UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY

ZNÁME NEROVNOSTI V MATEMATIKE

BAKALÁRSKA PRÁCA

2014 Zuzana FRONCOVÁ

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY

ZNÁME NEROVNOSTI V MATEMATIKE

BAKALÁRSKA PRÁCA

Študijný program:	Ekonomická a finančná matematika
Študijný odbor:	1114 Aplikovaná matematika
Školiace pracovisko:	Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky
Vedúci práce:	RNDr. Mária Trnovská, PhD

Bratislava 2014

Zuzana FRONCOVÁ

30808297

Univerzita Komenského v Bratislave
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

ZADANIE ZÁVEREČNEJ PRÁCE

Meno a priezvisko študenta:	Zuzana Froncová
Študijný program:	ekonomická a finančná matematika (Jednoodborové štúdium, bakalársky I. st., denná forma)
Študijný odbor:	9.1.9. aplikovaná matematika
Typ záverečnej práce:	bakalárska
Jazyk záverečnej práce:	slovenský

Názov: Známe nerovnosti v matematike / *Well-known inequalities in mathematics*

Cieľ: Spracovanie prehľadu najznámejších nerovností v matematike s ich zovšeobecneniami, alternatívnymi dôkazmi, súvislosťami.

Vedúci:	RNDr. Mária Trnovská, PhD.
Katedra:	FMFI.KAMŠ - Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky
Vedúci katedry:	prof. RNDr. Daniel Ševčovič, CSc.
Dátum zadania:	18.10.2013

Dátum schválenia: 14.11.2013

doc. RNDr. Margaréta Halická, CSc.
garant študijného programu

.... študent

.... vedúci práce

Poďakovanie Touto cestou sa chcem poďakovat svojej vedúcej bakalárskej práce RNDr. Márii Trnovskej, PhD za ochotu, pomoc, odborné rady a podnetné pripomienky, ktoré mi pomohli pri písaní tejto práce. Ďakujem aj svojej rodine a priateľom za ich trpezlivosť a podporu.

Abstrakt v štátnom jazyku

FRONCOVÁ, Zuzana: Známe nerovnosti v matematike [Bakalárska práca], Univerzita Komenského v Bratislave, Fakulta matematiky, fyziky a informatiky, Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky; školiteľ: RNDr. Mária Trnovská, PhD., Bratislava, 2014, 60 s.

V našej práci sa zaoberáme dvomi z najznámejších a najpoužívanejších nerovností. Sú to Cauchy-Schwarzova nerovnosť a nerovnosť aritmetického a geometrického priemeru. Našim cieľom je zozbieranie a spracovanie množstva informácií z rôznych zdrojov a vytvorenie jedného celku, ktorý čitateľovi predstaví dané nerovnosti aj s ich zovšeobecneniami, alternatívnymi dôkazmi a súvislosťami medzi nimi a im podobnými nerovnosťami. Okrem zozbierania a spracovania je cieľom tejto práce aj podrobné a čo najzrozumiteľnejšie podanie informácií čitateľovi, ktorý s touto problematikou nemusí mať skúsenosti. Význam práce spočíva v tom, že čitateľovi so záujmom o túto tému poskytuje viac informácií ako iné, všeobecnejšie zamerané publikácie.

Kľúčové slová: Cauchy-Schwarzova nerovnosť, AG nerovnosť, alternatívne dôkazy, aplikácie

Abstract

FRONCOVÁ, Zuzana: Well-known inequalities in mathematics [Bachelor Thesis], Comenius University in Bratislava, Faculty of Mathematics, Physics and Informatics, Department of Applied Mathematics and Statistics; Supervisor: RNDr. Mária Trnovská, PhD., Bratislava, 2014, 60 p.

Our thesis is dedicated to two of the best-known and most widely used inequalities, which are the Cauchy-Schwarz inequality and the Inequality of arithmetic mean and geometric mean. Our objective is collecting and processing information from different sources and creating one unit, that makes the reader acquainted with these inequalities with their generalizations, alternative proofs and connections to other similar inequalities. Besides collecting and processing information, the aim of this work is to present the information in the most detailed and comprehensible form to a reader, who might not have any previous knowledge of this subject. The purpose of this thesis lies in offering an interested reader more on the subject than other, more generally aimed publications.

Keywords: Cauchy-Schwarz inequality, Arithmetic Mean-Geometric Mean inequality, alternative proofs, applications

Obsah

Zoznam obrázkov 9

Úvod 10

1 Cauchy-Schwarzova nerovnosť 12

1.1 História 12
1.2 Všeobecný tvar 14
1.3 Alternatívne dôkazy a odvodenia 20
1.3.1 Odvodenie pomocou Lagrangeovej identity 20
1.3.2 Dôkaz matematickou indukciou 21
1.3.3 Dôkaz pomocou postupnosti súčtov 22
1.3.4 Dôkaz pomocou Jensenovej nerovnosti 23
1.3.5 Dôkaz pomocou AG nerovnosti 24
1.3.6 Dôkaz pomocou permutačnej nerovnosti 24
1.3.7 Odvodenie z úlohy na viazaný extrém 25
1.4 Aplikácie 28
1.4.1 Trojuholníková nerovnosť 28
1.4.2 Kosínus uhla dvoch vektorov 28
1.4.3 Korelačný koeficient 30
1.4.4 Úloha o kladne definitných maticiach 32
1.5 Súvis s Hölderovou nerovnosťou 35

2 AG nerovnosť 36

2.1 Všeobecný tvar 36
2.2 Jednoduché dôkazy pre 2 premenné 37
2.2.1 Geometrický dôkaz č.1 37
2.2.2 Geometrický dôkaz č.2 38
2.2.3 Geometrický dôkaz č.3 39
2.2.4 Geometrický dôkaz č.4 40
2.2.5 Dôkaz pomocou dotyčnice hyperboly 41
2.3 Cauchyho dôkaz spätnou indukciou 42

2.4 Dôkaz pomocou preškálovania prvkov 44
2.5 Dôkazy využívajúce konvexnosť alebo konkávnosť 46
2.5.1 Dôkaz pomocou konkávnosti geometrického priemeru 46
2.5.2 Dôkaz pomocou Jensenovej nerovnosti 48
2.5.3 Dôkaz pomocou dotyčnice konvexnej funkcie 49
2.6 Aplikácie 50
2.6.1 Maximalizačná úloha 50
2.6.2 Eulerove číslo 51
2.7 Analógia s izoperimetrickou nerovnosťou 53

Záver **56**

Zoznam použitej literatúry **58**

Zoznam obrázkov

1 Zľava: Augustin Louis Cauchy [28], Viktor Jakovlevič Bunyakovskij [27] a Hermann Amandus Schwarz [8] 12
2 Komplexné číslo z a k nemu komplexne združené $\overline{z}$ [30] 19
3 Množina prípustných riešení $f_1(u) = u^T u - 1 = 0$, kde $u \in \mathbb{R}^2$ a vrstevnice účelovej funkcie $f_0(u) = v^T u$, pre $v = (1, -1)$ a hodnoty $f_0(u) = 0$, $f_0(u) = -\frac{1}{2}$, $f_0(u) = -1$ a $f_0(u) = -\sqrt{2}$ 26
4 Projekcia vektora v na vektor u 29
5 Korelačný koeficient pre rôzne sady dát 31
6 Geometrický dôkaz č.1, [31] 38
7 Geometrický dôkaz č.2, [31] 39
8 Geometrický dôkaz č.4, [5] 39
9 Geometrický dôkaz č.3 40
10 Dôkaz pomocou dotyčnice hyperboly, [31] 41
11 Aritmetický a geometrický priemer 48
12 Dotyčnica k $y = e^x$ v bode $x = 0$, [25] 49
13 Zväčšenie plochy ohraničenej krivkou bez zmeny obvodu [1] 54
14 Rovnaká plocha ohraničená kružnicou a inou krivkou [29] 54
15 Obdĺžnik a štvorec s plochou $x_1 x_2$ 55
16 Obdĺžnik a štvorec s obvodom $2x_1 + 2x_2$ 55

Úvod

„Rovnosti neexistujú, dokonca aj v ľudskom živote sa vždy stretávame s nerovnosťami.“
Dragoslav S. Mitrinovič

Ako tvrdí jeden z uznávaných matematikov, ktorý venoval veľkú časť svojej práce práve nerovnostiam, Dragoslav S. Mitrinovič, s nerovnosťami sa stretávame každodenne bez toho, aby sme si to uvedomili a pritom zohrávajú v našom živote celkom významnú úlohu. V obchode môžeme minúť najviac celú výplatu, ak cesta do školy trvá 5 minút, musíme z domu vyraziť aspoň 5 minút pred začiatkom vyučovania...

Nerovnosti sú už oddávna považované taktiež za dôležitú oblasť matematiky a ich platnosť sa často využíva aj v iných matematických odvetviach. Predstavujú neustále sa meniace a veľmi atraktívne pole pre výskum. Podľa publikácie [21] boli základy teórie nerovností vybudované v 18. a 19. storočí matematikmi K. F. Gauss (1777 - 1855), A. L. Cauchy (1789 - 1857) a P. L. Čebyšev (1821 - 1894). V nasledujúcich rokoch nerovnosti oslovili aj ďalších významných matematikov ako H. Poincaré (1854 - 1912), A. M. Lyapunov (1857 – 1918), O. Hölder (1859 - 1937) alebo J. Hadamard (1865 - 1963).

20. storočie, ako sa môžeme dočítať v rôznych zdrojoch ako napríklad [17], [18] a [22], bolo obdobím veľkého pokroku a to hlavne vďaka siedmim konferenciám o nerovnostiach, ktoré sa konali v Nemeckom Oberwolfachu v rokoch 1976 až 1995. Vyvinula sa celkom nová vetva modernej matematiky – nerovnosti. Prvou knihou venovanou výlučne nerovnostiam bola práca „Inequalities“ od autorov G. H. Hardy (1877 - 1947), J. E. Littlewood (1885 - 1977) a G. Pólya (1887 - 1985), prvýkrát publikovaná v roku 1934. Táto kniha podnietila vydanie mnohých ďalších kníh, napríklad „Inequalities“ (1961) od E. F. Beckenbacha (1906 - 1982) a R. Bellmana (1920 - 1984), „Analytic Inequalities“ (1970) od D. S. Mitrinoviča (1908 - 1995) alebo „Classical and New Inequalities in Analysis“ (1993) od D. S. Mitrinoviča, J. E Pečariča a A. M. Finka [18], z ktorej budeme aj ďalej v tejto práci čerpať. Objavili sa aj knihy zamerané na špeciálne typy

nerovností, ako napríklad diferenciálne nerovnosti alebo nerovnosti priemerov. Medzi takéto patria napríklad publikácie od P.S. Bullena a P. M. Vasiča „Means and Their Inequalities“ a od D. S. Mitrinoviča, J. E. Pečariča (1948 -) a A. M. Finka (1932 -) „Inequalities Involving Functions and Their Integrals and Derivatives“ (1991).

V súčasnosti existujú zoskupenia matematikov z celého sveta zamerané na matematické nerovnosti a ich aplikácie. Pokračujú konferencie podľa príkladu tých zo 70-tych až 90-tych rokov minulého storočia venované nerovnostiam a možnostiam ich vylepšenia. Objavujú sa stále nové nerovnosti a nové dôkazy tých starších.

Cieľom tejto práce bolo vytvoriť ucelený prehľad niekoľkých najznámejších a najvyužívanejších nerovností. Konkrétne sme vybrali dve nerovnosti, a to Cauchy-Schwarzovu nerovnosť a nerovnosť aritmetického a geometrického priemeru, skrátene nazývanú AG nerovnosť. O týchto nerovnostiach už existuje veľa rôznych kníh, článkov a školských prác. Každý zdroj uvádza iné dôkazy, odvodenia, dôsledky a aplikácie. Našim cieľom teda bolo zozbierať viaceré alternatívne dôkazy, aplikácie a poukázať na súvislosti s inými nerovnosťami.

Prácu sme rozdelili na dve hlavné kapitoly. Prvá kapitola bude celá venovaná Cauchy-Schwarzovej nerovnosti. Na začiatok oboznámime čitateľa s jej autormi, historickým pozadím a postupnými zovšeobecneniami. Následne dokážeme všeobecný tvar Cauchy-Schwarzovej nerovnosti a uvedieme niekoľko špeciálnych prípadov. Ďalej bude nasledovať časť s viacerými alternatívnymi dôkazmi. Nakoniec pridáme niekoľko aplikácií Cauchy-Schwarzovej nerovnosti a jej súvis so všeobecnejšou Hölderovou nerovnosťou.

V druhej kapitole čitateľa oboznámime s AG nerovnosťou. V úvode tejto kapitoly uvedieme tri základné tvary tejto nerovnosti. Potom nasledujú dôkazy, usporiadané od najjednoduchších po zložitejšie. Ďalej budú nasledovať aplikácie AG nerovnosti a úplne na záver uvedieme analógiu AG nerovnosti s izoperimetrickou nerovnosťou.

1 Cauchy-Schwarzova nerovnosť

Nerovnosť, s ktorou sa zoznámime v tejto kapitole je vo vysokoškolskej matematike považovaná za dôležitý pojem. Významnú rolu, ako sa píše aj v článku [32], zohráva v teórii Hilbertových priestorov, matematickej analýze, numerickej analýze, pravdepodobnosti a štatistike alebo kvalitatívnej teórii diferenciálnych rovníc. Najčastejšie sa jej platnosť využíva pri odhadoch matematických výrazov, dôkazoch tvrdení a je jedným zo základných nástrojov pri práci s nerovnosťami. V literatúre býva označovaná ako Cauchyho nerovnosť, Schwarzova nerovnosť, Cauchy-Schwarzova nerovnosť alebo Cauchy-Schwarzova-Bunyakovského nerovnosť, podľa troch slávnych matematikov, ktorým vďačíme za jej objavenie a viaceré rozšírenia.

Obr. 1: Zľava: Augustin Louis Cauchy [28], Viktor Jakovlevič Bunyakovskij [27] a Hermann Amandus Schwarz [8]

1.1 História

Prvýkrát bola Cauchy-Schwarzova nerovnosť, ako uvádza práca [15], z ktorej sme v tejto podkapitole čerpali, publikovaná v roku 1821 v diele Augustina Louisa Cauchyho *Cours d' Analyse Algébrique* [7], kde ju použil v zopár ilustratívnych príkladoch. O 8 rokov neskôr ju použil znovu pri overovaní Newtonovej metódy na hľadanie koreňov algebraických rovníc.

Cauchy odvodil túto nerovnosť v nasledovnom znení:

Nech $u_1, ..., u_n, v_1, ..., v_n$ sú reálne čísla, potom platí

$$\left(\sum_{i=1}^{n} u_i v_i\right)^2 \leq \sum_{i=1}^{n} {u_i}^2 \sum_{i=1}^{n} {v_i}^2. \tag{1}$$

Rovnosť nastáva vtedy a len vtedy, ak $u_i = 0$ pre všetky $i = 1, ..., n$ alebo existuje $t \in \mathbb{R}$ také, že $v_i = tu_i$ pre všetky $i = 1, ..., n$.
Tento tvar je aj dnes najčastejšie používaným tvarom Cauchy-Schwarzovej nerovnosti.

Neskôr ju Viktor Jakovlevič Bunyakovskij v roku 1859 vo svojom diele *Mémoires* [6] rozšíril aj na súčty nekonečných radov a integrály pomocou aproximácie sumami.
Pre nekonečné rady teda nadobudla znenie:

Nech $u_1, u_2, ..., v_1, v_2, ...$ sú reálne čísla, potom platí

$$\left(\sum_{i=1}^{\infty} u_i v_i\right)^2 \leq \sum_{i=1}^{\infty} u_i^2 \sum_{i=1}^{\infty} v_i^2. \tag{2}$$

Rovnosť nastáva vtedy a len vtedy, ak $u_i = 0$ pre všetky $i = 1, 2, ...$ alebo existuje $t \in \mathbb{R}$ také, že $v_i = tu_i$ pre všetky $i = 1, 2, ...$.
Uvedieme aj integrálnu formu pre funkcie:

Nech f, g sú reálne integrovateľné funkcie na intervale $[a, b]$, potom

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)dx\right)^2 \leq \left(\int_a^b f^2(x)dx\right)\left(\int_a^b g^2(x)dx\right), \tag{3}$$

pričom rovnosť platí práve vtedy, keď f a g sú lineárne závislé funkcie, teda $g(x) = \lambda f(x)$, kde $\lambda \in \mathbb{R}$.

Jedným z mien, ktoré sa s touto nerovnosťou spájajú je aj meno matematika Hermanna Amandusa Schwarza. Schwarz vo svojom článku [23] sformuloval Cauchyho nerovnosť pre vektorové priestory, skalárny súčin a jeho normu.

Nech V je vektorový priestor nad poľom F so skalárnym súčinom $\langle ., . \rangle : V \times V \to F$ a normou $\|.\|$, odvodenou od tohto skalárneho súčinu ako $\|u\| = \sqrt{\langle u, u \rangle}$. Potom pre ľubovoľné vektory $u, v \in V$ platí

$$|\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \, \|v\| . \tag{4}$$

Rovnosť nastáva práve vtedy, keď u a v sú lineárne závislé vektory, teda ak existujú také reálne čísla k_1, k_2, že aspoň jedno z nich je rôzne od nuly a zároveň platí

$$k_1.u + k_2.v = 0.$$

1.2 Všeobecný tvar

Predtým, ako vyslovíme a dokážeme tvrdenie o všeobecnom tvare Cauchy-Schwarzovej nerovnosti pre ľubovoľný vektorový priestor so skalárnym súčinom a od neho odvodenou normou, si pripomenieme pojmy vektorový priestor, skalárny súčin a norma.

Hovoríme, že V je *vektorový priestor* nad poľom F, ak neprázdna množina V spolu s binárnou operáciou $+$, $(V, +)$ je komutatívna grupa a každej dvojici $c \in F$, $v \in V$ je priradený prvok $c.v \in V$, pričom pre ľubovoľné $c, d \in F$ a $u, v \in V$ platí:
(i) $c.(u + v) = c.u + c.v$,
(ii) $(c + d).v = c.v + d.v$,
(iii) $(c.d).v = c.(d.v)$,
(iv) $1.v = v$.

Skalárny súčin na vektorovom priestore V nad poľom reálnych čísel $\mathbb{R}$ je zobrazenie $g : V \times V \to \mathbb{R}$. Zobrazenie g je kladne definitná symetrická bilineárna forma, to znamená, že pre ľubovoľné $u, v, w \in V$ a $c \in \mathbb{R}$ platí:
(i) $g(u, v) = g(v, u)$
(ii) $g(u + v, w) = g(u, w) + g(v, w)$
(iii) $g(cu, v) = cg(u, v)$
(iv) ak $u \neq 0$, tak $g(u, u) > 0$.

Vektorový priestor V spolu so skalárnym súčinom g alebo inak povedané, usporiadanú dvojicu (V, g), nazývame *unitárnym vektorovým priestorom.*
Ďalej budeme pre skalárny súčin používať namiesto $g(u, v)$ označenie $\langle u, v\rangle$.

Norma vektora, teda jeho veľkosť je pre ľubovoľný prvok unitárneho vektorového priestoru V definovaná ako funkcia $\|.\| : V \to \mathbb{R}$, ktorá pre ľubovoľné $u, v \in V$ a pre ľubovoľné $\alpha \in \mathbb{R}$ spĺňa vlastnosti:
(i) $\|u\| \geq 0$, $\|u\| = 0$ práve vtedy, ak $u = 0$,
(ii) $\|\alpha u\| = |\alpha|\,\|u\|$,
(iii) $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$.
My budeme uvažovať len normy odvodené od niektorého skalárneho súčinu nasledovným spôsobom

$$\|u\| = \sqrt{\langle u, u\rangle}.$$

Teraz prejdeme ku všeobecnému tvaru Cauchy-Schwarzovej nerovnosti pre unitárny vektorový priestor s normou.

Tvrdenie 1.1. *Nech V je unitárny vektorový priestor nad $\mathbb{R}$. Potom pre ľubovoľné vektory $u, v \in V$ platí*

$$|\langle u, v\rangle| \leq \|u\| \, \|v\|.$$

Rovnosť nastáva vtedy a len vtedy, ak u a v sú lineárne závislé vektory, t.j. existuje $k \in \mathbb{R}$, že $u = kv$.

Dôkaz: Vlastnosť (iv) skalárneho súčinu nám zabezpečí, že $\|u\| \geq 0$ a $\|u\| = 0$ práve vtedy, keď $u = 0$. Tento poznatok použijeme pre vektor $u + cv$, kde c je ľubovoľné reálne číslo. Vďaka vlastnostiam skalárneho súčinu môžeme urobiť tieto úpravy

$$\begin{aligned} \|u + cv\|^2 = \langle u + cv, u + cv\rangle &= \langle u, u\rangle + 2c \langle u, v\rangle + c^2 \langle v, v\rangle = \\ &= \|u\|^2 + 2c \langle u, v\rangle + c^2 \|v\|^2 \geq 0. \end{aligned}$$

Keďže uvedená nerovnosť mala platiť pre ľubovoľné c, môžeme ju chápať ako kvadratickú nerovnicu s neznámou c. Diskriminant tejto nerovnice musí byť nekladný

$$D = 4 \langle u, v\rangle^2 - 4 \|u\|^2 \|v\|^2 \leq 0.$$

Z tejto nerovnosti dostaneme

$$\langle u, v\rangle^2 \leq \|u\|^2 \|v\|^2$$

a po odmocnení máme

$$|\langle u, v\rangle| \leq \|u\| \, \|v\|,$$

čo je práve nerovnosť (4).
Tým sme dokázali platnosť Cauchy-Schwarzovej nerovnosti pre ľubovoľný vektorový priestor a skalárny súčin s normou. □

Pre rôzne vektorové priestory a skalárne súčiny nadobúda Cauchy-Schwarzova nerovnosť rôzne tvary.

Keď napríklad zoberieme za V reálny n-rozmerný vektorový priestor $\mathbb{R}^n$ a štandardný skalárny súčin definovaný ako

$$\langle u, v\rangle = u^T v = \sum_{i=1}^{n} u_i v_i$$

s Euklidovskou normou

$$\|u\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} u_i^2},$$

tak dostaneme Cauchyho tvar (1).

Bunyakovského tvar pre nekonečné sumy (2) dostaneme, ak vezmeme ako V nekonečnorozmerný reálny vektorový priestor a skalárny súčin definovaný nasledovne

$$\langle u, v\rangle = u^T v = \sum_{i=1}^{\infty} u_i v_i$$

s normou

$$\|u\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} u_i^2}.$$

Ak chceme dostať druhý Bunyakovského tvar pre funkcie (3), zoberieme za V priestor $C\langle a, b\rangle$ všetkých spojitých reálnych funkcií definovaných na uzavretom intervale $\langle a, b\rangle$, kde $a < b$ sú reálne čísla. Pre $f, g \in V$ definujeme skalárny súčin nasledovne

$$\langle f, g\rangle = \int_a^b f(x)g(x)dx$$

s normou

$$\|f\| = \sqrt{\int_a^b f^2(x)dx}.$$

Overíme, že takto definovaný skalárny súčin spĺňa potrebné vlastnosti.
Násobenie reálnych čísel je komutatívne a integrál má vlastnosť homogenity a aditivity. Z toho vyplýva, že $\langle f, g\rangle$ je symetrická bilineárna forma na V, teda spĺňa prvé tri vlastnosti skalárneho súčinu. Ďalej pre $f \neq 0$, je $f^2(x) \geq 0$ pre každé $x \in \langle a, b\rangle$. Zo spojitosti f, a teda aj f^2, vyplýva existencia uzavretého podintervalu $\langle c, d\rangle \subseteq \langle a, b\rangle$ takého, že $f^2(x) > 0$ pre všetky $x \in \langle c, d\rangle$. Na tomto podintervale f^2 zároveň nadobúda svoje minimum, teda

$$\langle f, f\rangle = \int_a^b f^2(x)dx \geq \int_c^d f^2(x)dx \geq (d-c)\min_{c\leq x\leq d} f^2(x) > 0.$$

To znamená, že tento skalárny súčin spĺňa aj podmienku kladnej definitnosti, teda je korektne definovaný.

Ďalším príkladom skalárneho súčinu sú kladne definitné bilineárne formy definované nasledovne

$$\langle u, v \rangle = u^T A v$$

s normou tvaru

$$\|u\| = \sqrt{u^T A u},$$

kde A je kladne definitná $n \times n$ matica a $u, v \in \mathbb{R}^n$ sú n-rozmerné reálne vektory. Cauchy-Schwarzova nerovnosť má pre n-rozmerný reálny vektorový priestor $\mathbb{R}^n$ a takto definovaný skalárny súčin nasledovný tvar

$$\left|u^T A v\right| \leq \sqrt{u^T A u}\sqrt{v^T A v},$$

s rovnosťou pre lineárne závislé vektory u a v.

Ak uvažujeme priestor reálnych $m \times n$ matíc $\mathbb{R}^{m \times n}$ a na ňom definovaný skalárny súčin matíc $U, V \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ako

$$\langle U, V \rangle = tr(U^T V),$$

kde $tr(A)$ je stopa matice $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, t.j. $tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$.
Norma odvodená od tohto skalárneho súčinu vyzerá nasledovne

$$\|U\| = \sqrt{\langle U, U \rangle} = \sqrt{tr(U^T U)}.$$

Cauchy-Schwarzova nerovnosť v tomto prípade nadobúda tvar

$$\left|tr(U^T V)\right| \leq \sqrt{tr(U^T U)}\sqrt{tr(V^T V)}.$$

Rovnosť nastáva vtedy a len vtedy, keď je jedna z matíc nulová alebo je skalárnym násobkom druhej

$$U = cV,$$

kde c je reálne číslo.

Napokon, Cauchy-Schwarzova nerovnosť sa dá zovšeobecniť pre vektorový priestor nad komplexnými číslami a Hermitovský skalárny súčin. Hermitovský skalárny súčin je zobrazenie $h : V \times V \to \mathbb{C}$ na n-rozmernom komplexnom vektorovom priestore V definované ako

$$h(u, v) = \langle u, v\rangle = \sum_{i=1}^{n} u_i \overline{v_i},$$

kde $u, v \in \mathbb{C}^n$.

Hermitovský skalárny súčin spĺňa pre ľubovoľné $u, v, w \in \mathbb{C}^n$ a $c \in \mathbb{C}$ nasledujúce vlastnosti:

(i) $\langle u + v, w\rangle = \langle u, w\rangle + \langle v, w\rangle$

(ii) $\langle u, v + w\rangle = \langle u, v\rangle + \langle u, w\rangle$

(iii) $\langle cu, v\rangle = c \langle u, v\rangle$

(iv) $\langle u, cv\rangle = \overline{c} \langle u, v\rangle$

(v) $\langle u, v\rangle = \overline{\langle v, u\rangle}$

(vi) $\langle u, u\rangle \geq 0$, s rovnosťou iba pre $u = 0$.

Norma pre hermitovský skalárny súčin má tvar

$$\|u\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} u_i \overline{u_i}} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |u|^2}.$$

Cauchy-Schwarzova nerovnosť pri takejto definícii vektorového priestoru a skalárneho súčinu vyzerá pre $u, v \in V$ nasledovne

$$\left|\sum_{j=1}^{n} u_j \overline{v_j}\right| \leq \sqrt{\sum_{j=1}^{n} u_j \overline{u_j}} \sqrt{\sum_{j=1}^{n} v_j \overline{v_j}}. \tag{5}$$

Všeobecný tvar Cauchy-Schwarzovej nerovnosti sme však mali dokázaný len pre skalárne súčiny na vektorových priestoroch nad $\mathbb{R}$. Uvedieme preto aj analógiu tohoto dôkazu pre komplexný priestor.

Dôkaz: Využijúc vlastnosti hermitovského súčinu robíme úpravy

$$\langle u + cv, u + cv\rangle = \langle u, u\rangle + \langle u, cv\rangle + \langle cv, u\rangle + \langle cv, cv\rangle = \langle u, u\rangle + \overline{c} \langle u, v\rangle + c \langle v, u\rangle +$$
$$c\overline{c} \langle v, v\rangle = \|u\|^2 + \overline{c} \langle u, v\rangle + c\overline{\langle u, v\rangle} + |c|^2 \|v\|^2 = \|u\|^2 + 2Re(c \langle u, v\rangle) + |c|^2 \|v\|^2.$$

Kladná definitnosť hermitovského skalárneho súčinu nám pre ľubovoľné $u, v \in \mathbb{C}^n$ a $c \in \mathbb{C}$ zabezpečí nezápornosť výrazu $\langle u + cv, u + cv \rangle$, teda dostaneme nerovnosť

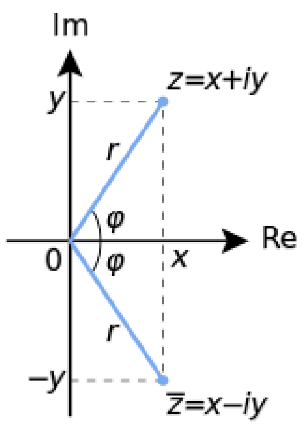
$$\|u\|^2 + 2Re(c\langle u, v \rangle) + |c|^2 \|v\|^2 \geq 0. \tag{6}$$

Vieme, že reálna časť komplexného čísla je vždy menšia ako jeho absolútna hodnota, teda $Re(c\langle u, v \rangle) \leq |c\langle u, v \rangle| = |c| |\langle u, v \rangle|$. Keď takto nahradíme prostredný člen v nerovnosti (6) máme novú nerovnosť

$$|c|^2 \|v\|^2 + 2|c| |\langle u, v \rangle| + \|u\|^2 \geq 0,$$

ktorú už vieme ľahko vyriešiť rovnakým spôsobom ako v reálnom prípade.
Z nekladného diskriminantu dostaneme nerovnosť (5). □

Na druhej strane si môžeme všimnúť, že keď jednotlivé zložky $u = (u_1, u_2, ..., u_n)$ prepíšeme ako $u_k = x_k + y_k i$, dá sa o $\mathbb{C}^n$ uvažovať ako o $\mathbb{R}^{2n}$. Teda komplexný vektorový priestor sa dá zreálniť na $2n$ rozmerný vektorový priestor nad $\mathbb{R}$.



Obr. 2: Komplexné číslo z a k nemu komplexne združené $\overline{z}$ [30]

V tom prípade je reálna časť hermitovského skalárneho súčinu $Re(h)$ štandardný skalárny súčin a jeho imaginárna časť $Im(h)$ je nedegenerovaná (nulová len pre nulový prvok) bilineárna forma s meniacimi sa znamienkami.

1.3 Alternatívne dôkazy a odvodenia

Spôsobov dokazovania tejto nerovnosti je skutočne veľmi veľa a vznikajú stále nové, či už podobné tým starším alebo s celkom odlišnou technikou. V tejto práci určite nie je priestor, aby sme sa venovali každému z nich, tak uvedieme aspoň tie jednoduchšie alebo zaujímavejšie.Všetky dôkazy sa týkajú tvaru (1).

1.3.1 Odvodenie pomocou Lagrangeovej identity

Tento dôkaz využíva platnosť Lagrangeovej identity

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(u_i v_j - u_j v_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} {u_i}^2 \sum_{i=1}^{n} {v_i}^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} u_i v_i\right)^2. \tag{7}$$

alebo inak zapísané ako

$$\|u \times v\|_2^2 = \|u\|_2^2 \|v\|_2^2 - \langle u, v\rangle^2$$

Uvedieme odvodenie inšpirované článkom [32].

Po umocnení a usporiadaní výrazu $\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}(u_i v_j - u_j v_i)^2$

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(u_i v_j - u_j v_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} {u_i}^2 \sum_{j=1}^{n} {v_j}^2 + \sum_{i=1}^{n} {v_i}^2 \sum_{j=1}^{n} {u_j}^2 -$$

$$-2\sum_{i=1}^{n} u_i v_i \sum_{j=1}^{n} v_j u_j = 2\left(\sum_{i=1}^{n} {u_i}^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} {v_i}^2\right) - 2\left(\sum_{i=1}^{n} u_i v_i\right)^2$$

dostaneme Lagrangeovu identitu (7).

Vidíme, že výraz na ľavej strane (7) je nezáporný pre všetky reálne čísla, teda

$$\sum_{i=1}^{n} {u_i}^2 \sum_{i=1}^{n} {v_i}^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} u_i v_i\right)^2 = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(u_i v_j - u_j v_i)^2 \geq 0.$$

Z toho vyplýva

$$\sum_{i=1}^{n} {u_i}^2 \sum_{i=1}^{n} {v_i}^2 \geq \left(\sum_{i=1}^{n} u_i v_i\right)^2,$$

čo je presne tvar (1). $\square$

1.3.2 Dôkaz matematickou indukciou

Úplne odlišným spôsobom dokazovania je matematická indukcia, no aj takýmto spôsobom sa dá Cauchy-Schwarzova nerovnosť dokázať. Inšpirovali sme sa dôkazom na stránke [20] a v článku [32].

Prípad $n = 1$ je triviálny.
Pre $n = 2$ máme

$$(u_1v_1 + u_2v_2)^2 = {u_1}^2{v_1}^2 + 2u_1v_1u_2v_2 + {u_2}^2{v_2}^2.$$

Vďaka nezápornosti výrazu $(u_1v_2 - u_2v_1)^2 \geq 0$ alebo ekvivalentne $2u_1u_2v_1v_2 \leq u_1^2v_2^2 + u_2^2v_1^2$ dostaneme

$${u_1}^2{v_1}^2 + 2u_1v_1u_2v_2 + {u_2}^2{v_2}^2 \leq {u_1}^2{v_1}^2 + {u_1}^2{v_2}^2 + {u_2}^2{v_1}^2 + {u_2}^2{v_2}^2 = ({u_1}^2 + {u_2}^2)({v_1}^2 + {v_2}^2),$$

teda platí nerovnosť

$$(u_1v_1 + u_2v_2)^2 \leq ({u_1}^2 + {u_2}^2)({v_1}^2 + {v_2}^2).$$

Predpokladajme, že takáto nerovnosť platí pre nejaké prirodzené číslo $k \geq 2$, teda

$$\left(\sum_{i=1}^{k} u_iv_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{k} {u_i}^2\right)\left(\sum_{i=1}^{k} {v_i}^2\right). \tag{8}$$

Dokážeme platnosť tohto tvrdenia pre $k + 1$, teda

$$\left(\sum_{i=1}^{k+1} u_iv_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{k+1} {u_i}^2\right)\left(\sum_{i=1}^{k+1} {v_i}^2\right)$$

Začneme od indukčného predpokladu (8), ktorý odmocníme a pripočítame $k + 1$-vé členy

$$\sum_{i=1}^{k} u_iv_i + u_{k+1}v_{k+1} \leq \left(\sum_{i=1}^{k} {u_i}^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{i=1}^{k} {v_i}^2\right)^{\frac{1}{2}} + u_{k+1}v_{k+1}. \tag{9}$$

Teraz využijeme už dokázanú Cauchyho nerovnosť pre $n = 2$ v tvare

$$a_1b_1 + a_2b_2 \leq (a_1^2 + a_2^2)^{\frac{1}{2}}(b_1^2 + b_2^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Za a_1, a_2, b_1, b_2 dosadíme nasledovné výrazy:
$a_1 = \sum\limits_{i=1}^{k} u_i^2$,
$a_2 = u_{k+1}$,
$b_1 = \sum\limits_{i=1}^{k} v_i^2$,
$b_2 = v_{k+1}$
a z pravej strany nerovnosti (9) dostaneme

$$\sum_{i=1}^{k} u_i v_i + u_{k+1} v_{k+1} \leq \left(\sum_{i=1}^{k} u_i^2 + u_{k+1}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^{k} v_i^2 + v_{k+1}^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

čo je to isté ako

$$\left(\sum_{i=1}^{k+1} u_i v_i \right) \leq \left(\sum_{i=1}^{k+1} {u_i}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^{k+1} {v_i}^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

To znamená, že Cauchy-Schwarzova nerovnosť platí pre $n = k+1$, teda platí pre všetky prirodzené čísla.

Po umocnení dostaneme nerovnosť (1). □

1.3.3 Dôkaz pomocou postupnosti súčtov

V nasledujúcom dôkaze podľa príkladu autora článku [32] vytvoríme monotónnu postupnosť $\{S_n\}$.

Definujeme ju nasledovne

$$S_n = (u_1 v_1 + ... + u_n v_n)^2 - (u_1^2 + ... + u_n^2)(v_1^2 + ... + v_n^2).$$

Potom rozdiel po sebe idúcich členov vyzerá takto

$$S_{n+1} - S_n = (u_1 v_1 + ... + u_{n+1} v_{n+1})^2 - (u_1^2 + ... + u_{n+1}^2)(v_1^2 + ... + v_{n+1}^2) -$$
$$(u_1 v_1 + ... + u_n v_n)^2 + (u_1^2 + ... + u_n^2)(v_1^2 + ... + v_n^2) =$$
$$u_1^2 v_1^2 + ... + u_{n+1}^2 v_{n+1}^2 + 2u_1 v_1 u_2 v_2 + ... + 2u_n v_n u_{n+1} v_{n+1} - u_1^2 v_1^2 - ... - u_{n+1}^2 v_{n+1}^2 -$$
$$u_1^2 v_1^2 - ... - u_n^2 v_n^2 - 2u_1 v_1 u_2 v_2 - ... - 2u_n v_n u_{n+1} v_{n+1} + u_1^2 v_1^2 + ... + u_n^2 v_n^2$$

a dá sa zjednodušiť na

$$S_{n+1} - S_n = -[(u_1 v_{n+1} - v_1 u_{n+1})^2 + (u_2 v_{n+1} - v_2 u_{n+1})^2 + ... + (u_n v_{n+1} - v_n u_{n+1})^2].$$

Z toho vidno, že

$$S_{n+1} \leq S_n$$

a keďže to platí pre všetky $n \in \mathbb{N}$, tak

$$S_n \leq S_{n-1} \leq ... \leq S_1 = 0,$$

čo implikuje našu nerovnosť (1). □

1.3.4 Dôkaz pomocou Jensenovej nerovnosti

Ďalším zaujímavým prístupom je dôkaz pomocou Jensenovej nerovnosti pre konvexné funkcie, ktorá znie nasledovne:

Funkcia f je konvexná na intervale J, ak pre ľubovoľné $x_1, ..., x_n \in J$ a pre ľubovoľné $\theta_1, ..., \theta_n$, $\theta_i \geq 0$, $\sum\limits_{i=1}^{n} \theta_i = 1$ platí

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} \theta_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} \theta_i f(x_i). \tag{10}$$

Funkcia je konkávna, ak v uvedenom výraze platí opačná nerovnosť.

A teraz k dôkazu Cauchyho nerovnosti, uvedenému v článku [32].

Uvažujeme reálne čísla $u_1, ..., u_n, v_1, ..., v_n$.

Vieme, že funkcia $f(x) = x^2$ je konvexná na intervale $(-\infty, \infty)$. Použitím Jensenovej nerovnosti dostaneme

$$(\theta_1 x_1 + \theta_2 x_2 + ... + \theta_n x_n)^2 \leq \theta_1 x_1^2 + \theta_2 x_2^2 + ... + \theta_n x_n^2,$$

kde $\theta_i \geq 0$, $\theta_1 + \theta_2 + ... + \theta_n = 1$, $x_i \in \mathbb{R}$.

Dôkaz rozdelíme na dve časti:

I. $v_i \neq 0$ pre $i = 1, ..., n$

Položíme $\theta_i = \dfrac{v_i^2}{v_1^2 + ... + v_n^2}$ a $x_i = \dfrac{u_i}{v_i}$ pre $i = 1, ..., n$ dosadíme do Jensenovej nerovnosti pre $f(x) = x^2$ a dostaneme

$$\left(\frac{u_1 v_1 + ... + u_n v_n}{v_1^2 + ... + v_n^2}\right)^2 \leq \frac{u_1^2 + ... + u_n^2}{v_1^2 + ... + v_n^2}.$$

Po úprave dostaneme

$$(u_1 v_1 + ... + u_n v_n)^2 \leq (u_1^2 + ... + u_n^2)(v_1^2 + ... + v_n^2).$$

II. Ak existujú $v_{i1} = v_{i2} = ... = v_{ik} = 0$ dostaneme

$$\left(\sum_{i=1}^{n} u_i v_i\right)^2 = \left(\sum_{i \neq i_1,...,i_k, 1 \leq i \leq n} u_i v_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i \neq i_1,...,i_k, 1 \leq i \leq n} {u_i}^2\right)\left(\sum_{i \neq i_1,...,i_k, 1 \leq i \leq n} {v_i}^2\right) \leq$$

$$\leq \left(\sum_{i=1}^{n} {u_i}^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} {v_i}^2\right).$$

Tým je nerovnosť (1) dokázaná. □

1.3.5 Dôkaz pomocou AG nerovnosti

Ďalšia nerovnosť, pomocou ktorej sa dá dokázať platnosť Cauchy-Schwarzovej nerovnosti je AG nerovnosť, teda nerovnosť aritmetického a geometrického priemeru, o ktorej budeme písať v kapitole 2. Najprv uvedieme jej znenie:

Pre nezáporné reálne čísla x_1, x_2 platí

$$\sqrt{x_1 x_2} \leq \frac{x_1 + x_2}{2},$$

s rovnosťou len pre $x_1 = x_2$.

Dôkaz Cauchy-Schwarzovej nerovnosti prevedieme nasledovne ako v článku [32].

Položíme $A = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + ... + u_n^2}$ a $B = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + ... + v_n^2}$, pre $u_i, v_i \in \mathbb{R}$.
Napíšeme AG nerovnosti pre jednotlivé dvojice $\frac{u_i^2}{A^2}, \frac{v_i^2}{B^2}$

$$\frac{u_i v_i}{AB} \leq \frac{1}{2}\left(\frac{u_i^2}{A^2} + \frac{v_i^2}{B^2}\right).$$

Keď tieto nerovnosti sčítame pre všetky $i = 1, ..., n$ dostaneme

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{u_i v_i}{AB} \leq \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{u_i^2}{A^2} + \frac{v_i^2}{B^2}\right) = 1,$$

teda

$$\sum_{i=1}^{n} u_i v_i \leq AB = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + ... + u_n^2}\sqrt{v_1^2 + v_2^2 + ... + v_n^2}.$$

Po umocnení dostane požadovaný tvar nerovnosti (1). □

1.3.6 Dôkaz pomocou permutačnej nerovnosti

Permutačná nerovnosť, ktorej platnosť využíva nasledujúci dôkaz, znie nasledovne:

Lema 1.2. *Nech* $x_1 \leq ... \leq x_N$, $y_1 \leq ... \leq y_N$ *sú reálne čísla a* $x_{\sigma(1)}, ..., x_{\sigma(N)}$ *je nejaká permutácia* $x_1, ..., x_N$. *Potom platí*

$$x_1y_1 + ... + x_Ny_N \geq x_{\sigma(1)}y_1 + ... + x_{\sigma(N)}y_N \geq x_Ny_1 + ... + x_1y_N.$$

Uvádzame postup dôkazu z článku [32]. Pre N-tice x_i, y_i a $x_{\sigma(i)}$ z lemy 1.2 zavedieme označenie $A = (x_1, ..., x_N)$, $B = (y_1, ..., y_N)$, $\widetilde{A} = (x_{\sigma(1)}, ..., x_{\sigma(N)})$.

Bez ujmy na všeobecnosti môžeme predpokladať, že prvky u_iv_i, $i = 1, 2, ..., n$ sú usporiadané tak, že

$$u_1v_1 \leq ... \leq u_1v_n \leq u_2v_1 \leq ... \leq u_2v_n \leq ... \leq u_nv_1 \leq ... \leq u_nv_n.$$

Za N-tice z lemy 1.2 zoberieme

$$A = B = (u_1v_1, ..., u_1v_n, u_2v_1, ..., u_2v_n, ..., u_nv_1, ..., u_nv_n),$$
$$\widetilde{A} = (u_1v_1, ..., u_nv_1, u_1v_2, ..., u_nv_2, ..., u_1v_n, ..., u_nv_n).$$

Keď na ne aplikujeme permutačnú nerovnosť, dostaneme

$$(u_1v_1)(u_1v_1) + ... + (u_1v_n)(u_1v_n) + (u_2v_1)(u_2v_1) + ... + (u_2v_n)(u_2v_n) + ... +$$
$$(u_nv_1)(u_nv_1) + ... + (u_nv_n)(u_nv_n) \geq (u_1v_1)(u_1v_1) + ... + (u_1v_n)(u_nv_1) + (u_2v_1)(u_1v_2) +$$
$$... + (u_2v_n)(u_nv_2) + ... + (u_nv_1)(u_1v_n) + ... + (u_nv_n)(u_nv_n).$$

Keď roznásobíme jednotlivé zátvorky dostaneme

$$u_1^2v_1^2 + ... + u_1^2v_n^2 + u_2^2v_1^2 + ... + u_2^2v_n^2 + ... + u_n^2v_1^2 + ... + u_n^2v_n^2 \geq$$
$$u_1^2v_1^2 + ... + u_1u_nv_1v_n + u_1u_2v_1v_2 + ... + u_2u_nv_2v_n + ... + u_1u_nv_1v_n + ... + u_n^2v_n^2,$$

čo sa dá napísať ako

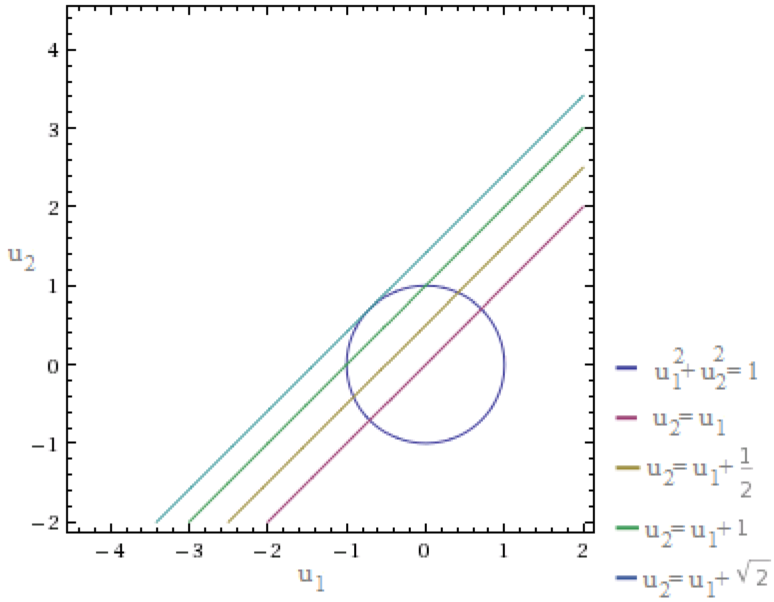
$$(u_1^2 + u_2^2 + ... + u_n^2)(v_1^2 + v_2^2 + ... + v_n^2) \geq (u_1v_1 + u_2v_2 + ... + u_nv_n)^2$$

a to je opäť tvar (1), ktorý sme chceli dosiahnuť. □

1.3.7 Odvodenie z úlohy na viazaný extrém

Inšpiráciu pre nasledovné odvodenie sme našli v publikácii [11], str. 62. Majme optimalizačnú úlohu s lineárnou účelovou funkciou $f_0(u) = v^Tu$, kde $u, v \in \mathbb{R}^n$ a v je pevný vektor. Množina prípustných riešení definovaná rovnosťou $f_1(u) = u^T u - 1 = 0$ je kružnica, teda kompaktná množina.

Úlohu budeme riešiť pomocou Lagrangeovej funkcie $L(u, \lambda) = f_0(u) - \lambda f_1(u)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.



Obr. 3: Množina prípustných riešení $f_1(u) = u^T u - 1 = 0$, kde $u \in \mathbb{R}^2$ a vrstevnice účelovej funkcie $f_0(u) = v^T u$, pre $v = (1, -1)$ a hodnoty $f_0(u) = 0$, $f_0(u) = -\frac{1}{2}$, $f_0(u) = -1$ a $f_0(u) = -\sqrt{2}$

Lagrangeova funkcia pre túto úlohu má tvar

$$L(u, \lambda) = v^T u - \lambda(u^T u - 1), \lambda \in \mathbb{R}.$$

Stacionárny bod Lagrangeovej funkcie spĺňa rovnice

$$\frac{\partial L}{\partial u} = v - 2\lambda u = 0,$$
$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = u^T u - 1 = 0.$$

Z prvého vzťahu si vyjadríme u

$$u = \frac{v}{2\lambda}$$

a dosadíme do ohraničenia $f_1(u)$

$$u^T u = \frac{v^T}{2\lambda} \frac{v}{2\lambda} = \frac{v^T v}{4\lambda^2} = 1.$$

Vyjadríme λ

$$\lambda = \pm\sqrt{\frac{v^T v}{4}} = \pm\frac{\|v\|_2}{2}$$

a dosadíme do vzťahu pre u. Tým dostaneme dva stacionárne body Lagrangeovej funkcie L

$$u_1 = -\frac{v}{\|v\|_2},$$
$$u_2 = \frac{v}{\|v\|_2}.$$

Vďaka spojitosti Lagrangeovej funkcie L a kompaktnosti množiny prípustných riešení , z Weierstrassovej vety vieme, že na tejto množine Lagrangeova funkcia nadobúda svoje minimum aj maximum. To znamená, že získané stacionárne body budú bodmi minima a maxima $\hat{u}_{1,2}$

$$\hat{u_1} = -\frac{v}{\|v\|_2},$$
$$\hat{u_2} = \frac{v}{\|v\|_2}.$$

Dosadením do účelovej funkcie $f_0(u)$ dostaneme optimálne hodnoty

$$f_0(\hat{u}_1) = v^T\hat{u}_1 = -\frac{v^T v}{\|v\|_2} = -\|v\|_2,$$
$$f_0(\hat{u}_2) = v^T\hat{u}_2 = \frac{v^T v}{\|v\|_2} = \|v\|_2.$$

Keďže $f_0(\hat{u}_{1,2})$ sú maximom a minimom $f_0(u)$, tak platí

$$-\|v\|_2 \leq v^T u \leq \|v\|_2.$$

Z ohraničenia vyplýva, že $\|u\| = 1$ pre všetky u, tak môžeme predošlý vzťah prepísať na

$$-\|v\|_2 \leq \frac{v^T u}{\|u\|_2} \leq \|v\|_2$$

a odtiaľ po jednoduchej úprave dostaneme

$$\left|v^T u\right| \leq \|v\|_2 \|u\|_2$$

a to je práve nerovnosť (1). □

1.4 Aplikácie

Ako sme už v úvode spomenuli, Cauchy-Schwarzova nerovnosť má bohaté využitie v rôznych matematických disciplínach.

1.4.1 Trojuholníková nerovnosť

Veľmi známou a často používanou napríklad v matematickej analýze je trojuholníková nerovnosť, ktorá znie nasledovne:

Pre ľubovoľné vektory u, v z unitárneho vektorového priestoru V platí

$$\|u+v\| \leq \|u\| + \|v\| . \tag{11}$$

Ukážeme jej platnosť pomocou Cauchy-Schwarzovej nerovnosti.
Budeme upravovať výraz $\|u+v\|^2$

$$\|u+v\|^2 = \langle u+v, u+v \rangle = \langle u, u \rangle + 2\langle u, v \rangle + \langle v, v \rangle = \|u\|^2 + 2\langle u, v \rangle + \|v\|^2$$

Teraz využijeme Cauchy-Schwarzovu nerovnosť (4) a nahradíme člen $2\langle u, v \rangle$

$$\|u\|^2 + 2\langle u, v \rangle + \|v\|^2 \leq \|u\|^2 + 2\|u\|\|v\| + \|v\|^2 = (\|u\| + \|v\|)^2.$$

Dostávame nerovnosť

$$\|u+v\|^2 \leq (\|u\| + \|v\|)^2,$$

odkiaľ už ľahko vyplýva nerovnosť (11), čo sme chceli dostať.

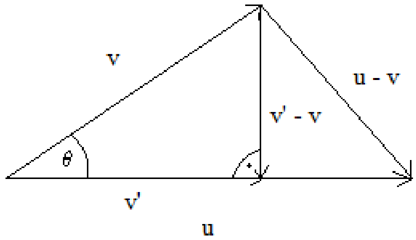
1.4.2 Kosínus uhla dvoch vektorov

Jednou z dôležitých aplikácií je dobrá definícia kosínusu uhla dvoch vektorov. Majme dva vektory u a v so spoločným počiatkom, ktoré zvierajú uhol θ. Spolu s vektorom $u - v$ tvoria trojuholník. Vieme, že kosínus uhla je v pravouhlom trojuholníku podiel priľahlej odvesny ku prepone. Potrebujeme teda nejako vytvoriť pravouhlý trojuholník.

Urobíme projekciu vektora v na u, čím dostaneme nový vektor v', ktorý je k násobkom vektora u

$$v' = ku.$$

Rozdiel vektorov $v' - v$ je kolmý na vektor u, čím sme dostali pravouhlý trojuholník, zobrazený na obrázku (4).



Obr. 4: Projekcia vektora v na vektor u

Keďže vektor $v' - v$ je kolmý na vektor u, tak platí

$$\langle v' - v, u \rangle = 0.$$

Dosadíme $v' = ku$

$$\langle ku - v, u \rangle = ku^T u - u^T v = 0,$$

odkiaľ vyplýva

$$v' = ku = \frac{u^T v}{u^T u} u = \frac{uu^T}{u^T u} v.$$

Teraz vyjadríme kosínus uhla θ ako podiel odvesny $\|v'\|$ a prepony $\|v\|$

$$\cos\theta = \frac{\|v'\|}{\|v\|}.$$

Dosadíme $v' = \frac{uu^T}{u^T u} v$

$$\cos\theta = \frac{\left\| \frac{uu^T}{u^T u} v \right\|}{\|v\|}$$

a postupne upravujeme

$$\cos\theta \, \|v\| = \frac{\left\| uu^T v \right\|}{\|u\|^2} = \frac{\|u\| \langle u, v \rangle}{\|u\|^2} = \frac{\langle u, v \rangle}{\|u\|}.$$

Dostaneme vzorec na výpočet kosínusu uhla ľubovoľných dvoch vektorov u a v

$$\cos\theta = \frac{\langle u, v \rangle}{\|u\| \, \|v\|}.$$

V prípade, že je niektorý z vektorov nulový, položíme $\theta = 0$. Teraz príde na rad vyuzitie Cauchy-Schwarzovej nerovnosti (4) tak, ako uvádza aj autor prednášky [12]. Vďaka nej platí

$$-1 \leq \frac{\langle u, v \rangle}{\|u\| \, \|v\|} \leq 1.$$

Keďže $\cos\theta$ nadobúda len tieto hodnoty, takýto uhol vždy existuje. Tým sme ukázali, že takáto definícia kosínusu dvoch uhlov je korektná.

1.4.3 Korelačný koeficient

Ďalším príkladom využitia tejto nerovnosti je z oblasti pravdepodobnosti a štatistiky. Pomocou špeciálneho tvaru Cauchy-Schwarzovej nerovnosti pre náhodné premenné ukážeme, že korelačný koeficient je vždy číslo z intervalu $\langle -1, 1 \rangle$.
Najprv je potrebné pripomenúť si niektoré pojmy.

Množinu všetkých možných výsledkov experimentu nazývame *množinou elementárnych udalostí* a označujeme Ω. V prípade, že je Ω konečná, *udalosťou* rozumieme ľubovoľnú podmnožinu Ω a systém všetkých udalostí označujeme S.

Náhodná premenná X je priradenie číselných hodnôt elementárnym výsledkom experimentu. Pre číselný výsledok x, ktorý náhodná premenná X nadobúda, označujeme symbolom $P[X = x]$ pravdepodobnosť tej množiny elementárnych výsledkov, ktorým X priraďuje hodnotu x.

Strednou hodnotou náhodnej premennej nazývame vážený priemer možných číselných výsledkov experimentu, kde váhy sú pravdepodobnosti nadobudnutia týchto výsledkov. Teda, ak číselnými výsledkami experimentu môžu byť hodnoty $x_1, ..., x_m$, potom stredná hodnota je

$$E(X) = \sum_{i=1}^{m} x_i P[X = x_i].$$

Disperzia náhodnej premennej X je číslo

$$D(X) = E(X - E(X))^2.$$

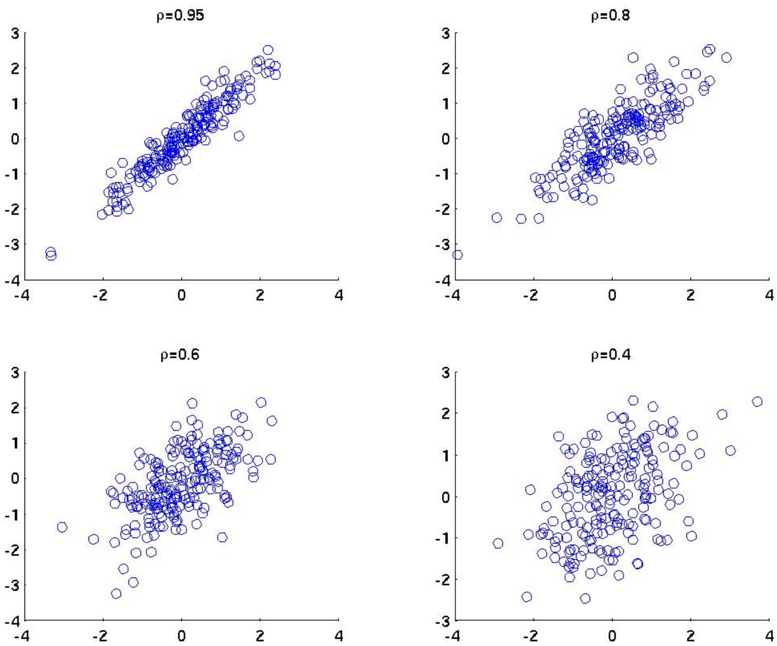
Keď máme náhodné premenné X a Y so strednými hodnotami a disperziami, potom stredná hodnota

$$cov(X, Y) = E((X - E(X))(Y - E(Y)))$$

existuje a nazýva sa kovariancia X a Y.

Ak majú náhodné premenné X a Y stredné hodnoty $E(X)$, $E(Y)$ a nenulové disperzie $D(X)$, $D(Y)$, tak koeficient korelácie medzi X a Y je číslo

$$\rho_{X,Y} = cov\left(\frac{X - E(X)}{\sqrt{D(X)}}, \frac{Y - E(Y)}{\sqrt{D(Y)}}\right).$$



Obr. 5: Korelačný koeficient pre rôzne sady dát

Lema 1.3. *([13], str.50, Veta 7.7) Nech X má strednú hodnotu $E(X)$ a disperziu $D(X)$. Označme*

$$X' = \frac{X - E(X)}{\sqrt{D(X)}}.$$

Potom $E(X') = 0$ a $D(X') = 1$.

Označme teda

$$X' = \frac{X - E(X)}{\sqrt{D(X)}},$$
$$Y' = \frac{Y - E(Y)}{\sqrt{D(Y)}}.$$

Tvar Cauchy-Schwarzovej nerovnosti pre stredné hodnoty podľa [13], str.50 vyzerá nasledovne:

Nech náhodné veličiny X, Y majú stredné hodnoty $E(X), E(Y), E(X^2), E(Y^2)$. Potom platí

$$E^2(XY) \leq E(X^2)E(Y^2), \tag{12}$$

pričom rovnosť platí vtedy a len vtedy, keď existujú $a, b \in \mathbb{R}$, z ktorých aspoň jedno je nenulové a pravdepodobnosť

$$P(\{\omega : aX(\omega) + bX(\omega) = 0\}) = 1.$$

Teraz odvodíme spomínané ohraničenie pre korelačný koeficient. Chceme teda dokázať, že $|\rho_{X,Y}| \leq 1$.
Postupne rozpisujeme

$$|\rho_{X,Y}| = |cov(X', Y')| = |E(X'Y') - E(X')E(Y')|.$$

Vďaka leme 1.3 vieme, že $E(X') = E(Y') = 0$, $D(X') = D(Y') = 1$, teda

$$|E(X'Y') - E(X')E(Y')| = |E(X'Y')|.$$

Teraz použijeme Cauchy-Schwarzovu nerovnosť (12)

$$|\rho_{X,Y}| = |E(X'Y')| \leq \sqrt{E(X'^2)}\sqrt{E(Y'^2)} = \sqrt{D(X')}\sqrt{D(Y')} = 1,$$

teda

$$|\rho_{X,Y}| \leq 1,$$

čo sme chceli dosiahnuť.

1.4.4 Úloha o kladne definitných maticiach

Úloha zo zdroja [24] znie nasledovne:

Úloha: Nájdite nutnú a postačujúcu podmienku pre α a β tak, aby

$$T^2 + \alpha T + \beta I$$

bola kladne definitná matica pre ľubovoľnú symetrickú maticu T.

Riešenie: Pre prípad 1×1 matice $T = t$, $t \in \mathbb{R}$ nutnú a postačujúcu podmienku dostaneme z nerovnosti

$$t^2 + \alpha t + \beta > 0.$$

Tá platí práve vtedy, keď je jej diskriminant záporný, teda

$$\alpha^2 < 4\beta. \tag{13}$$

Podľa vzoru jednorozmerného prípadu chceme ukázať, že pre ľubovoľné n prirodzené platí, že matica $T^2 + \alpha T + \beta I$ je kladne definitná pre ľubovoľnú symetrickú $n \times n$ maticu T práve vtedy, keď $\alpha^2 < 4\beta$.

Pre symetrickú $n \times n$ maticu môžeme nájsť jej spektrálny rozklad

$$T = Q\Lambda Q^T,$$

kde Λ je diagonálna matica s vlastnými číslami matice T a Q je ortogonálna matica jej vlastných vektorov.
Pre jej druhú mocninu platí

$$T^2 = Q\Lambda^2 Q^T.$$

Matica $T^2 + \alpha T + \beta I$ bude kladne definitná práve vtedy, keď bude kladne definitná matica

$$Q\left(\Lambda^2 + \alpha\Lambda + \beta I\right) Q^T \succ 0.$$

Keďže ortogonálna matica zachováva dĺžku vektora, stačí aby

$$\Lambda^2 + \alpha\Lambda + \beta I \succ 0,$$

odkiaľ už vyplýva podmienka (13).
Našim cieľom však bolo využiť Cauchy-Schwarzovu nerovnosť, tak použijeme iný postup.

Zaujíma nás kladná definitnosť matice $T^2+\alpha T+\beta I$, čo znamená, kedy pre ľubovoľné $v \neq 0$ platí

$$v^T(T^2+\alpha T+\beta I)v > 0.$$

Budeme teda skúmať hodnotu výrazu $v^T(T^2+\alpha T+\beta I)v$. Po roznásobení dostaneme

$$v^T(T^2+\alpha T+\beta I)v = \langle Tv, Tv\rangle + \alpha\langle Tv, v\rangle + \beta\langle v, v\rangle = \|Tv\|^2 + \alpha\langle Tv, v\rangle + \beta\|v\|^2,$$

teda matica $T^2+\alpha T+\beta I$ je kladne definitná keď platí

$$0 < \|Tv\|^2 + \alpha\langle Tv, v\rangle + \beta\|v\|^2. \tag{14}$$

Teraz použijeme Cauchy-Schwarzovu nerovnosť. Keďže platí

$$|\alpha\langle Tv, v\rangle| \leq |\alpha|\,\|Tv\|\,\|v\|$$

alebo inak zapísané

$$-|\alpha|\,\|Tv\|\,\|v\| \leq \alpha\langle Tv, v\rangle \leq |\alpha|\,\|Tv\|\,\|v\|,$$

prostredný člen pravej strany (14) $\alpha\langle Tv, v\rangle$ môžeme nahradiť nasledovne

$$\|Tv\|^2 - |\alpha|\,\|Tv\|\,\|v\| + \beta\|v\|^2 \leq \|Tv\|^2 + \alpha\langle Tv, v\rangle + \beta\|v\|^2 \leq \\ \|Tv\|^2 + |\alpha|\,\|Tv\|\,\|v\| + \beta\|v\|^2,$$

čo je to isté ako

$$\|Tv\|^2 - |\alpha|\,\|Tv\|\,\|v\| + \beta\|v\|^2 \leq v^T(T^2+\alpha T+\beta I)v \leq \|Tv\|^2 + |\alpha|\,\|Tv\|\,\|v\| + \beta\|v\|^2.$$

Po úprave ohraničení na štvorec máme

$$\left(\|Tv\| - \frac{|\alpha|\,\|v\|}{2}\right)^2 + \left(\beta - \frac{\alpha^2}{4}\right)\|v\|^2 \leq v^T(T^2+\alpha T+\beta I)v \leq \\ \leq \left(\|Tv\| + \frac{|\alpha|\,\|v\|}{2}\right)^2 + \left(\beta - \frac{\alpha^2}{4}\right)\|v\|^2. \tag{15}$$

Z prvej nerovnosti (15) vyplýva postačujúca podmienka pre α a β. To znamená, platnosť podmienky (13) stačí na to, aby

$$v^T(T^2+\alpha T+\beta I)v > 0.$$

Z druhej nerovnosti (15) zas vyplýva nutná podmienka. Teda, ak platí $v^T(T^2+\alpha T+\beta I)v > 0$, potom nutne α a β spĺňa

$$\beta - \frac{\alpha^2}{4} > 0,$$

čo je presne podmienka (13).

1.5 Súvis s Hölderovou nerovnosťou

Cauchy-Schwarzova nerovnosť je špeciálnym tvarom Hölderovej nerovnosti. Aj keď Cauchyho nerovnosť bola publikovaná už v roku 1821, kým Hölderove zovšeobecnenie sa podľa [26] neobjavilo do roku 1889.

Hölderova nerovnosť má nasledovné znenie:

Nech $p, q > 0$ sú čísla spĺňajúce rovnosť

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Potom platí

$$\sum_{i=1}^{n} |u_i v_i| \leq \left(\sum_{i=1}^{n} |u_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} |v_i|^q \right)^{\frac{1}{q}},$$

s rovnosťou pre

$$|v_i| = c\,|u_i|^{p-1}.$$

Ak položíme $p = q = 2$, dostaneme Cauchy-Schwarzovu nerovnosť (1).

Hölderova nerovnosť sa tiež niekedy uvádza v tvare s integrálmi:

Nech $p, q > 0$ sú čísla spĺňajúce rovnosť

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Potom platí nerovnosť

$$\int_a^b |f(x)g(x)|dx \leq \left(\int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b |g(x)|^q dx \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Rovnosť platí ak

$$|g(x)| = c\,|f(x)|^{p-1}.$$

Opäť pre $p = q = 2$ dosiahneme tvar Cauchy-Schwarzovej nerovnosti (3).

2 AG nerovnosť

Nerovnosť aritmetického a geometrického priemeru alebo AG nerovnosť, ako sa častejšie nazýva, je jednou z najznámejších a najpoužívanejších nerovností. Jej prvé formy boli podľa publikácie [19] známe pravdepodobne už v antike. Neskôr, ešte pred zavedením infinitezimálneho počtu, sa využívala na riešenie optimalizačných úloh, ktoré by inak vyžadovali výpočet derivácie. Jej všeobecný tvar s váženými priemermi pre n premenných sa prvýkrát objavil v tlači až v 19. storočí v poznámkach z Cauchyho školenia, ktoré viedol na École Royale Polytechnique. V súčasnosti sa používa hlavne pri dôkazoch iných nerovností a pri riešení minimalizačných a maximalizačných úloh.

2.1 Všeobecný tvar

Najprv pripomenieme pojmy *aritmetický*, *geometrický*, *vážený aritmetický* a *vážený geometrický priemer* všeobecne pre n prvkov:

Majme n-ticu kladných čísel $x = (x_1, ..., x_n)$. Potom veličiny

$$A_n(x) = \frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n};$$

$$G_n(x) = \sqrt[n]{x_1 x_2 ... x_n}$$

nazývame *aritmetickým* a *geometrickým priemerom* prvkov $x_1, ..., x_n$ v tomto poradí.

Majme dve n-tice čísel $x = (x_1, ..., x_n)$, kde $x_i > 0$ pre $i = 1, ..., n$ a $w = (w_1, ..., w_n)$ tak, že $w_i \geq 0$ pre $i = 1, ..., n$ a $\sum\limits_{i=1}^{n} w_i = 1$. Potom veličiny

$$A_n(x; w) = w_1 x_1 + w_2 x_2 + ... + w_n x_n;$$

$$G_n(x; w) = x_1^{w_1} x_2^{w_2} ... x_n^{w_n}$$

nazývame *váženým aritmetickým* a *váženým geometrickým priemerom* prvkov $x_1, ..., x_n$, s nezápornými váhami $w_1, ..., w_n$ v tomto poradí.

AG nerovnosť sa zvykne uvádzať vo viacerých tvaroch. Najjednoduchším z nich je tvar pre 2 premenné:

Nech x_1 a x_2 sú kladné reálne čísla, potom platí

$$\frac{x_1 + x_2}{2} \geq \sqrt{x_1 x_2} \tag{16}$$

s rovnosťou pre $x_1 = x_2$.

Rovnako častý je aj tvar pre n premenných:

Nech $x_1, ..., x_n$ sú kladné reálne čísla, potom platí medzi nimi nasledujúca nerovnosť

$$A_n(x) = \frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 x_2 ... x_n} = G_n(x), \tag{17}$$

pričom rovnosť je splnená vtedy a len vtedy, ak sú všetky x_i pre $i = 1, ..., n$ rovnaké.

Najvšeobecnejší tvar AG nerovnosti je tvar s váženými priemermi:

Majme dve n-tice kladných čísel $x = (x_1, ..., x_n)$ a $w = (w_1, ..., w_n)$ tak, že $w \geq 0$, $\sum\limits_{i=1}^{n} w_i = 1$. Potom platí nerovnosť

$$A_n(x; w) = w_1 x_1 + w_2 x_2 + ... + w_n x_n \geq x_1^{w_1} x_2^{w_2} ... x_n^{w_n} = G_n(x; w). \tag{18}$$

Rovnosť je splnená práve vtedy, ak sú všetky x_i rovnaké.

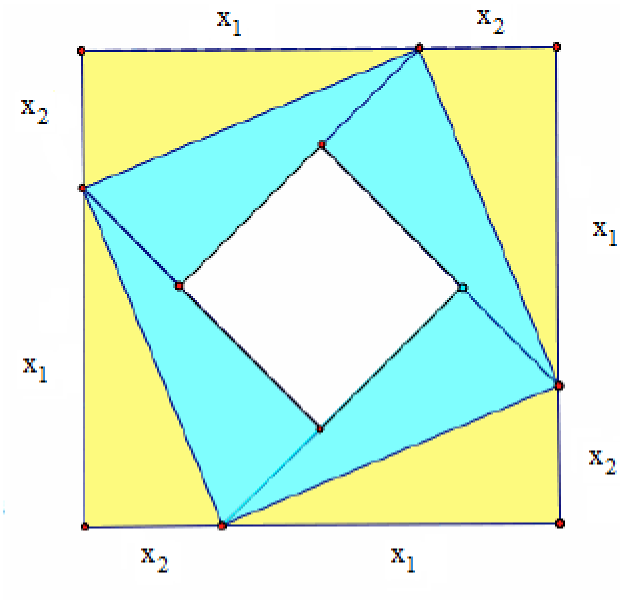
2.2 Jednoduché dôkazy pre 2 premenné

Začneme od najjednoduchších dôkazov pre dva rozmery. Nasledujúce dva dôkazy sme prebrali z článku [31].

2.2.1 Geometrický dôkaz č.1

Plocha veľkého štvorca na obrázku (6) je $(x_1 + x_2)^2$. Plocha všetkých žltých trojuholníkov dohromady je $2x_1x_2$ a keďže modré trojuholníky sú zrkadlovými obrazmi žltých, ich plocha je takisto $2x_1x_2$. Celková plocha trojuholníkov je teda $4x_1x_2$.

Ďalej vidíme, že plocha bieleho štvorca v strede je $(x_1 - x_2)^2$. Dĺžky x_1 a x_2 sú zvolené



Obr. 6: Geometrický dôkaz č.1, [31]

tak, že $x_1 > x_2$. Ak by sme tieto dĺžky postupne menili tak, že x_1 sa bude blížiť k x_2, tak plocha bieleho štvorca sa bude zmenšovať. Nulová bude práve vtedy, keď $x_1 = x_2$. Zrejme platí nerovnosť

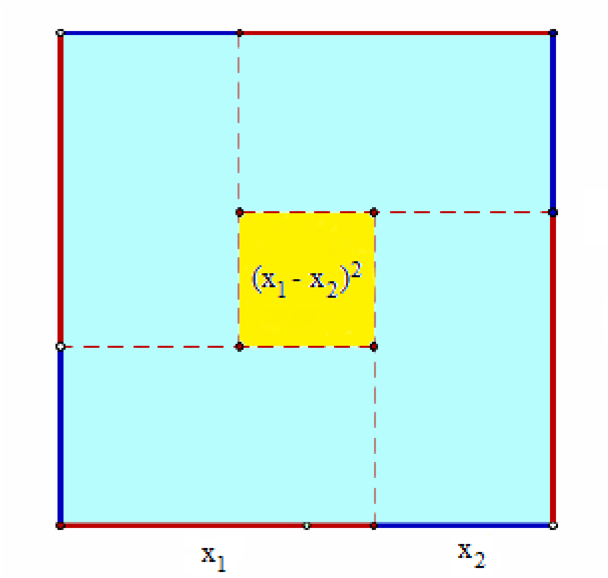
$$(x_1 + x_2)^2 \geq 4x_1x_2,$$

s rovnosťou nastávajúcou pre $x_1 = x_2$. Po niekoľkých ekvivalentných úpravách sa dopracujeme k tvaru nerovnosti (16). □

2.2.2 Geometrický dôkaz č.2

V ďalšom dôkaze AG nerovnosť vyplýva priamo z rovnosti dvoch rôznych zápisov tej istej plochy. Plocha veľkého štvorca na obrázku (7) sa dá zapísať buď ako $(x_1+x_2)^2$, alebo ako súčet plôch obdĺžnikov $4x_1x_2$ a plochy malého žltého štvorca $(x_1-x_2)^2$. Platí teda rovnosť

$$(x_1 + x_2)^2 = (x_1 - x_2)^2 + 4x_1x_2.$$



Obr. 7: Geometrický dôkaz č.2, [31]

Je zrejmé, že člen $(x_1 - x_2)^2$ je nezáporný, teda určte bude platiť nerovnosť

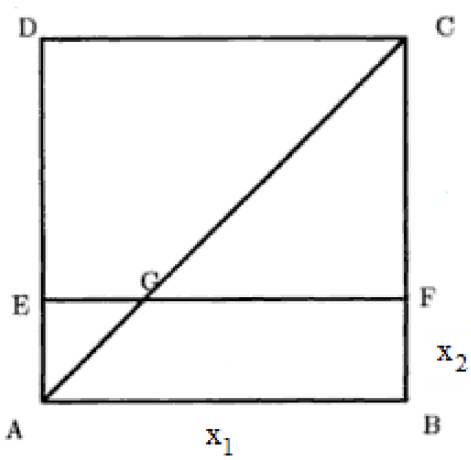
$$(x_1 + x_2)^2 \geq 4x_1x_2,$$

odkiaľ už ľahko dostaneme tvar nerovnosti (16). □

2.2.3 Geometrický dôkaz č.3

Nasledujúci dôkaz sme prebrali z publikácie [5].

Nech $ABCD$ je štvorec so stranou x_1 a $ABFE$ je obdĺžnik so stranami x_1 a x_2.



Obr. 8: Geometrický dôkaz č.4, [5]

Plochu obdĺžnika $ABFE$ označíme P_{ABFE}. Je zrejmé, že platí nasledovný vzťah

$$P_{ABFE} = P_{AGE} + P_{ABFG} \leq P_{AGE} + P_{ABC},$$

to znamená

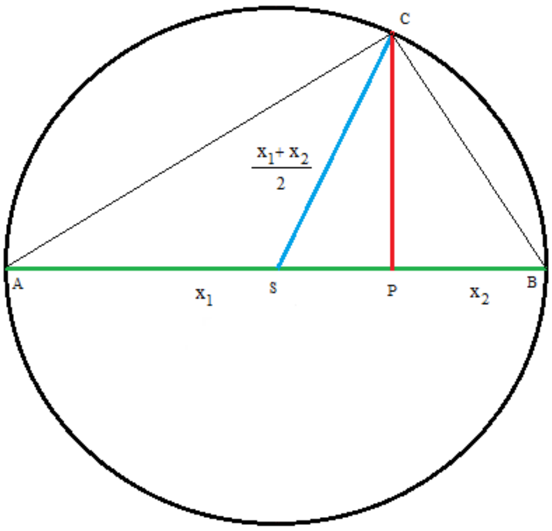
$$x_1 x_2 \leq \frac{{x_2}^2}{2} + \frac{{x_1}^2}{2},$$

čo už je dokazovaná nerovnosť (16). □

2.2.4 Geometrický dôkaz č.4

Ďalší dôkaz, ktorý je inšpirovaný dôkazom z článku [16] využíva vlastnosti Tálesovej kružnice a Euklidovu vetu o výške. Môžeme si ich v skratke pripomenúť.
Tálesova veta hovorí, že ak A, B, C sú body na kružnici, kde AC je priemer kružnice, potom uhol ABC je pravý uhol.
Euklidova veta o výške hovorí, že obsah štvorca zostrojeného nad výškou pravouhlého trojuholníka sa rovná obsahu obdĺžnika zostrojeného z oboch úsekov na prepone.

Bez ujmy na všeobecnosti môžeme predpokladať, že pre reálne čísla x_1, x_2 platí $x_1 > x_2$. Skonštruujeme kružnicu s priemerom $x_1 + x_2$. Polomer preto bude $\frac{x_1+x_2}{2}$, teda aritmetický priemer x_1 a x_2. Ďalej urobíme kolmicu na priemer v spoločnom bode P úsečiek x_1 a x_2 a jej priesečník s kružnicou nazveme C.



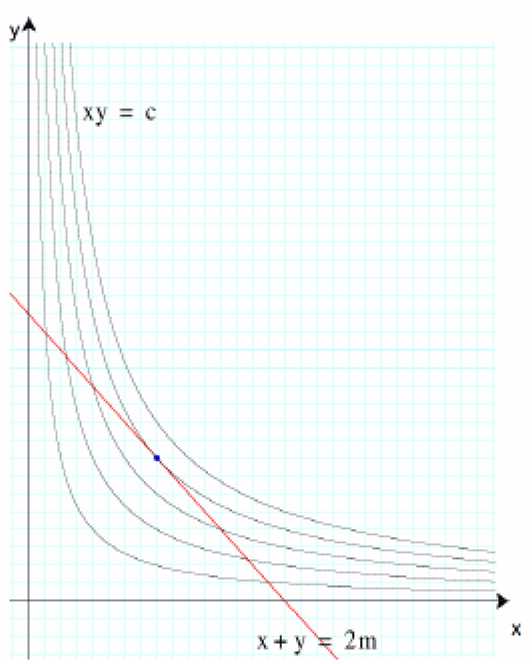
Obr. 9: Geometrický dôkaz č.3

Podľa Tálesovej vety bude uhol ACB na obrázku (9) pravým uhlom, čo nám umožní použiť Euklidovu vetu na výpočet výšky trojuholníka ABC, ktorá bude mať dĺžku x_1x_2. Z obrázka (9) ďalej vidíme, že dĺžka x_1x_2 červenej úsečky (výšky) bude určite menšia ako dĺžka modrej úsečky (polomer kružnice) $\frac{x_1+x_2}{2}$, ktorá je zároveň preponou trojuholníka SPC. Okrem prípadu $a = b$, keď je výška trojuholníka ABC totožná s jeho polomerom. Opäť sme tým dokázali nerovnosť (16). □

2.2.5 Dôkaz pomocou dotyčnice hyperboly

Nasledujúci dôkaz je opäť prebraný z článku [31].

Zvolíme ľubovoľný bod (x, y) v prvom kvadrante roviny $\mathbb{R}^2$. Na obrázku (10) vidno, že ak priamka $x + y = 2m$ má nejaký spoločný bod s niektorou z hyperbol $xy = c$, tak buď sú to dva body, v ktorých ju pretína, alebo práve jeden dotykový bod.



Obr. 10: Dôkaz pomocou dotyčnice hyperboly, [31]

Ak je priamka $x + y = 2m$ dotyčnicou ku jednej z hyperbol, tak sa dotýkajú v bode (m, m). Pre dotykový bod (m, m) potom platí

$$c = xy = m^2$$

a teda

$$xy = \left(\frac{x+y}{2}\right)^2.$$

Každý iný bod tejto priamky je priesečníkom s niektorou z hyperbol $xy = c$ pre nejaké iné, menšie c, $c < m^2$. Teda ak za (x, y) zvolíme ľubovoľné (x_1, x_2), $x_1, x_2 \geq 0$, tak alebo platí nerovnosť

$$x_1 x_2 < \left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)^2,$$

alebo rovnosť ak $x_1 = x_2$

$$x_1 x_2 = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)^2.$$

Tým sme dokázali AG nerovnosť v tvare (16). □

Teraz uvedieme dôkazy AG nerovnosti pre všeobecný počet n premenných.

2.3 Cauchyho dôkaz spätnou indukciou

Cauchyho dôkaz sa uvádza v literatúre najčastejšie zo všetkých dôkazov AG nerovnosti. My sme si ako predlohu vybrali publikácie [4] a [25].

Pre $n = 2$ nerovnosť vyplýva z nezápornosti výrazu

$$0 \leq (x_1 - x_2)^2 = x_1^2 - 2x_1 x_2 + x_2^2.$$

Dokázať platnosť pre $n = 3$ sa nám teraz ešte nepodarí, tak skúsime prejsť na $n = 4$. Môžeme si všimnúť, že ak AG nerovnosť aplikujeme dvakrát, tak máme

$$\sqrt[4]{x_1 x_2 x_3 x_4} = \sqrt{\sqrt{x_1 x_2}\sqrt{x_3 x_4}} \leq \frac{\sqrt{x_1 x_2} + \sqrt{x_3 x_4}}{2} \leq$$
$$\leq \frac{\frac{x_1 + x_2}{2} + \frac{x_3 + x_4}{2}}{2} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}{4},$$

čo dokazuje našu nerovnosť pre $n = 4$.

Skúsme sa teraz vrátiť k prípadu $n = 3$. Už vieme, že AG nerovnosť platí pre ľubovoľné štyri kladné čísla.

Skúsme teda ku x_1, x_2, x_3 pridať kladné číslo, ktoré nezmení ich aritmetický priemer a využiť tento poznatok

$$\frac{x_1+x_2+x_3}{3} = \frac{x_1+x_2+x_3+\frac{x_1+x_2+x_3}{3}}{4} \geq \left(x_1x_2x_3\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}\right)\right)^{\frac{1}{4}}.$$

Dostali sme nerovnosť

$$\left(x_1x_2x_3\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}\right)\right)^{\frac{1}{4}} \leq \frac{x_1+x_2+x_3}{3},$$

ktorú môžeme postupne upraviť

$$x_1x_2x_3\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}\right) \leq \left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}\right)^4$$

$$x_1x_2x_3 \leq \left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}\right)^3$$

na nerovnosť

$$\sqrt[3]{x_1x_2x_3} \leq \frac{x_1+x_2+x_3}{3},$$

ktorú sme potrebovali.

Vyzerá, že by sa podobný postup dal použiť aj v ďalších prípadoch pre väčšie n. Keď AG aplikujeme k-krát, dokážeme platnosť pre $n = 2^k$.

$$(x_1x_2...x_{2^k})^{\frac{1}{2^k}} \leq \frac{x_1+x_2+...+x_{2^k}}{2^k},$$

pre ľubovoľné $k \geq 1$.

Medzery medzi druhými mocninami vyplníme nasledovne.

Vezmeme nejaké $m < 2^k$ a skúsime nájsť spôsob ako použiť m čísel $x_1, x_2, ..., x_m$ na vytvorenie dlhšej postupnosti $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_{2^k}$, na ktorú by sme aplikovali AG nerovnosť. Zvoľme teda postupnosť $\{\alpha_i\}$ nasledovne

$$\alpha_i = x_i \qquad \text{pre } 1 \leq i \leq m,$$

$$\alpha_i = \frac{x_1+x_2+...+x_m}{m} \equiv A \qquad \text{pre } m < i \leq 2^k,$$

inak povedané, len doplníme na miesta chýbajúcich $2^k - m$ členov pôvodnej postupnosti aritmetické priemery A. Po aplikovaní AG dostaneme

$$(x_1x_2...x_mA^{2^k-m})^{\frac{1}{2^k}} \leq \frac{x_1+x_2+...+x_m+(2^k-m)A}{2^k} = \frac{2^kA}{2^k} = A.$$

Mocniny A presunieme na pravú stranu nerovnosti

$$(x_1x_2...x_m)^{\frac{1}{2^k}} \leq A^{\frac{m}{2^k}}$$

a keď umocníme obe strany na $\frac{2^k}{m}$, dostaneme presne požadovaný tvar dokazovanej nerovnosti (17). $\square$

2.4 Dôkaz pomocou preškálovania prvkov

Dôkaz, ktorý teraz nasleduje je uvedený v publikácii [14]. Najskôr dokážeme platnosť nasledovného tvrdenia.

Tvrdenie 2.1. *Ak je súčin n kladných reálnych čísel $x_1, x_2, ..., x_n$ rovný 1, potom ich súčet nie je menší ako n, teda ak*

$$x_1x_2...x_n = 1,$$

potom platí nerovnosť

$$x_1 + x_2 + ... + x_n \geq n.$$

Na dôkaz použijeme matematickú indukciu.
Najprv skontrolujeme platnosť pre $n = 2$, to znamená, že volíme len také x_1, x_2, že $x_1x_2 = 1$ a overíme, či vždy platí $x_1 + x_2 \geq 2$.
Pre $x_1 = x_2 = 1$ je platnosť zrejmá.
Ak $x_1 \neq x_2$, bez ujmy na všeobecnosti môžeme predpokladať, že $x_1 < x_2$, potom musí byť $x_1 < 1$ a $x_2 > 1$, keďže ich súčin má byť rovný 1. Z rovnosti

$$(1 - x_1)(x_2 - 1) = x_1 + x_2 - x_1x_2 - 1$$

vyplýva

$$x_1 + x_2 = x_1x_2 + 1 + (1 - x_1)(x_2 - 1) = 2 + (1 - x_1)(x_2 - 1)$$

a keďže $x_1 < 1 < x_2$, tak súčin $(1 - x_1)(x_2 - 1)$ je kladný, teda

$$x_1 + x_2 > 2,$$

čím je tvrdenie 2.1 pre $n = 2$ dokázané. Teraz predpokladajme, že tvrdenie 2.1 platí pre $n = k$ a dokážeme, že potom platí aj pre $n = k + 1$.

Ako prvé si treba všimnúť, že ak

$$x_1 x_2 ... x_{k+1} = 1,$$

tak môžu nastať dva prípady:

I. Keď sú všetky činitele rovné 1

$$x_1 = x_2 = ... = x_k = x_{k+1} = 1.$$

Vtedy sa ich súčet rovná $k + 1$.

II. V prípade, že nie sú všetky činitele rovnaké, musia niektoré z nich byť väčšie ako 1 a niektoré menšie ako 1.

Napríklad, predpokladajme, že $x_1 < 1$ a $x_{k+1} > 1$.

Položme $y = x_1 x_{k+1}$. Potom máme

$$y x_2 ... x_k = 1.$$

Ide o súčin k čísel rovný 1, teda podľa indukčného predpokladu o ich súčte platí

$$y + x_2 + ... + x_k \geq k.$$

Ďalej je zrejmé, že platí

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + ... + x_k + x_{k+1} = (y + x_2 + ... + x_k) + x_{k+1} - y + x_1 \geq \\ \geq k + x_{k+1} - y + x_1 = (k + 1) + x_{k+1} - y + x_1 - 1. \end{aligned}$$

V nasledujúcom kroku využijeme, že $y = x_1 x_{k+1}$

$$x_1 + x_2 + ... + x_k + x_{k+1} \geq (k+1) + x_{k+1} - x_1 x_{k+1} + x_1 - 1 = (k+1) + (x_{k+1} - 1)(1 - x_1).$$

Keďže $x_1 < 1$ a $x_{k+1} > 1$, súčin $(x_{k+1} - 1)(1 - x_1)$ je kladný a preto

$$x_1 + x_2 + ... + x_k + x_{k+1} \geq (k + 1) + (x_{k+1} - 1)(1 - x_1) > k + 1,$$

čím je tvrdenie 2.1 dokázané.

Teraz prejdeme k samotnému dôkazu AG nerovnosti.

Označíme $G_n(x) = g$.

Z rovnosti

$$g = \sqrt[n]{x_1 x_2 ... x_n}$$

vyplýva

$$1 = \sqrt[n]{\frac{x_1}{g}\frac{x_2}{g}...\frac{x_n}{g}},$$

alebo po umocnení

$$1 = \frac{x_1}{g}\frac{x_2}{g}...\frac{x_n}{g}.$$

Vďaka tvrdeniu 2.1 vieme, že súčet členov $\frac{x_1}{g}, \frac{x_2}{g}, ..., \frac{x_n}{g}$ je aspoň n, teda platí

$$\frac{x_1}{g} + \frac{x_2}{g} + ... + \frac{x_n}{g} \geq n.$$

Prenásobením oboch strán $\frac{g}{n}$ dostaneme požadovaný tvar (17).
Rovnosť je splnená práve vtedy, keď $\frac{x_1}{g} = \frac{x_2}{g} = ... = \frac{x_n}{g} = 1$, teda $x_1 = x_2 = ... = x_n = g$, kde g označuje geometrický priemer x_i, $i = 1, ..., n$. □

2.5 Dôkazy využívajúce konvexnosť alebo konkávnosť

2.5.1 Dôkaz pomocou konkávnosti geometrického priemeru

Prvú časť nasledovného dôkazu sme prebrali z publikácie [3].
Ako prvý krok dokážeme, že geometrický priemer $G_n(x)$ je konkávna funkcia na kladnom ortante $(\mathbb{R}_{++})^n$.
Na to aby funkcia definovaná na n-rozmernom priestore bola konkávna, musí byť jej Hessova matica, teda matica druhých derivácií $\nabla^2 G_n(x)$ záporne definitná. To znamená, že pre ľubovoľný vektor $y \in \mathbb{R}^n$ platí:

$$y^T \nabla^2 G_n(x) y \leq 0.$$

Jednotlivé prvky matice druhých derivácií $\nabla^2 G_n(x)$ vyzerajú nasledovne

$$\frac{\partial^2 G_n(x)}{\partial x_k^2} = -(n-1)\frac{\left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{\frac{1}{n}}}{n^2 x_k^2} = \frac{G_n(x)}{n^2 x_k^2}$$

$$\frac{\partial^2 G_n(x)}{\partial x_k x_l} = \frac{G_n(x)}{n^2 x_k x_l}, \qquad \text{pre } k \neq l.$$

$$\nabla^2 G_n(x) = \frac{G_n(x)}{n^2}\begin{pmatrix} \frac{-(n-1)}{x_1^2} & \frac{1}{x_1x_2} & \cdots & \frac{1}{x_1x_n} \\ \frac{1}{x_2x_1} & \frac{-(n-1)}{x_2^2} & \cdots & \frac{1}{x_2x_n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{x_nx_1} & \frac{1}{x_nx_2} & \cdots & \frac{-(n-1)}{x_n^2} \end{pmatrix}$$

Dá sa napísať nasledovným spôsobom

$$\nabla^2 G_n(x) = -\frac{G_n(x)}{n^2}\left(nD - qq^T\right),$$

kde D je diagonálna matica s prvkami $\frac{1}{x_1^2}, \frac{1}{x_2^2}, ..., \frac{1}{x_n^2}$ na diagonále a q je vektor s prvkami $q_i = \frac{1}{x_i}$, $i = 1, ..., n$.
Teraz chceme ukázať zápornú definitnosť $\nabla^2 G_n(x)$, to znamená že

$$y^T\nabla^2 G_n(x)y = -\frac{G_n(x)}{n^2}\left(n\sum_{i=1}^{n}\frac{y_i^2}{x_i^2} - \left(\sum_{i=1}^{n}\frac{y_i}{x_i}\right)^2\right) \leq 0,$$

pre každé y. Predošlá nerovnosť vyplýva z Cauchy-Schwarzovej nerovnosti (1), o ktorej sme písali v kapitole 1, keď ju aplikujeme na vektory $u = 1$ a $v = \left(\frac{y_1}{x_1}, \frac{y_2}{x_2}, ..., \frac{y_n}{x_n}\right)$.
Tým sme dokázali, že geometrický priemer $G_n(x)$ je konkávna funkcia.

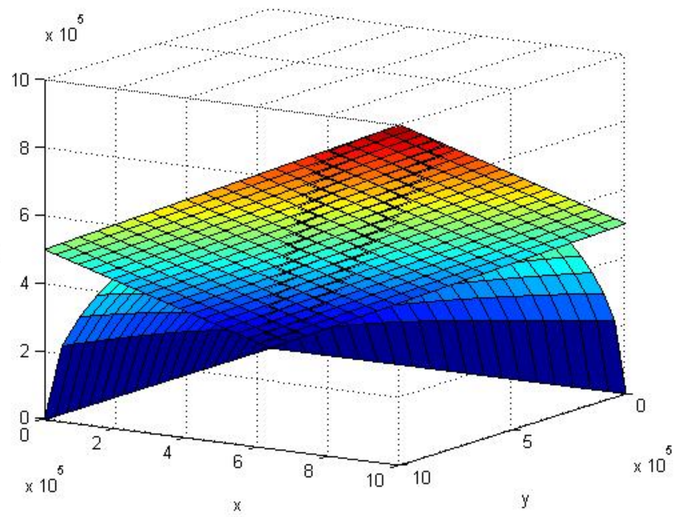
Vieme, že keď skonštruujeme dotykovú rovinu ku konkávnej funkcii, tak v každom bode okrem dotykového bude mať táto funkcia menšiu hodnotu, ako dotyková rovina. Skonštruujme dotykovú rovinu špeciálne v bode $x' = (x'_1, x'_2, ..., x'_n)$ takom, že $x'_1 = x'_2 = ... = x'_n = a$

$$G_n(x) \leq G_n(x') + \nabla G_n(x')(x - x').$$

Po dosadení hodnôt $G_n(x')$ a $\nabla G_n(x')$ dostaneme

$$G_n(x) \leq a + \frac{(x_1 - a) + (x_2 - a) + ... + (x_n - a)}{n} = a + \frac{(x_1 + ... + x_n) - na}{n} =$$
$$a + \frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n} - a = A_n(x).$$

Na obrázku (11) máme geometrický priemer a aritmetický priemer, ktorý je zároveň jeho dotykovou rovinou v bode $x' = (x'_1, x'_2, ..., x'_n)$.



Obr. 11: Aritmetický a geometrický priemer

Tým sme dokázali, že geometrický priemer $G_n(x)$ je vždy menší ako aritmetický priemer $A_n(x)$, okrem prípadu, keď $x_1 = x_2 = ... = x_n$. To je presne nerovnosť (17). □

Ďalej nasleduje niekoľko dôkazov pre najvšeobecnejší tvar AG nerovnosti pre n prvkov s váhami. Nasledovné dva dôkazy, ktoré teraz uvedieme sa dajú nájsť na internetovej stránke [2].

2.5.2 Dôkaz pomocou Jensenovej nerovnosti

Všimnime si, že funkcia $f(x) = \ln x$ je rýdzo konkávna. Vyberieme n kladných čísel $x_1, ..., x_n$ a budeme skúmať vzťahy medzi funkčnými hodnotami v týchto bodoch. Podľa Jensenovej nerovnosti (10), ktorú sme si pripomenuli v podkapitole 1.3, platí

$$\ln\left(\sum_{i=1}^{n} w_i x_i\right) \geq \sum_{i=1}^{n} w_i \ln x_i = \ln\left(\prod_{i=1}^{n} x_i^{w_i}\right),$$

kde $w \geq 0$, $\sum_{i=1}^{n} w_i = 1$, pričom rovnosť nastáva len v prípade, že všetky x_i sú rovnaké. Keďže $\ln x$ je ostro rastúca funkcia, tak platí:

$$\sum_{i=1}^{n} w_i x_i \geq \prod_{i=1}^{n} x_i^{w_i},$$

s rovnosťou len v prípade, že všetky x_i sú rovnaké, čo je presne nerovnosť (18). □

2.5.3 Dôkaz pomocou dotyčnice konvexnej funkcie

Ďalší dôkaz používa konvexnosť. Vieme, že funkcia $f(x) = e^x$ je rýdzo konvexná, to znamená, že dotyčnica v ľubovoľnom bode leží celá pod krivkou $y = e^x$. Nájdeme teda dotyčnicu napríklad v bode $x_0 = 0$ pomocou známeho vzorca

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

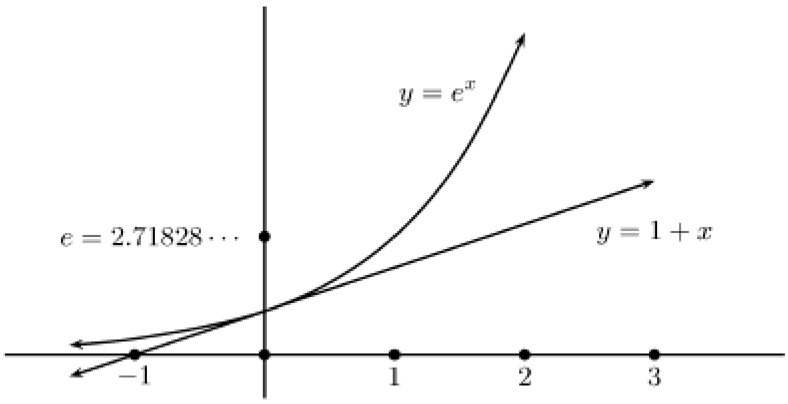
Dostaneme

$$y = 1 + x.$$

Teda pre všetky x reálne platí

$$1 + x \leq e^x \tag{19}$$

s rovnosťou v bode $x = 0$. Obrázok (12) nám môže pomôcť predstaviť si danú situáciu.



Obr. 12: Dotyčnica k $y = e^x$ v bode $x = 0$, [25]

Pre lepšiu prehľadnosť zavedieme nasledovná označenia:

$$S(x) = \sum_{i=1}^{n} w_i x_i,$$
$$P(x) = \prod_{i=1}^{n} x_i^{w_i}.$$

Teraz položme

$$r_i = \frac{x_i}{S(x)} - 1 \geq 0,$$

kde $x_i \geq 0$ pre $i = 1, ..., n$ a $\sum_{i=1}^{n} w_i = 1$, $w_i \geq 0$. Vzťah (19) potom hovorí, že

$$r_i + 1 \leq e^{r_i}, \text{ pre } i = 1, 2, ..., n$$

a tiež

$$(r_i + 1)^{w_i} \leq e^{w_i r_i},$$

lebo $w_i \geq 0$. Vynásobením n takýchto nerovností dostaneme

$$\prod_{i=1}^{n} (r_i + 1)^{w_i} \leq \prod_{i=1}^{n} e^{w_i r_i}. \tag{20}$$

Nerovnosť sa zachová vďaka nezápornosti r_i.

Po dosadení za r_i do ľavej strany (20) máme

$$\prod_{i=1}^{n} (r_i + 1)^{w_i} = \frac{P(x)}{S(x)^{\sum_{j=1}^{n} w_j}} = \frac{P(x)}{S(x)} \qquad \text{pre } \sum_{j=1}^{n} w_j = 1.$$

Po dosadení za r_i do pravej strany (20) zas máme

$$\prod_{i=1}^{n} e^{w_i r_i} = \prod_{i=1}^{n} e^{\frac{x_i w_i}{S(x)} - w_i} = e^{\frac{S(x)}{S(x)} - \sum_{i=1}^{n} w_i} = e^0 = 1.$$

Keď opäť spojíme obe strany (20), tak dostamene

$$\frac{P(x)}{S(x)} \leq 1$$

alebo

$$\prod_{i=1}^{n} x_i^{w_i} \leq \sum_{i=1}^{n} w_i x_i,$$

čo je presne nerovnosť (18). □

2.6 Aplikácie

2.6.1 Maximalizačná úloha

Ako sme v úvode kapitoly spomenuli, jedným z využití AG nerovnosti je pri riešení maximalizačných úloh. Uvedieme príklad riešenia takejto úlohy bez použitia diferenciálneho počtu, len pomocou AG. Prebrali sme ho z prednášky [9].

Úloha: Nájdite maximálnu hodnotu x_5 spĺňajúceho podmienky

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0 \tag{21}$$

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 = 80. \tag{22}$$

Riešenie: Z AG nerovnosti pre $n = 2$ máme

$$\frac{x_1^2 + x_2^2}{2} \geq x_1x_2, \quad \frac{x_1^2 + x_3^2}{2} \geq x_1x_3 \quad ,..., \quad \frac{x_3^2 + x_4^2}{2} \geq x_3x_4,$$

s rovnosťami pre $x_1 = x_2 = x_3 = x_4$.
Vyjadríme x_5 z prvej rovnice (21)

$$x_5 = -(x_1 + x_2 + x_3 + x_4),$$

dosadíme ho do druhej rovnice (22), nahradíme členy $2x_1x_2, 2x_1x_3, ..., 2x_3x_4$ a dostaneme

$$x_5^2 = (x_1+x_2+x_3+x_4)^2 = x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2+2x_1x_2+2x_1x_3+...+2x_3x_4 \leq x_1^2+x_2^2+x_3^2+ x_4^2+(x_1^2+x_2^2)+(x_1^2+x_3^2)+(x_1^2+x_4^2)+...+(x_3^2+x_4^2) = 4(x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2) = 4(80-x_5^2).$$

Teda dostávame nerovnosť

$$x_5^2 \leq 4(80 - x_5^2),$$

z ktorej už len ekvivalentnými úpravami dostaneme riešenie úlohy:

$$5x_5^2 \leq 4.80$$
$$x_5 \leq 8,$$

s rovnosťou pre $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = -2$.

2.6.2 Eulerove číslo

Eulerove číslo e zohráva v matematike dôležitú rolu. Je definované ako limita postupnosti $x_n = (1 + \frac{1}{n})^n$

$$e = \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n. \tag{23}$$

Dokázaním zopár tvrdení s využitím AG nerovnosti ukážeme, že táto limita existuje, a teda Eulerove číslo je korektne definované. Predlohou nám bola publikácia [14].

Tvrdenie 2.2. *Pre ľubovoľné kladné čísla a, b, $a \neq b$ platí nerovnosť*

$$\sqrt[n+1]{ab^n} < \frac{a + nb}{n + 1}.$$

Dôkaz: Podľa AG nerovnosti platí

$$\sqrt[n+1]{ab^n} < \frac{a+b+...+b}{n+1} = \frac{a+nb}{n+1}.$$

□

Tvrdenie 2.3. *S rastúcim n rastú aj hodnoty postupností*

$$x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

a

$$z_n = \left(1-\frac{1}{n}\right)^n,$$

to znamená

$$x_n < x_{n+1} = \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1},$$
$$z_n < z_{n+1} = \left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}.$$

Dôkaz: Do nerovnosti z tvrdenia 2.2 dosadíme $a = 1, b = 1 + \frac{1}{n}$ a dostaneme

$$\sqrt[n+1]{1.\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} < \frac{1+n\left(1+\frac{1}{n}\right)}{n+1} = \frac{n+2}{n+1} = 1 + \frac{1}{n+1}.$$

Keď umocníme obe strany na $(n+1)$, dostaneme

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1},$$

čo bolo treba dokázať. Druhá nerovnosť sa ukáže analogicky. □

Tvrdenie 2.4. *Postupnosť $y_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$ klesá s rastúcim n, teda*

$$y_n > y_{n+1} = \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+2}.$$

Dôkaz: Máme

$$y_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1} = \frac{1}{\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}} = \frac{1}{\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}} = \frac{1}{z_{n+1}}.$$

Keďže z_n rastie s n, potom y_n s n klesá.

□

V tvrdeniach 2.3 a 2.4 sme dokázali, že

$$x_1 = \left(1+\frac{1}{1}\right)^1 = 2 < x_2 = \left(1+\frac{1}{2}\right)^2 = 2,25 < x_3 < ... < x_n < ...,$$
$$y_1 = \left(1+\frac{1}{1}\right)^2 = 4 > y_2 = \left(1+\frac{1}{2}\right)^3 = 3,375 > y_3 > ... > y_n > ....$$

Zároveň

$$2 = x_1 < x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = y_n < y_1 = 4.$$

Postupnosť x_n je teda monotónne rastúca a ohraničená $2 < x_n < 4$. Vieme, že každá monotónna ohraničená postupnosť má konečnú limitu. Preto existuje aj limita x_n, ktorá je označovaná e, teda

$$e = \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

Takisto aj limita y_n je rovná e

$$e = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \left(1+\frac{1}{n}\right) = e.1 = e.$$

Nie je ťažké overiť, že $e < 3$

$$x_n < y_n < y_5 = \left(1+\frac{1}{5}\right)^6 = 2,985984,$$

teda

$$e = \lim_{n\to\infty} x_n < 2,985984 < 3.$$

Presná hodnota Eulerovho čísla je $e = 2,7182818285490....$

2.7 Analógia s izoperimetrickou nerovnosťou

AG nerovnosť je istou obdobou známej izoperimetrickej nerovnosti.
Izoperimetrická nerovnosť znie nasledovne:

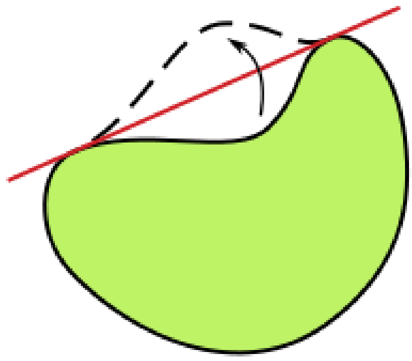
Majme v rovine uzavretú, nepresekajúcu sa krivku Γ. Označíme $L = L(\Gamma)$ dĺžku krivky Γ a $A = A(\Gamma)$ plochu ohraničenú touto krivkou. Potom platí nerovnosť

$$\frac{L^2}{4\pi A} \geq 1.$$

Rovnosť platí vtedy a len vtedy, keď Γ je kružnica.

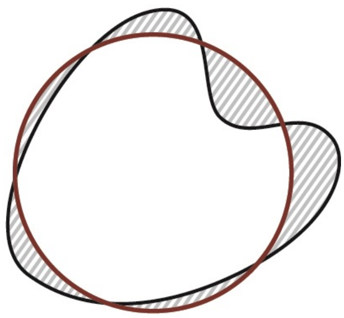
Inak povedané izoperimetrická nerovnosť hovorí:

1. Spomedzi všetkých rovinných útvarov s rovnakým obvodom, kruh má najväčšiu plochu.



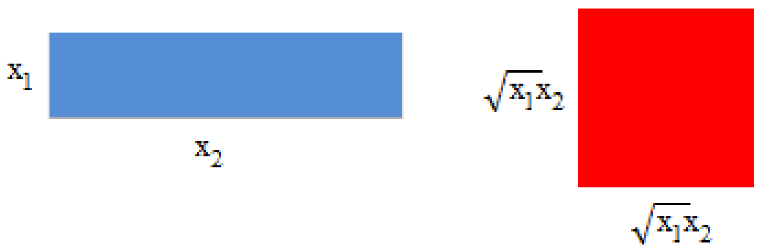
Obr. 13: Zväčšenie plochy ohraničenej krivkou bez zmeny obvodu [1]

2. Spomedzi všetkých rovinných útvarov s rovnakou plochou, kruh má najmenší obvod.



Obr. 14: Rovnaká plocha ohraničená kružnicou a inou krivkou [29]

AG nerovnosť v tvare (16) podľa autora publikácie [25] tvrdí to isté o štvorci. Uvažujme množinu všetkých obdĺžnikov s plochou A a dĺžkami strán x_1 a x_2.

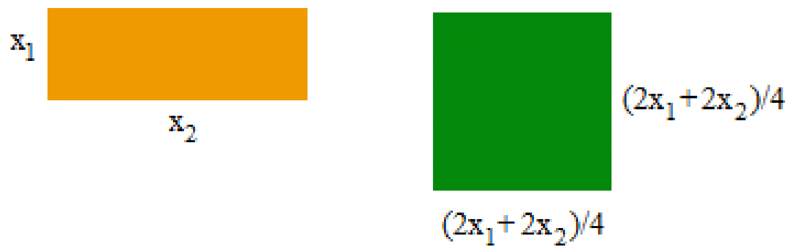


Obr. 15: Obdĺžnik a štvorec s plochou x_1x_2

Pretože $A = x_1x_2$, nerovnosť (16) nám hovorí, že štvorec s dĺžkou strany $s = \sqrt{x_1x_2}$ musí mať najmenší obvod spomedzi všetkých obdĺžnikov s plochou x_1x_2

$$4s = 4\sqrt{x_1x_2} \leq 2x_1 + 2x_2.$$

Teraz zoberme množinu obdĺžnikov s rovnakým obvodom p a stranami x_1 a x_2. Potom $p = 2x_1 + 2x_2$.



Obr. 16: Obdĺžnik a štvorec s obvodom $2x_1 + 2x_2$

Štvorec so stranou $s = \frac{p}{4}$ potom dosahuje maximálnu plochu spomedzi obdĺžnikov s obvodom $2x_1 + 2x_2$

$$s^2 = \frac{p^2}{16} = \frac{(x_1 + x_2)^2}{4} \geq x_1x_2.$$

Záver

Cieľom tejto bakalárskej práce bolo vytvorenie uceleného prehľadu o dvoch vybraných nerovnostiach. Chceli sme s nimi čitateľa bližšie oboznámiť, prípadne vzbudiť uňho väčší záujem o túto nevyčerpateľnú tému. Z množstva kníh, školských prác, článkov, prednášok a internetových stránok sme zozbierali dôkazy, aplikácie a zaujímavosti a spracovali ich do jedného celku.

V prvej kapitole, ktorá bola venovaná Cauchy-Schwarzovej nerovnosti, sme najprv v podkapitole 1.1 predstavili jej históriu vzniku a postupnosť objavovania nových tvarov a zovšeobecnení. V ďalšej podkapitole 1.2 sme si pripomenuli všetky potrebné pojmy a následne vyslovili a dokázali tvrdenie 1.1 o všeobecnom tvare Cauchy-Schwarzovej nerovnosti pre ľubovoľný unitárny vektorový priestor. Potom sme uviedli niekoľko tvarov spomínanej nerovnosti pre konkrétne vektorové priestory a skalárne súčiny s normami. Po všeobecnom tvare nasledovala podkapitola 1.3 s rôznymi dôkazmi a odvodeniami. Aplikácie boli obsahom ďalšej podkapitoly 1.4. Prvou aplikáciou bol dôkaz trojuholníkovej nerovnosti, ktorá má dôležité postavenie napríklad v matematickej analýze. Druhou aplikáciou bola definícia uhla medzi dvoma vektormi v n-rozmernom priestore. Vďaka Cauchy-Schwarzovej nerovnosti sme ukázali, že táto definícia je korektná. Ďalšou oblasťou, v ktorej sa často využíva platnosť tejto nerovnosti je pravdepodobnosť a štatistika. Napríklad sme pomocou nej dokázali, že korelačný koeficient je číslo z intervalu $\langle -1, 1 \rangle$. Posledným príkladom použitia v našej práci bolo riešenie úlohy o kladne definitných maticiach. S použitím Cauchy-Schwarzovej nerovnosti sme našli nutnú a postačujúcu podmienku kladnej definitnosti určitého typu matíc. Na záver prvej kapitoly sme pre zaujímavosť ukázali v podkapitole 1.5 súvis Cauchy-Schwarzovej nerovnosti s Hölderovou nerovnosťou, ktorá je jej zovšeobecnením.

V druhej kapitole sme sa venovali AG nerovnosti. V prvej podkapitole 2.1 sme si pripomenuli definície aritmetického a geometrického priemeru a uviedli sme tri základné tvary AG nerovnosti. Nasledovala podkapitola 2.2 s dôkazmi pre dve premenné. Potom nasledovala podkapitola 2.3 s Cauchyho dôkazom pomocou spätnej indukcie a podkapitola 2.4, kde bol uvedený dôkaz pomocou preškálovania prvkov. Ďalej nasledovala podkapitola 2.5 s dôkazmi využívajúcimi konvexnosť a konkávnosť. Ako prvú aplikáciu sme v podkapitole 2.6 uviedli riešenie maximalizačnej úlohy bez použitia diferenciálneho počtu, len pomocou AG nerovnosti. Druhou aplikáciou bolo vymedzenie presnej hodnoty Eulerovho čísla. Nakoniec sme v podkapitole 2.7 uviedli analógiu AG nerovnosti s izoperimetrickou nerovnosťou.

Prínosom práce je podrobné spracovanie vždy aktuálnej, stále sa meniacej a rozširujúcej oblasti matematiky. V literatúre venovanej nerovnostiam je často uvedený len jeden dôkaz danej nerovnosti. V našej práci je čitateľovi ponúknuté celé množstvo dôkazov ako aj aplikácií, tak čitatelia zaujímajúci sa o rôzne zaujímavé dôkazy a aplikácie týchto nerovností už nebudú musieť hľadať v množstve zdrojov. Téma je spracovaná, čo najdôkladnejšie a najzrozumiteľnejšie, teda prístupná aj čitateľom, ktorí ešte nie sú s touto témou oboznámení. Pre autora práce bolo prínosom hlbšie preniknutie do problematiky a získanie prehľadu o mnohých súvislostiach.

Zoznam použitej literatúry

[1] *Area 777*, dostupné na internete (29.5.2014): http://conan777.wordpress.com/2011/10/10/stable-isoperimetric-inequality/

[2] *Art of Problem Solving*, dostupné na internete (16.3.2014): http://www.artofproblemsolving.com/Wiki/index.php/Proofs_of_AM-GM

[3] BOYD, S.; VANDENBERGHE, L.: *Convex Optimization*, Cambridge University Press, New York, 2004

[4] BULLEN, P.S.: *A Chapter on Inequalities*, článok, Department of Mathematics, University of British Columbia, Vancouver, dostupné na internete (8.12.2013): http://sms.math.nus.edu.sg/smsmedley/Vol-21-2/A chapter on inequalities(PS Bullen).pdf

[5] BULLEN, P.S.: *Handbook of Means and Their Inequalities*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2003

[6] BUNYAKOVSKIJ, V.J.: *Mémoires de l'Académie des Sciences de St-Pétersbourg*, 1.zväzok, 7.séria, č.9 (1859), 4, dostupné na internete (27.11.2013): http://www-stat.wharton.upenn.edu/ steele/Publications/Books/CSMC/bunyakovsky.pdf

[7] CAUCHY, A.L.: *Course d'Analyse de l'Ecole Royale Polytechnique, Premiere Partie, Analyse Algebrique*, Debure freres, Paríž, 1821

[8] *Eidgenössische Technische Hochschule Zürich*, dostupné na internete (15.5.2014): https://www.math.ethz.ch/about_us/gallery

[9] GAMBLE, G.: *UWA Academy For Young Mathematicians, Algebra: Inequalities II*, prednáška, The University of Western Australia, School of Mathematics and Statistics, Australia, 2013, dostupné na internete (7.4.2014): http://school.maths.uwa.edu.au/ gregg/Academy/2013/ineq2.pdf

[10] GARLING, D.J.H.: *Inequalities: A Journey into Linear Analysis*, Cambridge University Press, New York, 2007

[11] HAMALA, M.: *Nelineárne Programovanie*, Alfa, Bratislava, 1976

[12] CHEN, B.: *Inner Product Spaces and Orthogonality*, prednáška, Hong Kong University of Science and Technology, Department of Mathematics, Hong Kong, 2006, dostupné na internete (22.5.2014): http://www.math.ust.hk/ mabfchen/Math111/Week13-14.pdf

[13] JANKOVÁ, K.; PÁZMAN, A.: *Pravdepodobnosť a štatistika*, Vydavateľstvo UK, Bratislava, 2011

[14] KOROVKIN, P.P.: *Inequalities*, Mir Publishers, Moscow, 1975

[15] KRISL, T.: *Cauchyova-Schwarzova nerovnost*, diplomová práca, Ústav matematiky a statistiky, Prírodovedecká fakulta, Masarykova Univerzita, Brno, 2008, dostupné na internete (5.11.2013): http://is.muni.cz/th/106635/prif_m/diplomka.pdf

[16] MILLER, S.J.: *The Arithmetic and Geometric Mean Inequality*, článok, Department of Mathematics, The Ohio State University, Ohio, 2003, dostupné na internete (16.3.2014): http://web.williams.edu/Mathematics/sjmiller/public_html/OSUClasses/487/ArithMeanGeoMean.pdf

[17] MILOVANIČ, G.V.: *Recent Progress in Inequalities*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1998

[18] MITRINOVIČ, D.S.; PEČARIČ, J.E.; FINK, A.M.: *Classical and New Inequalities in Analysis*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1993

[19] NAHIN, P.J.: *When Least Is Best*, Princeton University Press, New Jersey, 2004

[20] *Onionesque Reality*, dostupné na internete (29.11.2013): http://onionesquereality.wordpress.com/2013/09/25/some-proofs-of-the-cauchy-schwarz-inequality/

[21] PACHPATTE, B.G.: *Inequalities for Differential and Integral Equations*, Academic Press, London, 1998

[22] PACHPATTE, B.G.: *Mathematical Inequalities*, Elsevier, Amsterdam, 2005

[23] SCHWARZ, H.A.: *Über ein die Flächen Kleinsten Flächeneinhalts Betreffendes Problem der Variationsrechnung*, Acta Societatis Scientiarum Fennicae 15, (1885), 315-362

[24] STEELE, J.M.: *Positive Definite Matrix Problem*, The University of Pennsylvania, Philadelphia, dostupné na internete (30.4.2014): http://www-stat.wharton.upenn.edu/ steele/Publications/Books/CSMC/New Problems/PDMatrixProb/PDMatrixSoln.pdf

[25] STEELE, J.M.: *The Cauchy-Schwarz Master Class: An Introduction to the Art of Mathematical Inequalities*, Cambridge University Press, Cambridge, 2004

[26] TOLSTED, E.: *An Elementary Derivation of the Cauchy, Hölder,and Minkowski Inequalities from Young's Inequality*, článok, Pomona College, dostupná na internete (15.5.2014): https://www.maa.org/sites/default/files/pdf/upload_library/22/Ford/ElmerTolsted.pdf

[27] *Wikipédia*, dostupné na internete (15.5.2014): http://en.wikipedia.org/wiki/Viktor_Bunyakovsky

[28] *Wikipédia*, dostupné na internete (15.5.2014): http://en.wikipedia.org/wiki/Augustin-Louis_Cauchy

[29] *Wikipédia*, dostupné na internete (29.5.2014): http://en.wikipedia.org/wiki/File:Isoperimetric_inequality_illustr1.svg

[30] *Wikipédia*, dostupné na internete (15.5.2014): http://en.wikipedia.org/wiki/Complex_number

[31] WILSON, J.: *Using the Arithmetic Mean - Geometric Mean Inequality in Problem Solving*, článok, The University of Georgia, Georgia, 2012, dostupné na internete (16.3.2014): http://jwilson.coe.uga.edu/EMT725/AMGM/SSMA.Bnghm.html

[32] WU, S.: *Various Proofs of the Cauchy-Schwarz Inequality*, článok, Department of Mathematics and Computer Science, Longyan University, Longyan, 2000, dostupné na internete (29.11.2013): http://rgmia.org/papers/v12e/Cauchy-Schwarzinequality.pdf