad Fourierových koeficientov.

V časti venovanej aplikáciám sme najskôr použili DFT na výpočet Fourierových koeficientov niekoľkých typových funkcií, pre ktoré sme vedeli presne spočítať chyby odhadu. Výsledky nám potvrdili platnosť znalostí nadobudnutých v druhej kapitole. Univerzálnosť a sila DFT boli demonštrované pri riešení rovnice vedenia tepla so zadanou počiatočnou podmienkou. Pomocou DFT vieme rýchlo a jednoducho namodelovať vývoj teploty v tenkej tyči pre, z praktického hľadiska, ľubovoľný počiatočný stav. V poslednej aplikácii sme pomocou DFT analyzovali brnknutie na strunu gitary. Boli sme schopní nájsť nosnú frekvenciu aj zastúpenie vyšších harmonických tónov.

Dúfame, že aplikácie poskytnuté v našej práci poslúžia ako dobrá ilustrácia rozsiahleho praktického významu diskretnej Fourierovej transformácie a algoritmu FFT používaného na jej výpočet.

Zoznam použitej literatúry

- [1] Briggs, W.L., Henson, V. H.: *The DFT : an owner's manual for the discrete Fourier transform*, SIAM, Philadelphia, 1995
- [2] Carslaw, H.: *Introduction to the Theory of Fourier's Series and Integrals*, Macmillan, London, 1921
- [3] Cooley, J. W., Lewis, P. A., Welch, P. D.: *Application of the Fast Fourier Transform to Computation of Fourier Integrals, Fourier Series, and Convolution Integrals*, IEEE Transactions on Audio and Electroacoustics 15 (1967), 79-84
- [4] Cooley, J.W., Tukey, J.W.: *An algorithm for the machine calculation of complex Fourier series*, Mathematics of Computation 19 (1965), 297-301
- [5] Demetrian, M.: *Fourierove rady a Fourierov integrál*, Univerzita Komenského v Bratislave, Bratislava, 2012
- [6] Doležal, V.: *O druhe větě o střední hodnotě integrálního počtu*, Časopis pro pěstování matematiky 85 (1960), 84-86
- [7] Henson, V. E.: *Fourier methods of image reconstruction*, PhD dizertácia, University of Colorado at Denver, 1990
- [8] Weideman, J.: *Numerical integration of periodic functions: A few examples*, The American mathematical monthly 109.1 (2002), 21-36