UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY

DEA MODELY S OBMEDZENÝMI PREMENNÝMI

BAKALÁRSKA PRÁCA

Bratislava 2014

Norbert Füle

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY

DEA MODELY S OBMEDZENÝMI PREMENNÝMI

BAKALÁRSKA PRÁCA

Študijný program:	Ekonomická a finančná matematika
Študijný odbor:	1114 Aplikovaná matematika
Školiace pracovisko:	Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky
Vedúci práce:	Doc. RNDr. Margaréta Halická, CSc.

Bratislava 2014 **Norbert Füle**

94243132

Univerzita Komenského v Bratislave
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

ZADANIE ZÁVEREČNEJ PRÁCE

Meno a priezvisko študenta:	Norbert Füle
Študijný program:	ekonomická a finančná matematika (Jednoodborové štúdium, bakalársky I. st., denná forma)
Študijný odbor:	9.1.9. aplikovaná matematika
Typ záverečnej práce:	bakalárska
Jazyk záverečnej práce:	slovenský

Názov: DEA modely s obmedzenými premennými / *DEA models with restricted variables*

Cieľ: V anglickej odbornej literatúre z oblasti DEA sa niekedy hovorí o "non-discretionary" premenných. Cieľom tejto bakalárskej práce je naštudovať a podrobne spracovať túto problematiku. Získané poznatky aplikovať na vhodne vybratý problém podľa možnosti reálny problém z praxe.

Vedúci:	doc. RNDr. Margaréta Halická, CSc.
Katedra:	FMFI.KAMŠ - Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky
Vedúci katedry:	prof. RNDr. Daniel Ševčovič, CSc.
Dátum zadania:	18.10.2013

Dátum schválenia: 14.11.2013

doc. RNDr. Margaréta Halická, CSc.
garant študijného programu

....
študent

....
vedúci práce

Poďakovanie Touto cestou by som sa chcel poďakovať svojej vedúcej práce Doc. RNDr. Margaréte Halickej, CSc. za jej ochotu, odbornú pomoc a kľúčové rady pri písaní tejto práce.

Abstrakt v štátnom jazyku

FÜLE, Norbert: DEA modely s obmedzenými premennými [Bakalárska práca], Univerzita Komenského v Bratislave, Fakulta matematiky, fyziky a informatiky, Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky; školiteľ: Doc. RNDr. Margaréta Halická, CSc., Bratislava, 2014, 55 strán.

Cieľom tejto bakalárskej práce bolo analyzovať použitie neovplyvniteľných a neriaditeľných premenných v DEA. Predstavili sme základné DEA modely, ktoré sme následne aplikovali na reálne dáta. Následne sme sa zaoberali neovplyvniteľnými a neriaditeľnými premennými a navrhli sme úpravy štandardných modelov na použitie s nimi. Navyše, načrtli a odvodili sme niektoré vzťahy, ktoré platia medzi danými modelmi a odvodené vlastnosti sme ilustrovali na príklade.

Kľúčové slová: Data Envelopment Analysis, neovplyvniteľné premenné, neriaditeľné premenné

Abstract

FÜLE, Norbert: DEA models with restricted variables [Bachelor Thesis], Comenius University in Bratislava, Faculty of mathematics, physics, and informatics, Department of Applied Mathematics and Statistics; Thesis supervisor: Doc. RNDr. Margaréta Halická, CSc., Bratislava, 2014, 55 pages.

The aim of this bachelor thesis is to analyse the use of non-discretionary and non-controllable variables in DEA. Firstly, we introduce basic DEA models and apply them on real data. Then, we examine the non-discretionary and non-controllable variables and propose modifications of standard DEA models for use with such variables. Furthermore, we outline and derive some relations between such models, consequently highlighting the derived properties in an example.

Keywords: Data Envelopment Analysis, non-discretionary variables,
non-controllable variables

Obsah

Úvod **9**

1 Základné modely DEA **10**

1.1 Symbolika . . . 10

1.2 CCR model . . . 12

1.2.1 Interpretácia riešení . . . 12

1.2.2 Zistenie pseudoefektívnosti . . . 14

1.2.3 Optimálny vzor . . . 14

1.2.4 Multiplikatívna forma modelov . . . 15

1.3 BCC model . . . 16

1.3.1 Interpretácia riešení . . . 17

1.3.2 Zistenie pseudoefektívnosti . . . 17

1.4 Aditívny model . . . 18

1.4.1 Optimálny vzor . . . 18

1.5 Príklad . . . 19

2 Modely s obmedzeniami na premenné **24**

2.1 Symbolika . . . 24

2.2 Príklady . . . 25

2.3 Modifikácie štandardných modelov pre neovplyvniteľné premenné . . . 27

2.3.1 CCR a BCC modely . . . 27

2.3.2 Aditívny model . . . 29

2.4 Vlastnosti modelov s neovplyvniteľnými premennými . . . 29

2.4.1 Vzťah optimálnych riešení vstupného a výstupného CCR modelu 29

2.4.2 Vzťahy medzi efektivitami . . . 32

2.5 Príklad . . . 33

2.6 Iné prístupy k neovplyvniteľným vstupom a výstupom . . . 37

Záver **39**

Zoznam použitej literatúry **40**

Prílohy **42**

Úvod

Efektívne narábanie so zdrojmi je často skloňovanou témou sučasných pokrízových dní. Potreba efektívneho chodu prevádzok sa neukazuje len v súkromnom sektore a výrobných odvetviach, ale aj napríklad v nemocniciach, školách, či neziskových organizáciách, kde pojem efektívnosť nemusí byť ľahko definovateľný.

Data Envelopment Analysis (obálková analýza dát, ďalej len DEA) je aplikáciou lineárneho programovania, ktorá nám umožňuje pomocou porovnávania skupiny skúmaných jednotiek (v DEA terminológii Decision Making Units, jednotky vykonávajúce rozhodnutia, ďalej len DMU) nielen zistiť, do akej miery sú dané DMU efektívne či neefektívne, ale zároveň nám poskytnúť informácie, ako môžeme DMU zefektívniť, kde je priestor na zlepšenie. Na toto poskytuje DEA mnohé a rôznorodé modely, ktoré pracujú so vstupmi a výstupmi daných DMU, pričom voľba modelu nemusí byť vždy jednoznačná, často závisí od situácie.

Problematika štandardných DEA modelov je dobre spracovaná vo svetovej literatúre (napr. [3, 8, 11]), my budeme vychádzať hlavne z [3, 4].

Niekedy je však potrebné použiť aj neštandardné modely, prípadne uvažovať vstupy a výstupy, ktoré sú relevantné pri určovaní efektivity DMU, ale nemôžu byť upravené manažérskymi rozhodnutiami, alebo sú upraviteľné len v dlhom časovom horizonte. Vtedy môže byť vhodné uvažovať dané premenné ako neovplyvniteľné (v anglickej literatúre označované ako non-discretionary), alebo neriaditeľné (označované non-controllable). Táto problematika je načrtnutá v [4] a existuje viacero článkov a prác, kde sa využíva (napr. [1, 7, 12, 13]).

Cieľom tejto bakalárskej práce je preskúmať vlastnosti modelov používajúcich neovplyvniteľné premenné a porovnať ich s bežnými DEA modelmi. Následne aplikovať takéto modely na príklad z [3] a zhrnúť niektoré vypozorované vlastnosti.

V prvej kapitole predstavíme použitú symboliku, uvedieme a popíšeme základné modely DEA, ktoré aplikujeme na príklad z [3].

V druhej kapitole zavedieme pojem neovplyvniteľných a neriaditeľných premenných, predstavíme niekoľko príkladov na ich použite, bližšie sa venujeme úpravám štandardných modelov na použitie s nimi, a napokon rozšírime príklad z prvej kapitoly.

1 Základné modely DEA

Obálková analýza dát (Data Envelopment Analysis, ďalej DEA) je aplikáciou lineárneho programovania, slúžiacou na meranie efektivity súboru jednotiek. Tento účel plní porovnávaním v rámci danej skupiny skúmaných objektov a hľadaním objektov, ktoré považujeme za najlepšie využívajúce poskytnuté vstupy pri najlepšej produkcii výstupov.

Pojem efektívnosť súvisí s určitým spôsobom vykonávania nejakej činnosti. Táto činnosť sa nazýva technológiou, produkčnou činnosťou, prípadne produkciou. Technológia T je charakterizovaná m vstupmi - sú to rozličné spotrebovávané materiálové, priestorové, finančné, personálne náklady - a s výstupmi - napríklad rôzne druhy poskytnutých služieb, tržby, prípadne vyrobené produkty.

Najprv však potrebujeme zaviesť symboliku, ktorá bude použitá v našej práci. Tú sme spracovali na základe [4].

1.1 Symbolika

Technológia T je charakterizovaná m vstupmi (inputmi) a s výstupmi (outputmi). Vstupy budeme označovať $I_i,\ (i = 1, ..., m)$, výstupy $O_r,\ (r = 1, ..., s)$.
Stručne budeme hovoriť o i-tom vstupe a r-tom výstupe. Konkrétne hodnoty vstupov budeme označovať vektorom $x \in \mathbb{R}^m$ a konkrétne hodnoty výstupov vektorom $y \in \mathbb{R}^s$. Jednotky, organizačné útvary, ktoré sa riadia technológiou T budeme označovať

$$DMU_j,\ (j = 1, ..., n).$$

Skratka DMU, z anglického Decision Making Unit, vyjadruje nezávislosť rozhodovania každej jednotky pri premene vstupov na výstupy. V našej práci budeme slová jednotka, útvar, DMU, pokladať za ekvivalentné. Každý útvar je charakterizovaný hodnotami každého z m vstupov a s výstupov. Vektor vstupov j-teho útvaru budeme potom označovať ako $x_j \in \mathbb{R}^m$ a vektor výstupov $y_j \in \mathbb{R}^s$. Hodnotu i-teho vstupu pre j-ty útvar zas označíme x_{ij} a hodnotu r-teho výstupu pre j-ty útvar označíme y_{rj}, čiže

$$x_j = \begin{pmatrix} x_{1j} \\ \vdots \\ x_{ij} \\ \vdots \\ x_{mj} \end{pmatrix}, \quad y_j = \begin{pmatrix} y_{1j} \\ \vdots \\ y_{rj} \\ \vdots \\ y_{sj} \end{pmatrix}, \quad j = (1, ..., n)$$

Hodnoty vstupov pre všetky DMU_j môžeme zapísať ako maticu vstupov X typu $m \times n$, a hodnoty výstupov ako maticu výstupov Y typu $s \times n$, nasledovne:

$$X := \begin{pmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1j} & \cdots & x_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{i1} & \cdots & x_{ij} & \cdots & x_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{m1} & \cdots & x_{mj} & \cdots & x_{mn} \end{pmatrix}, \quad Y := \begin{pmatrix} y_{11} & \cdots & y_{1j} & \cdots & y_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{r1} & \cdots & y_{rj} & \cdots & y_{rn} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{s1} & \cdots & y_{sj} & \cdots & y_{sn} \end{pmatrix},$$

j-ty stĺpec matice X potom zodpovedá vektoru $x_j \in \mathbb{R}^m$ hodnôt vstupov útvaru DMU_j, podobne j-ty stĺpec matice Y zodpovedá vektoru $y_j \in \mathbb{R}^s$ hodnôt výstupov útvaru DMU_j. Teda,

$$X = \begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_j & \cdots & x_n \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 & \cdots & y_j & \cdots & y_n \end{pmatrix}.$$

Útvar, ktorého efektívnosť budeme práve zisťovať, budeme označovať DMU_o, pričom indexom je malé písmeno $o \in \{1, ..., n\}$. Všade v ďalšom budeme predpokladať, že hodnoty vstupov a výstupov sú pre každé DMU nezáporné a každé DMU má aspoň jeden kladný vstup a aspoň jeden kladný výstup.

1.2 CCR model

Jedným z prvých DEA modelov bol CCR model vytvorený v roku 1978 Charnesom, Cooperom a Rhodesom, skratka modelu pochádza z iniciálok autorov. Tento model existuje v dvoch podobách - vstupný a výstupný. Označenie vstupný znamená, že v ňom radiálne skracujeme vstupy pri nezmenšených hodnotách výstupov.

Lineárny program pre vstupný CCR, v ktorom testujeme efektivitu útvaru $\mathrm{DMU}_o = (x_o, y_o)$, vyzerá nasledovne

$$
\begin{aligned}
(\text{CCR-I-OM})_o \quad & \min_{\theta,\lambda} \quad \theta \\
& \text{s.t.} \quad \sum_{j=1}^{n} x_j \lambda_j \leq \theta x_o, \\
& \qquad \sum_{j=1}^{n} y_j \lambda_j \geq y_o, \\
& \qquad \lambda \geq 0_n,
\end{aligned}
$$

a pre výstupný CCR, v ktorom testujeme efektivitu útvaru $\mathrm{DMU}_o = (x_o, y_o)$, vyzerá nasledovne

$$
\begin{aligned}
(\text{CCR-O-OM})_o \quad & \max_{\psi,\lambda} \quad \psi \\
& \text{s.t.} \quad \sum_{j=1}^{n} x_j \lambda_j \leq x_o, \\
& \qquad \sum_{j=1}^{n} y_j \lambda_j \geq \psi y_o, \\
& \qquad \lambda \geq 0_n.
\end{aligned}
$$

Vo výstupnom modeli radiálne naťahujeme výstupy pri nezväčšených hodnotách vstupov.

1.2.1 Interpretácia riešení

Aby sme mohli interpretovať čísla θ *a* ψ ako efektivitu, potrebujeme horeuvedené modely najprv upraviť. Upravíme ich na základe postupu uvedenom v [4] - nerovnosti v ohraničeniach transformujeme na rovnosti zavedením doplnkových premenných. Tieto nezáporné premenné budeme nazývať slacky, rezervy, prípadne sklzy. Práve nasledujúce zápisy budeme potrebovať na interpretáciu. Dostávame upravený vstupný CCR

$$
\begin{aligned}
(\text{CCR-I-OM-S})_o \quad \min_{\theta,\lambda} \quad & \theta \\
\text{s.t.} \quad & \sum_{j=1}^{n} x_j \lambda_j + s_x = \theta x_o, \\
& \sum_{j=1}^{n} y_j \lambda_j - s_y = y_o, \\
& \lambda \geq 0_n, s_x \geq 0_m, s_y \geq 0_s,
\end{aligned}
$$

a upravený výstupný CCR

$$
\begin{aligned}
(\text{CCR-O-OM-S})_o \quad \max_{\psi,\lambda} \quad & \psi \\
\text{s.t.} \quad & \sum_{j=1}^{n} x_j \lambda_j + s_x = x_o, \\
& \sum_{j=1}^{n} y_j \lambda_j - s_y = \psi y_o, \\
& \lambda \geq 0_n, s_x \geq 0_m, s_y \geq 0_s.
\end{aligned}
$$

Efektivitu podľa týchto upravených modelov potom identifikujeme nasledovne:

- Ak v každom optimálnom riešení $(\theta^\star, \lambda^\star, s_x^\star, s_y^\star)$ úlohy $(\text{CCR-I-OM-S})_o$ platí, že $(s_x^\star, s_y^\star) = 0$ a zároveň $\theta_o^\star = 1$, útvar DMU_o je **efektívny** s efektivitou $\theta_o^\star = 1$.
- Ak v každom optimálnom riešení $(\theta^\star, \lambda^\star, s_x^\star, s_y^\star)$ úlohy $(\text{CCR-I-OM-S})_o$ platí, že $(s_x^\star, s_y^\star) = 0$ a zároveň $\theta_o^\star < 1$, útvar DMU_o je **neefektívny** a $\theta_o^\star$ je jeho efektivitou.
- Ak existuje také optimálne riešenie $(\theta^\star, \lambda^\star, s_x^\star, s_y^\star)$ úlohy $(\text{CCR-I-OM-S})_o$, že platí $(s_x^\star, s_y^\star) \neq 0$ (t.j. niektorá zložka vektora $s_x^\star$ alebo vektora $s_y^\star$ je kladná) a zároveň $\theta_o^\star = 1$, útvar DMU_o je **pseudoefektívny** a teda neefektívny s efektivitou $\theta_o^\star = 1$.
- Ak existuje také optimálne riešenie $(\theta^\star, \lambda^\star, s_x^\star, s_y^\star)$ úlohy $(\text{CCR-I-OM-S})_o$, že platí $(s_x^\star, s_y^\star) \neq 0$ (t.j. niektorá zložka vektora $s_x^\star$ alebo vektora $s_y^\star$ je kladná) a zároveň $\theta_o^\star < 1$, útvar DMU_o je **neefektívny** a $\theta_o^\star$ je jeho pseudoefektivitou.

V prípade výstupného modelu je definícia analogická, $\theta^\star$ iba nahradíme $\frac{1}{\psi^\star}$.

1.2.2 Zistenie pseudoefektívnosti

Na zistenie pseudoefektívnosti DMU_o na základe horeuvedenej definície môžeme použiť niekoľko rôznych metód, najčastejšie tzv. dvojfázovú metódu, ktorú uvádzame pre vstupný CCR.

V prvej fáze riešime lineárny program

$$\begin{aligned}
\min_{\theta,\lambda} \quad & \theta \\
\text{s.t.} \quad & \sum_{j=1}^{n} x_j \lambda_j \leq \theta x_o, \\
& \sum_{j=1}^{n} y_j \lambda_j \geq y_o, \\
& \lambda \geq 0_n,
\end{aligned}$$

z ktorého dostaneme $\theta^\star$. V druhej fáze, v ktorej riešime nasledovný program [3, str. 44], je použitá získaná hodnota $\theta^\star$:

$$\begin{aligned}
\max_{\lambda,s_x,s_y} \quad & \omega = e^T s_x + e^T s_y \\
\text{s.t.} \quad & s_x = \theta^\star x_o - \sum_{j=1}^{n} x_j \lambda_j \\
& s_y = \sum_{j=1}^{n} y_j \lambda_j - y_o \\
& \lambda \geq 0_n, s_x \geq 0_m, s_y \geq 0_s,
\end{aligned}$$

Úlohou druhej fázy je nájsť riešenie, ktoré maximalizuje súčet slackov pri danej efektivite $\theta = \theta^\star$ [3, str. 45]. Po získaní tohoto riešenia už vieme klasifikovať DMU podľa horeuvedenej definície. Táto metóda je numericky najstabilnejšia, jej nevýhodou je riešenie 2 lineárnych programov pre jedno DMU. Medzi ďalšie metódy patrí napríklad ϵ-metóda [4].

1.2.3 Optimálny vzor

V praxi potrebujeme okrem vyčíslenia efektivity jednotlivých DMU zistiť, ako upraviť vstupy a výstupy tak, aby DMU bolo efektívne. Preto by sme pre neefektívne DMU chceli poznať hodnoty vstupov a hodnoty výstupov, pre ktoré by bola efektivita $\theta^\star = 1$.

Zároveň žiadame také hodnoty, aby DMU nebolo pseudoefektívne. Takúto hodnotu pre DMU nazývame optimálny vzor a definujeme nasledovne:

Nech $(\theta^\star, \lambda^\star, s_x^\star, s_y^\star)$ je optimálne riešenie (CCR-I-OM-S)$_o$ pre (x_o, y_o) získané dvojfázovou metódou. Potom bod $(\theta^\star x_o, y_o)$ nazveme (CCR vstupnou) **projekciou** bodu (x_o, y_o) a bod $(\widehat{x}_o, \widehat{y}_o)$, kde

$$\widehat{x}_o := \sum_{j=1}^{n} x_j \lambda_j^\star = \theta^\star x_o - s_x^\star \quad \widehat{y}_o := \sum_{j=1}^{n} y_j \lambda_j^\star = y_o + s_y^\star,$$

nazveme **efektívnym vzorom** (x_o, y_o) pri CCR vstupnom modeli (odpovedajúcom riešeniu $\lambda^\star$).

Pomocou efektívneho vzoru môžeme podľa [4] definovať efektivitu ako priemer parciálnych efektivít vzorcom

$$\rho_o = \frac{1}{m+s}\left(\sum_{i=1}^{m} \frac{\widehat{x}_i}{x_{io}} + \sum_{r=1}^{s} \frac{y_{ro}}{\widehat{y}_r}\right), \tag{1}$$

kde $\frac{\widehat{x}_i}{x_{io}}$ interpretujeme ako parciálnu efektivitu i-teho vstupu DMU$_o$ a $\frac{y_{ro}}{\widehat{y}_r}$ ako parciálnu efektivitu r-teho výstupu.

1.2.4 Multiplikatívna forma modelov

V literatúre sa môžeme stretnúť aj s tzv. multiplikatívnou formou modelov CCR, v tejto práci ich uvádzame len pre úplnosť. Vstupný CCR pre DMU$_o$

$$\begin{aligned}
\text{(CCR-I-MM)}_o \quad \min_{u,v} \quad & v^T x_o \\
\text{s.t.} \quad & u^T y_o = 1, \\
& u^T y_j - v^T x_j \leq 0, j = 1, ..., n, \\
& u \geq 0_s, v \geq 0_m.
\end{aligned}$$

a výstupný CCR pre DMU$_o$

$$\begin{aligned}
\text{(CCR-O-MM)}_o \quad \max_{u,v} \quad & u^T y_0 \\
\text{s.t.} \quad & v^T x_0 = 1, \\
& u^T y_j - v^T x_j \leq 0, j = 1, ..., n, \\
& u \geq 0_s, v \geq 0_m.
\end{aligned}$$

Poznamenajme, že úloha (CCR-I-MM)$_o$ je duálnym protajškom úlohy (CCR-O-MM)$_o$.

1.3 BCC model

Model BCC bol vytvorený v roku 1984 Bankerom, Charnesom a Cooperom, skratka rovnako ako pri CCR modeli pochádza z iniciálok autorov. Vstupný model pre DMU_o vyzerá nasledovne

$$
\begin{aligned}
(\text{BCC-I-OM})_o \quad \min_{\theta,\lambda} \quad & \theta \\
\text{s.t.} \quad & \sum_{j=1}^{n} x_j\lambda_j \leq \theta x_o, \\
& \sum_{j=1}^{n} y_j\lambda_j \geq y_o, \\
& \sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 1, \\
& \lambda \geq 0_n.
\end{aligned}
$$

Výstupný pre DMU_o

$$
\begin{aligned}
(\text{BCC-O-OM})_o \quad \max_{\psi,\lambda} \quad & \psi \\
\text{s.t.} \quad & \sum_{j=1}^{n} x_j\lambda_j \leq x_o, \\
& \sum_{j=1}^{n} y_j\lambda_j \geq \psi y_o, \\
& \sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 1, \\
& \lambda \geq 0_n.
\end{aligned}
$$

Modely BCC sa od modelov CCR líšia predpokladom variabilných výnosov z rozsahu, ktorý sa v lineárnom programe prejavuje ohraničením $\sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 1$.

1.3.1 Interpretácia riešení

Pre definovanie efektivity potrebujeme opäť upraviť modely na tvar s pridanými slackmi:

$$
\begin{aligned}
(\text{BCC-I-OM-S})_o \quad & \min_{\theta,\lambda} \quad \theta \\
& \text{s.t.} \quad \sum_{j=1}^{n} x_j\lambda_j + s_x = \theta x_o, \\
& \qquad \sum_{j=1}^{n} y_j\lambda_j - s_y = y_o, \\
& \qquad \sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 1, \\
& \qquad \lambda \geq 0_n, s_x \geq 0_m, s_y \geq 0_s,
\end{aligned}
$$

pre vstupný a

$$
\begin{aligned}
(\text{BCC-O-OM-S})_o \quad & \max_{\psi,\lambda} \quad \psi \\
& \text{s.t.} \quad \sum_{j=1}^{n} x_j\lambda_j + s_x = x_o, \\
& \qquad \sum_{j=1}^{n} y_j\lambda_j - s_y = \psi y_o, \\
& \qquad \sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 1, \\
& \qquad \lambda \geq 0_n, s_x \geq 0_m, s_y \geq 0_s,
\end{aligned}
$$

pre výstupný BCC.

Pretože BCC modely sa od CCR modelov líšia len ohraničením navyše, definícia efektivity pri BCC modeloch je zhodná s definíciou efektivity pri CCR modeloch.

1.3.2 Zistenie pseudoefektívnosti

Tento problém sa dá riešiť podobnou dvojfázovou metódou ako pri CCR modeli. Pre vstupný BCC v prvej fáze minimalizujeme θ_B a v druhej fáze maximalizujeme súčet slackov, ponechajúc $\theta_B = \theta_B^*$.

1.4 Aditívny model

Podmienkou použitia predchádzajúcich modelov bolo rozlišovanie medzi vstupnými a výstupnými modelmi. Modely CCR a BCC preto nazývame orientované. Aditívny model patrí medzi tzv. neorientované modely, ktoré uvažujú slacky vo vstupoch a výstupoch naraz. Aditívny model pre DMU$_o$ vyzerá nasledovne

$$
\begin{aligned}
(\text{AD-OM-CRS})_o \quad \max \quad & e^T s_x + e^T s_y \\
\text{s.t.} \quad & \sum_{j=1}^{n} x_j \lambda_j + s_x = x_o, \\
& \sum_{j=1}^{n} y_j \lambda_j - s_y = y_o, \\
& \lambda \geq 0_n, s_x \geq 0_m, s_y \geq 0_s.
\end{aligned}
$$

Riešenie úlohy AD-OM-CRS$_o$ interpretujeme takto:

- Ak v optimálnom riešení úlohy $(\text{AD-OM-CRS})_o$ platí, že $s_x^\star = 0$ a $s_y^\star = 0$, útvar DMU_o je **efektívny**.
- Ak v optimálnom riešení úlohy $(\text{AD-OM-CRS})_o$ platí, že $s_x^\star \neq 0$ alebo $s_y^\star \neq 0$, útvar DMU_o je **neefektívny**.

Pridaním ohraničenia $\sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 1$ k podmienkam úlohy $(\text{AD-OM-CRS})_o$ dostaneme aditívny model $(\text{AD-OM-VRS})_o$, ktorý odpovedá variabilným výnosom z rozsahu.

Oproti CCR a BCC je najvýraznejšou zmenou v $(\text{AD-OM-CRS})_o$ a $(\text{AD-OM-VRS})_o$ účelová funkcia. Narozdiel od CCR a BCC modelov pri riešení súvisiacich lineárnych programov nedostávame efektivitu, tá sa preto musí dopočítavať inými metódami.

1.4.1 Optimálny vzor

Nech $\lambda^\star, s_x^\star, s_y^\star$ je optimálne riešenie $(\text{AD-OM})_o$ pre (x_o, y_o). Potom bod $(\widehat{x}_o, \widehat{y}_o)$, kde

$$
\widehat{x}_o := \sum_{j=1}^{n} x_j \lambda_j^\star = x_o - s_x^\star \quad \widehat{y}_o := \sum_{j=1}^{n} y_j \lambda_j^\star = y_o + s_y^\star,
$$

je **efektívnym vzorom** (x_o, y_o) pri aditívnom modeli (odpovedajúcom riešeniu $\lambda^\star$).

1.5 Príklad

V nasledujúcom príklade aplikujeme na dáta z [3] vstupný CCR model predstavený v tejto kapitole. V tabuľke 1 máme údaje z verejných knižníc z 23 mestských častí Tokia z roku 1986. Za vstupy boli určené rozloha knižnice (v 1000m^2), počet kníh (v tisícoch), počet zamestnancov a populácia danej mestskej časti (v tisícoch). Za výstupy bol určený počet zaregistrovaných ľudí (v tisícoch) a počet výpožičiek (v tisícoch).

Ozn.	Mestská časť	Rozloha	Knihy	Zam.	Populácia	Užívatelia	Výpožičky
K1	Chiyoda	2.249	163.523	26	49.196	5.561	105.321
K2	Chuo	4.617	338.671	30	78.599	18.106	314.682
K3	Taito	3.873	281.655	51	176.381	16.498	542.349
K4	Arakawa	5.541	400.993	78	189.397	30.810	847.872
K5	Minato	11.381	363.116	69	192.235	57.279	758.704
K6	Bunkyo	10.086	541.658	114	194.091	66.137	1438.746
K7	Sumida	5.434	508.141	61	228.535	35.295	839.597
K8	Shibuya	7.524	338.804	74	238.691	33.188	540.821
K9	Meguro	5.077	511.467	84	267.385	65.391	1562.274
K10	Toshima	7.029	393.815	68	277.402	41.197	978.117
K11	Shinjuku	11.121	509.682	96	330.609	47.032	930.437
K12	Nakano	7.072	527.457	92	332.609	56.064	1345.185
K13	Shinagawa	9.348	601.594	127	356.504	69.536	1164.801
K14	Kita	7.781	528.799	96	365.844	37.467	1348.588
K15	Koto	6.235	394.158	77	389.894	57.727	1100.779
K16	Katushika	10.593	515.624	101	417.513	46.160	1070.488
K17	Itabashi	10.866	566.708	118	503.914	102.967	1707.645
K18	Edogawa	6.500	467.617	74	517.318	47.236	1223.026
K19	Suginami	11.469	768.484	103	537.746	84.510	2299.694
K20	Nerima	10.868	669.996	107	590.601	69.576	1901.465
K21	Adachi	10.717	844.949	120	622.550	89.401	1909.698
K22	Ota	19.716	1258.981	242	660.164	97.941	3055.193
K23	Setagaya	10.888	1148.863	202	808.369	191.166	4096.300

Tabuľka 1: Východzie dáta

Na výpočet sme použili program Octave, v ktorom sme naskriptovali CCR modely predstavené v odseku 1.2. Lineárne programy boli riešené pomocou metódy vnútorného bodu. Výsledné efektivity pre vstupné CCR modely uvádzame v tabuľke 2.

Ozn.	CCR-I bez pop.	CCR-I s pop.
K1	0.226	0.350
K2	0.638	0.792
K3	0.540	0.573
K4	0.593	0.719
K5	0.911	1.000
K6	0.745	1.000
K7	0.650	0.697
K8	0.539	0.580
K9	0.907	1.000
K10	0.705	0.705
K11	0.539	0.569
K12	0.719	0.758
K13	0.657	0.747
K14	0.715	0.722
K15	0.844	0.844
K16	0.582	0.582
K17	1.000	1.000
K18	0.787	0.787
K19	1.000	1.000
K20	0.849	0.849
K21	0.787	0.787
K22	0.681	0.785
K23	1.000	1.000

Tabuľka 2: Výsledné efektivity

Použitím CCR modelu bez uvažovania populácie dostávame 3 efektívne DMU (K17, K19, K23). Po pridaní populácie ako ďalšieho vstupu sa množina prípustných riešení úlohy $(\text{CCR-I-OM})_o$ zväčší, teda niektorým DMU sa môže zvýšiť efektivita, a následne aj klasifikácia z neefektívnych na efektívne [4]. V našom prípade pribudli 3 efektívne DMU (K5, K6, K9).

Ozn.	Rozloha	Knihy	Zam.	Užívatelia	Výpožičky	Efektivita
K1	0.192	3.537	0	0	13.840	0.226
K2	1.913	107.170	0	0	73.293	0.638
K3	0.650	0	0.798	8.812	0	0.540
K4	1.032	0	4.445	8.758	0	0.593
K5	5.829	0	0	0	341.054	0.911
K6	3.690	0	13.977	1.006	0	0.745
K7	0.386	73.602	0	0	0	0.650
K8	0.554	0	1.862	0	9.582	0.539
K9	0	15.200	0	5.597	0	0.907
K10	2.210	0	0	3.827	0	0.705
K11	2.536	0	0.592	0	0	0.539
K12	1.422	0	0	6.335	0	0.719
K13	0	0	5.940	0	107.813	0.657
K14	1.981	0	2.163	25.469	0	0.715
K15	0.609	0	1.483	0	0	0.844
K16	3.323	0	6.021	3.798	0	0.582
K17	0	0	0	0	0	1.000
K18	0.784	0	0	5.248	0	0.787
K19	0	0	0	0	0	1.000
K20	2.639	0	0	12.651	0	0.849
K21	3.345	127.890	0	0	5.984	0.787
K22	5.298	0	14.047	44.639	0	0.681
K23	0	0	0	0	0	1.000

Tabuľka 3: Tabuľka slackových premenných pre vstupný CCR bez populácie

Analýzou výsledkov uvedených v tabuľkách 3 a 4 vidíme, že všetky neefektívne útvary majú aspoň jeden nenulový slack. Teda, každý neefektívny útvar sa projektuje na hranicu pseudoefektívnosti, a teda hodnota účelovej funkcie, ktorá v modeli k danému DMU vyšla, je jeho pseudoefektivitou. Navyše, každé efektívne DMU má všetky slacky nulové, a teda vďaka použitej metóde vnútorného bodu vieme s určitosťou, že žiadne nie je pseudoefektívne.

Ozn.	Rozloha	Knihy	Zam.	Populácia	Užívatelia	Výpožičky	Efektivita
K1	0	13.287	0	0	0	14.826	0.350
K2	0.859	145.656	0	0	0	0	0.792
K3	0.418	0	0	0	8.557	0	0.573
K4	0	0	2.222	0	6.774	0	0.719
K5	0	0	0	0	0	0	1.000
K6	0	0	0	0	0	0	1.000
K7	1.409	106.998	0	0	2.701	0	0.697
K8	0.014	0	4.772	0	0	0	0.580
K9	0	0	0	0	0	0	1.000
K10	2.210	0	0	0.296	3.827	0	0.705
K11	2.114	0	2.232	0	0	0	0.569
K12	1.308	0	0	0	4.944	0	0.758
K13	0	0	11.123	0	0	224.318	0.747
K14	1.879	0	1.730	0	25.445	0	0.722
K15	0.609	0	1.483	66.286	0	0	0.844
K16	3.323	0	6.021	31.854	3.798	0	0.582
K17	0	0	0	0	0	0	1.000
K18	0.784	0	0	148.729	5.248	0	0.787
K19	0	0	0	0	0	0	1.000
K20	2.639	0	0	101.979	12.651	0	0.849
K21	3.345	127.890	0	112.047	0	5.984	0.787
K22	1.649	0	0	0	42.960	0	0.785
K23	0	0	0	0	0	0	1.000

Tabuľka 4: Tabuľka slackových premenných pre vstupný CCR s populáciou

Na dáta z tabuľky 1 sme teda aplikovali dva prístupy, ktoré sa od seba líšili len tým, že v druhom sme medzi vstupy zahrnuli aj populáciu.

Uvažovať populáciu ako vstup ovplyvniteľný manažérskymi rozhodnutiami DMU ale nemusí byť správne a takéto použitie modelov môže dávať skreslené výsledky efektivít. V DEA existuje možnosť úpravy modelov tak, aby odrážali fakt, že niektoré vstupy a výstupy nie je možné ovplyvniť. My sa nimi budeme zaoberať v nasledujúcej kapitole.

2 Modely s obmedzeniami na premenné

Všetky doteraz predstavené modely nepriamo uvažovali jeden dôležitý predpoklad - všetky vstupy a výstupy sú plne kontrolovateľné samotnými DMU. Pri niektorých aplikáciách môžu ale existovať vstupy a výstupy také, ktoré sa ovplyvniť nedajú vôbec, alebo len veľmi málo, prípadne sa ovplyvniť dajú len vo veľkom časovom horizonte. V tejto kapitole sa budeme venovať práve týmto premenným, úprave štandardných modelov pre ich použitie a aplikujeme ich na príklad o knižniciach z podkapitoly 1.5.

2.1 Symbolika

Najprv zavedieme dodatočnú symboliku, ktorú budeme používať spolu so štandardnou. Hodnoty nových druhov vstupov, alebo výstupov pre jednotlivé DMU_j, budeme označovať x_j^N a y_j^N, kde index N naznačuje, že daný vektor odpovedá vstupom, alebo výstupom, ktoré nie sú úplne pod kontrolou v danej technológii a teda bude s nimi narábané neštandardným spôsobom [4].

Ten spočíva v tom, že pri orientovaných modeloch tieto hodnoty nebudú faktorizované premennými θ alebo ψ. Rovnako nebudú vstupovať do druhej fázy, v prípade hľadania efektívneho vzoru. Pri neorientovaných modeloch zas nebudú zahrnuté v účelovej funkcii daného lineárneho programu.

Do ohraničení modelov budú vstupovať tak, že sa pridajú k podmienkam prípustnosti buď v tvare nerovností - tieto budeme nazývať neoplvyniteľné

$$\sum_{j=1}^{n} x_j^N \lambda_j \leq x_o^N,$$
$$\sum_{j=1}^{n} y_j^N \lambda_j \geq y_o^N.$$

alebo v tvare rovností - tieto budeme nazývať neriaditeľné

$$\sum_{j=1}^{n} x_j^N \lambda_j = x_o^N,$$
$$\sum_{j=1}^{n} y_j^N \lambda_j = y_o^N.$$

V prípade využitia len jedného typu obmedzených premenných v modeli zostávame pri zavedenej symbolike - t.j. x_j^N a y_j^N. V prípade využitia oboch druhov obmedzení budeme kvôli odlíšeniu neovplyvniteľné vstupy a výstupy označovať x_j^{ND} a y_j^{ND}, neriaditeľné x_j^{NC} a y_j^{NC}. Navyše, v niektorej literatúre je možné nájsť označenie neovplyvniteľných premenných ako z_j pre DMU$_j$.

2.2 Príklady

Pre ilustráciu uvádzame niekoľko príkladov z publikovaných článkov, aké vstupy a výstupy môžeme považovať za neovplyvniteľné.

Lekárne: V článku [7] sa autori zaoberali zisťovaním efektivity siete lekární. Po prvotnom zvážení ovplyvniteľných vstupov uvažovali nasledovné - výška nájomného, náklady na mzdy, výdavky na údržbu, výdavky na marketing, rôzne každodenné výdavky a rozloha obchodu. Neskôr prvých 5 spojili do jedného vstupu - operačné náklady. Za neovplyvniteľné vstupy určili umiestnenie lekárne (kvantifikované ako počet konkurenčných lekární v kilometrovom okruhu) a vek lekárne. Ako výstupy zas počet zákazníkov na jednotku času a obrat.
Efektivitu zisťovali pomocou CCR modelu tromi rôznymi modifikáciami vstupov:

- V prvom prípade boli v modeli použité len ovplyvniteľné vstupy - operačné náklady a rozloha lekárne
- V druhom prípade boli k operačným nákladom a rozlohe lekárne pridané aj umiestnenie lekárne a vek lekárne ako štandardné vstupy
- V treťom prípade boli umiestnenie a vek lekárne pridané ako neovplyvniteľné vstupy

Autori si následne všimli, že medzi efektivitami rôznych prípadov platia určité vzťahy. My sa nimi budeme zaoberať neskôr v tejto kapitole.

Školstvo: V článku [12] sa autorka venuje efektivite vysokoškolského vzdelávania vo vybraných štátoch Európy. Autorka ako ovplyvniteľný vstup určila výdavky HDP na financovanie siete vysokých škôl v percentách, ako výstupy percento ľudí s vysokoškolským diplomom a zamestnanosť ľudí s diplomom v percentách. Neovplyvniteľné vstupy uvažovala 3, a to HDP na obyvateľa, „dosiahnuté vzdelanie rodičov“[1] a pomer verejných výdavkov k celkovým výdavkom na vzdelanie.

Papierne: V článku [1] kolektív autorov zisťoval „ekologickú“ efektivitu papierní pozdĺž rieky Huai v Čínskej ľudovej republike. Autori uvažovali ako vstupy počet zamestnancov a kapitál papierne, výstupy vyprodukované množstvo papiera (v tonách) a BOD[2]. Vo všeobecnosti platí, že čím je tento údaj vyšší, tým viac je voda znečistenejšia. Preto je tento výstup neželateľný. Neovplyvniteľný vstup určili jediný - kvóta na BOD. Štandardné modely predpokladajú pozitívny dopad neovplyniteľných vstupov na výstupy - tento predpoklad neplatí za prítomnosti neželateľných výstupov. Pre dané hodnoty ovplyvniteľných vstupov, DMU s väčšou kvótou na BOD produkuje viac znečistenia, teda neovplyvniteľný vstup - kvóta - má negatívny dopad na „ekologickú“ efektivitu. Autori z tohoto dôvodu vytvorili vlastný model lineárneho programovania založený na DEA.

[1] z anglického Parental Educational Attainment, percento populácie vo veku 45-54, ktoré dosiahlo aspoň vyššie stredoškolské vzdelanie

[2] z anglického Biochemical Oxygen Demand, biochemická spotreba kyslíka - BOD je údaj, ktorý udáva množstvo rozpusteného kyslíka, potrebného aeróbnym biologickým organizmom k úplnej oxidácii biologicky odbúrateľných látok obsiahnutých v skúmanej vode, pri danej teplote a za danú časovú jednotku [10].

2.3 Modifikácie štandardných modelov pre neovplyvniteľné premenné

2.3.1 CCR a BCC modely

Tieto modely dokážeme podľa predošlej kapitoly upraviť na tvar s obmedzenými premennými, stačí pri ohraničeniach pre zodpovedajúce vstupy a výstupy odstrániť faktor θ alebo ψ v prípade vstupného alebo výstupného modelu, prípadne aj zmeniť nerovnosť na rovnosť.

Všeobecný tvar CCR modelu zahŕňajuci neovplyvniteľné a neriaditeľné premenné potom vyzerá nasledovne:

$$
\begin{aligned}
(\text{CCR-I-OM-N})_o \quad \min_{\theta,\lambda} \quad & \theta \\
\text{s.t.} \quad & \sum_{j=1}^{n} x_j \lambda_j \le \theta x_o, \\
& \sum_{j=1}^{n} x_j^{ND} \lambda_j \le x_o^{ND}, \\
& \sum_{j=1}^{n} x_j^{NC} \lambda_j = x_o^{NC}, \\
& \sum_{j=1}^{n} y_j \lambda_j \ge y_o, \\
& \sum_{j=1}^{n} y_j^{ND} \lambda_j \ge y_o^{ND}, \\
& \sum_{j=1}^{n} y_j^{NC} \lambda_j = y_o^{NC}, \\
& \lambda \ge 0_n
\end{aligned}
$$

a pre výstupný CCR

$$
\begin{aligned}
(\text{CCR-O-OM-N})_o \quad \max_{\psi,\lambda} \quad & \psi \\
\text{s.t.} \quad & \sum_{j=1}^{n} x_j\lambda_j \leq x_o, \\
& \sum_{j=1}^{n} x_j^{ND}\lambda_j \leq x_o^{ND}, \\
& \sum_{j=1}^{n} x_j^{NC}\lambda_j = x_o^{NC}, \\
& \sum_{j=1}^{n} y_j\lambda_j \geq \psi y_o, \\
& \sum_{j=1}^{n} y_j^{ND}\lambda_j \geq y_o^{ND}, \\
& \sum_{j=1}^{n} y_j^{NC}\lambda_j = y_o^{NC}, \\
& \lambda \geq 0_n
\end{aligned}
$$

Všeobecný tvar BCC modelov sa líši len pridaním dodatočnej podmienky $\sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 1$.

2.3.2 Aditívny model

Pri aditívnom modeli zase slacky pre neoplyvniteľné a neriaditeľné premenné nevstupujú do účelovej funkcie.

$$
\begin{aligned}
(\text{AD-OM-N})_o \quad \max \quad & e^T s_x + e^T s_y \\
\text{s.t.} \quad & \sum_{j=1}^{n} x_j \lambda_j + s_x = x_o, \\
& \sum_{j=1}^{n} x_j^{ND} \lambda_j + s_x^{ND} = x_o^{ND}, \\
& \sum_{j=1}^{n} x_j^{NC} \lambda_j = x_o^{NC}, \\
& \sum_{j=1}^{n} y_j \lambda_j - s_y = y_o, \\
& \sum_{j=1}^{n} y_j^{ND} \lambda_j - s_y^{ND} = y_o^{ND}, \\
& \sum_{j=1}^{n} y_j^{NC} \lambda_j = y_o^{NC}, \\
& \sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 1, \\
& \lambda \geq 0_n, \\
& s_x, s_x^{ND} \geq 0_m, \\
& s_y, s_y^{ND} \geq 0_s.
\end{aligned}
$$

2.4 Vlastnosti modelov s neovplyvniteľnými premennými

2.4.1 Vzťah optimálnych riešení vstupného a výstupného CCR modelu

V prípade CCR modelov bez obmedzení na premenné platí nasledovné tvrdenie (viď Veta 13 z [4]):

Ak $(\theta^\star, \lambda^\star)$ je optimálne riešenie úlohy $(\text{CCR-I-OM})_o$ pre DMU_o, potom $(\frac{1}{\theta^\star}, \frac{\lambda^\star}{\theta^\star})$ je optimálne riešenie úlohy $(\text{CCR-O-OM})_o$ pre DMU_o. Naopak, ak $(\psi^\star, \lambda^\star)$ je optimálne riešenie úlohy $(\text{CCR-O-OM})_o$ pre DMU_o, potom $(\frac{1}{\psi^\star}, \frac{\lambda^\star}{\psi^\star})$ je optimálne riešenie úlohy $(\text{CCR-I-OM})_o$ pre DMU_o.

My dokážeme, že v prípade zavedení dodatočných obmedzení na premenné analógia takéhoto tvrdenia pre modely s neovplyvniteľnými resp. neriaditeľnými premennými neplatí. K tomu nám stačí ukázať, že ak $(\theta^\star, \lambda^\star)$ je optimálne riešenie úlohy $(\text{CCR-I-OM-D})_o$, $(\frac{1}{\theta^\star}, \frac{\lambda^\star}{\theta^\star})$ už optimálnym riešením $(\text{CCR-O-OM-D})_o$ byť nemusí. Aplikujme najprv myšlienku dôkazu Vety 13 z [4] na našu situáciu.

Nech $(\text{CCR-I-OM-D})_o$ je vstupným CCR modelom v obálkovej forme s vektorom vstupov x_j a ďalším vektorom neoplyvniteľných vstupov x_j^N pre DMU_j. Potom zodpovedajúci model môžeme napísať nasledovne:

$$
\begin{aligned}
(\text{CCR-I-OM-D})_o \quad & \min_{\theta,\lambda} \quad \theta && (2)\\
& \text{s.t.} \quad \sum_{j=1}^{n} x_j \lambda_j \leq \theta x_o, && (3)\\
& \qquad \sum_{j=1}^{n} x_j^N \lambda_j \leq x_o^N, && (4)\\
& \qquad \sum_{j=1}^{n} y_j \lambda_j \geq y_o, && (5)\\
& \qquad \lambda \geq 0_n && (6)
\end{aligned}
$$

Nech $\theta^\star$ je optimálnym riešením tejto úlohy. Ohraničenia (3) až (5) predelíme θ a označíme $\psi := \frac{1}{\theta}$, $\bar{\lambda_j} = \frac{1}{\theta}\lambda_j$. Dostaneme:

$$
\begin{aligned}
& \max \quad \psi && (7)\\
& \text{s.t.} \quad \sum_{j=1}^{n} x_j \bar{\lambda_j} \leq x_o && (8)\\
& \qquad \sum_{j=1}^{n} x_j^N \bar{\lambda_j} \leq \psi x_o^N && (9)\\
& \qquad \sum_{j=1}^{n} y_j \bar{\lambda_j} \geq \psi y_o && (10)\\
& \qquad \bar{\lambda} \geq 0_n && (11)
\end{aligned}
$$

Zrejme pre optimálne riešenie úlohy (7) - (11) platí, že $\frac{1}{\psi^\star} = \theta^\star$.

Pri daných ohraničeniach na vstupy by však výstupný model vyzeral nasledovne:

$$(\text{CCR-O-OM-D})_o \quad \max_{\psi,\lambda} \quad \psi \tag{12}$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{j=1}^{n} x_j \lambda_j \leq x_o, \tag{13}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_j^N \lambda_j \leq x_o^N, \tag{14}$$

$$\sum_{j=1}^{n} y_j \lambda_j \geq \psi y_o, \tag{15}$$

$$\lambda \geq 0_n. \tag{16}$$

Označme $\psi^\star$ optimálne riešenie v (7) - (11) a $\psi^{\star\star}$ optimálne riešenie v (12) - (16). Pre $\psi \geq 1$ je množina prípustných riešení úlohy (12) - (16) zrejme podmnožinou množiny prípustných riešení úlohy (7) - (11). Z toho vyplýva, že pre optimálnu hodnotu $\psi^{\star\star}$ účelovej funkcie v (12) - (16) platí $\psi^{\star\star} \leq \psi^\star = \frac{1}{\theta^\star}$ Teda pre efektivity platí $\theta^\star \leq \frac{1}{\psi^{\star\star}}$.

Optimálne riešenie vstupného CCR modelu s neovplyvniteľnými vstupmi teda nie je nutne optimálnym riešením výstupného CCR modelu s rovnakou klasifikáciou vstupov a výstupov, nemôžeme preto očakávať, že efektivity budú pri oboch modeloch rovnaké. Skutočnosť, že vo vzťahu $\theta^\star \leq \frac{1}{\psi^{\star\star}}$ môže nastať ostrá nerovnosť dokumentujeme nasledujúcim príkladom [4]:

Uvažujme nasledujúcu situáciu

	Vstup 1	Vstup 2	Výstup
DMU_1	1	0.5	1
DMU_2	2	0.5	1

Vstupný CCR model v prípade len prvého vstupu a výstupu nám dáva nasledovné efektivity: $\theta_1 = 1, \theta_2 = 0.5$. Výstupný $\psi_1 = 1, \psi_2 = 2$ - platia teda rovnosti $\theta_1 = \frac{1}{\psi_1} = 1$ a $\theta_2 = \frac{1}{\psi_2} = 0.5$. Pri zahrnutí vstupu 2 ako neriaditeľného vstupu sú hodnoty efektivít pre DMU_1 rovnaké ako v prípade bez vstupu 2; pre DMU_2 vychádzajú efektivity nasledovne: $\theta_2 = 0.5 \neq \frac{1}{\psi_2} = 1$.

K rovnakému záveru dospejeme analogickým postupom v prípade neovplyvniteľných výstupov. Takisto aj v prípade nekontrolovateľných vstupov alebo výstupov.

2.4.2 Vzťahy medzi efektivitami

Keď v modeli zmeníme klasifikáciu premenných, zmeníme tým ohraničenia modelu a teda aj množinu prípustných riešení príslušnej úlohy lineárneho programovania. Preto výsledná efektivita DMU nemusí byť po zmene rovnaká. Na príklade vstupného CCR modelu nás bude zaujímať, ako vplýva zmena klasifikácie vstupov na efektivitu.

Uvažujme postupne štandardný vstupný CCR model, vstupný CCR model s pridanými neovplyvniteľnými vstupmi, a pridanými neriaditeľnými vstupmi:

$$
\begin{array}{lll}
\min \quad \theta_1 & \min \quad \theta_2 & \min \quad \theta_3 \\
\sum_{j=1}^{n} x_j \lambda_j \leq \theta x_o & \sum_{j=1}^{n} x_j \lambda_j \leq \theta x_o & \sum_{j=1}^{n} x_j \lambda_j \leq \theta x_o \\
 & \sum_{j=1}^{n} x_j^N \lambda_j \leq x_o^N & \sum_{j=1}^{n} x_j^N \lambda_j = x_o^N \\
\sum_{j=1}^{n} y_j \lambda_j \geq y_o & \sum_{j=1}^{n} y_j \lambda_j \geq y_o & \sum_{j=1}^{n} y_j \lambda_j \geq y_o \\
\lambda \geq 0_n & \lambda \geq 0_n & \lambda \geq 0_n
\end{array}
$$

Množiny prípustných riešení týchto 3 modelov v horeuvedenom poradí môžeme zapísať nasledovne:

$$A_1 = \{\theta, \lambda \mid X\lambda \leq \theta x_o,\ Y\lambda \geq y_o\} \tag{17}$$

$$A_2 = \{\theta, \lambda \mid X\lambda \leq \theta x_o,\ X^N\lambda \leq x_o^N,\ Y\lambda \geq y_o\} \tag{18}$$

$$A_3 = \{\theta, \lambda \mid X\lambda \leq \theta x_o,\ X^N\lambda = x_o^N,\ Y\lambda \geq y_o\} \tag{19}$$

Tieto tri množiny sa líšia len v jednej podmienke, týkajúcej sa neovplyvniteľného vstupu. Zrejme $A_3 \subseteq A_2 \subseteq A_1$. Z toho vyplýva, že pre efektivity platí $\theta_1 \leq \theta_2 \leq \theta_3$. Preto, v prípade zmeny klasifikácie niektorých vstupov z neovplyvniteľných na neriaditeľné môžeme očakávať všeobecný nárast efektivít DMU.

2.5 Príklad

V tejto podkapitole opäť využijeme príklad z podkapitoly 1.5. Na použité dáta teraz aplikujeme vstupný CCR model, pričom populáciu uvažujeme v prvom prípade ako neovplyvniteľný a v druhom prípade ako neriaditeľný vstup. Výsledky uvádzame v tabuľke 5.

	CCR-I bez pop.	CCR-I s ND pop.	CCR-I s NC pop.	CCR-I s pop.
K1	0.226	0.226	0.301	0.350
K2	0.638	0.638	0.643	0.792
K3	0.540	0.540	0.651	0.573
K4	0.593	0.593	0.618	0.719
K5	0.911	1.000	1.000	1.000
K6	0.745	1.000	1.000	1.000
K7	0.650	0.650	0.710	0.697
K8	0.539	0.539	0.700	0.580
K9	0.907	1.000	1.000	1.000
K10	0.705	0.705	0.793	0.705
K11	0.539	0.539	0.650	0.569
K12	0.719	0.719	0.773	0.758
K13	0.657	0.657	0.687	0.747
K14	0.715	0.715	0.800	0.722
K15	0.844	0.844	1.000	0.844
K16	0.582	0.582	0.766	0.582
K17	1.000	1.000	1.000	1.000
K18	0.787	0.787	1.000	0.787
K19	1.000	1.000	1.000	1.000
K20	0.849	0.849	0.958	0.849
K21	0.787	0.787	0.942	0.787
K22	0.681	0.681	0.701	0.785
K23	1.000	1.000	1.000	1.000

Tabuľka 5: Výsledky efektivít vstupných CCR

V prvom a druhom stĺpci sú uvedené vypočítané efektivity pre vstupný CCR model bez uvažovania populácie z kapitoly 1.5. Dostali sme 3 efektívne DMU. V druhom stĺpci sú uvedené vypočítané efektivity pre vstupný CCR model, v ktorom uvažujeme populáciu ako neovplyvniteľný vstup. V tomto prípade sme dostali 6 efektívnych DMU (K5, K6, K9, K17, K19, K23).

Efektivitám z prvého a druhého stĺpca odpovedá z kapitoly 2.4.2 pár θ_1 a θ_2. Na príklade vidíme, že vzťah $\theta_1 \leq \theta_2$ platí pre všetky DMU. Pridanie neovplyvniteľného vstupu teda môže spôsobiť nárast efektivít niektorých DMU, ale pokles nie.
V treťom stĺpci sú uvedené vypočítané efektivity pre vstupný CCR model, v ktorom uvažujeme populáciu ako neriaditeľný vstup. Efektívných DMU je 8 (K5, K6, K9, K15, K17, K18, K19, K23).

Efektivitám z druhého a tretieho stĺpca odpovedá z kapitoly 2.4.2 pár θ_2 a θ_3. Na príklade opäť vidíme, že vzťah $\theta_2 \leq \theta_3$ platí pre všetky DMU.

Tiež je možné vidieť, že efektivity v štvrtom stĺpci, ktorý zodpovedá vstupnému CCR modelu s populáciou ako riaditeľným vstupom, nemajú žiadny súvis s efektivitami v treťom stĺpci. Napríklad pre K1 je efektivita pre model s neriaditeľnou populáciou 0.301 menšia ako pri modeli s riaditeľnou populáciou, kedy je 0.350. Naopak, pre K3 je efektivita v treťom stĺpci 0.651 väčšia ako vo štvrtom stĺpci 0.573.

V tabuľkách 6 a 7 uvádzame vypočítané slacky pre jednotlivé DMU. Z nich je vidieť, že všetky DMU s efektivitou rovnou 1 sú efektívne, nakoľko majú všetky slacky nulové a tieto boli získané metódou vnútorného bodu.

Ozn.	Rozloha	Knihy	Zam.	Populácia	Užívatelia	Výpožičky	Efektivita
K1	0.192	3.537	0	25.681	0	13.840	0.226
K2	1.913	107.170	0	2.036	0	73.293	0.638
K3	0.650	0	0.798	69.353	8.812	0	0.540
K4	1.032	0	4.445	22.077	8.758	0	0.593
K5	0	0	0	0	0	0	1.000
K6	0	0	0	0	0	0	1.000
K7	0.386	73.602	0	48.547	0	0	0.650
K8	0.554	0	1.862	76.271	0	9.582	0.539
K9	0	0	0	0	0	0	1.000
K10	2.210	0	0	82.089	3.827	0	0.705
K11	2.536	0	0.592	121.102	0	0	0.539
K12	1.422	0	0	65.757	6.335	0	0.719
K13	0	0	5.940	32.600	0	107.813	0.657
K14	1.981	0	2.163	99.712	25.469	0	0.715
K15	0.609	0	1.483	127.081	0	0	0.844
K16	3.323	0	6.021	206.262	3.798	0	0.582
K17	0	0	0	0	0	0	1.000
K18	0.784	0	0	259.070	5.248	0	0.787
K19	0	0	0	0	0	0	1.000
K20	2.639	0	0	191.412	12.651	0	0.849
K21	3.345	127.890	0	244.507	0	5.984	0.787
K22	5.298	0	14.047	57.248	44.639	0	0.681
K23	0	0	0	0	0	0	1.000

Tabuľka 6: Tabuľka slackových premenných pre model s neovplyvniteľnou populáciou

Ozn.	Rozloha	Knihy	Zam.	Populácia	Užívatelia	Výpožičky	Efektivita
K1	0.052	0.929	0	0	0	30.891	0.301
K2	1.913	107.735	0	0	0	74.645	0.643
K3	0.264	0	3.028	0	6.339	0	0.651
K4	0.910	0	5.289	0	7.971	0	0.618
K5	0	0	0	0	0	0	1.000
K6	0	0	0	0	0	0	1.000
K7	0.524	89.819	0	0	0	0	0.710
K8	1.582	0	6.743	0	0	115.659	0.700
K9	0	0	0	0	0	0	1.000
K10	1.983	0	1.527	0	1.441	0	0.793
K11	1.814	0	0.952	0	0	0	0.650
K12	1.099	0	1.428	0	4.319	0	0.773
K13	0	0	6.392	0	0	122.453	0.687
K14	1.469	0	5.390	0	21.913	0	0.800
K15	0	0	0	0	0	0	1.000
K16	2.308	0	11.222	0	0	0	0.766
K17	0	0	0	0	0	0	1.000
K18	0	0	0	0	0	0	1.000
K19	0	0	0	0	0	0	1.000
K20	2.242	0	0	0	8.849	0	0.958
K21	2.068	117.004	0	0	0	168.329	0.942
K22	5.029	0	16.175	0	42.597	0	0.701
K23	0	0	0	0	0	0	1.000

Tabuľka 7: Tabuľka slackových premenných pre model s neriaditeľnou populáciou

Na druhej strane vidíme, že všetky neefektívne knižnice majú aspoň jeden slack kladný a teda ich hodnoty uvedené v stĺpci efektivita predstavujú vlastne pseudo-efektivitu. To znamená, že nie všetky zdroje neefektivity sú zachytené v tejto hodnote. Tabuľky optimálnych vzorov a lámbd pre jednotlivé DMU uvádzame v tabuľkách v prílohe. Z nich sme navyše podľa vzorca (1) z podkapitoly 1.2.3 dopočítali efektivity, ktoré zachytávajú všetky zdroje neefektivity. Tie sú tiež uvedené v prílohe.

2.6 Iné prístupy k neovplyvniteľným vstupom a výstupom

Vo svetovej literatúre existuje množstvo článkov zaoberajúcich sa okrem aplikácií DEA modelov s neovplyvniteľnými premennými, aj ich teoretickej stránke.

Napríklad, v článku [13] autori uvažujú rozdelenie neovplyvniteľných faktorov na dve skupiny - **externé**, ktoré ovplyvňujú produkčný proces, ale nemôžeme ich považovať za jeho súčasť, a teda nemali by vstupovať do definície množiny produkčných možností - príkladom môže byť úroveň konkurencie alebo veľkosť populácie v prípade retailovej siete; a **interné**, ktoré môžu byť považované za súčasť produkčného procesu a teda by mali byť zahrnuté v definícii množiny produkčných možností - príkladmi sú kvóty niektorých výstupov na mliekarenskej farme, dosiahnuté vzdelanie uchádzačov počas príjmacieho konania v prípade škôl. Neovplyvniteľné faktory by potom mali byť modelované práve na základe tejto klasifikácie.

V literatúre možno nájsť modely, ktoré okrem nástrojov lineárneho programovania využívajú aj lineárnu regresiu. Príkladom je viacfázový Ruggiero model, ktorý navrhol Ruggiero [9] a uvádzajú ho autori v [6]. Model pozostáva z troch fáz:
V prvej fáze sa použijú len ovplyvniteľné vstupy a výstupy a rieši sa štandardný BCC model, t.j.:

$$
\begin{aligned}
FS := \min_{\theta,\lambda} \quad & \theta \\
\text{s.t.} \quad & \sum_{j=1}^{n} x_j\lambda_j \leq \theta x_o, \\
& \sum_{j=1}^{n} y_j\lambda_j \geq y_o, \\
& \sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 1, \\
& \lambda \geq 0_n.
\end{aligned}
$$

Predpokladá sa, že počet neovplyvniteľných vstupov je R. FS potom pozostáva z miery efektivity a vplyvu neovplyvniteľných vstupov na produkciu. Tieto dva vplyvy sa rozložia v druhej fáze pomocou lineárnej regresie v rámci nasledujúceho modelu:

$$FS = \beta_0 + \beta_1 z_1 + \ldots + \beta_R z_R + \epsilon$$

Ruggiero navrhol skonštruovať všeobecnú mieru vplyvu neovplyvniteľných vstupov takto: $Z = \sum_{j=1}^{R} \beta_j z_j$ [9]. Tá sa následne použije v tretej fáze v modeli:

$$\begin{aligned}
\min_{\theta,\lambda} \quad & \theta \\
\text{s.t.} \quad & \sum_{j=1}^{n} x_j \lambda_j \leq \theta x_o, \\
& \sum_{j=1}^{n} y_j \lambda_j \geq y_o, \\
& \lambda_j = 0, ak\ Z_j > z_{ro},\ \forall r = 1, \dots R \\
& \sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 1, \\
& \lambda \geq 0_n.
\end{aligned}$$

Záver

Data Envelopment Analysis poskytuje veľké množstvo možností na meranie efektívností DMU. Prvou úlohou bolo teda predstaviť najzákladnejšie DEA modely - CCR, BCC, aditívny model a popísať, ako pomocou nich zistiť, či je dané DMU efektívne, alebo nie. Toto sme po krátkom predstavení symboliky v kapitole 1.1 spracovali v kapitolách 1.2 až 1.4. Hlavným cieľom našej práce bolo analyzovať neovplyvniteľné a neriaditeľné premenné a ich použitie. Toto sme spolu s príkladmi uviedli v kapitole 2.2. v kapitole 2.3 sme ukázali, ako možno upraviť štandardné modely pre použitie s danými premennými. Analyzovali sme vlastnosti týkajúce sa zmeny hodnoty účelovej funkcie so zmenou klasifikácie premenných. Tieto vlastnosti sú analyzované v podkapitolách 2.4.1 a 2.4.2 a predstavujú naše vlastné výsledky.

Uvedené poznatky sme aplikovali na dáta z [3], naučili sme sa aplikovať jeden z uvedených modelov na príklad z praxe, navyše s použitím vlastných skriptov v programe Octave. Záverom sme v krátkosti uviedli iné prístupy k skúmaným premenným z rôznych článkov zahraničnej literatúry.

Zoznam použitej literatúry

[1] Bian, Y., Hua, Z., Liang, L.: *Eco-efficiency analysis of paper mills along the Huai River: An extended DEA approach.* Omega, The International Journal of Management Science 35 (2007), 578–587.

[2] Charnes, A., Cooper, W.W., Rhodes, E.: *Measuring efficiency of decision making units.* European Journal of Operational Research 2 (1978), 429–444.

[3] Cooper, W. W., Seiford, L. M., Tone, K.: *Data Envelopment Analysis. A Comprehensive Text with Models, Applications, References and DEA-Solver Software.* Kluwer Academic Publishers, Boston, 5th Printing, 2004.

[4] Halická, M.: *DEA modely, učebné texty* FMFI UK, Bratislava, 2014.

[5] Halická, M.: osobná komunikácia, FMFI UK, Bratislava, 2013.

[6] Muñiz, M., Paradi, J., Ruggiero, J., Yang, Z.: *Evaluating alternative DEA models used to control for non-discretionary inputs.* Computers and Operations Research 33 (2006), 1173-1183.

[7] Pande, S., Patel, G.N.: *Assessing the impact of non-discretionary variables on the performance of pharmacy retail stores using DEA approach.* Business Intelligence Journal 5 (2012), 308–318.

[8] Ray, S.C.: *Data Envelopment Analysis: Theory and Techniques for Economics and Operations Research.* Cambridge University Press, 1st published, 2004.

[9] Ruggiero, J.: *Non-discretionary inputs in data envelopment analysis.* European Journal of Operational Research 111 (1998), 461-469.

[10] Sawyer, C.N., McCarty, P.L., Parkin, G.F.: *Chemistry for Environmental Engineering and Science.* McGraw-Hill, New York, 5th Edition, 2003.

[11] Thanassoulis, E.: *Introduction to the Theory and Application of Data Envelopment Analysis: A Foundation Text with Integrated Software.* Springer Science+Business Media, New York, 2nd printing, 2003.

[12] Tóth, R.: *Using DEA to evaluate efficiency of higher education.* Agroinform Publishing House, Budapest, Applied Studies in Agribusiness and Commerce 3 (2009), 79–82.

[13] Vaz, C.B., Camanho, A.S.,Portela, M.C.: *Performance Evaluation Accounting for Non-Discretionary Factors: The Assessment of Retailing Stores Using Data Envelopment Analysis.* Instituto Politécnico de Bragança, 2007.

Prílohy

A. Zdrojové kódy pre program Octave

Verzia bez slackov

```
function [xopt, fopt] = dea(X, Y, o, model, ND, ctrl)
        [m, n] = size(X);
        [k, l] = size(Y);
        param.lpsolver = 2; %use IPM, not Revised Simplex
        if (strcmp(model,"CCR.I") && strcmp(ctrl, "N"))
                [xopt, fopt] = glpk([1; zeros(n,1)], ...
                [[-X(:, o); zeros(k,1)], [X; -Y]], ...
                [zeros(m,1); -Y(:,o)], ...
                [-inf, zeros(1,n)], ...
                repmat(inf, [1,n+1]), ...
                strcat(repmat("U", [1,m+k])), ...
                repmat("C", [1,1+n]), ...
                1, ...
                param);
                return
        elseif (strcmp(model,"CCR.I") && strcmp(ctrl, "D"))
                NDx = ND(ND<=m);
                NDy = ND(ND>=m+1) - m*ones(columns(ND(ND>=m+1)));
                Dx = setxor(NDx, 1:m);
                Dy = setxor(NDy, 1:k);
                xod = X(Dx, o);
                xon = X(NDx, o);
                yod = Y(Dy, o);
                yon = Y(NDy, o);
                XD = X(Dx, :);
                XN = X(NDx, :);
                YD = Y(Dy, :);
                YN = Y(NDy, :);
                xd = columns(Dx);
                xn = columns(NDx);
                yd = columns(Dy);
                yn = columns(NDy);
                [xopt, fopt] = glpk([1; zeros(n,1)], ...
                [[-xod; zeros(xn,1);zeros(yd, 1); zeros(yn, 1)], [XD; XN; -YD; -YN]], ...
                [zeros(xd,1); xon; -yod; -yon], ...
                [-inf, zeros(1,n)], ...
                repmat(inf, [1,n+1]), ...
                strcat(repmat("U", [1,m+k])), ...
                repmat("C", [1,1+n]), ...
                1, ...
```

```
                param);
                return
        elseif (strcmp(model,"CCR.I") && strcmp(ctrl, "C"))
                NDx = ND(ND<=m);
                NDy = ND(ND>=m+1) - m*ones(columns(ND(ND>=m+1)));
                Dx = setxor(NDx, 1:m);
                Dy = setxor(NDy, 1:k);
                xod = X(Dx, o);
                xon = X(NDx, o);
                yod = Y(Dy, o);
                yon = Y(NDy, o);
                XD = X(Dx, :);
                XN = X(NDx, :);
                YD = Y(Dy, :);
                YN = Y(NDy, :);
                xd = columns(Dx);
                xn = columns(NDx);
                yd = columns(Dy);
                yn = columns(NDy);
                [xopt, fopt] = glpk([1; zeros(n,1)], ...
                [[-xod; zeros(xn,1);zeros(yd, 1); zeros(yn, 1)], [XD; XN; -YD; -YN]], ...
                [zeros(xd,1); xon; -yod; -yon], ...
                [-inf, zeros(1,n)], ...
                repmat(inf, [1,n+1]), ...
                strcat(repmat("U", [1,xd]), repmat("S", [1,xn]), repmat("U", [1,yd]), repmat("S", [1,yn])), ...
                repmat("C", [1,1+n]), ...
                1, ...
                param);
                return
        elseif (strcmp(model,"CCR.O") && strcmp(ctrl, "N"))
                [xopt, fopt] = glpk([1; zeros(n,1)], ...
                [[zeros(m,1); Y(:,o)], [X; -Y]], ...
                [X(:,o); zeros(k,1)], ...
                [-inf, zeros(1,n)], ...
                repmat(inf, [1,n+1]), ...
                repmat("U", [1,m+k]), ...
                repmat("C", [1,n+1]), ...
                -1, ...
                param);
                return
        elseif (strcmp(model,"CCR.O") && strcmp(ctrl, "D"))
                NDx = ND(ND<=m);
                NDy = ND(ND>=m+1) - m*ones(columns(ND(ND>=m+1)));
                Dx = setxor(NDx, 1:m);
                Dy = setxor(NDy, 1:k);
                xod = X(Dx, o);
```

```
            xon = X(NDx, o);
            yod = Y(Dy, o);
            yon = Y(NDy, o);
            XD = X(Dx, :);
            XN = X(NDx, :);
            YD = Y(Dy, :);
            YN = Y(NDy, :);
            xd = columns(Dx); %pocet discretionary vstupov
            xn = columns(NDx); %pocet non-discretionary vstupov
            yd = columns(Dy); %pocet discretionary vystupov
            yn = columns(NDy); %pocet non-discretionary vystupov
            [xopt, fopt] = glpk([1; zeros(n,1)], ...
            [[zeros(xd,1); zeros(xn,1);yod; zeros(yn, 1)], [XD; XN; -YD; -YN]],
                ...
            [xod; xon; zeros(yd,1); -yon], ...
            [-inf, zeros(1,n)], ...
            repmat(inf, [1,n+1]), ...
            strcat(repmat("U", [1,m+k])), ...
            repmat("C", [1,1+n]), ...
            -1, ...
            param);
            return
    elseif (strcmp(model,"CCR.O") && strcmp(ctrl, "C"))
            NDx = ND(ND<=m);
            NDy = ND(ND>=m+1) - m*ones(columns(ND(ND>=m+1)));
            Dx = setxor(NDx, 1:m);
            Dy = setxor(NDy, 1:k);
            xod = X(Dx, o);
            xon = X(NDx, o);
            yod = Y(Dy, o);
            yon = Y(NDy, o);
            XD = X(Dx, :);
            XN = X(NDx, :);
            YD = Y(Dy, :);
            YN = Y(NDy, :);
            xd = columns(Dx); %pocet discretionary vstupov
            xn = columns(NDx); %pocet non-discretionary vstupov
            yd = columns(Dy); %pocet discretionary vystupov
            yn = columns(NDy); %pocet non-discretionary vystupov
            [xopt, fopt] = glpk([1; zeros(n,1)], ...
            [[zeros(xd,1); zeros(xn,1);yod; zeros(yn, 1)], [XD; XN; -YD; -YN]],
                ...
            [xod; xon; zeros(yd,1); -yon], ...
            [-inf, zeros(1,n)], ...
            repmat(inf, [1,n+1]), ...
            strcat(repmat("U", [1,xd]), repmat("S", [1,xn]), repmat("U", [1,yd]),
                repmat("S", [1,yn])), ...
            repmat("C", [1,1+n]), ...
```

```
                    -1, ...
                    param);
                    return
          end
end
```

Verzia so slackmi

```
function [xopt, fopt] = deas(X, Y, o, model, ND, ctrl)
          [m, n] = size(X);
          [k, l] = size(Y);
          param.lpsolver = 2; %use IPM, not Revised Simplex
          if (strcmp(model,"CCR.I") && strcmp(ctrl, "N"))
                    [xopt, fopt] = glpk([1; zeros(n,1);zeros(m,1); zeros(k,1)], ...
                    [[-X(:, o); zeros(k,1)], [X; Y], [eye(m); zeros(k,m)], [zeros(m,k); -
                        eye(k)]], ...
                    [zeros(m,1); Y(:,o)], ...
                    [-inf, zeros(1,n+m+k)], ...
                    repmat(inf, [1,n+1+m+k]), ...
                    strcat(repmat("S", [1,m+k])), ...
                    repmat("C", [1,1+n+m+k]), ...
                    1, ...
                    param);
                    return
          elseif (strcmp(model,"CCR.I") && strcmp(ctrl, "D"))
                    NDx = ND(ND<=m);
                    NDy = ND(ND>=m+1) - m*ones(columns(ND(ND>=m+1)));
                    Dx = setxor(NDx, 1:m);
                    Dy = setxor(NDy, 1:k);
                    xod = X(Dx, o);
                    xon = X(NDx, o);
                    yod = Y(Dy, o);
                    yon = Y(NDy, o);
                    XD = X(Dx, :);
                    XN = X(NDx, :);
                    YD = Y(Dy, :);
                    YN = Y(NDy, :);
                    xd = columns(Dx);
                    xn = columns(NDx);
                    yd = columns(Dy);
                    yn = columns(NDy);
                    [xopt, fopt] = glpk([1; zeros(n+m+k,1)], ...
                    [[-xod; zeros(xn,1);zeros(yd, 1); zeros(yn, 1)], [XD; XN; YD; YN],[eye
                        (m); zeros(k,m)], [zeros(m,k); -eye(k)]], ...
                    [zeros(xd,1); xon; yod; yon], ...
                    [-inf, zeros(1,n+m+k)], ...
                    repmat(inf, [1,n+m+k+1]), ...
                    strcat(repmat("S", [1,m+k])), ...
```

```
                repmat("C", [1,1+n+m+k]), ...
                1, ...
                param);
                return
        elseif (strcmp(model,"CCR.I") && strcmp(ctrl, "C"))
                NDx = ND(ND<=m);
                NDy = ND(ND>=m+1) - m*ones(columns(ND(ND>=m+1)));
                Dx = setxor(NDx, 1:m);
                Dy = setxor(NDy, 1:k);
                xod = X(Dx, o);
                xon = X(NDx, o);
                yod = Y(Dy, o);
                yon = Y(NDy, o);
                XD = X(Dx, :);
                XN = X(NDx, :);
                YD = Y(Dy, :);
                YN = Y(NDy, :);
                xd = columns(Dx);
                xn = columns(NDx);
                yd = columns(Dy);
                yn = columns(NDy);
                [xopt, fopt] = glpk([1; zeros(n+m+k,1)], ...
                [[-xod; zeros(xn,1);zeros(yd, 1); zeros(yn, 1)], [XD; XN; YD; YN],[eye
                    (xd); zeros(xn+yd+yn,xd)], [zeros(m+k,xn)], [zeros(m,k); -eye(k)
                    ]], ...
                [zeros(xd,1); xon; yod; yon], ...
                [-inf, zeros(1,n+m+k)], ...
                repmat(inf, [1,n+m+k+1]), ...
                strcat(repmat("S", [1,xd]), repmat("S", [1,xn]), repmat("S", [1,yd]),
                    repmat("S", [1,yn])), ...
                repmat("C", [1,1+n+m+k]), ...
                1, ...
                param);
                return
        end
end
```

B. Optimálne vzory

Ozn.	Rozloha	Knihy	Zam.	Užívatelia	Výpožičky
K1	0.317	33.420	5.876	5.561	119.161
K2	1.031	108.813	19.132	18.106	387.975
K3	1.442	152.109	26.745	25.310	542.349
K4	2.254	237.797	41.811	39.568	847.872
K5	4.542	330.902	62.879	57.279	1099.758
K6	3.824	403.516	70.949	67.143	1438.746
K7	3.144	256.522	39.630	35.295	839.597
K8	3.502	182.660	38.033	33.188	550.403
K9	4.603	448.557	76.164	70.988	1562.274
K10	2.746	277.696	47.950	45.024	978.117
K11	3.455	274.570	51.124	47.032	930.437
K12	3.664	379.324	66.162	62.399	1345.185
K13	6.141	395.184	77.486	69.536	1272.614
K14	3.585	378.230	66.503	62.936	1348.588
K15	4.654	332.698	63.510	57.727	1100.779
K16	2.845	300.233	52.789	49.958	1070.488
K17	10.866	566.708	118.000	102.967	1707.645
K18	4.329	367.877	58.216	52.484	1223.026
K19	11.469	768.484	103.000	84.510	2299.694
K20	6.583	568.540	90.797	82.227	1901.465
K21	5.092	537.279	94.468	89.401	1915.682
K22	8.121	856.870	150.660	142.580	3055.193
K23	10.888	1148.863	202.000	191.166	4096.300

Tabuľka 8: Optimálne vzory DMU pre vstupný CCR bez populácie

Ozn.	Rozloha	Knihy	Zam.	Populácia	Užívatelia	Výpožičky
K1	0.787	43.947	9.100	17.219	5.561	120.147
K2	2.797	122.513	23.755	62.237	18.106	314.682
K3	1.802	161.473	29.238	101.119	25.055	542.349
K4	3.982	288.187	53.835	136.116	37.584	847.872
K5	11.381	363.116	69.000	192.235	57.279	758.704
K6	10.086	541.658	114.000	194.091	66.137	1438.746
K7	2.378	247.045	42.501	159.230	37.996	839.597
K8	4.352	196.619	38.173	138.520	33.188	540.821
K9	5.077	511.467	84.000	267.385	65.391	1562.274
K10	2.746	277.696	47.950	195.313	45.024	978.117
K11	4.213	289.966	52.384	188.088	47.032	930.437
K12	4.055	399.998	69.768	252.235	61.008	1345.185
K13	6.988	449.688	83.808	266.485	69.536	1389.119
K14	3.735	381.551	67.538	263.972	62.912	1348.588
K15	4.654	332.698	63.510	262.813	57.727	1100.779
K16	2.845	300.233	52.789	211.251	49.958	1070.488
K17	10.866	566.708	118.000	503.914	102.967	1707.645
K18	4.329	367.877	58.216	258.248	52.484	1223.026
K19	11.469	768.484	103.000	537.746	84.510	2299.694
K20	6.583	568.540	90.797	399.189	82.227	1901.465
K21	5.092	537.279	94.468	378.043	89.401	1915.682
K22	13.827	988.229	189.956	518.192	140.901	3055.193
K23	10.888	1148.863	202.000	808.369	191.166	4096.300

Tabuľka 9: Optimálne vzory DMU pre vstupný CCR s populáciou

Ozn.	Rozloha	Knihy	Zam.	Populácia	Užívatelia	Výpožičky
K1	0.317	33.420	5.876	23.515	5.561	119.161
K2	1.031	108.813	19.132	76.563	18.106	387.975
K3	1.442	152.109	26.745	107.028	25.310	542.349
K4	2.254	237.797	41.811	167.320	39.568	847.872
K5	11.381	363.116	69.000	192.235	57.279	758.704
K6	10.086	541.658	114.000	194.091	66.137	1438.746
K7	3.144	256.522	39.630	179.988	35.295	839.597
K8	3.502	182.660	38.033	162.420	33.188	550.403
K9	5.077	511.467	84.000	267.385	65.391	1562.274
K10	2.746	277.696	47.950	195.313	45.024	978.117
K11	3.455	274.570	51.124	209.507	47.032	930.437
K12	3.664	379.324	66.162	266.852	62.399	1345.185
K13	6.141	395.184	77.486	323.904	69.536	1272.614
K14	3.585	378.230	66.503	266.132	62.936	1348.588
K15	4.654	332.698	63.510	262.813	57.727	1100.779
K16	2.845	300.233	52.789	211.251	49.958	1070.488
K17	10.866	566.708	118.000	503.914	102.967	1707.645
K18	4.329	367.877	58.216	258.248	52.484	1223.026
K19	11.469	768.484	103.000	537.746	84.510	2299.694
K20	6.583	568.540	90.797	399.189	82.227	1901.465
K21	5.092	537.279	94.468	378.043	89.401	1915.682
K22	8.121	856.870	150.660	602.916	142.580	3055.193
K23	10.888	1148.863	202.000	808.369	191.166	4096.300

Tabuľka 10: Optimálne vzory DMU pre vstupný CCR s ND populáciou

Ozn.	Rozloha	Knihy	Zam.	Populácia	Užívatelia	Výpožičky
K1	0.625	48.278	7.824	49.196	5.561	136.212
K2	1.056	109.991	19.287	78.599	18.106	389.327
K3	2.258	183.423	30.185	176.381	22.837	542.349
K4	2.514	247.765	42.906	189.397	38.781	847.872
K5	11.381	363.116	69.000	192.235	57.279	758.704
K6	10.086	541.658	114.000	194.091	66.137	1438.746
K7	3.334	270.965	43.310	228.535	35.295	839.597
K8	3.687	237.243	45.074	238.691	33.188	656.480
K9	5.077	511.467	84.000	267.385	65.391	1562.274
K10	3.593	312.425	52.419	277.402	42.638	978.117
K11	5.419	331.470	61.481	330.609	47.032	930.437
K12	4.366	407.594	69.666	332.609	60.383	1345.185
K13	6.425	413.453	80.890	356.504	69.536	1287.254
K14	4.759	423.252	71.449	365.844	59.380	1348.588
K15	6.235	394.158	77.000	389.894	57.727	1100.779
K16	5.805	394.874	66.125	417.513	46.160	1070.488
K17	10.866	566.708	118.000	503.914	102.967	1707.645
K18	6.500	467.617	74.000	517.318	47.236	1223.026
K19	11.469	768.484	103.000	537.746	84.510	2299.694
K20	8.170	641.907	102.514	590.601	78.425	1901.465
K21	8.025	678.745	113.013	622.550	89.401	2078.027
K22	8.795	882.719	153.500	660.164	140.538	3055.193
K23	10.888	1148.863	202.000	808.369	191.166	4096.300

Tabuľka 11: Optimálne vzory DMU pre vstupný CCR s NC populáciou

C. Parciálne efektivity

Ozn.	Rozloha	Knihy	Zam.	Užívatelia	Výpožičky	ρ_o (1)	Efektivita
K1	0.141	0.204	0.226	1.000	0.884	0.491	0.226
K2	0.223	0.321	0.638	1.000	0.811	0.599	0.638
K3	0.372	0.540	0.524	0.652	1.000	0.618	0.540
K4	0.407	0.593	0.536	0.779	1.000	0.663	0.593
K5	0.399	0.911	0.911	1.000	0.690	0.782	0.911
K6	0.379	0.745	0.622	0.985	1.000	0.746	0.745
K7	0.579	0.505	0.650	1.000	1.000	0.747	0.650
K8	0.465	0.539	0.514	1.000	0.983	0.700	0.539
K9	0.907	0.877	0.907	0.921	1.000	0.922	0.907
K10	0.391	0.705	0.705	0.915	1.000	0.743	0.705
K11	0.311	0.539	0.533	1.000	1.000	0.676	0.539
K12	0.518	0.719	0.719	0.898	1.000	0.771	0.719
K13	0.657	0.657	0.610	1.000	0.915	0.768	0.657
K14	0.461	0.715	0.693	0.595	1.000	0.693	0.715
K15	0.746	0.844	0.825	1.000	1.000	0.883	0.844
K16	0.269	0.582	0.523	0.924	1.000	0.660	0.582
K17	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
K18	0.666	0.787	0.787	0.900	1.000	0.828	0.787
K19	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
K20	0.606	0.849	0.849	0.846	1.000	0.830	0.849
K21	0.475	0.636	0.787	1.000	0.997	0.779	0.787
K22	0.412	0.681	0.623	0.687	1.000	0.680	0.681
K23	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000

Tabuľka 12: Parciálne efektivity DMU pre vstupný CCR bez populácie

Ozn.	Rozloha	Knihy	Zam.	Populácia	Užívatelia	Výpožičky	ρ_o (1)	Efektivita
K1	0.350	0.269	0.350	0.350	1.000	0.877	0.533	0.350
K2	0.606	0.362	0.792	0.792	1.000	1.000	0.759	0.792
K3	0.465	0.573	0.573	0.573	0.658	1.000	0.641	0.573
K4	0.719	0.719	0.690	0.719	0.820	1.000	0.778	0.719
K5	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
K6	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
K7	0.438	0.486	0.697	0.697	0.929	1.000	0.708	0.697
K8	0.578	0.580	0.516	0.580	1.000	1.000	0.709	0.580
K9	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
K10	0.391	0.705	0.705	0.704	0.915	1.000	0.737	0.705
K11	0.379	0.569	0.546	0.569	1.000	1.000	0.677	0.569
K12	0.573	0.758	0.758	0.758	0.919	1.000	0.795	0.758
K13	0.747	0.747	0.660	0.747	1.000	0.839	0.790	0.747
K14	0.480	0.722	0.704	0.722	0.596	1.000	0.704	0.722
K15	0.746	0.844	0.825	0.674	1.000	1.000	0.848	0.844
K16	0.269	0.582	0.523	0.506	0.924	1.000	0.634	0.582
K17	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
K18	0.666	0.787	0.787	0.499	0.900	1.000	0.773	0.787
K19	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
K20	0.606	0.849	0.849	0.676	0.846	1.000	0.804	0.849
K21	0.475	0.636	0.787	0.607	1.000	0.997	0.750	0.787
K22	0.701	0.785	0.785	0.785	0.695	1.000	0.792	0.785
K23	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000

Tabuľka 13: Parciálne efektivity DMU pre vstupný CCR s populáciou

Ozn.	Rozloha	Knihy	Zam.	Populácia	Užívatelia	Výpožičky	ρ_o (1)	Efektivita
K1	0.141	0.204	0.226	0.478	1.000	0.884	0.489	0.301
K2	0.223	0.321	0.638	0.974	1.000	0.811	0.661	0.643
K3	0.372	0.540	0.524	0.607	0.652	1.000	0.616	0.651
K4	0.407	0.593	0.536	0.883	0.779	1.000	0.700	0.618
K5	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
K6	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
K7	0.579	0.505	0.650	0.788	1.000	1.000	0.753	0.710
K8	0.465	0.539	0.514	0.680	1.000	0.983	0.697	0.700
K9	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
K10	0.391	0.705	0.705	0.704	0.915	1.000	0.737	0.793
K11	0.311	0.539	0.533	0.634	1.000	1.000	0.669	0.650
K12	0.518	0.719	0.719	0.802	0.898	1.000	0.776	0.773
K13	0.657	0.657	0.610	0.909	1.000	0.915	0.791	0.687
K14	0.461	0.715	0.693	0.727	0.595	1.000	0.699	0.800
K15	0.746	0.844	0.825	0.674	1.000	1.000	0.848	1.000
K16	0.269	0.582	0.523	0.506	0.924	1.000	0.634	0.766
K17	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
K18	0.666	0.787	0.787	0.499	0.900	1.000	0.773	1.000
K19	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
K20	0.606	0.849	0.849	0.676	0.846	1.000	0.804	0.958
K21	0.475	0.636	0.787	0.607	1.000	0.997	0.750	0.942
K22	0.412	0.681	0.623	0.913	0.687	1.000	0.719	0.701
K23	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000

Tabuľka 14: Parciálne efektivity DMU pre vstupný CCR s ND populáciou

Ozn.	Rozloha	Knihy	Zam.	Populácia	Užívatelia	Výpožičky	ρ_o (1)	Efektivita
K1	0.278	0.295	0.301	1.000	1.000	0.773	0.608	0.301
K2	0.229	0.325	0.643	1.000	1.000	0.808	0.667	0.643
K3	0.583	0.651	0.592	1.000	0.722	1.000	0.758	0.651
K4	0.454	0.618	0.550	1.000	0.794	1.000	0.736	0.618
K5	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
K6	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
K7	0.614	0.533	0.710	1.000	1.000	1.000	0.809	0.710
K8	0.490	0.700	0.609	1.000	1.000	0.824	0.771	0.700
K9	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
K10	0.511	0.793	0.771	1.000	0.966	1.000	0.840	0.793
K11	0.487	0.650	0.640	1.000	1.000	1.000	0.796	0.650
K12	0.617	0.773	0.757	1.000	0.928	1.000	0.846	0.773
K13	0.687	0.687	0.637	1.000	1.000	0.905	0.819	0.687
K14	0.612	0.800	0.744	1.000	0.631	1.000	0.798	0.800
K15	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
K16	0.548	0.766	0.655	1.000	1.000	1.000	0.828	0.766
K17	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
K18	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
K19	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
K20	0.752	0.958	0.958	1.000	0.887	1.000	0.926	0.958
K21	0.749	0.803	0.942	1.000	1.000	0.919	0.902	0.942
K22	0.446	0.701	0.634	1.000	0.697	1.000	0.746	0.701
K23	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000

Tabuľka 15: Parciálne efektivity DMU pre vstupný CCR s NC populáciou

D. Lambdy

Ozn.	CCR-I bez pop.	CCR-I s ND pop.	CCR-I s NC pop.	CCR-I s pop.
K1	0.029K23	0.029K23	0.081K18+0.009K23	0.001K5+0.073K6+0.004K23
K2	0.095K23	0.095K23	0.006K18+0.093K23	0.160K5+0.074K6+0.021K23
K3	0.132K23	0.132K23	0.251K18+0.057K23	0.054K6+0.027K9+0.103K23
K4	0.207K23	0.207K23	0.080K18+0.183K23	0.242K6+0.232K9+0.034K23
K5	0.256K17+0.162K23	1.000K5	1.000K5	1.000K5
K6	0.351K23	1.000K6	1.000K6	1.000K6
K7	0.170K19+0.109K23	0.170K19+0.109K23	0.202K18+0.083K19+0.098K23	0.158K9+0.145K23
K8	0.322K17	0.322K17	0.515K15+0.073K18	0.221K5+0.134K17+0.035K23
K9	0.084K19+0.334K23	1.000K9	1.000K9	1.000K9
K10	0.027K19+0.223K23	0.027K19+0.223K23	0.306K18+0.147K23	0.027K19+0.223K23
K11	0.155K17+0.162K23	0.155K17+0.162K23	0.180K15+0.226K17+0.284K18	0.166K5+0.029K6+0.186K23
K12	0.017K19+0.319K23	0.017K19+0.319K23	0.243K18+0.256K23	0.043K6+0.230K9+0.226K23
K13	0.436K17+0.129K23	0.436K17+0.129K23	0.272K15+0.332K17+0.103K23	0.224K5+0.191K6+0.230K23
K14	0.329K23	0.329K23	0.361K18+0.221K23	0.024K6+0.321K23
K15	0.273K17+0.155K23	0.273K17+0.155K23	1.000K15	0.273K17+0.155K23
K16	0.261K23	0.261K23	0.122K17+0.674K18+0.009K23	0.261K23
K17	1.000K17	1.000K17	1.000K17	1.000K17
K18	0.201K19+0.186K23	0.201K19+0.186K23	1.000K18	0.201K19+0.186K23
K19	1.000K19	1.000K19	1.000K19	1.000K19
K20	0.285K19+0.304K23	0.285K19+0.304K23	0.740K18+0.133K19+0.169K23	0.285K19+0.304K23
K21	0.468K23	0.468K23	0.770K18+0.277K23	0.468K23
K22	0.746K23	0.746K23	0.207K18+0.684K23	0.896K6+0.103K9+0.392K23
K23	1.000K23	1.000K23	1.000K23	1.000K23

Tabuľka 16: Lambdy pre jednotlivé DMU pre rôzne CCR modely