

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE  
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY



Kritéria nezápornosti Fourierových radov

BAKALÁRSKA PRÁCA

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE  
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY

**Kritéria nezápornosti Fourierových radov**

**BAKALÁRSKA PRÁCA**

Študijný program: Ekonomická a finančná matematika

Študijný odbor: 1114 Aplikovaná matematika

Školiace pracovisko: Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky

Vedúci práce: prof. RNDr. Daniel Ševčovič, CSc



## ZADANIE ZÁVEREČNEJ PRÁCE

**Meno a priezvisko študenta:** Andrej Iring

**Študijný program:** ekonomická a finančná matematika (Jednooborové štúdium, bakalársky I. st., denná forma)

**Študijný odbor:** 9.1.9. aplikovaná matematika

**Typ záverečnej práce:** bakalárska

**Jazyk záverečnej práce:** slovenský

**Sekundárny jazyk:** anglický

**Názov:** Kritériá nezápornosti trigonometrických Fourierových radov / *Criteria for nonnegativity of Fourier trigonometric series*

**Ciel:** Cieľom práce bude skúmať vzťah medzi nezápornosťou trigonometrických Fourierových radov a Fourierových koeficientov. Je známe, že nezápornosť takýchto radov je ekvivalentná s požiadavkou na kladnú semidefinitnosť matíc zložených s Fourierových koeficientov. V práci sa budeme zaoberať kritériami, ktoré sú založené na riešení úlohy nelineárneho programovania (semidefinitného programovania).

**Vedúci:** prof. RNDr. Daniel Ševčovič, CSc.

**Katedra:** FMFI.KAMŠ - Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky

**Vedúci katedry:** prof. RNDr. Daniel Ševčovič, CSc.

**Dátum zadania:** 18.10.2013

**Dátum schválenia:** 14.11.2013

doc. RNDr. Margaréta Halická, CSc.  
garant študijného programu

.....  
študent

.....  
vedúci práce

**Podakowanie** Rád by som touto cestou podakoval svojmu vedúcemu bakalárskej práce prof. RNDr. Danielovi Ševčovičovi, CSc. za rady a podnetné pripomienky, pri písaní tejto práce.

# Abstrakt v štátnom jazyku

Iring, Andrej: Kritériá nezápornosti trigonometrických Fourierovych radov [Bakalárska práca], Univerzita Komenského v Bratislave, Fakulta matematiky, fyziky a informatiky, Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky; školiteľ: prof. RNDr. Daniel Ševčovič, CSc., Bratislava, 2014, 44 s.

V našej práci sa venujeme kritériám nezápornosti pre Fourierove rady, konkrétnie Bochnerovým kritériom, a McLean-Woerdelemanovým kritériom. Obe tieto kritéria transformujú otázku, či je Fourierov rad nezáporný, na otázku kladnej semidefinitnosti špeciálnych matíc. Cieľom našej práce je ukázať použitie týchto kritérií na jednoduchých príkladoch, pre konečné Fourierove rady, a ako pomocou spomenutých kritérií numericky odhadnúť množinu koeficientov pre ktoré bude konečný Fourierov rad nezáporný. V našej práci sme ukázali, že overenie predpokladov spomenutých kritérií môže byť značne obtiažné. Ďalej v našej práci sme dokázali niekoľko vlastností množiny, koeficientov, pre ktoré bude konečný Fourierov rad nezáporný, taktiež sme uviedli spôsoby na odhad tejto množiny. Na konci práce sa zaobráme využitím dokázaných vlastností množiny, ako i možnosťou určiť ktoré nekonečné Fourierove rady nemôžu byť nezáporné.

**Kľúčové slová:** Fourierove rady, koeficienty Fourierových radov, kladne semidefinitné matice

# Abstract

Iring, Andrej: Criteria for nonnegativity of Fourier trigonometric series [Bachelor Thesis], Comenius University in Bratislava, Faculty of Mathematics, Physics and Informatics, Department of Applied Mathematics and Statistics; Supervisor: prof. RNDr. Daniel Ševčovič, CSc., Bratislava, 2014, 44p.

In our work we devote to criteria of nonnegativity for Fourier series, namely Bochners criterion, and McLean-Woerdeman criterion. Both of these criteria are transforming question whether the Fourier series is non-negative to question if a special matrices are positive semi-definite. The aim of our work is to show the application of these criteria on simple examples, for finite Fourier series, and how to use those criteria to numerically estimate the set of coefficients for which the finite Fourier series is non-negative. In our work we have shown that verify the assumptions of mentioned criteria can be highly difficult. Further, in our work we have proved several properties of the set of coefficients for which the finite Fourier series is non-negative, we have also introduced methods for estimating this set. At the end of our work we using proven properties of the mentioned set, to determine if the infinite Fourier series can be non-negative.

**Keywords:** Fourier series, Fourier series coefficients, positive semi-definite matrices

# Obsah

<b>Zoznam použitých symbolov</b>	<b>8</b>
<b>Úvod</b>	<b>9</b>
<b>1 Definície základných pojmov</b>	<b>10</b>
1.1 Definície a vety z Matematickej analýzy . . . . .	11
1.2 Definície a vety z algebry . . . . .	12
<b>2 Kritéria nezápornosti</b>	<b>13</b>
2.1 Bochnerova veta . . . . .	13
2.2 McLean-Woerdemanovo kritérium . . . . .	14
<b>3 Prvý príklad</b>	<b>17</b>
3.1 Riešenie pomocou Bochnerovho kritéria . . . . .	17
3.1.1 Prípad $ a  \leq 1$ . . . . .	19
3.1.2 Prípad $ a  > 1$ . . . . .	19
3.1.3 Rozšírenie . . . . .	20
3.2 Riešenie využitím McLean-Woerdemanovho kritéria . . . . .	22
<b>4 Druhý príklad</b>	<b>24</b>
4.1 Riešenie pomocou Bochnerovho kritéria . . . . .	26
4.2 Riešenie využitím McLean-Woerdemanovho kritéria . . . . .	28
<b>5 Problémy vyššieho rádu</b>	<b>32</b>
5.1 Vyčíslovacia metóda . . . . .	32
5.2 Metóda založená na Bochnerovom kritériu . . . . .	33
5.3 Metóda založená na McLean-Woerdemanovom kritériu . . . . .	34
<b>Záver</b>	<b>39</b>
<b>Zoznam použitej literatúry</b>	<b>40</b>
<b>Príloha A</b>	<b>42</b>

## Zoznam použitých symbolov

$\mathcal{H}^n$	priestor $n \times n$ Hermitovských matíc
$\mathbf{r}$	$\mathbf{r} := (x, y, z)^T$ , resp. $\mathbf{r} := (x_1, x_2, x_3)^T$
$\mathbb{R}^n$	vektorový priestor nad $\mathbb{R}$
$\mathbb{C}^n$	vektorový priestor nad $\mathbb{C}$
$\mathbb{R}^{m \times n}$	množina všetkých $m \times n$ -rozmerných matíc nad $\mathbb{R}$

## Úvod

V dnešnej dobe, sú Fourierové rady nesmierne dôležité, najmä v oblasti technológií a matematického programovania, preto je potrebné v praxi vedieť, kedy sú tieto rady nezáporné. V tejto práci sme najmä vychádzali z knihy [2] a článku [11], kde sú uvedené kritéria, podľa ktorých sa dá rozhodnúť o nezápornosti Fourierovho radu na základe jeho koeficientov. Za cieľ si kladieme zosumarizovať informácie o nezápornosti Fourierových radov, ale taktiež chceme ukázať ako tieto kritéria použiť, čo budeme ilustrovať na jednoduchých príkladoch. Navyše na spomenutých príkladoch ukážeme aj to, že použitie týchto kritérií nemusí byť vždy triviálne, najmä čo sa týka overenia predpokladov. V tejto práci, by sme sa chceli tiež venovať presnému určeniu, alebo aspoň aproximácií množiny koeficientov, pre ktoré sú Fourierove rady nezáporné. Význam tejto práce spočíva v tom, že na základe získaných informácií budeme môcť testovať nezápornosť funkcií, ktorých Fourierov rozvoj budeme poznáť. Využitie a aplikácia spomenutých kritérií je možná v prácach v oblasti štatistiky, matematického programovania, ale aj v technických smeroch.

## 1 Definície základných pojmov

V tejto kapitole si zadefinujeme najzákladnejšie pojmy, s ktorými budeme ďalej pracovať. Fourierove rady sú pomenované na počesť francúzského matematika Jean Baptiste Joseph Fourier, Joseph Fourier sa narodil roku 1768 v Auxerre, vo Francúzsku. V roku 1780 nastúpil na vjenskú školu v Auxerre, kde sa ukázal jeho talent pre matematiku.



Obr. 1: J. B. Fourier.<sup>1</sup>

V roku 1790 začal učiť na Benediktínskej škole, École Royale Militaire of Auxerre, ktorú ako mladý tiež navštievoval. V roku 1795 začal študovať v Paríži na École Normale, kde ho učili Lagrange, Laplace a Monge, s ktorými udržiaval dobré vzťahy. Od konca 1795 Fourier bol menovaný ako učiteľ na École polytechnique. V roku 1798 sa Fourier pridal k Napoleonovej armáde v invázií do Egypta ako vedecký poradca. Počas pobytu v Egypte sa zoznámil s Napoleonom a v Alexandrii dopomohol k založeniu Egyptského vedeckého ústavu. Potom ako Napoleon prebral moc vo Francúzsku, sa Fourier vracia z Egypta do vlasti v roku 1801. Po jeho návrate ho Napoleon vymenoval za Prefekta v departemente Isere. Fourier neboli nadšení z predstavy, že musí opustiť akademický svet v Paríži, ale nemohol sa vzprieť Napoleonovej ponuke. Avšak počas jeho pôsobenia v Grenoble sa začal Fourier venovať matematickej monografií zaoberajúcej sa teoriou tepla. V roku 1807 mal spisanú celú monografiu o prúdení tepla v tuhých látkach, v ktorej sa taktiež zaoberal možnosťou zapísat funkciu ako trigonometrický rad. Neskôr v roku 1822 bolo vydané jeho najznámejšie dielo *Théorie analytique de la chaleur* (Analytická teória tepla), ktoré bolo rozšírením už spomínanej monografie. Text bol voľným prekladom z [19]. Na začiatok by sme radi uviedli niektoré definície a vety, ktoré budeme využívať v nasledujúcich kapitolách.

<sup>1</sup>zdroj [http://en.wikipedia.org/wiki/Joseph\\_Fourier](http://en.wikipedia.org/wiki/Joseph_Fourier)

## 1.1 Definície a vety z Matematickej analýzy

Nasledujúce definície a vety sú prebraté z ([1],[9],[10]).

**Definícia 1.1.** Nech  $f : [0, T] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  je  $2\pi$ -periodická a integrovateľná funkcia.

Potom rad:

$$\begin{aligned} F(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)), \quad \text{kde} \\ a_0 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) dx, \quad b_0 = 0, \\ a_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos(nx) dx, \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin(nx) dx, \quad \text{pre } n = 1, 2, 3, \dots \end{aligned}$$

nazveme Fourierovým radom funkcie  $f(x)$ , a  $a_n, b_n$  nazveme reálnymi koeficientmi Fourierovho radu.

**Definícia 1.2.** Nech  $f : [0, T] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  je  $T$ -periodická a integrovateľná funkcia.

Potom rad:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \sigma_n e^{i \frac{2\pi}{T} nx}, \quad \text{kde} \quad \sigma_n = \frac{1}{T} \int_0^T f(x) e^{-i \frac{2\pi}{T} nx} dx, \quad \text{pre } n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

nazveme Fourierovým radom funkcie  $f$ .

*Poznámka:* Medzi koeficientmi Fourierovho radu vyjadraného v definícii (1.1) a koeficientmi z definície (1.2) platí vzťah:

$$\sigma_n = \frac{1}{2} (a_n - i b_n).$$

Špeciálne, pre  $n=0$   $\sigma_0 = a_0$ .

**Veta 1.3** (Moivreova veta). Nech  $z \in \mathbb{C}$ . Potom platí:

$$\begin{aligned} z &= \delta(\cos(\varphi) + i \sin(\varphi)), \\ z^k &= \delta^k (\cos(n\varphi) + i \sin(n\varphi)). \end{aligned}$$

**Veta 1.4.** Nech postupnosti  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  a  $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$  sú konvergentné. Nech pre nekonečne mnoho prirodzených čísel  $n$  platí:  $a_n \leq b_n$ . Potom platí:  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$

## 1.2 Definície a vety z algebry

Nezápornosť Fourierových radoch je úzko spojená s kladnou semi-definitnosťou špeciálnych matíc, preto je dôležité uviesť definície a vety z algebry. Vety a definície sú prebraté z ([17],[6], a [8]).

**Definícia 1.5.** Nech  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  je symetrická matica. Potom  $A$  sa nazýva kladne definitná, ak  $\forall x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0$  platí  $x^T Ax > 0$ .

**Definícia 1.6.** Nech  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  je symetrická matica. Potom  $A$  sa nazýva kladne semi-definitná, ak  $\forall x \in \mathbb{R}^n$  platí  $x^T Ax \geq 0$ .

Pri výpočtoch by bolo ľahkopádne zisťovať, či matice sú kladne definitné, z definície preto uvedieme ešte postačujúce podmienky pre kladnú definitnosť a kladnú semidefinitnosť.

**Veta 1.7** ([6, str.263] Sylvestrovo kritérium). Nech  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  je symetrická matica. Potom:

- (a) matica  $A$  je kladne definitná práve vtedy, keď všetky jej hlavné rohové minory (determinanty hlavných rohových podmatíc) sú kladné.
- (b) matica  $A$  je kladne semidefinitná práve vtedy, keď všetky jej hlavné minory (determinanty hlavných podmatíc) sú nezáporné.

**Veta 1.8** (Laplaceov rozvoj determinantu). Nech  $A \in R^{n \times n}, 1 \leq k, l \leq n$ . Označme  $|A_{ij}|$  determinant matice, ktorá vznikne vynechaním  $i$ -teho riadku a  $j$ -teho stĺpca z matice  $A$ . Potom

$$|A| = \sum_{j=1}^n (-1)^{k+j} a_{kj} |A_{kj}| = \sum_{i=1}^n (-1)^{l+i} a_{il} |A_{il}|$$

Uvedené súčty nazývame Laplaceovými rozvojmi determinantu  $|A|$ - prvý podľa  $k$ -teho riadku, druhý podľa  $l$ -teho stĺpca.

**Veta 1.9.** Nech  $A \in \mathcal{H}^n$  ak je  $A$  striktne diagonálne dominantná, a všetky členy na diagonále sú kladné, potom sú všetky vlastné čísla matice  $A$  reálne a kladné.

**Dôsledok 1.10.** Ak sú splnené predpoklady Vety(1.9), tak matica  $A$  je kladne definitná.

## 2 Kritéria nezápornosti

Z poznámky v kapitole (1.1) platí špeciálne, pre  $n=0$   $\sigma_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f(x) \cos(nx) dx = \frac{1}{T} \int_0^T f(x) dx$ , ak  $a_0 \leq 0$  tak z vlastností Riemanovho integrálu vieme, že funkcia  $f(x)$  je buď skoro všade nulová, alebo nadobúda záporné hodnoty, a teda takéto funkcie nás nemusia zaujímať. Preto budeme vyšetrovať Fourierove rady s  $\sigma_0 > 0$ . Navyše ľubovoľný takýto rad sa dá vynormovať tak, aby platilo  $\sigma_0 = 1$ , pričom normovaním sa nezmení to, či rad je alebo nie je nezáporný. Rad tvaru  $\sigma(x) = 1 + \sum_{k=-n}^n (\sigma_k e^{ikx})$  budeme nazývať normovaný Fourierov rad.

### 2.1 Bochnerova veta

Salomon Bochner narodení 20.8.1899 v Podgórze, nedaleko Krakova v Rakúsko-Uhorsku. V roku 1914 sa celá jeho rodina prestahovala do Berlína pred strachom z ruskej invázie, kde Salomon začal navštievoať gymnázium. V roku 1918 nastúpil na Humboldtovu univerzitu v Berlíne. Jeho PhD práca bola na tému ortogonálne systémy komplexných analytických funkcií. Doktorát získal v roku 1921. Medzi rokmi 1924 až 1933 prednášal na Mnichovskej Univerzite. V roku 1932 publikoval prácu v ktorej rozoberal zovšeobecnenie Lebesgueovho integrálu, toto rozšírenie je dnes známe ako Bochnerov integrál. V roku 1933 prijal ponuku prednášať na Princetonnej univerzite, kde pôsobil do roku 1968. Potom do svojej smrti pôsobil na univerzite Rice do roku 1982. Počas svojho života sa zaoberal teóriou pravdepodobnosti, no jeho najvýznamnejšie práce sa zaobrali harmonickou analýzou. Jeho najznámejšie dielo je z roku 1932 a originálny názov je *Vorlesungen über Fouriersche Integrale*, v tomto diele publikoval známu Bochnerovu vetu, s ktorej obmenou pracujeme v tejto práci aj my.

Definícia aj veta sú prebraté z [2]

**Definícia 2.1.** Matica  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  tvaru:

$$A = \begin{pmatrix} a_0 & a_{-1} & a_{-2} & a_{-3} & \dots & a_{-n+1} \\ a_1 & a_0 & a_{-1} & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_2 & a_1 & a_0 & \ddots & \ddots & a_{-3} \\ a_3 & \ddots & \ddots & \ddots & a_{-1} & a_{-2} \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_1 & a_0 & a_{-1} \\ a_{n-1} & \dots & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \end{pmatrix}$$

sa nazýva Toeplitzovská.

My sa budeme špeciálne venovať hermitovským Toeplitzovským maticiam t.j. maticiam splňajúcim:  $A = \overline{A^T} = A^H$ , takéto matice si označíme  $A^{(n)} = \text{Toepl}(\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{n-1})$  a ich tvar teda bude:

$$A = \begin{pmatrix} \sigma_0 & \bar{\sigma}_1 & \bar{\sigma}_2 & \dots & \bar{\sigma}_{n-1} \\ \sigma_1 & \sigma_0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \sigma_2 & \ddots & \ddots & \ddots & \bar{\sigma}_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \sigma_0 & \bar{\sigma}_1 \\ \sigma_{n-1} & \dots & \sigma_2 & \sigma_1 & \sigma_0 \end{pmatrix}$$

**Veta 2.2** ([2, str.9] Bochnerova veta). Nech  $\sigma(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sigma_k e^{ikx}$  je Fourierov rad. Potom  $\sigma(x)$  je nezáporný pre  $\forall x \in \mathbb{R}$  práve vtedy, keď matice  $A^{(n)} = \text{Toepl}(\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{n-1})$  sú kladne semidefinitné pre ľubovoľné  $n \in \mathbb{N}$ .

## 2.2 McLean-Woerdemanovo kritérium

Druhým veľmi významným kritériom pre nezápornosť Fourierových radoov je McLean-Woerdemanovo kritérium, ktoré bolo publikované v 2001 v článku [11]. Publikoval ho doktorant J.W. McLean s H. J. Woerdeman, ktorý momentálne pôsobí ako profesor na Drexel University v Amerike. My uvedieme zjednodušený tvar tohto kritéria z [11], aj s dôkazom pre Fourierove rady s jednou premennou. Toto kritérium je jednoduchšie na overenie ako Bochnerovo kritérium nezápornosti. Overovanie predpokladov tohto kritéria sa dá previesť na problém semidefinitného programovania, ale problémom je že toto kritérium je použiteľné iba pre konečné Fourierove rady.

**Veta 2.3** (McLean-Woerdeman). *Konečný Fourierov rad  $\sigma(x) = \sum_{n=-N+1}^{N-1} \sigma_n e^{inx}$ , je nezáporný pre  $\forall x \in \mathbb{R}$ , vtedy a len vtedy ak množina  $\mathcal{M} \subset \mathcal{H}^N$  je neprázna, kde :*

$$\mathcal{M} = \left\{ F \in \mathcal{H}^N \mid F \succeq 0, \sum_{p=n+1}^N F_{p,p-n} = \sigma_n, \text{ pre } n = 0, 1, \dots, N-1 \right\}.$$

*Dôkaz.*  $\Leftarrow$  Predpokladajme, že  $\mathcal{M}$  je neprázdna teda existuje  $F \succeq 0$  splňajúca  $\sigma_n = \sum_{p=n+1}^N F_{p,p-n} = \sum_{\substack{p-q=n \\ 1 \leq p,q \leq N}} F_{pq}$ , pre  $n = 0, 1, \dots, N-1$ . Potom

$$\begin{aligned} \sigma(x) &= \sum_{n=-N+1}^{N-1} \sum_{\substack{p-q=n \\ 1 \leq p,q \leq N}} F_{pq} e^{inx} \\ &= \sum_{n=-N+1}^{N-1} \sum_{\substack{p-q=n \\ 1 \leq p,q \leq N}} F_{pq} e^{i(p-q)x} \\ &= \sum_{1 \leq p,q \leq N} e^{ipt} F_{pq} \overline{e^{iqt}} \geq 0, \quad \text{lebo } F \succeq 0. \end{aligned}$$

$\Rightarrow$  Podľa Riesz-Fejérovej faktorizačnej vety [2, str.3], ak polynóm  $\sigma(x) \geq 0$  tak potom musí existovať polynóm  $\mu(x) = \sum_{n=-M+1}^{M-1} \mu_n e^{inx}$  taký, že  $\sigma(x) = |\mu(x)|^2$ , teda

$$\begin{aligned} \sigma(x) &= \sum_{k=-M+1}^{M-1} \mu_k e^{ikx} \sum_{l=-M+1}^{M-1} \bar{\mu}_l e^{ilx} \\ &= \sum_{k,l=-M+1}^{M-1} \mu_k \bar{\mu}_l e^{i(k-l)x} \\ &= \sum_{n=-N+1}^{N-1} \left( \sum_{\substack{k-l=n \\ -M+1 \leq k,l \leq M-1}} \mu_k \bar{\mu}_l \right) e^{int}, \quad \text{kde } N = 2M - 1. \end{aligned}$$

Označme  $F_{pq} = \mu_{p-M} \bar{\mu}_{q-M}$  pre  $p = 1, \dots, N$ ,  $q = 1, \dots, N$ .

Potom použitím substitúcie  $p - M = k$ ,  $q - M = l$  dostaneme:

$$\sum_{\substack{k-l=n \\ -M+1 \leq k,l \leq M-1}} \mu_k \bar{\mu}_l = \sum_{\substack{p-q=n \\ 1 \leq p,q \leq N}} F_{pq}, \quad ,$$

a teda

$$\sigma(x) = \sum_{n=-N+1}^{N-1} \sigma_n e^{inx},$$

kde:

$$\sigma_n = \sum_{\substack{p-q=n \\ 1 \leq p,q \leq N}} F_{pq}.$$

Naviac  $F \succeq 0$  lebo

$$z * F z = \sum_{1 \leq p, q \leq N} z_p F_{pq} \bar{z}_q = \sum_{1 \leq p, q \leq N} z_p \mu_{p-M} \overline{z_q \mu_{q-M}} = \left| \sum_{1 \leq p \leq N} z_p \mu_{p-M} \right|^2 \geq 0$$

□

Podmienka McLean-Woerdemanovho kritéria sa dá overiť pomerne ľahko, potom ako si tento problém prevedieme na optimalizačnú úlohu, tvaru:

$$\begin{aligned} & \min_F 0 \\ \text{s.t. } & \sum_{p=k+1}^n F_{p,p-k} = \sigma_k, \quad \text{pre } k = 0, 1, \dots, n-1, \\ & F \succeq 0, \quad F \in \mathcal{H}^n. \end{aligned} \tag{1}$$

Dostaneme, že ak táto úloha má aspoň jedno prípustné riešenie tak množina  $\mathcal{M}$  definovaná v (2.3) je neprázdna a teda Fourierov rad pre zadáne koeficienty  $\sigma_k, \quad k = 0, 1, \dots, n-1$  je nezáporný. Takýto typ nelineárnych optimalizačných problémov sa dá riešiť v programe Matlab s nainštalovaným rozšírením cvx(convex disciplined programming) ([3],[4]). Naprogramovali sme skript v Matlabe, ktorý je schopný s využitím rozšírenia cvx rozhodnúť o tom či konečný Fourierov rad s koeficientami  $\sigma_k \in \mathbb{C}$ , je nezáporný alebo nie, pričom sme využívali solver SeDuMi([12]). Zdrojový kód možno nájsť na konci práce v prílohe A.

### 3 Prvý príklad

V tejto kapitole sa zameráme na niekoľko príkladov ako použiť Bochnerovo a McLean-Woerdemanovo kritérium pre nezápornosť.

Máme Fourierov rad:

$$f(x) = 1 + a \cos x.$$

Už na prvý pohľad je jasné, že pre parameter  $a$  musí platiť  $a \neq 1$  aby bol tento rad nezáporný. No napriek tomu spravíme rozbor príkladu, s tým že najprv použijeme Bochnerovo kritérium a potom McLean-Woerdemanovo kritérium.

#### 3.1 Riešenie pomocou Bochnerovho kritéria

V prvom rade si musíme vypísť koeficienty radu.  $\sigma_0 = 1, \sigma_1 = \frac{a}{2}, \sigma_{-1} = \frac{a}{2}, \sigma_k = 0$  pre  $k = \pm 2, \pm 3, \dots$

Následne si vytvoríme Toeplitzovské matice, ktoré budú mať tvar:

$$A^{(n)} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{a}{2} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{a}{2} & 1 & \frac{a}{2} & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \frac{a}{2} & 1 & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \frac{a}{2} & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \frac{a}{2} & 1 & \frac{a}{2} \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \frac{a}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

Teraz keď máme spravený tvar Toeplitzovskej matice začneme vyšetrovať jej definitnosť pre ľubovoľné  $n$ . Pre jednoduchosť najprv budeme požadovať, že matice  $A^{(n)}$  sú kladne definitné a potom prejdeme ku kladnej semi-definitnosti. Pre ďalšie výpočty sme si označili determinant matice  $\det(A^{(n)}) = A_n$ . Najdôležitejšou časťou bolo si uvedomiť, že determinenty  $A_n$  sa dajú pomocou Laplaceovho rozvoja determinantu (Veta 1.8) vyjadriť ako:

$$A_n = A_{n-1} - \frac{a^2}{4} A_{n-2}, \quad (2)$$

kde:

$$\begin{aligned} A_1 &= 1, \\ A_2 &= 1 - \frac{a^2}{4}, \end{aligned} \tag{3}$$

čo je homogénna diferenčná rovnica druhého rádu s jedným parametrom, s počiatočnými podmienkami (3). Potom charakteristický polynóm tejto diferenčnej rovnice bude mať tvar:  $r^2 - r - \frac{a^2}{4} = 0$ . Vyriešením tejto rovnice dostaneme všeobecné riešenia rovnice (2) a to :

$$\begin{aligned} r_1 &= \frac{1 + \sqrt{1 - a^2}}{2}, \\ r_2 &= \frac{1 - \sqrt{1 - a^2}}{2}. \end{aligned} \tag{4}$$

Môžme si všimnúť, že pre  $r_1$  a  $r_2$  platia vzťahy:

$$\begin{aligned} r_1 + r_2 &= 1, \\ r_1 \cdot r_2 &= \frac{a^2}{4}. \end{aligned} \tag{5}$$

Taktiež si môžme všimnúť, že korene  $r_1, r_2$  sú závislé od parametra  $a$ , najprv sa budeme venovať prípadu, kedy  $|a| \neq 1$  a teda  $r_1$  a  $r_2$  sú rôzne a všeobecné riešenie rovnice (2) má tvar:

$$A_n = c_1 r_1^n + c_2 r_2^n.$$

Potom nájdením koeficientov  $c_1, c_2$  pre počiatočné podmienky (3), s využitím vzťahov (5) dostaneme:

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{r_1^2}{r_1 - r_2}, \\ c_2 &= -\frac{r_2^2}{r_1 - r_2}, \end{aligned}$$

a teda riešenie rovnice (2) je:

$$A_n = \frac{r_1^{n+2} - r_2^{n+2}}{r_1 - r_2}, \tag{6}$$

kde  $r_1, r_2$  sú definované v (4).

Pre prípad ked'  $|a| = 1$  nastáva  $r_1 = r_2 = \frac{1}{2}$  a teda všeobecné riešenie rovnice (2) má tvar:

$$A_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n (c_1 + n \cdot c_2),$$

a pre dané podmienky (3) dostaneme, že riešenie rovnice (2) pre  $|a| = 1$  má tvar:

$$A_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n (1 + n). \quad (7)$$

Dôvod, prečo sme sa venovali rovnici (2) je ten, že  $A_i$ , pre  $i = 1, 2, \dots, n$  sú determinanti hlavných rohových podmatíc matice  $A^{(n)}$ , a preto sa nám stačí zaoberať otázkou pre ktoré hodnoty parametra  $a$  sú jednotlivé  $A_i$  kladné. Z tvaru  $r_1, r_2$  je vidno, že túto otázkou budeme riešiť pre dva prípady, naprav ked'  $|a| \leq 1$ , a potom pre  $|a| > 1$ .

### 3.1.1 Prípad $|a| \leq 1$

Ak  $|a| < 1$  je tento prípad dosť triviálny, lebo  $r_1$  aj  $r_2$  sú rôzne reálne čísla a na prvý pohľad je vidno, že  $r_1 > r_2$  a teda platia nasledujúce nerovnosti:

$$\begin{aligned} r_1 - r_2 &> 0, \\ r_1^{n+2} - r_2^{n+2} &> 0, \end{aligned}$$

z týchto nerovností vyplýva, že  $A_n$  je kladné pre ľubovoľné  $n \in \mathbb{N}$ . Pre  $|a| = 1$  dostávame, že  $A_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n (c_1 + n.c_2)$  a je jasne vidieť, že tento výraz je kladný pre ľubovoľné  $n \in \mathbb{N}$ .

Dostali sme, že  $A_n$  definované v (6),(7) je kladné, pre ľubovoľné  $n \in \mathbb{N}$ . Teda sme dostali, že pre hodnoty parametra  $|a| \leq 1$  je vyšetrovaný Fourierov rad  $1 + a \cos(x)$  nezáporný.

### 3.1.2 Prípad $|a| > 1$

Ukážeme, že  $\sigma(x) < 0$  pre vhodnú voľbu  $n$ . Ak  $|a| > 1$  tak, korene  $r_1, r_2$  sú komplexné čísla, pričom platí, že  $r_2$  je komplexne združené k  $r_1$ . Na lepšiu prácu s  $r_1, r_2$  si ich prevedieme do goniometrického tvaru

$$\begin{aligned} r_1 &= \delta(\cos(\beta) + i \sin(\beta)), \\ r_2 &= \delta(\cos(\beta) - i \sin(\beta)), \text{ kde} \\ \delta &= \frac{|a|}{2}, \\ \beta &= \arccos\left(\frac{1}{|a|}\right), \quad \beta \in (0, \frac{\pi}{2}). \end{aligned}$$

Na základe Moivreovej vety (1.3) dostaneme tvar pre riešenie rovnice (2) v tvare:

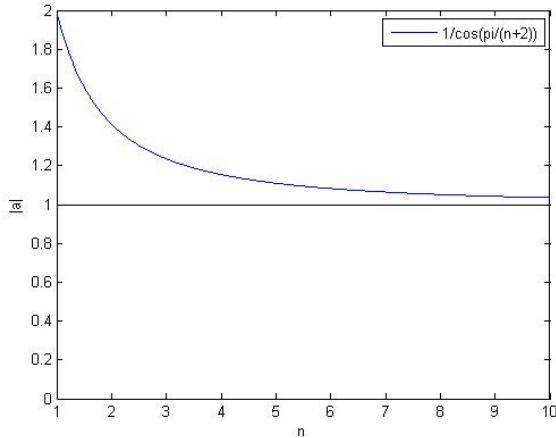
$$A_n = |\delta|^n \frac{\sin([n+2]\beta)}{\sin(\beta)} \quad (8)$$

Chceme ukázať, že  $\exists n_0 \in \mathbb{N}$  také, že  $n_0 + 2 \in (\frac{\pi}{\beta}, \frac{2\pi}{\beta})$  a teda  $A_n$  bude záporné. Také prirodzené číslo existuje práve vtedy, ak dĺžka intervalu  $(\frac{\pi}{\beta}, \frac{2\pi}{\beta})$  je väčšia ako jedna. Dostávame nerovnosť  $\frac{\pi}{\beta} > 1$ , ktorá pre  $\beta \in (0, \frac{\pi}{2})$  je ekvivalentná s nerovnosťou  $\beta < \pi$ . Posledná nerovnosť je splnená pre  $\forall \beta \in (0, \frac{\pi}{2})$  a teda dĺžka intervalu  $(\frac{\pi}{\beta}, \frac{2\pi}{\beta})$  je väčšia ako jedna a teda existuje  $n_0 \in \mathbb{N}$  také, že  $A_{n_0}$  je záporné a teda nie je splnené Bochnerovo kritérium.

Je zaujímavé sa pozrieť na problém aj z iného uhľa a to, že pre pevné  $n \in \mathbb{N}$  aké je maximálne  $|a| \in \mathbb{R}$  také aby platilo  $A_n \geq 0$ . Z poznatkov v (3.1.2) vidíme, že musí platiť  $(n+2)\beta = \pi$  a dostaneme :

$$\arccos\left(\frac{1}{|a|}\right) = \frac{\pi}{n+2}.$$

Po vyjadrení  $|a|$  dostaneme  $|a| = \frac{1}{\cos(\frac{\pi}{n+2})}$ , z tejto rovnosti dostaneme hranicu pre  $|a|$  tak aby pre pevné  $n$  boli všetky členy  $A_k$  nezáporné pre  $k = 1, 2, \dots, n$ .



**Obr. 2:** Vzťah medzi  $n$  a  $|a|$ .

### 3.1.3 Rozšírenie

Môžme, sa pýtať pre ktoré parametre  $\sigma \in \mathbb{C}$  je rad  $1 + \sigma e^{ix} + \bar{\sigma} e^{-ix}$  nezáporný? Po substitúcií  $\sigma = \frac{\mu}{2}$ , bude postup rovnaký aj s rovnicami, až na výraz  $\frac{\mu^2}{4}$ , ktorý bude nahradený výrazom  $\frac{\mu\bar{\mu}}{4} = \frac{|\mu|^2}{4}$  a teda riešenia budú rovnakého charakteru ako v

prípade  $1 + a \cos(x)$ . Ako výsledok nám vyjde, že determinanty  $A_n$  sú nezáporné ak  $|\mu| \leq 1$ , spätným dosadením  $\sigma$  dostaneme  $|\sigma| \leq \frac{1}{2}$ , pre  $\sigma$  splňajúce túto nerovnosť je rad  $1 + \sigma e^{ix} + \bar{\sigma} e^{-ix}$  nezáporný. To ekvivalentne znamená, že rad  $1 + a \cos(x) + b \sin(x)$  je nezáporný ak platí:  $a^2 + b^2 \leq 1$ .

### 3.2 Riešenie využitím McLean-Woerdemanovho kritéria

Teraz pristúpime k riešenému problému iným spôsobom a budeme sa ho snažiť vyriešiť cez McLean-Woerdemanovo kritérium nezápornosti. V kapitole 2.2 sme uviedli ako sa dá McLean-Woerdemanovo kritérium pretransformovať na optimalizačný problém (1). Momentálne nemáme zadaný koeficient, ale hľadáme maximalný možný koeficient, ktorý spĺňa podmienky z McLean-Woerdemanovho kritéria, a teda môžme upraviť (1) do tvaru:

$$\begin{aligned} & \max_F |a| \\ \text{s.t. } & \sum_{p=1}^2 F_{p,p} = 1 \\ & F_{1,2} = \frac{a}{2}, \quad a \in \mathbb{R} \\ & F \succeq 0, \quad F \in \mathcal{H}^2 \end{aligned} \tag{9}$$

Táto úloha sa dá pomerne ľahko vyriešiť, keďže  $F$  má tvar

$$F = \begin{pmatrix} p & \frac{a}{2} \\ \frac{a}{2} & 1-p \end{pmatrix}$$

Aby  $F$  bola kladne semi-definitná musia byť splnené podmienky

$$\begin{aligned} & 0 \leq p \leq 1, \\ & 0 \leq p(1-p) - \frac{a^2}{4} \Leftrightarrow a^2 \leq 4p(1-p). \end{aligned}$$

Z poslednej nerovnosti vidno, že nám stačí maximalizovať výraz  $4p(1-p)$ , pre  $p \in \langle 0, 1 \rangle$ . Pre maximalné  $a$  musí nastať rovnosť v poslednej nerovnosti. Ak by nenastala vedeli by sme nájsť väčšie  $a$ , také aby boli nerovnosti splnené a teda  $F$  bola kladne semi-definitná. Vidno, že vyšetrovaná funkcia je kladná a spojité na kompakte  $\langle 0, 1 \rangle$  a teda nadobúda svoje maximum a minimum. Tatiež vidno, že nadobúda minimum rovné nule v bodoch  $p = 0, p = 1$ , to znamená, že maximum sa musí nadobúdať v otvorenom intervale  $(0, 1)$ . Z nutnej podmienky lokálneho extrému dostaneme  $1-2p = 0$  a teda maximum sa nadobúda v  $p = \frac{1}{2}$  a je rovné jednej. Dostali sme teda, že  $a^2 \leq 1 \Leftrightarrow |a| \leq 1$ . Na vyriešenie optimalizačnej úlohy (9) využijeme aj rozšírenie cvx, pre Matlab, z dôvodu, prípravy na riešenie zložitejších úloh. Problémom je, že cvx nevie maximalizovať konvexné funkcie ako absolútnej hodnoty, preto budeme maximalizovať iba parameter  $a$ . Neskôr ukážeme, že tento prístup nám dá rovnaky výsledok, ako keby

sme maximalizovali absolútne hodnotu z  $a$ . Zdrojový kód pre riešenie úlohy (9) je, uvedený v Prílohe A, po jeho spustení dostaneme výstup:

```
Calling sedumi: 4 variables, 2 equality constraints
-----
SeDuMi 1.21 by AdvOL, 2005-2008 and Jos F. Sturm, 1998-2003.
Alg = 2: xz-corrector, Adaptive Step-Differentiation, theta = 0.250, beta = 0.500
eqs m = 2, order n = 3, dim = 9, blocks = 2
nnz(A) = 3 + 0, nnz(ADA) = 4, nnz(L) = 3
it :      b*y      gap    delta   rate   t/tP*   t/tD*   feas cg cg  prec
  0 :           6.72E+00 0.000
  1 : -1.22E+00 1.41E+00 0.000 0.2097 0.9000 0.9000 1.23 1 1 1.2E+00
  2 : -9.83E-01 5.72E-02 0.000 0.0406 0.9900 0.9900 1.31 1 1 3.7E-02
  3 : -1.00E+00 3.62E-07 0.000 0.0000 1.0000 1.0000 1.00 1 1 1.9E-07
  4 : -1.00E+00 3.65E-14 0.000 0.0000 1.0000 1.0000 1.00 1 1 2.0E-14

iter seconds digits      c*x          b*y
        4       0.1     Inf -1.0000000000e+00 -1.0000000000e+00
|Ax-b| = 1.2e-14, [Ay-c]_+ = 0.0E+00, |x|= 1.0e+00, |y|= 1.0e+00

Detailed timing (sec)
      Pre          IPM          Post
6.240E-02    6.240E-02    6.240E-02
Max-norms: ||b||=1, ||c|| = 2,
Cholesky |add|=0, |skip| = 0, ||L.L|| = 1.

-----
Status: Solved
Optimal value (cvx_optval): +1
```

Z výstupu vydieľ, že optimálnym riešením úlohy (9) je  $a = 1$ , avšak tento prístup nám nepovedal konkrétny interval koeficientov, pre ktoré by bol rad  $1 + a \cos(x)$  nezáporný. V nasledujúcej kapitole ukážeme, že na základe výsledku pre maximalizáciu  $a$  bude riešením pre nezápornosť radu  $1 + a \cos(x)$  celý interval  $|a| \in [0, 1]$ .

## 4 Druhý príklad

V predchádzajúcej kapitole sme ukázali ako sa dajú využiť kritéria, uvedené v kapitole 2, na jednoduchý príklad, ktorého výsledok sme vedeli, už vopred. V tejto kapitole rozobereme prípad, kedy výsledok nie je okamžite zrejmý, a budeme sa zaoberať radom:

$$f(x) = 1 + a \cos x + b \cos 2x$$

Predtým než pristúpime k aplikácií viet (2.2), (2.3) je dobré zistiť, aspoň približnú množinu riešení, ktorá nám má výjsť, aby sme mohli potom overiť výsledky.

**Tvrdenie 4.1.** *Množina*

$$M_n = \left\{ a \in \mathbb{R}^n : 1 + \sum_{k=1}^n a_k \cos(kx) \geq 0, \text{ pre } \forall x \in [0, 2\pi] \right\}$$

je konvexná.

*Dôkaz.* Nech  $p, q \in M_n$  ukážeme, že  $\forall \alpha \in (0, 1)$  vektor  $\alpha p + (1 - \alpha)q \in M_n$  čo je ekvivalentné s  $1 + \sum_{k=1}^n [\alpha p_k + (1 - \alpha)q_k] \cos(kx) \geq 0$

Nech  $\alpha \in (0, 1)$  potom pre  $\forall x \in [0, 2\pi]$  platí:

$$1 + \sum_{k=1}^n p_k \cos(kx) \geq 0 \tag{I}$$

$$1 + \sum_{k=1}^n q_k \cos(kx) \geq 0 \tag{II}$$

Vynásobením (I) výrazom  $\alpha$  a (II) výrazom  $(1 - \alpha)$  a ich sčítaním dostaneme, že pre  $\forall x \in [0, 2\pi]$  platí:

$$1 + \sum_{k=1}^n [\alpha p_k + (1 - \alpha)q_k] \cos(kx) \geq 0$$

čo znamená, že vektor  $\alpha p + (1 - \alpha)q \in M_n$ . □

*Poznámka:* Vidno, že množina  $M_n$  je neprázdna, lebo vektor  $\vec{0} \in \mathbb{C}$  patrí vždy do množiny  $M_n$ .

**Dôsledok 4.2.** *Využitím Tvrdenia(4.1) a Poznámky(2), pre výsledok z kapitoly (3.2) vidno, že množina vhodných parametrov je  $[0, 1]$ .*

Tvrdenie (4.1), môžme rozšíriť do tvaru:

**Tvrdenie 4.3.** *Množina*

$$V_n = \left\{ \sigma \in \mathbb{C}^n : 1 + \sum_{k=1}^n (\sigma_k e^{ikx} + \overline{\sigma_k} e^{-ikx}) \geq 0, \text{ pre } \forall x \in [0, 2\pi] \right\}$$

je konvexná.

*Dôkaz.* Nech  $\sigma, \mu \in V_n$  ukážeme, že  $\forall \alpha \in (0, 1)$  vektor  $\alpha\sigma + (1 - \alpha)\mu \in V_n$  čo je ekvi-

$$\text{alentné s } 1 + \sum_{k=-n}^n [\alpha\sigma_k + (1 - \alpha)\mu_k] e^{ikx} \geq 0$$

Nech  $\alpha \in (0, 1)$  potom pre  $\forall x \in [0, 2\pi]$  platí:

$$1 + \sum_{k=-n}^n \sigma_k e^{ikx} \geq 0 \tag{I}$$

$$1 + \sum_{k=-n}^n \mu_k e^{ikx} \geq 0 \tag{II}$$

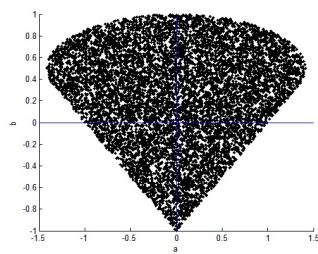
Vynásobením (I) výrazom  $\alpha$  a (II) výrazom  $(1 - \alpha)$  a ich sčítaním dostaneme, že pre  $\forall x \in [0, 2\pi]$  platí:

$$1 + \sum_{k=-n}^n [\alpha\sigma_k + (1 - \alpha)\mu_k] e^{ikx} \geq 0$$

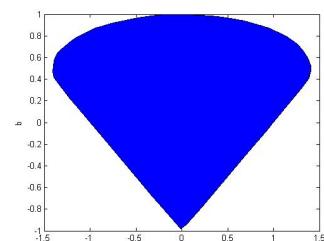
čo znamená, že vektor  $\alpha\sigma + (1 - \alpha)\mu \in V_n$ . □

*Poznámka:* Z definície množín  $M_n, V_n$  vidno, že platí:  $M_n \subseteq V_n$ .

Pomocou Matlabu sme nagerovali dvojice čísel  $[a,b]$ , z obdĺžnika s vrcholmi  $(-1.5, -1), (1.5, 1)$ , potom sme pre každú vygenerovanú dvojicu rozhodli či je rad  $1 + a \cos x + b \cos 2x$  nezáporný. Body, pre ktoré bol nezáporný sme, zakreslili do Obr.(3). Využitím Tvrdenia(4.1) dostaneme množinu, ktorá je zaznačená v Obr.(4)



Obr. 3: Odhad množiny  $M_2$



Obr. 4: Konvexný obal odhadu množiny  $M_2$

## 4.1 Riešenie pomocou Bochnerovho kritéria

Teraz sa pokusíme pomocou Bochnerovho kritéria, zistiť pre ktoré koeficienty je vyšetrovaný rad nezáporný. Na začiatok si zapíšeme tvar Toeplitzovských matíc pre tento konkrétny príklad.

$$B^{(n)} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{a}{2} & \frac{b}{2} & 0 & \dots & 0 \\ \frac{a}{2} & 1 & \frac{a}{2} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \frac{b}{2} & \frac{a}{2} & 1 & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \frac{a}{2} & \frac{b}{2} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \frac{a}{2} & 1 & \frac{a}{2} \\ 0 & \dots & 0 & \frac{b}{2} & \frac{a}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

Obdobne ako v predchádzajúcej kapitole, sme pomocou Laplacovho rozvoja determinantu (Veta 1.8) našli vyjadrenie medzi determinantom matice  $B^{(n)}$  pomocou determinantov matíc s menším rozmerom. Dostali sme diferenčnú rovnicu piateho rádu:

$$B_{n+1} + \left(\frac{b}{2} - 1\right)B_n + \left(\frac{a^2}{4} - \frac{b}{2}\right)B_{n-1} - \frac{b}{2}\left(\frac{a^2}{4} - \frac{b}{2}\right)B_{n-2} - \frac{b^3}{8}\left(\frac{b}{2} - 1\right)B_{n-3} - \frac{b^5}{32}B_{n-4} = 0 \quad (\text{A})$$

Jej charakteristická rovnica má tvar:

$$r^5 + \left(\frac{b}{2} - 1\right)r^4 + \left(\frac{a^2}{4} - \frac{b}{2}\right)r^3 - \frac{b}{2}\left(\frac{a^2}{4} - \frac{b}{2}\right)r^2 - \frac{b^3}{8}\left(\frac{b}{2} - 1\right)r - \frac{b^5}{32} = 0 \quad (\text{B})$$

Zrejme  $r_1 = \frac{b}{2}$  je koreňom. Ostatné korene  $r_2, r_3, r_4, r_5$  získame po vykrátení charakteristického polynómu výrazom  $(r - \frac{b}{2})$  a riešením polynómu štvrtého stupňa, pomocou substitúcie  $r = y - \frac{b-1}{4}$ , a následne rozložením na dva kvadratické trojčleny. Korene charakteristického polynómu, sú:

$$r_1 = \frac{b}{2}, \quad (10)$$

$$r_{2,3} = \frac{1}{4} \left( -\sqrt{(b+1)^2 - a^2} + 1 - b \mp \sqrt{(-\sqrt{(b+1)^2 - a^2} + 1 - b)^2 - 4b^2} \right), \quad (11)$$

$$r_{4,5} = \frac{1}{4} \left( \sqrt{(b+1)^2 - a^2} + 1 - b \mp \sqrt{(\sqrt{(b+1)^2 - a^2} + 1 - b)^2 - 4b^2} \right), \quad (12)$$

dá sa jednoducho ukázať, že výrazy  $r_{1,2,3,4,5}$  sú naozaj riešením rovnice (B), či už rozdelením  $\prod_{k=1}^5 (r - r_k)$ , alebo numericky dosadením, niektorého z  $r_{1,2,3,4,5}$  a pevne zvolenej dvojice  $(a, b)$ . Všeobecné riešenie rovnice (A) bude mať tvar:

$$B_n = c_1 r_1^n + c_2 r_2^n + c_3 r_3^n + c_4 r_4^n + c_5 r_5^n, \text{ kde } c_1, \dots, c_5 \in \mathbb{C}. \quad (\text{C})$$

Na základe počiatočných podmienok:

$$B_1 = 1,$$

$$B_2 = 1 - \frac{a^2}{4},$$

$$B_3 = 1 + \frac{a^2}{2} \left( \frac{b}{2} - 1 \right) - \frac{b^2}{4},$$

$$B_4 = 1 - \frac{b^2}{2} - \frac{3a^2}{4} + \frac{a^2 b}{2} + \left( \frac{a^2}{4} - \frac{b^2}{4} \right)^2,$$

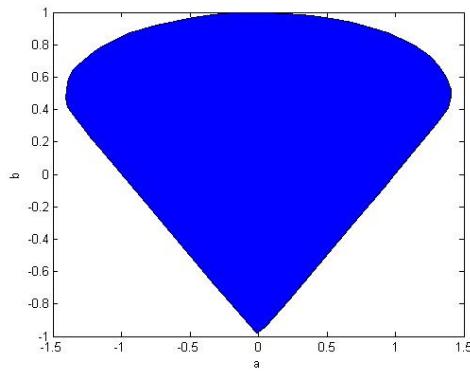
$$B_5 = 1 + \frac{a^2}{2} \left( \frac{b^3}{4} + \frac{3b}{2} - 2 \right) + 2 \left( \frac{a^2}{4} - \frac{b^2}{4} \right)^2 - \frac{3b^2}{4} + \frac{a^4}{16} (1 - 2b),$$

dostaneme, vyjadrenie  $c_{1,2,3,4,5}$ :

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{1}{(r_1 - r_2)(r_1 - r_3)(r_1 - r_4)(r_1 - r_5)} [B_5 - (r_4 + r_3 + r_2 + r_5)B_4 \\ &\quad + (r_4 r_5 + r_4 r_2 + r_4 r_3 + r_3 r_2 + r_3 r_5 + r_2 r_5)B_3 - (r_4 r_3 r_2 + r_4 r_3 r_5 + r_4 r_2 r_5 + r_3 r_2 r_5)B_2 \\ &\quad + r_4 r_3 r_2 r_5 B_1], \\ c_2 &= \frac{1}{(r_2 - r_1)(r_2 - r_3)(r_2 - r_4)(r_2 - r_5)} [B_5 - (r_4 + r_3 + r_5 + r_1)B_4 \\ &\quad + (r_4 r_1 + r_4 r_5 + r_4 r_3 + r_3 r_5 + r_3 r_1 + r_5 r_1)B_3 - (r_4 r_3 r_5 + r_4 r_3 r_1 + r_4 r_5 r_1 + r_3 r_5 r_1)B_2 \\ &\quad + r_4 r_3 r_5 r_1 B_1], \\ c_3 &= \frac{1}{(r_3 - r_1)(r_3 - r_2)(r_3 - r_4)(r_3 - r_5)} [B_5 - (r_4 + r_5 + r_2 + r_1)B_4 \\ &\quad + (r_4 r_1 + r_4 r_2 + r_4 r_5 + r_5 r_2 + r_5 r_1 + r_2 r_1)B_3 - (r_4 r_5 r_2 + r_4 r_5 r_1 + r_4 r_2 r_1 + r_5 r_2 r_1)B_2 \\ &\quad + r_4 r_5 r_2 r_1 B_1], \\ c_4 &= \frac{1}{(r_4 - r_1)(r_4 - r_2)(r_4 - r_3)(r_4 - r_5)} [B_5 - (r_5 + r_3 + r_2 + r_1)B_4 \\ &\quad + (r_5 r_1 + r_5 r_2 + r_5 r_3 + r_3 r_2 + r_3 r_1 + r_2 r_1)B_3 - (r_5 r_3 r_2 + r_5 r_3 r_1 + r_5 r_2 r_1 + r_3 r_2 r_1)B_2 \\ &\quad + r_5 r_3 r_2 r_1 B_1], \\ c_5 &= \frac{1}{(r_5 - r_1)(r_5 - r_2)(r_5 - r_3)(r_5 - r_4)} [B_5 - (r_4 + r_3 + r_2 + r_1)B_4 \\ &\quad + (r_4 r_1 + r_4 r_2 + r_4 r_3 + r_3 r_2 + r_3 r_1 + r_2 r_1)B_3 - (r_4 r_3 r_2 + r_4 r_3 r_1 + r_4 r_2 r_1 + r_3 r_2 r_1)B_2 \\ &\quad + r_4 r_3 r_2 r_1 B_1]. \end{aligned}$$

V prípade, že by sme vedeli vyjadriť podmienky pre dvojicu parametrov  $(a, b)$ , pre

ktorú je výraz  $B_n$  nezáporný pre  $\forall n \in \mathbb{N}$ , dostali by sme presný predpis množiny  $M_2$ . Táto množina sa dá ekvivalentne zapísat ako  $M_2 = \overline{\{(a, b), B_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}\}}$ . Avšak kvôli zložitosti výrazov  $r_1, r_2, r_3, r_4, r_5$  sa nám nepodarilo určiť presné podmienky, ktoré by jednoznačne určili množinu  $M_2$ . Ale z tvaru odhadu tejto množiny znázornenom na Obr.(5):



**Obr. 5:** Odhad množiny  $M_2$

predpokladáme, že množina  $M_2$  bude zjednotením trojuholníka s vrcholmi  $(0, -1)$ ,  $(\frac{-4}{3}, \frac{1}{3})$ ,  $(\frac{4}{3}, \frac{1}{3})$  a elipsy so stredom v bode  $(0, \frac{1}{2})$  a dĺžkou osí  $\sqrt{2}$ , pre hlavnú os, a  $\frac{1}{2}$  pre vedľajšiu os. Túto hypotézu sa nám, ale nepodarilo overiť, kvôli značnému skomplikovaniu určenia nezápornosti výrazov  $B_n$ , oproti prípadu, ktorý sme rozoberali v kapitole 3. Vzhľadom na túto komplikáciu, sa pokusíme vyriešiť tento problém pomocou McLean-Woerdemanovho kritéria.

## 4.2 Riešenie využitím McLean-Woerdemanovho kritéria

V tejto časti práce sa už nebudeme zameriavať na určenie presných podmienok pre dvojicu parametrov  $(a, b)$ , ktoré by určili množinu  $M_2$  presne. Sústredíme sa skôr ako určiť značne presný odhad množiny  $M_2$ . Našim zámerom v tejto kapitole bude vyriešiť,

pre pevne zvolené  $\sigma_{k_0}$ , optimalizačnu úlohu:

$$\begin{aligned} \max_{F, \sigma} \quad & |\sigma_{k_0}| \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{p=k+1}^n F_{p,p-k} = \sigma_k, \quad \text{pre } k = 0, 1, \dots, n-1, \\ & F \succeq 0, \\ & F \in \mathcal{H}^n, \quad \sigma \in \mathbb{C}^n. \end{aligned} \tag{Opt.1}$$

Na základe ktorej sa dozvieme aké maximálne  $\sigma_{k_0}$  môže byť. Na riešenie tejto optimalizácie budeme opäťovne využívať nadstavbu na Matlab CVX. Avšak pri riešení tejto úlohy nastáva celkom závažný problem, v tom že CVX nedokáže maximalizovať konvexnú funkciu akou je absolútnej hodnota komplexného čísla pri takýchto ohraničeniach. Tomuto problému sa dá vyhnúť, ale musíme najprv dokázať dve tvrdenia, s využitím ktorých sa nám to podarí.

**Tvrdenie 4.4.** Rad  $\sigma(x) = 1 + \sum_{k=1}^n (\sigma_k e^{ikx} + \overline{\sigma_k} e^{-ikx})$  je nezáporný pre  $\forall x \in [0, 2\pi]$ , práve vtedy keď, pre ľubovoľné  $\alpha \in \mathbb{R}$  je rad  $\sigma(x+\alpha) = 1 + \sum_{k=1}^n (\sigma_k e^{ik(x+\alpha)} + \overline{\sigma_k} e^{-ik(x+\alpha)})$ , je tiež nezáporný, pre  $\forall x \in [0, 2\pi]$ .

*Dôkaz.*  $\implies$

Kedže  $\sigma(x)$  je  $2\pi$ -periodická funkcia, tak platí  $\sigma(x) = \sigma(x + 2k\pi)$  pre  $\forall k \in \mathbb{Z}$  a teda ak je  $\sigma(x)$  nezáporná pre všetky  $x \in [0, 2\pi]$  potom je nezáporná pre  $\forall x \in \mathbb{R}$ . Potom pre rad  $\sigma(x+\alpha)$  môžme spraviť substitúciu  $t = x + \alpha$ , dostaneme rad  $\sigma(t)$ , ale na intervale  $t \in [\alpha, 2\pi + \alpha]$ , na základe toho, že rad je nezáporný pre všetky  $x \in \mathbb{R}$  je tiež nezáporný na  $[\alpha, 2\pi + \alpha]$  a teda rad  $\sigma(x+\alpha)$  je nezáporný pre  $\forall x \in [0, 2\pi]$

$\Leftarrow$

Zvolením  $\alpha = 0$  dostaneme, že rad  $\sigma(x) = 1 + \sum_{k=1}^n (\sigma_k e^{ikx} + \overline{\sigma_k} e^{-ikx})$  je nezáporný.

□

**Tvrdenie 4.5.** Nech  $\sigma \in V_n$ , navyše nech pre pevné  $k_0$  platí  $\sigma_{k_0} = |\rho| e^{i\xi}$  potom pre ľubovoľné  $\delta \in [0, 2\pi]$  existuje vektor  $\gamma \in V_n$  taký, že  $\gamma_{k_0} = |\rho| e^{i(\xi+\delta)}$ .

*Dôkaz.* Označme  $\alpha = \frac{\delta}{k_0}$ . Vytvoríme vektor  $\gamma$  pre ktorého zložky platí:

$$\gamma_k = e^{ik\alpha} \sigma_k, \quad \text{pre } k = 1, 2, \dots, n$$

Vidíme, že  $\gamma_{k_0} = |\rho|e^{i(\xi+\delta)}$ , potrebujeme ešte ukázať  $\gamma \in V_n$ .

Teda musíme ukázať, že rad:  $\gamma(x) = 1 + \sum_{k=1}^n (\gamma_k e^{ikx} + \overline{\gamma_k} e^{-ikx})$  je nazáporný. Tento rad sa dá prepísať do tvaru:

$$\gamma(x) = \sum_{k=1}^n (\sigma_k e^{ik\alpha} e^{ikx} + \overline{\sigma_k} e^{-ik\alpha} e^{-ikx}) = \sum_{k=1}^n (\sigma_k e^{ik(x+\alpha)} + \overline{\sigma_k} e^{-ik(x+\alpha)})$$

Vidíme, že tento rad je iba posunutým radom  $\sigma(x+\alpha)$  s využitím Tvrdenia (4.4) vieme, že tento rad je nezáporný a teda  $\gamma \in V_n$   $\square$

**Dôsledok 4.6.** Správnou voľbou  $\delta$  z tvrdenia 4.5 vieme docieľiť, že  $\gamma_{k_0}$  bude reálne číslo.

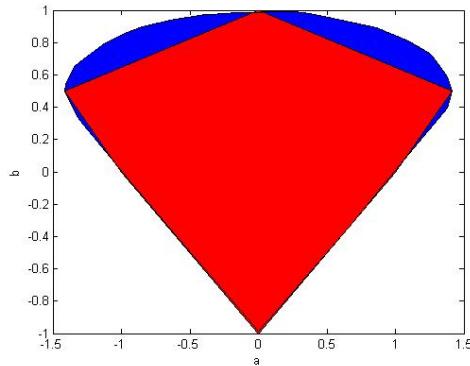
Ak existuje optimálne riešenie v úlohe Opt.1, označíme ho  $\bar{\sigma}$ , tak potom z dôsledku 4.6 vyplýva, že existuje prípustné riešenie,  $\bar{\gamma}$  také, že  $\gamma_{k_0} \in \mathbb{R}$  a  $|\sigma_{k_0}| = |\gamma_{k_0}|$ . To znamená, že aj  $\gamma$  je optimalné riešenie úlohy Opt.1. Vytvoríme novú úlohu, ktorej optimálne riešenie bude ekvivalentné s optimálnym riešením úlohy Opt.1 avšak účelová funkcia už bude prípupná v zmysle CVX:

$$\begin{aligned} & \max_{F, \sigma, c} \quad c \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{p=k+1}^n F_{p,p-k} = \sigma_k, \quad \text{pre } k = 0, 1, \dots, n-1, \\ & \sigma_{k_0} = c, \\ & F \succeq 0, \\ & F \in \mathcal{H}^n, \quad \sigma \in \mathbb{C}^n, \quad c \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{Opt.2}$$

Jednoduchými úvahami sa dá príť na to, že ak úloha Opt.1 má optimálne riešenie, tak aj úloha Opt.2 má optimálne riešenie a hodnoty účelových funkcií sa rovnajú. Taktiež sa dá ukázať, že ak úloha Opt.2 má optimálne riešenie, tak aj úloha Opt.1 má optimálne riešenie a hodnoty účelových funkcií sa rovnajú. Na základe týchto zistení sme boli schopní naprogramovať funkciu, ktorá pre zadaný rozmer problému vypočíta akú maximálnu hodnotu môže mať koeficient  $\sigma_{k_0}$  pre zvolené  $k_0$ . Zdrojový kód pre riešenie úlohy Opt.2 je uvedený v Prílohe A. Konkrétnie pre nášu funkciu  $f(x) = 1 + a \cos x + b \cos 2x$  bude mať optimalizačná úloha tvar:

$$\begin{aligned}
& \max_{F,a,b} f(a,b) \\
\text{s.t. } & \sum_{p=1}^3 F_{p,p} = 1, \\
& \sum_{p=2}^3 F_{p,p-1} = \frac{a}{2}, \\
& F_{1,3} = \frac{b}{2}, \\
& F \succeq 0, \\
& F \in \mathcal{H}^3, \quad a, b \in \mathbb{R}.
\end{aligned} \tag{Opt.3}$$

Ak chceme maximalizovať parameter  $a$  zvolíme funkciu  $f(a,b) = a$ , riešenie pre takto zvolenú účelovú funkciu je dvojica  $[a,b] = [\sqrt{2}, 0.5]$ , z Tvrdenia(4.5) pre  $\delta = \pi$  vyplýva, že prípustné riešenie bude aj dvojica  $[a,b] = [\sqrt{2} * e^{i\pi}, 0.5 * e^{i2\pi}] = [-\sqrt{2}, 0.5]$ . Pre maximalizáciu parametra  $b$ , zvolíme účelovú funkciu  $f(a,b) = b$ , dostaneme dvojicu  $[a,b] = [0, 1]$ , obdobne ako pred chvíľou využitím Tvrdenia(4.5) dostaneme, že optimálne riešenie je aj  $[a,b] = [0, -1]$ . S využitím predchádzajúceho príkladu vieme, že množina  $M_2$  určite obsahuje vektory:  $[\sqrt{2}, 0.5], [-\sqrt{2}, 0.5], [0, 1], [0, -1], [1, 0], [-1, 0]$ , s využitím faktu, že  $M_2$  je konvexná, dostaneme odhad množiny  $M_2$ . Do obrázka sme začali numericky zistenú celú množinu  $M_2$  a odhad množiny  $M_2$  získaný ako konvexný obal nami zistenými vektorami. Ako je vidno z Obr.(6) nepokryli sme týmto postupom celú množinu  $M_2$ .



**Obr. 6:** Porovnanie množiny  $M_2$  s jej odhadom

Otázku ako množinu  $M_n$  approximovať presnejšie, budeme riešiť v nasledujúcej kapitole.

## 5 Problémy vyššieho rádu

V kapitole 4 sme zadefinovali množiny  $M_n$  a  $V_n$ . V tejto kapitole sa budeme zaoberať numerickou aproximáciou týchto množín. Budeme sa zaoberať najmä konečnými Fourierovými radmi. Na konci kapitoly sa vyjadríme aj k nekonečným radom. Využijeme tvrdenia 4.1 a 4.3 teda, že množiny  $M_n$  a  $V_n$  sú konvexné. Najprv sa budeme zaoberať množinou  $M_n$  a neskôr, sa budeme venovať rozšíreniu postupov na množinu  $V_n$ . Základná myšlienka je taká, že vygenerujeme dostatočne veľa bodov z dostatočne veľkej množiny a potom určíme, na základe jedného z kritérií, pre ktoré z týchto bodov je vyšetrovaný Fourierov rad nezáporný. Potom spravíme komplexný obal týchto bodov, čím dostaneme aproximáciu týchto množín. Avšak všetky postupy s generovaním značného počtu bodov majú ten nedostatok, že výrazne záleží od toho aké body vygenerujeme, navyše mnoho bodov je tak povediac zbytočných, lebo v podstate potrebujeme iba body na hranici množín  $M_n$  a  $V_n$ . Taktiež môže vystať problém, že počet bodov potrebný na určenie množín  $M_n$  a  $V_n$ , bude až moc veľký, čo nám zvýši časovú zložitosť algoritmov. Otázkou je, ktoré kritérium použiť tak aby tento postup bol čo najpresnejší, a čo najmenej výpočtovo náročný.

### 5.1 Vyčíslovacia metóda

Prvá možnosť, ktorá sa ponúka je pre zadaných  $n$  koeficientov, vypočítať rad  $\sigma(x)$  v do-  
statočne veľa kontrolných bodoch  $x_i$  a pozrieť, sa či sú vypočítane hodnoty nezáporné.  
Tento postup je pre malé  $n$  značne rýchly a relatívne presný. Avšak so stúpajúcim n-  
rastie počet potrebných kontrolných bodov, v ktorých tento rad musíme vyčísliť, aby  
sme mohli povedať či je nezáporný. A teda rastie počet potrebných výpočtov a ná-  
sledne i časová zložitosť. Ďaľší problém tohto postupu je numerická nepresnosť, kedže  
so zvyšujúcim sa  $n$  musíme brať body  $x_i$  stále bližšie k sebe. Navyše takýto spôsob sa  
nedá použiť na zisťovanie nezápornosti nekonečných Fourierových radov.

## 5.2 Metóda založená na Bochnerovom kritériu

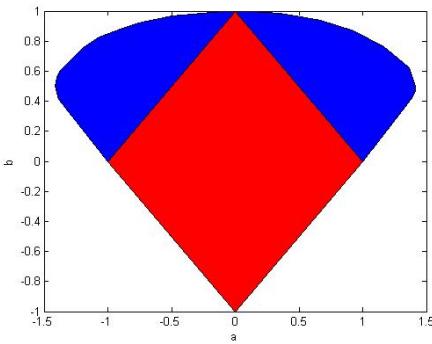
Ďaľšou možnosťou na presné určenie množín  $M_n$  a  $V_n$ , je využiť Bochnerovo kritérium, avšak v praxi je rozhodovanie na základe tohto kritéria značne neefektívne. Ako sme mohli vidieť v kapitolách (3), (4) výpočtová zložitosť výrazne rastie pre narastajúci rozmer radu. Poprípade keby, sme sa zmierili s určitou mierou nepresnosti, mohli by sme len spraviť determinanty Toeplitzovských matíc v každom vygenerovanom bode. Problém je, že výpočet determinantu je značne časovo zložitá operácia, s tým že by sme museli počítať tieto determinanty v každom vygenerovanom bode. Najväčšou výhodou Bochnerovho kritéria je, že platí aj pre nekonečné Fourierove rady, ale aj pre ne je prakticky nemožné s jeho využitím nájsť celú množinu vyhovujúcich koeficientov. Pomocou Bochnerovho kritéria sa dá spraviť určitá aproximácia množín  $M_n$  a  $V_n$ , ktorá nie je veľmi časovo náročná. Pri tejto aproximácii sa využije Veta (1.9) a dôsledok vyplývajúci z nej. Pre normované konečné Fourierove rady, Toeplitzovské matice spĺňajú skoro všetky predpoklady Vety (1.9). Ak by tieto matice boli ešte striktne diagonálne dominantné, vedeli by sme, že sú kladne definitné pre ľubovoľne veľký rozmer. Vzhľadom na špeciálny tvar Toeplitzovských matíc, na ich striktnú diagonalnú dominantnosť je potrebné, aby koeficienty  $\sigma_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  splňali nerovnosť:

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\sigma_k| + |\overline{\sigma_k}| < 1 \quad (13)$$

ktorá po rozpísaní do reálnych Fourierových koeficientov bude mať tvar:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left( \sqrt{a_k^2 + b_k^2} \right) < 1$$

V prípade, že táto nerovnosť je splnená, tak nekonečný Fourierov rad je určite nezáporný pre  $\forall x \in [0, T]$ . Pre názornosť uvedieme porovnanie tohto odhadu množiny so samotnou množinou prípustných koeficientov z Kapitoly 4. Vidno, že týmto spôsobom sme nenašli celú množinu  $M_2$ , existujú Fourierové rady, pre ktoré Toeplitzovské matice nespĺňajú striktnú diagonálnu dominantnosť, a sú nezáporné. Ako príklad spomenieme rad  $1 + \sqrt{2} \cos(x) + 0.5 \cos(2x)$ , ktorý je nezáporný, ale nespĺňa nerovnosť 13. Na záver by sme spomenuli, že Bochnerovo kritérium sa dá použiť aj opačným spôsobom a to tak, že ak vieme o Fourierovom rade, že je nezáporný tak príslušná Toeplitzovská matica je kladne semidefinitná pre ľubovoľný rozmer.



Obr. 7: Porovnanie množiny  $M_2$  s approximáciou získanou Bochnerovým kritériom

### 5.3 Metóda založená na McLean-Woerdemanovom kritériu

Posledný spôsob ako numericky získať množiny  $M_n$  a  $V_n$  je použitie McLean-Woerdemanovho kritéria. Výhodou tohto kritéria je ďaleko menšia časová zložitosť ako pri Bochnerovom kritériu. Všetky grafy množín, v tejto práci sme zhovili takýmto spôsobom, že sme si nechali rovnomerne vygenerovať stotisíc bodov v rovine a následne sme všetky otestovali scriptom, ktorý na základe McLean-Woerdemanovho kritéria rozhodol, ktoré body boli vyhovujúce a ktoré nie. Tento postup trval priemerne okolo päťdesiat minút. Problém tohto prístupu je, ako sme už spomenuli na začiatku kapitoly, že mnoho bodov ktoré vyšetríme sú zbytočné lebo, nám stačia iba body na hranici množín  $M_n$  alebo  $V_n$ . Problém so zbytočnými bodmi, by sa dal obíť, ak by sme dokázali priamo generovať iba body na hranici množín  $M_n$  a  $V_n$  potom by sme potrebovali menší počet bodov na utvorenie konvexného obalu. Toto by sa dalo dosiahnuť ak by  $M_n$  a  $V_n$  boli kompaktné. Následne by sme optimalizáciou špecialne zvolených funkcií, cez množiny  $M_n$  a  $V_n$  dokázali generovať body na ich hranici.

**Veta 5.1.** *Množina  $V_n$  je ohraničená a uzavretá.*

*Dôkaz.* Najprv dokážeme uzavretosť množiny  $V_n$ . Dokážeme, že pre ľubovoľnú konvergentnú postupnosť vektorov  $\sigma^{(k)}_{k=1} \subset V_n$  platí, že  $\lim_{k \rightarrow +\infty} \sigma^{(k)} = \tilde{\sigma}$  patrí do množiny  $V_n$ . Kedže platí  $V_n \subseteq \mathbb{C}^n$  tak platí:

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \sigma^{(k)} = \tilde{\sigma} \Leftrightarrow \lim_{k \rightarrow +\infty} \sigma_l^{(k)} = \tilde{\sigma}_l, \quad \text{pre } l = 1, 2, \dots, n. \quad (\text{I})$$

Označme si  $\sigma^{(k)}(x) = 1 + \sum_{l=1}^n \left( \sigma_l^{(k)} e^{ilx} + \bar{\sigma}_l^{(k)} e^{-ilx} \right)$ . Vieme, že  $\sigma^{(k)}(x) \geq 0$  pre  $k = 1, 2, \dots$ . Treba ukázať, že  $\tilde{\sigma}(x) \geq 0$ , z čoho dostaneme, že vektor  $\tilde{\sigma} \in V_n$ . Využitím

vlastností limity pre súčet postupností a využitím (I) dostaneme, že pre ľubovoľné pevné  $x \in \mathbb{R}$  platí:

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \sigma^{(k)}(x) = \tilde{\sigma}(x)$$

Využitím vety (1.4) dostávame, že  $\tilde{\sigma}(x) \geq 0$  a teda  $\tilde{\sigma} = \lim_{k \rightarrow +\infty} \sigma^{(k)} \in V_n$ .

Ukážeme, že množina  $V_n$  je ohraničena, teda že existuje guľa  $B_r = \{z \in \mathbb{C}^n : \sqrt{zz^*} \leq r\}$  s konečným polomerom  $r$  taká, že  $V_n \subseteq B_r$ . Vzhľadom na to ako je množina  $V_n$  definovaná platí, že pre všetky vektory  $\sigma \in V_n$  je splnené Bochnerovo kritérium. Pre ľubovoľný vektor  $\sigma \in V_n$  platí, že matica  $A^{(n+1)} = Toepl(1, \sigma_1, \dots, \sigma_n)$  je kladne semi-definitná. Kedže matica  $A^{(n+1)}$  je kladne semi-definitná, musí spĺňať Vetu (1.7), z čoho vyplýva, že všetky hlavné minory  $A^{(n+1)}$  musia byť kladne semi-definitné. Z podmienky kladnej semi-definitnosti pre špecialne zvolené hlavné minory matice  $A^{(n+1)}$  tvaru:

$$\begin{pmatrix} 1 & \overline{\sigma_k} \\ \sigma_k & 1 \end{pmatrix},$$

dostaneme podmienku:

$$|\sigma_k|^2 \leq 1. \quad (\text{II})$$

Nerovnosť (II) platí pre  $k = 1, 2, \dots, n$ . Sčítaním nerovnosti (II) cez všetky  $k = 1, 2, \dots, n$  dostaneme:

$$\sigma\bar{\sigma} = \sum_{k=1}^n |\sigma_k|^2 \leq n \Leftrightarrow \sqrt{\sigma\bar{\sigma}} \leq \sqrt{n}. \quad (14)$$

Dostali sme, že norma ľubovoľného vektora  $\sigma \in V_n$  je menšia ako  $\sqrt{n}$  a teda množina  $V_n$  je určite podmnožinou  $B_{\sqrt{n}}$ , takže  $V_n$  je ohraničená.  $\square$

**Veta 5.2.** *Množina  $M_n$  je kompaktná.*

*Dôkaz.* Kedže  $M_n \subseteq \mathbb{R}^n$  stačí ukázať, že  $M_n$  je ohraničená a uzavretá. Najprv dokážeme uzavretosť množiny  $M_n$ . Dokážeme, že pre ľubovoľnú konvergentnú postupnosť vektorov  $a^{(k)}_{k=1}^\infty \subset M_n$  platí, že  $\lim_{k \rightarrow +\infty} a^{(k)} = \tilde{a}$  patrí do množiny  $M_n$ . Kedže platí  $M_n \subseteq \mathbb{R}^n$  tak platí:

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} a^{(k)} = \tilde{a} \Leftrightarrow \lim_{k \rightarrow +\infty} a_l^{(k)} = \tilde{a}_l, \quad \text{pre } l = 1, 2, \dots, n. \quad (\text{I})$$

Označme si  $a^{(k)}(x) = 1 + \sum_{l=1}^n (a_l^{(k)} \cos(lx))$ . Vieme, že  $a^{(k)}(x) \geq 0$  pre  $k = 1, 2, \dots$ . Treba ukázať, že platí  $\tilde{a}(x) \geq 0$ , z čoho dostaneme, že vektor  $\tilde{a} \in M_n$ . Využitím

vlastností limity pre súčet postupností a využitím (I) dostaneme, že pre ľubovoľné pevné  $x \in \mathbb{R}$  platí:

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} a^{(k)}(x) = \tilde{a}(x)$$

Využitím vety (1.4) dostávame, že  $\tilde{a}(x) \geq 0$  a teda  $\tilde{a} = \lim_{k \rightarrow +\infty} a^{(k)} \in M_n$ . Kedže platí:  $M_n \subseteq V_n$  využitím predchádzajúceho tvrdenia dostaneme, že  $M_n$  je tiež ohraničená.  $\square$

**Dôsledok 5.3.** *Z dôkazu vety(5.1) vidno, že pre všetky  $k = 1, 2, \dots$  platí:*

$$|\sigma_k|^2 \leq 1 \Leftrightarrow \sqrt{a_k^2 + b_k^2} \leq 2. \quad (\text{I}^*)$$

*Ľubovoľný normovaný Fourierov rad, ktorý nespĺňa (I<sup>\*</sup>) pre aspoň jedno  $k \in \mathbb{N}$  už nemôže byť nezáporný.*

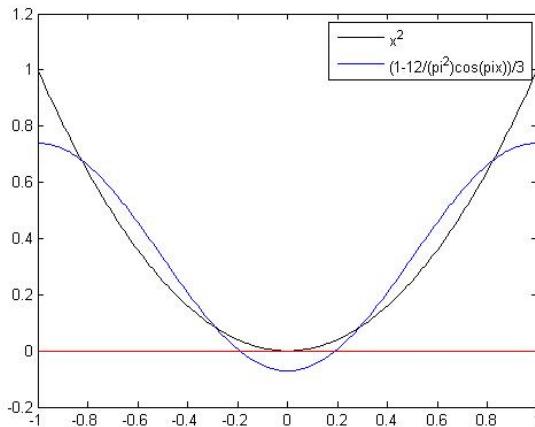
Kedže sme dokázali, že množina  $V_n$  je ohraničená a uzavretá, tak je kompaktná, kedže je podmnožinou v  $\mathbb{C}^n$ , a teda každá spojité funkcia na množine  $V_n$  nadobúda maximum a minimum. Obdobne, kedže  $M_n$  je kompaktná, tak každá spojité funkcia nadobúda na  $M_n$  svoje maximum a minimum. Správnou voľbou funkcií môžeme docieľiť, že jej maximum alebo minimum na množine  $M_n$  sa bude nadobúdať na hranici  $M_n$ .

Riešením úlohy

$$\begin{aligned} & \min_{F, a_1, a_2, \dots, a_n} f(a_1, a_2, \dots, a_n) \\ \text{s.t. } & \sum_{p=1}^n F_{p,p} = 1, \\ & \sum_{p=k+1}^n F_{p,p-k} = a_k, \quad \text{pre } k = 1, \dots, n-1, \\ & F \succeq 0, \quad F \in \mathcal{H}^n, \\ & a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}, \end{aligned} \quad (15)$$

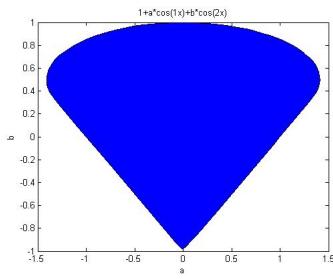
pre dostatočne veľa funkcií  $f_j$  sme schopní zistiť dostatočne veľa bodov na hranici  $M$ , a teda budeme môcť spraviť konvexný obal  $M_n$  a dostaneme značne presnú approximáciu tejto množiny. Pre prípad množiny  $M_2$  stačí použiť lineárne funkcie tvaru  $f(a_1, a_2) = c_1 a_1 + c_2 a_2$  kde  $c_1, c_2$  sú volené konštanty. Hlavná podmienka, ktorú by funkcie  $f_j(a_1, a_2, \dots, a_n)$  mali spĺňať je aby nemohli mať extrém vo vnútri množiny  $M_n$ , čo vo všeobecnosti znamená, že by nemali mať žiadny lokálny extrém. Vyvstávajú otázky, ako napríklad voliť funkcie pre vyššie  $n$ , alebo ako správne zvoliť funkcie ak by

sme chceli generovať body na hranici množiny  $V_n$ . Tieto otázky môžu byť predmetom ďalšieho hlbšieho skúmania. Ako sme už spomínali McLean-Woerdemanovo kritérium nemožno použiť pre nekonečné Fourierove rady, avšak mohli by sme ho použiť pre konečný súčet vyšetrovaného nekonečného radu, pre značne veľké  $n$  a potom rozhodnúť o nezápornosti vyšetrovaného radu. Tento postup nie je moc použiteľný. Mohlo by sa stať, že čiastočný súčet bude nezáporný no celkový rad nebude, alebo čiastočný súčet nebude nezáporný, ale celkový rad bude. Pre druhú možnosť uvedieme konkrétny prípad. Ak vezmeme rozvoj funkcie  $f(x) = x^2 = \frac{1}{3} \left( 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{12(-1)^n}{(\pi n)^2} \cos(\pi n x) \right)$  na intervale  $[-1, 1]$  vieme, že  $f(x) = x^2$  je nezáporná a teda aj jej Fourierov rozvoj bude nezáporný, ale ak by sme zvolili čiastočný súčet iba po  $n = 1$  dostaneme funkciu  $\frac{1}{3}(1 - \frac{12}{\pi^2} \cos(\pi x))$ , ktorá nie je nezáporná ako možno vidieť z Obr.8.

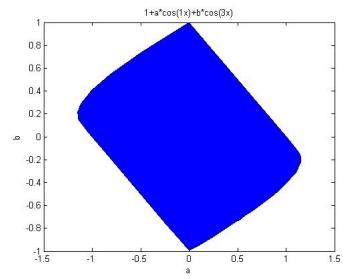


**Obr. 8:** Kontrapríklad rozšírenia kritéria pre funkciu  $f(x) = x^2$

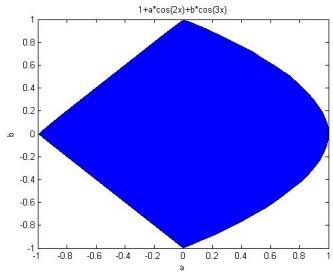
Avšak na základe dodatku (5.3) môžeme s určitosťou povedať, že ľubovoľný nekonečný normovaný Fourierov rad, ktorého aspoň jeden reálny koeficient je ostro väčší ako dva, už nemôže byť nezáporný. Na záver ešte uvedieme niekoľko odhadov množín  $M_n$ , definovaných vo Vete 4.1, a ich rezov, v grafickej podobe. Na obrázkoch Obr. 9-16, sú vykreslené množiny  $M_2, M_3$ , ako aj rezy množín  $M_3, M_4$ . Všetky tieto odhady boli vypočítané pomocou metódy založenej na McLean-Woerdemanovom kritériu a vygenerovania značne veľkého počtu dvojíc  $(a, b)$ .



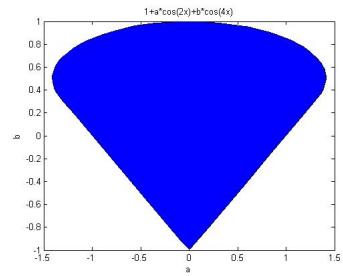
Obr. 9: Množina  $M_2$



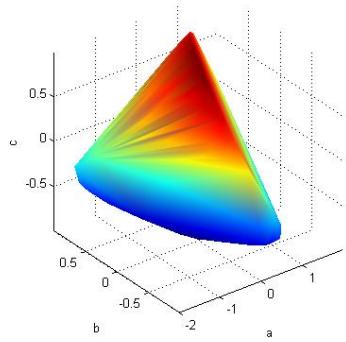
Obr. 10: Rez množinou  $M_3$ , ak  $a_2 = 0$



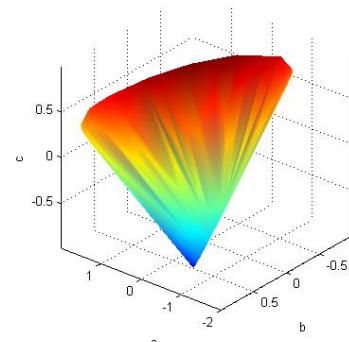
Obr. 11: Rez množinou  $M_3$ , ak  $a_1 = 0$



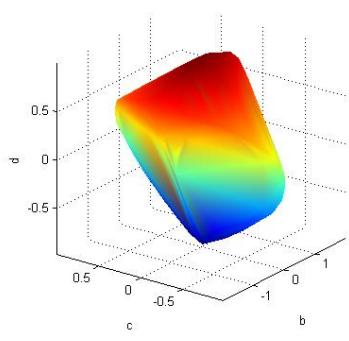
Obr. 12: Rez množinou  $M_4$ , ak  $a_1 = a_3 = 0$



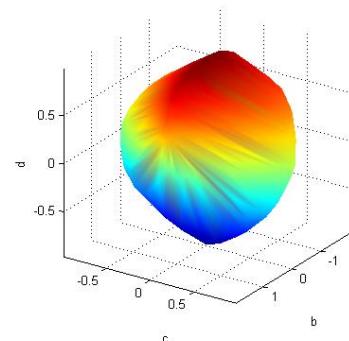
Obr. 13: Množina  $M_3$



Obr. 14: Množina  $M_3$



Obr. 15: Rez množinou  $M_4$ , ak  $a_1 = 0$



Obr. 16: Rez množinou  $M_4$ , ak  $a_1 = 0$

## Záver

V našej práci sme uviedli dve kritéria, ktoré na základe koeficientov rozhodnú o nezápornosti Fourierových radov. Ukázali sme v kapitolách (3),(4) na jednoduchých príkladoch, ako tieto kritéria použiť na zistenie celých množín koeficientov pre ktoré je Fourierov rad nezáporný. Taktiež sme ukázali ako sa ich použitie komplikuje pre zložitejšie príklady. Následne sme sa venovali v kapitole (5) ako tieto množiny numericky odhadnúť aj pomocou optimalizácie vhodných funkcií na množinách  $M_n$  a  $V_n$ . Pri tomto postupe ale vystala otázka ako voliť optimalizované funkcie. Táto otázka môže byť predmetom ďalšieho skúmania. V našej práci sme nespomenuli využitie a možnú aplikáciu kritérií nezápornosti. Touto témou sa zaobrajú ďalšie práce, napríklad využitím Bochnerovho kritéria sa zaoberá [2], z ktorej sme čerpali aj my pri písaní tejto práce. Ako ďalší príklad uvedieme články [13],[14], v ktorom je uvedená aplikácia a využitie McLean-Woerdemanovho kritéria. Naša práca by mohla byť prínosná čitateľom, ktorí sa snažia získať základ o vyšetrovaní Fourierových radov, pomocou ich koeficientov.

## Zoznam použitej literatúry

- [1] H.J. Bartsch: Matematické vzorce, SNTL-Nakladateľstvo technickej literatúry, Praha, 1983.
- [2] B. Dumitrescu, Positive Trigonometric Polynomials and Signal Processing Applications, Springer, Dordrecht, 2007.
- [3] M. Grant, S. Boyd. CVX: Matlab software for disciplined convex programming, version 2.0 beta. <http://cvxr.com/cvx>, September 2013.
- [4] M. Grant, S. Boyd. Graph implementations for nonsmooth convex programs, Recent Advances in Learning and Control (a tribute to M. Vidyasagar), V. Blondel, S. Boyd, and H. Kimura, editors, pages 95-110, Lecture Notes in Control and Information Sciences, Springer, 2008. [http://stanford.edu/~boyd/graph\\_dcp.html](http://stanford.edu/~boyd/graph_dcp.html).
- [5] . Grattan-Guinness, Joseph Fourier, 1768-1830, Londýn, 1972.
- [6] M. Hamala, M. Trnovská: Nelineárne programovanie, EPOS, Bratislava, 2013.
- [7] J. Herivel, Joseph Fourier. The Man and the Physicist, Oxford, 1975.
- [8] R.A. Horn, Ch.R. Johnson: Matrix analysis, Cambridge University Press, Cambridge 1985.
- [9] I. Kluvánek, L. Mišík, M. Švec: Matematika I, Slovenské vydavateľstvo technickej literatúry, Bratislava, 1959.
- [10] I. Kluvánek, L. Mišík, M. Švec: Matematika II, Slovenské vydavateľstvo technickej literatúry, Bratislava, 1961.
- [11] J.W. McLean, H.J. Woerdeman. Spectral factorizations and sums of squares representations via semidefinite programming. SIAM J. Matrix Anal. Appl., 23(3):646–655, 2001.
- [12] J. F. Sturm, Using SeDuMi 1.02, A Matlab toolbox for optimization over symmetric cones, Optimization Methods and Software 11 (1999), 625–653.

- [13] D. Sevcovic and M. Trnovska: Solution to the Inverse Wulff Problem by Means of the Enhanced Semidefinite Relaxation Method, Journal of Inverse and III-posed Problems, 2014, DOI:10.1515/jiip-2013-0069  
dostupné na internete (20.5.2014):  
<http://arxiv.org/abs/1402.5668>
- [14] D. Sevcovic and M. Trnovska: Application of the Enhanced Semidefinite Relaxation Method to Construction of the Optimal Anisotropy Function  
dostupné na internete (20.5.2014):  
<http://arxiv.org/abs/1405.4382>
- [15] K.C. Toh, M.J. Todd, and R.H. Tutuncu, SDPT3 — a Matlab software package for semidefinite programming, Optimization Methods and Software, 11 (1999), pp. 545–581.
- [16] R.H Tutuncu, K.C. Toh, and M.J. Todd, Solving semidefinite-quadratic-linear programs using SDPT3, Mathematical Programming Ser. B, 95 (2003), pp. 189–217.
- [17] P. Zlatoš: Lineárna algebra a geometria, Marenčin PT, Bratislava, 2011.
- [18] J. D. Zund, Salomon Bochner, American National Biography 2, Oxford, 1999, 89-90.
- [19] The MacTutor History of Mathematics archive, J. B. Fourier,  
dostupné na internete (11.2.2014):  
<http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Fourier.html>.
- [20] The MacTutor History of Mathematics archive, Salomon Bochner,  
dostupné na internete (11.2.2014):  
<http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/Biographies/Bochner.html>.

## Príloha A

```

function[a]=tester(sigma)
%Funkcia ktora urci ci konecny Fourierov rad s koeficientami sigma a sigma
%komplx zdruzene, je nezaporny
%sigma musi byt riadkovy vektor, a musi to byt vektor obsahujuci c_k,
%pre k=0,1,2,...,n nezaporne, z vyjadrenia radu cez e^(ikx)
%%%%%%%%%%%%%%%
[m,n]=size(sigma);
cvx_begin sdp quiet
%cvx_solver sdpt3 %moznost zmenit solver
cvx_solver sedumi
variable F(n,n) hermitian
minimize( 0 )
for k=1:n
    sum (diag(F,-k+1)) == sigma(1,k)
end
F>=0
cvx_end
a=cvx_status;
switch a
    case {'Solved'}
        a=1;%fprintf('Fourierou rad so zadanimi koeficientmi je nezaporny \n')
    case{'Infeasible'}
        a=0;%fprintf('Fourierou rad so zadanimi koeficientmi nie je nezaporny \n')
    case 'Failed'
        a=[];%warning('Program zlyhal \n')
end
end

```



```

%priklad1
cvx_begin sdp
cvx_solver sedumi
variable F(2,2) hermitian
variable a
maximize(a)
    sum (diag(F,0)) == 1
    sum(diag(F,-1)) == a/2
F>=0
cvx_end

```



```

function[a]= priklad2(k)
%pre k=1 budeme maximalizovat koeficient a
%pre k=2 budeme maximalizovat koeficient b
%pre k rozne od 1 alebo 2 funkcia nezbehne
cvx_begin sdp %quiet
cvx_solver sedumi
variable F(3,3) hermitian
variable a(2)
% Objective function
maximize(a(k,1))
    sum (diag(F,0)) == 1
    sum(diag(F,-1)) == a(1,1)/2
    sum(diag(F,-2)) == a(2,1)/2
F>=0
cvx_end
a=cvx_optval;
end

```



```

function [k,b]= fourier2(n,p)
%n je dlzka konecneho Fourierovo radu, alebo aj pocet koeficientov ak
%neratame sigma_0
%p je index koeficientu ktoreho normu chceme maximalizovat
% musi platit p<=n
%k je maximalna norma sigma_p
%b je vektor koeficientov pre ktorý sa nadobuda maximum
cvx_begin sdp quiet
cvx_solver sedumi
variable F(n+1,n+1) hermitian
variable b

```

```

variable a(n) complex
% Objective function
maximize(c)
    a(p,1)==c
    sum(diag(F,0)) == 1
    for i=1:n-1
        sum(diag(F,-i)) == a(i,1)/2
    end
F>=0
cvx_end
k=cvx_optval;
b=a;
end

```



Program ktorý vykreslí množinu koeficientov pre ktoré je rad  $1 + a_n \cos(nx) + a_k \cos(kx)$  nezáporný.

```

function=rezy(n,k,l)
%funkcia ktora vykresli mnozinu keoficientov pre ktore je rad:
% 1+a_n*cos(nx)+ a_k*cos(kx) nezáporny
%n index jedneho koeficientu
%k index druheho koeficientu
%l pocet vyhodnocovacich bodov
tic
a=-2+4*rand(1,1);
b=-2+4*rand(1,1);
sigma=ones(1,1);
sigma(:,n+1)=a./2;
sigma(:,k+1)=b./2;
a1=[];
b1=[];
j=[];
for i=1:l
    p=tester(sigma(i,:));
    if p==1
        j=[j;i];
    end
end
toc;
cas=toc/60
a1=a(j,1);
b1=b(j,1);
X=[a1,b1];
K=convhulln(X);
figure;
fill(a1(K),b1(K),'b')
title( sprintf('1+a*cos(%ix)+b*cos(%ix)',n,k))
end

```



Script ktorý odhaduje množinu  $M_2$  pomocou McLean-Woerdemanovo kritéria, cez generovanie bodov na hranici množiny:

```

b=[];
d=[];
tic
for i=-100:1:100
    c=i/100;
    cvx_begin sdp quiet
    cvx_solver sedumi
    variable F(3,3) hermitian
    variable a(2)
    % Objective function
    maximize(a(1,1)+c*a(2,1))
        sum(diag(F,0)) == 1
        sum(diag(F,-1)) == a(1,1)/2
        sum(diag(F,-2)) == a(2,1)/2
    F>=0
    cvx_end
    b=[b;a(2,1)];
    d=[d;a(1,1)];
end
for i=-100:1:100
    c=i/100;
    cvx_begin sdp quiet
    cvx_solver sedumi
    variable F(3,3) hermitian
    variable a(2)
    % Objective function
    maximize(-a(1,1)+c*a(2,1))
        sum(diag(F,0)) == 1
        sum(diag(F,-1)) == a(1,1)/2
        sum(diag(F,-2)) == a(2,1)/2
    F>=0
    cvx_end

```

```

b=[b;a(2,1)];
d=[d;a(1,1)];
end

for i=-100:1:100
    c=i/100;
cvx_begin sdp quiet
cvx_solver sedumi
variable F(3,3) hermitian
variable a(2)
% Objective function
maximize(c*a(1,1)+a(2,1))
    sum(diag(F,0)) == 1
    sum(diag(F,-1)) == a(1,1)/2
    sum(diag(F,-2)) == a(2,1)/2
F>=0
cvx_end
b=[b;a(2,1)];
d=[d;a(1,1)];
end

for i=-100:1:100
    c=i/100;
cvx_begin sdp quiet
cvx_solver sedumi
variable F(3,3) hermitian
variable a(2)
% Objective function
maximize(c*a(1,1)-a(2,1))
    sum(diag(F,0)) == 1
    sum(diag(F,-1)) == a(1,1)/2
    sum(diag(F,-2)) == a(2,1)/2
F>=0
cvx_end
b=[b;a(2,1)];
d=[d;a(1,1)];
end
toc
X=[d,b];
K=convhulln(X);
figure;
fill(d(K),b(K),'b')
axis('tight')

```

